目　錄

第十章 平面座標

本章介紹座標來表示點的位置關係，以及幾何圖形在座標平面上的一些性質。

10.1節　直角座標

定義 10.1-1 數線與點座標

在直線上取一點，設為原點 O，以 O 點為中心，箭頭方向為正向，箭頭反方向為負向，此直線稱為數線。點座標為此點距離原點 O 多少單位長度的大小。

如圖 10.1-1，A 點在原點 O 的右方 3 個單位，A 點座標為 3，記為 A(3)；B 點在原點 O 的左方 2 個單位，B 點座標為－2，記為 B(－2)。

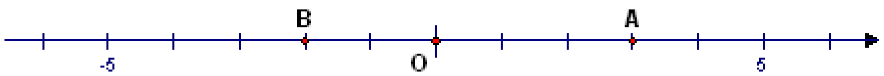

圖 10.1-1

例題 10.1-1

在圖 10.1-2 的數線上標出 P(－5)，Q(2)，R(3.5)三點的位置。

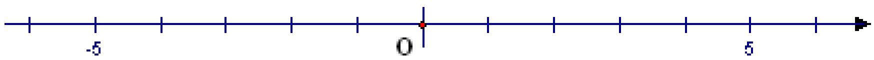

圖 10.1-2

想法：根據數線與點座標的定義

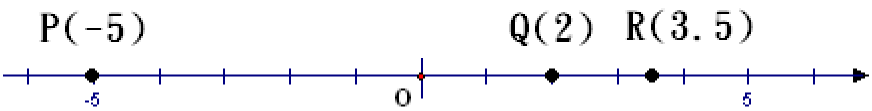

圖 10.1-2(a)

解：

敘述	理由
(1) 如圖 10.1-2(a)所示 P 點座標為 －5，記作 P(－5) Q 點座標為 2，記作 Q(2) R 點座標為 3.5，記作 R(3.5)	 P 點在原點 O 左方 5 個單位 Q 點在原點 O 右方 2 個單位 R 點在原點 O 右方 3.5 個單位

例題 10.1-2

如圖 10.1-3，數線上有 A、B、C、D 四個點，其點座標分別為 A(－5)、B(－2)、C(1)、D(4)，則$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{AD}$、$\overline{BC}$、$\overline{BD}$、$\overline{CD}$之值各為何？

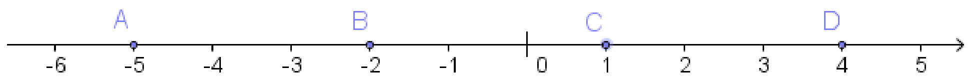

圖 10.1-3

想法：線段長度就是兩點間的距離

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}=(-2)-(-5)=3$ 單位	線段長度就是兩點間的距離 & 已知 A(－5)、B(－2)
(2) $\overline{AC}=1-(-5)=6$ 單位	線段長度就是兩點間的距離 & 已知 A(－5)、C(1)
(3) $\overline{AD}=4-(-5)=9$ 單位	線段長度就是兩點間的距離 & 已知 A(－5)、D(4)
(4) $\overline{BC}=1-(-2)=3$ 單位	線段長度就是兩點間的距離 & 已知 B(－2)、C(1)
(5) $\overline{BD}=4-(-2)=6$ 單位	線段長度就是兩點間的距離 & 已知 B(－2)、D(4)
(6) $\overline{CD}=4-1=3$ 單位	線段長度就是兩點間的距離 & 已知 C(1)、D(4)

例題 10.1-3

如圖 10.1-4，一數線以右方為正向。在此數線上，A 點所表示的數為 2，從 A 點先向右移動 3 單位，再向左移動 6 單位到達 B 點，則 B 點所表示的數為多少？

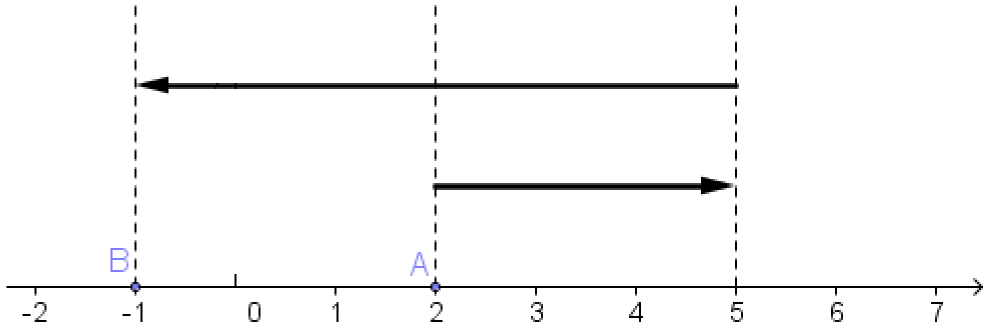

圖 10.1-4

想法：線段長度就是兩點間的距離

解：

敘述	理由
(1) 如圖 10.1-4 所示，B 點所表示的數 ＝2＋3－6＝－1	已知一數線以右方為正向。A 點所表示的數為 2，從 A 點先向右移動 3 單位，再向左移動 6 單位到達 B 點 ＆ 線段長度就是兩點間的距離

定義 10.1-2 直角座標平面與平面上之點座標

平面上畫兩相互垂直的數線，兩線交點為原點 O，水平的數線叫 x 軸，箭頭方向為正，箭頭反方向為負，垂直的數線叫做 y 軸，箭頭方向為正，箭頭反方向為負，這個平面稱為直角座標平面，簡稱座標平面。

P 點的座標以 P(a,b)表示，a 為 P 點與原點 O 的水平方向距離，叫做 P 點的 x 座標或橫座標；b 為 P 點與原點 O 的垂直方向距離，叫做 P 點的 y 座標或縱座標。

如圖 10.1-5 中，A(－3,1)表示 A 點在原點 O 的左方 3 個單位，上方 1 個單位的位置， B(1,2) 表示 B 點在原點 O 的右方 1 個單位，上方 2 個單位的位置，C(2,-3) 表示 C 點在原點 O 的右方 2 個單位，下方 3 個單位的位置。

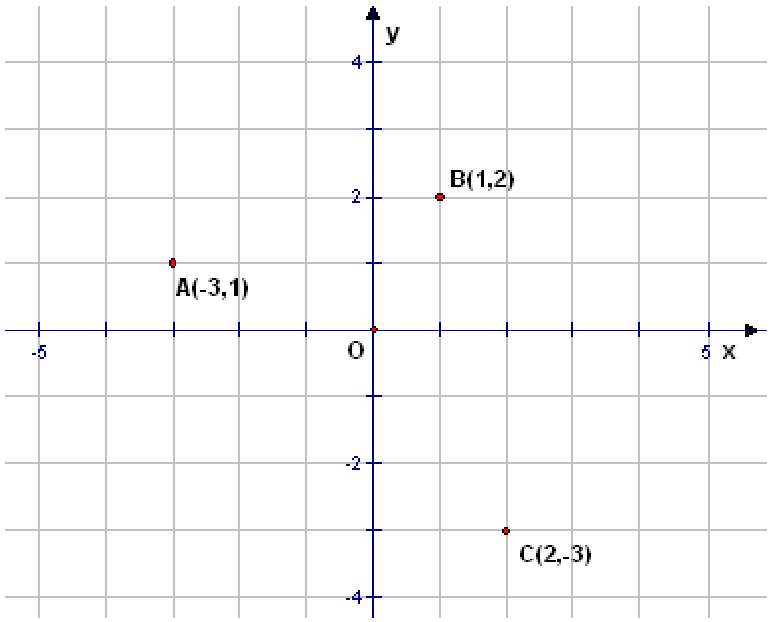

圖 10.1-5

例題 10.1-4

如圖 10.1-6，請標示出座標平面上 O、A、B、C、D、E、F、G、H 九點的座標。

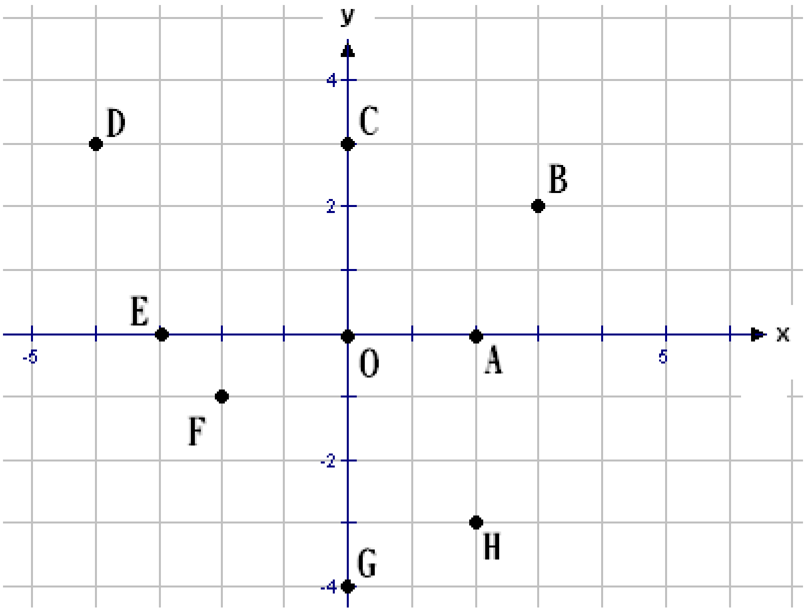

圖 10.1-6

想法：根據直角座標平面點的定義

解：

敘述	理由
(1) O 點座標以 O(0,0)表示	O 點位於 x 軸原點 0 上，y 軸原點 0 上
(2) A 點座標以 A(2,0)表示	A 點位於 x 軸原點右方 2 個單位，y 軸原點 0 上
(3) B 點座標以 B(3,2)表示	B 點位於 x 軸原點右方 3 個單位，y 軸原點上方 2 個單位
(4) C 點座標以 C(0,3)表示	C 點位於 x 軸原點 0 上，y 軸原點上方 3 個單位
(5) D 點座標以 D(－4,3)表示	D 點位於 x 軸原點左方 4 個單位，y 軸原點上方 3 個單位
(6) E 點座標以 E(－3,0)表示	E 點位於 x 軸原點左方 3 個單位，y 軸原點 0 上
(7) F 點座標以 F(－2,－1)表示	F 點位於 x 軸原點左方 2 個單位，y 軸原點下方 1 個單位
(8) G 點座標以 G(0,－4)表示	G 點位於 x 軸原點 0 上，y 軸原點下方 4 個單位
(9) H 點座標以 H(2,－3) 表示	H 點位於 x 軸原點右方 2 個單位，y 軸原點下方 3 個單位

例題 10.1-5

如圖 10.1-7，請畫一直角座標平面，並在其上標示 A(3,5)、B(－2,－3)、C(3,0)、D(－3,3)、E(1,－4)、F(0,－2)、G(－4,0)、H(0,3)各點的位置。

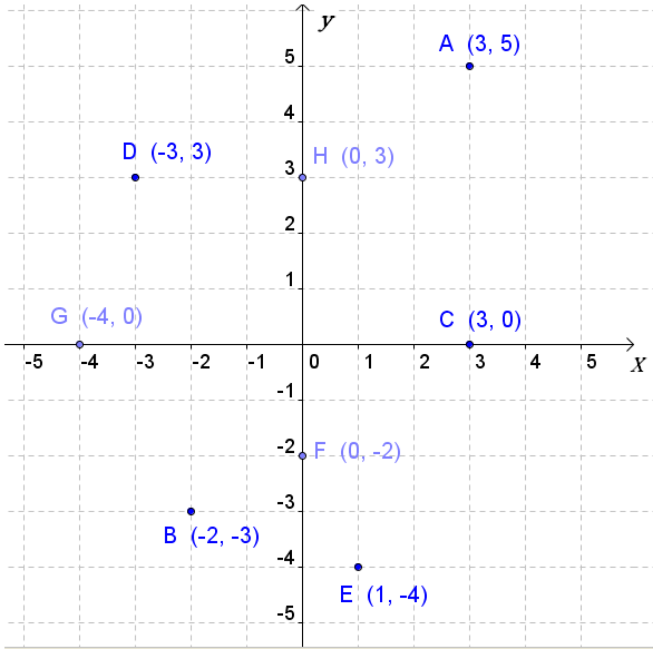

圖 10.1-7

想法：根據直角座標平面點的定義

解：

敘述	理由
(1) A(3,5)位置如圖 10.1-7	A 點位於 x 軸原點右方 3 個單位，y 軸原點上方 5 個單位
(2) B(－2,－3)位置如圖 10.1-7	B 點位於 x 軸原點左方 2 個單位，y 軸原點下方 3 個單位
(3) C(3,0)位置如圖 10.1-7	C 點位於 x 軸原點右方 3 個單位，y 軸原點 0 上
(4) D(－3,3)位置如圖 10.1-7	D 點位於 x 軸原點左方 3 個單位，y 軸原點上方 3 個單位
(5) E(1,－4)位置如圖 10.1-7	E 點位於 x 軸原點右方 1 個單位，y 軸原點下方 4 個單位
(6) F(0,－2)位置如圖 10.1-7	F 點位於 x 軸原點 0 上，y 軸原點下方 2 個單位
(7) G(－4,0)位置如圖 10.1-7	G 點位於 x 軸原點左方 4 個單位，y 軸原點 0 上
(8) H(0,3)位置如圖 10.1-7	H 點位於 x 軸原點 0 上，y 軸原點上方 3 個單位

例題 10.1-6

如圖 10.1-8，座標平面上有 A、B、C、D 四個點，且各點座標分別為 A(4,3)、B(－2,4)、C(－4,－2)、D(3,－4)，則各點與兩座標軸的距離分別為何？

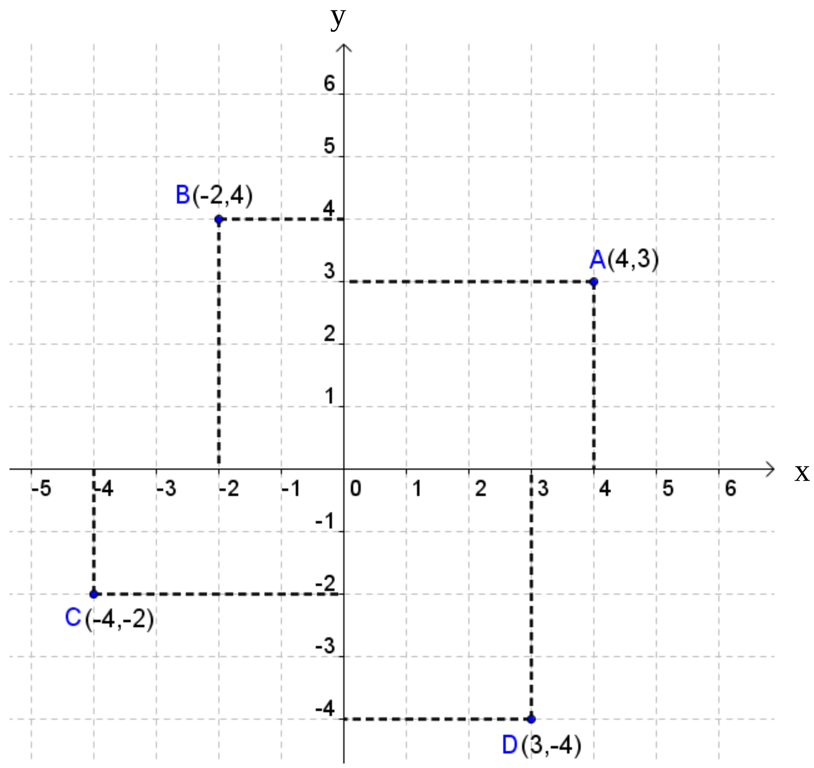

圖 10.1-8

想法：(1) 根據直角座標平面點的定義

(2) 線段長度就是兩點間的距離

解：

敘述	理由
(1) A 點到 x 軸的距離為 3 單位、A 點到 y 軸的距離為 4 單位；	已知 A(4,3) & A 點位於 x 軸上方 3 個單位，y 軸右方 4 個單位
(2) B 點到 x 軸的距離為 4 單位、B 點到 y 軸的距離為 2 單位；	已知 B(－2,4) & B 點位於 x 軸上方 4 個單位，y 軸左方 2 個單位
(3) C 點到 x 軸的距離為 2 單位、C 點到 y 軸的距離為 4 單位；	已知 C(－4,－2) & C 點位於 x 軸下方 2 個單位，y 軸左方 4 個單位
(4) D 點到 x 軸的距離為 4 單位、D 點到 y 軸的距離為 3 單位。	已知 D(3,－4) & D 點位於 x 軸下方 4 個單位，y 軸右方 3 個單位

例題 10.1-7

如圖 10.1-9，直角座標平面上有一矩形 ABCD，已知其四個頂點座標分別為 A(4,3)、B(−3,3)、C(−3,−2)、D(4,−2)，則$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$之值各為何？

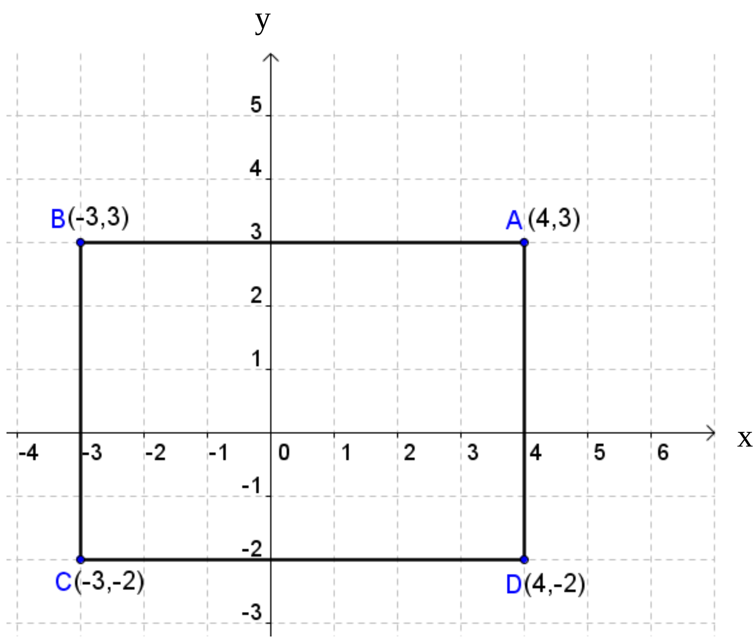

圖 10.1-9

想法：(1) 根據直角座標平面點的定義

(2) 線段長度就是兩點間的距離

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}=4-(-3)=7$ 單位	已知 A(4,3)、B(−3,3) & $\overline{AB}$為 A、B 兩點 x 座標的距離
(2) $\overline{BC}=3-(-2)=5$ 單位	已知 B(−3,3)、C(−3,−2) & $\overline{BC}$為 B、C 兩點 y 座標的距離
(3) $\overline{CD}=4-(-3)=7$ 單位	已知 C(−3,−2)、D(4,−2) & $\overline{CD}$為 C、D 兩點 x 座標的距離
(4) $\overline{DA}=3-(-2)=5$ 單位	已知 D(4,−2)、A(4,3) & $\overline{DA}$為 D、A 兩點 y 座標的距離

例題 10.1-8

如圖 10.1-10，直角座標平面上有一點 A(3,4)，若自 A 點出發，向左 7 個單位到達 B 點，再向下 6 個單位到達 C 點，接著向右 5 個單位到達 D 點，最後向上 4 個單位到達 E 點，則 B、C、D、E 各點的座標為何？

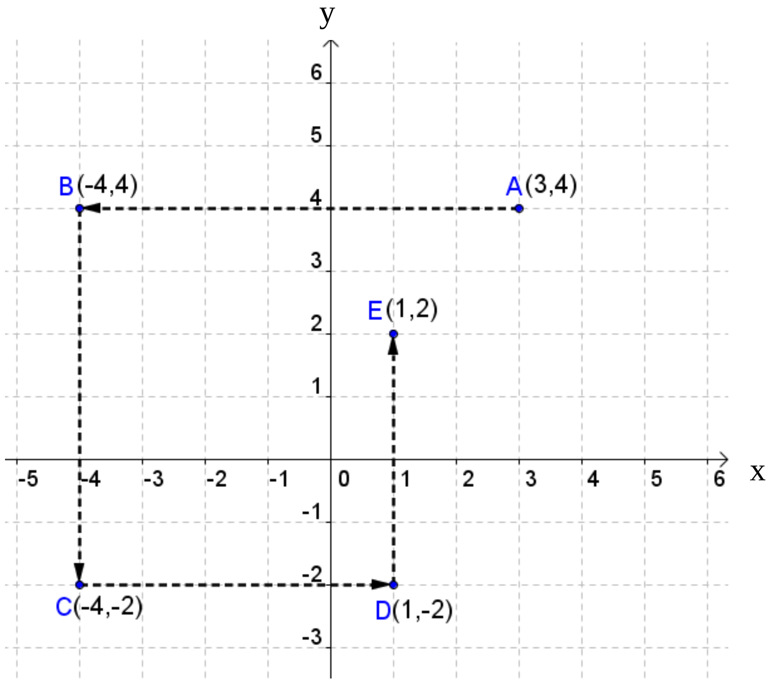

圖 10.1-10

想法：(1) 根據直角座標平面點的定義

(2) 線段長度就是兩點間的距離

解：

敘述	理由
(1) B 點座標為(−4,4)	已知 A(3,4) & 自 A 點出發，向左 7 個單位到達 B 點，B 點 x 座標為 3−7＝−4，B 點 y 座標仍為 4
(2) C 點座標為(−4,−2)	由(1) B(−4,4) & 自 B 點出發，向下 6 個單位到達 C 點，C 點 x 座標仍為−4，C 點 y 座標為 4−6＝−2
(3) D 點座標為(1,−2)	由(2) C(−4,−2) & 自 C 點出發，向右 5 個單位到達 D 點，D 點 x 座標為−4＋5＝1，D 點 y 座標仍為−2
(4) E 點座標為(1,2)	由(3) D(1,−2) & 自 D 點出發，向上 4 個單位到達 E 點，E 點 x 座標仍為 1，E 點 y 座標為−2＋4＝2

定義 10.1-3 象限

直角座標平面被 x 軸和 y 軸分成四個區域，這四個區域為四個象限，分別為：

第一象限：點 P(a,b)，a＞0 且 b＞0；

第二象限：點 P(a,b)，a＜0 且 b＞0；

第三象限：點 P(a,b)，a＜0 且 b＜0；

第四象限：點 P(a,b)，a＞0 且 b＜0；

x 軸上： 點 P(a,b)，b＝0；

y 軸上： 點 P(a,b)，a＝0。

如圖 10.1-11 所示，直角座標平面依逆時針方向，右上方為第一象限，左上方為第二象限，左下方為第三象限，右下方為第四象限，x 軸與 y 軸上的點不屬於任何一象限，。

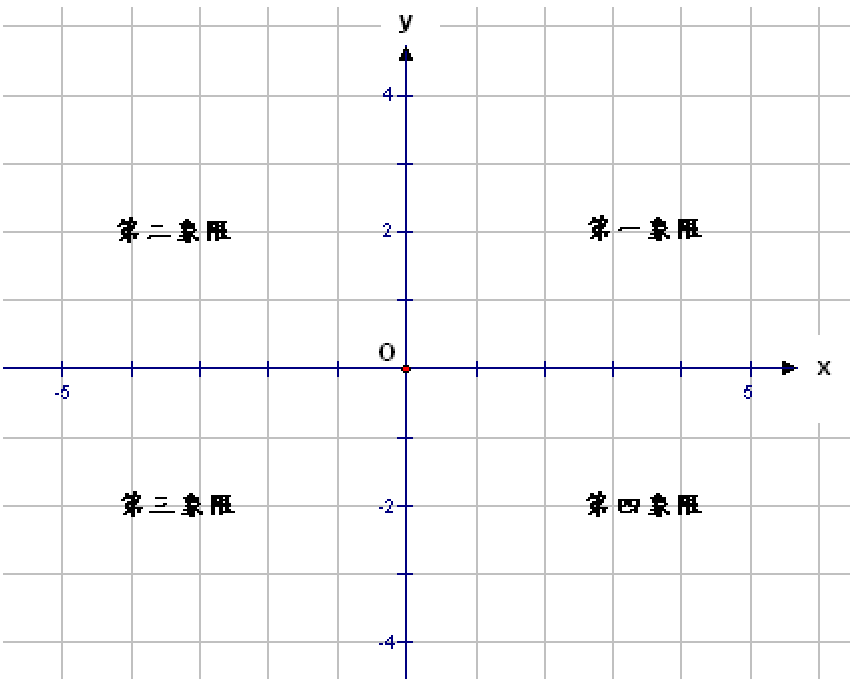

圖 10.1-11

例題 10.1-9

如圖 10.1-12，請判斷 P(－1,4)、Q(－2,－3)、R(3,－1)、S(2, 3)、T(0,1)、U(0,－2)、V(4,0)、W(－4, 0)各點屬於那一象限。

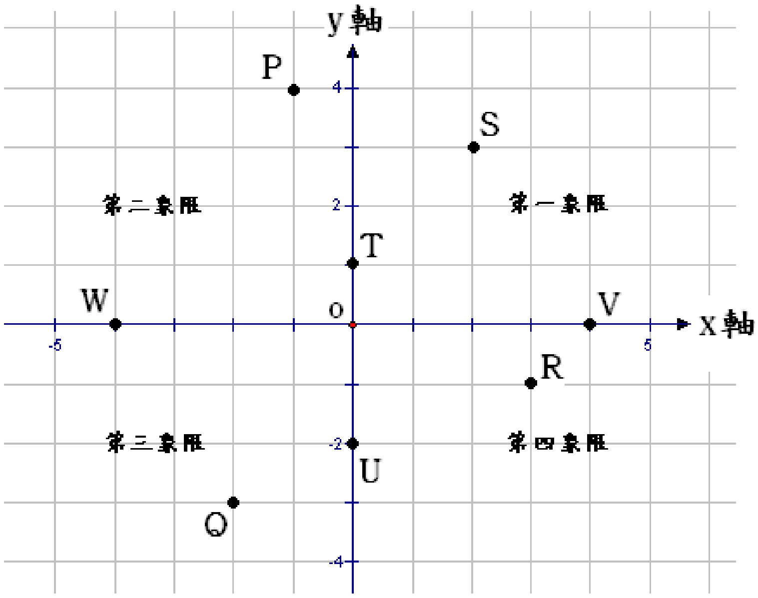

圖 10.1-12

想法：根據直角座標平面象限的定義

解：

敘述	理由
(1) P(－1,4)位於第二象限	根據直角座標平面象限的定義
(2) Q(－2,－3)位於第三象限	根據直角座標平面象限的定義
(3) R(3,－1)位於第四象限	根據直角座標平面象限的定義
(4) S(2, 3)位於第一象限	根據直角座標平面象限的定義
(5) T(0,1)在 y 軸上	根據直角座標平面象限的定義
(6) U(0,－2)在 y 軸上	根據直角座標平面象限的定義
(7) V(4,0)在 x 軸上	根據直角座標平面象限的定義
(8) W(－4, 0)在 x 軸上	根據直角座標平面象限的定義

接下來，讓我們利用直角座標平面的基本觀念，搭配上先前所學平行四邊形的性質，來作以下例題 10.1-10~例題 10.1-12。

例題 10.1-10

如圖 10.1-13，已知四邊形 ABCD 為平行四邊形，已知其中三頂點的座標分別為 A(3,4)、B(1,1)、C(6,1)，則平行四邊形 ABCD 的第四個頂點 D 座標為何？

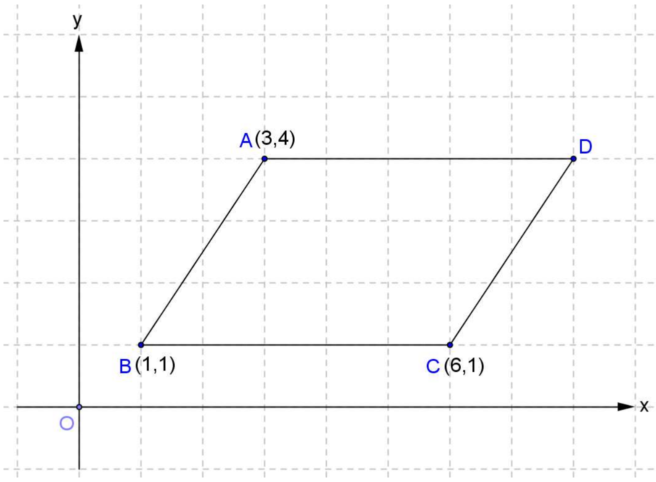

圖 10.1-13

想法：平行四邊形對邊等長

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AD}=\overline{BC}$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 平行四邊形對邊等長
(2) $\overline{BC}=6-1=5$	已知 B(1,1)、C(6,1) & $\overline{BC}$為 B、C 兩點 x 座標的距離
(3) $\overline{AD}=5$	由(1) & (2) 遞移律
(4) D 點 x 座標為 3＋5＝8 D 點 y 座標為 4	由(3) $\overline{AD}=5$ & 已知 A(3,4) & D 點與 A 點 y 座標相同
(5) 所以 D 點座標為(8,4)	由(4) 已證

例題 10.1-11

如圖 10.1-14，已知四邊形 ABCD 為平行四邊形，四頂點的座標分別為 A(3,4)、B(1,1)、C(6,1)、D(8,4)，則平行四邊形 ABCD 的面積為何？

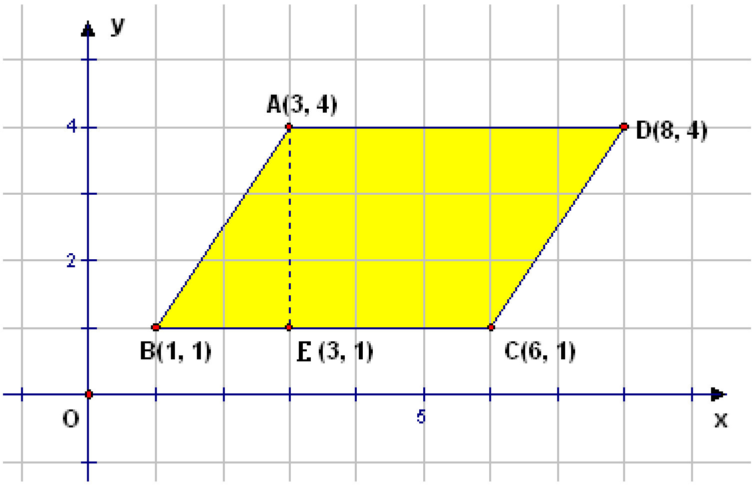

圖 10.1-14

想法：平行四邊形面積為底與高之乘積

解：

敘述	理由
(1) 在直角座標平面上畫出此平行四邊形 ABCD，過 A 點作垂直$\overline{BC}$的直線交$\overline{BC}$於 E 點，如圖 10.1-14 所示，則 E 點座標為(3,1)	根據已知四邊形 ABCD 為平行四邊形，四頂點的座標分別為 A(3,4)、B(1,1)、C(6,1)、D(8,4)作圖 & 過直線外一點垂直線作圖
(2) $\overline{BC}$為平行四邊形 ABCD 的底，$\overline{AE}$為平行四邊形 ABCD 的高	由(1) 過 A 點作垂直$\overline{BC}$的直線交$\overline{BC}$於 E 點，則$\overline{AE}\perp\overline{BC}$
(3) $\overline{BC}=6-1=5$	已知 B(1,1)、C(6,1) & $\overline{BC}$為 B、C 兩點 x 座標的距離
$\overline{AE}=4-1=3$	已知 A(3,4) & (1) E(3,1) $\overline{AE}$為 A、E 兩點 y 座標的距離
(4) 平行四邊形 ABCD 面積 $=\overline{BC}\times\overline{AE}$ $=5\times3$ $=15$ 平方單位	平行四邊形面積為底與高之乘積 & (3) 平行四邊形 ABCD 的底$\overline{BC}=5$、平行四邊形 ABCD 的高$\overline{AE}=3$

例題 10.1-12

如圖 10.1-15，已知座標平面上有一四邊形 ABCD，且此四邊形的頂點座標分別為 A(－2,2)、B(1,4)、C(5,3)、D(3,－1)，則此四邊形的面積為何？

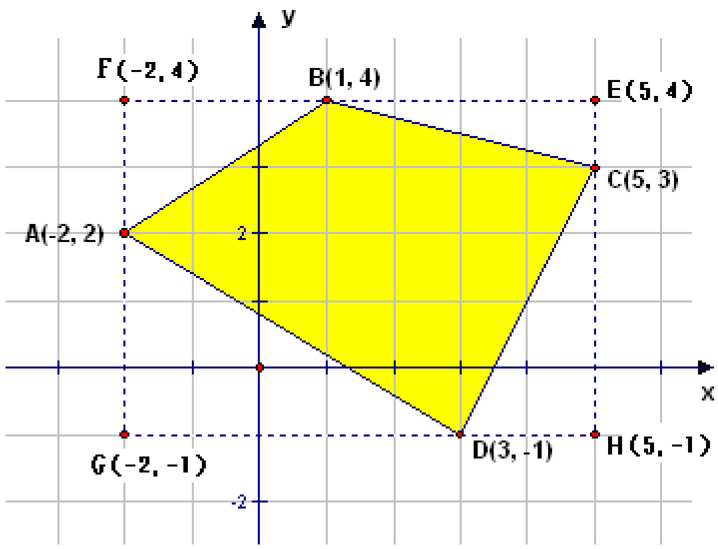

圖 10.1-15

想法：四邊形 ABCD 面積＝長方形 EFGH 的面積 －△AGD 面積 －△DHC 面積 －△CEB 面積 －△BFA 面積

解：

敘述	理由
(1) 在直角座標平面上畫出此四邊形 ABCD，過 A 點作平行 y 軸的直線、過 B 點作平行 x 軸的直線、過 C 點作平行 y 軸的直線、過 D 點作平行 x 軸的直線，四直線分別相交於 E、F、G、H 四點，如圖 10.1-15 所示，則 EFGH 為長方形，且 E 點座標為(5,4)、F 點座標為(－2,4)、G 點座標為(－2,－1)、H 點座標為(5,－1)	過直線外一點平行線作圖 & 直角座標平面的 x 軸與 y 軸相互垂直，因此和 x 軸平行的兩直線，與和 y 軸平行的兩直線互相垂直，所以四邊形 EFGH 為長方形，且已知 A(－2,2)、B(1,4)、C(5,3)、D(3,－1)，故長方形四頂點座標分別為 E(5,4)、F(－2,4)、G(－2,－1)、H(5,－1)
(2) 長方形 EFGH 之長$\overline{GH}$＝5－(－2)＝7	由(1) G(－2,－1)、H(5,－1) & $\overline{GH}$為 G、H 兩點 x 座標的距離
長方形 EFGH 之寬$\overline{GF}$＝4－(－1)＝5	由(1) G(－2,－1)、F(－2,4) & $\overline{GF}$為 G、F 兩點 y 座標的距離
(3) 長方形 EFGH 的面積＝$\overline{GH}$×$\overline{GF}$＝7×5＝35 平方單位	長方形面積為長與寬之乘積 & (2) $\overline{GH}$＝7、$\overline{GF}$＝5

(4) $\angle E=\angle F=\angle G=\angle H=90°$	由(1)　EFGH 為長方形 & 長方形四個內角均為 90°
(5) △CEB、△BFA、△AGD、△DHC 皆為直角三角形	由(4)　$\angle E=\angle F=\angle G=\angle H=90°$
(6) $\overline{BE}$為△CEB 的底、$\overline{CE}$為△CEB 的高 △CEB 的底$\overline{BE}$＝5－1＝4 △CEB 的高$\overline{CE}$＝4－3＝1	由(5)　△CEB 為直角三角形 & 由(1) E(5,4) & 已知 B(1,4) & $\overline{BE}$為 B、E 兩點 x 座標的距離 由(1) E(5,4) & 已知 C(5,3) & $\overline{CE}$為 C、E 兩點 y 座標的距離
(7) △CEB 面積＝(4×1)÷2＝2 平方單位	三角形面積為底與高乘積的一半 & (6) $\overline{BE}$＝4、$\overline{CE}$＝1
(8) $\overline{BF}$為△BFA 的底、$\overline{AF}$為△BFA 的高 △BFA 的底$\overline{BF}$＝1－(－2)＝3 △BFA 的高$\overline{AF}$＝4－2＝2	由(5)　△BFA 為直角三角形 & 由(1) F(－2,4) & 已知 B(1,4) & $\overline{BF}$為 B、F 兩點 x 座標的距離 由(1) F(－2,4) & 已知 A(－2,2) & $\overline{AF}$為 A、F 兩點 y 座標的距離
(9) △BFA 面積＝(3×2)÷2＝3 平方單位	三角形面積為底與高乘積的一半 & (8) $\overline{BF}$＝3、$\overline{AF}$＝2
(10) $\overline{DG}$為△AGD 的底、$\overline{AG}$為△AGD 的高 △AGD 的底$\overline{DG}$＝3－(－2)＝5 △AGD 的高$\overline{AG}$＝2－(－1)＝3	由(5)　△AGD 為直角三角形 & 由(1) G(－2,－1) &已知 D(3,－1) & $\overline{DG}$為 D、G 兩點 x 座標的距離 由(1) G(－2,－1) &已知 A(－2,2) & $\overline{AG}$為 A、G 兩點 y 座標的距離
(11) △AGD 面積＝(5×3)÷2＝7.5 平方單位	三角形面積為底與高乘積的一半 & (10) $\overline{DG}$＝5、$\overline{AG}$＝3
(12) $\overline{DH}$為△DHC 的底、$\overline{CH}$為△DHC 的高 △DHC 的底$\overline{DH}$＝5－3＝2 △DHC 的高$\overline{CH}$＝3－(－1)＝4	由(5)　△DHC 為直角三角形 & 由(1) H(5,－1) & 已知 D(3,－1) & $\overline{DH}$為 D、H 兩點 x 座標的距離 由(1) H(5,－1) & 已知 C(5,3) & $\overline{CH}$為 C、H 兩點 y 座標的距離
(13) △DHC 面積＝(2×4)÷2＝4 平方單位	三角形面積為底與高乘積的一半 & (12) $\overline{DH}$＝2、$\overline{CH}$＝4

(14) 長方形 EFGH 的面積 ＝四邊形 ABCD 面積＋△AGD 面積＋ △DHC 面積＋△CEB 面積＋△BFA 面積	如圖 10.1-15 所示，全量等於分量之和
(15) 四邊形 ABCD 面積 ＝長方形 EFGH 的面積－△AGD 面積－ △DHC 面積－△CEB 面積－△BFA 面積 ＝(35－7.5－4－2－3) 平方單位 ＝18.5 平方單位	由(14) 等量減法公理 & (3) 長方形 EFGH 面積＝35 平方單位 (7) △CEB 面積＝2 平方單位、 (9) △BFA 面積＝3 平方單位、 (11) △AGD 面積＝7.5 平方單位、 (13) △DHC 面積＝4 平方單位

習題 10.1

習題 10.1-1

在圖 10.1-16 的數線上標出 P(－6)，Q(－1.5)，R(3)三點的位置。

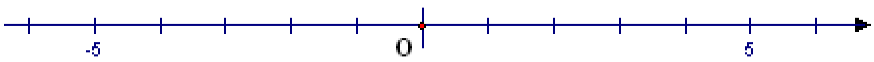

圖 10.1-16

習題 10.1-2

如圖 10.1-17，數線上有 A、B、C、D 四個點，其點座標分別為 A(－6)、B(－3)、C(2)、D(5)，則$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{AD}$、$\overline{BC}$、$\overline{BD}$、$\overline{CD}$之值各為何？

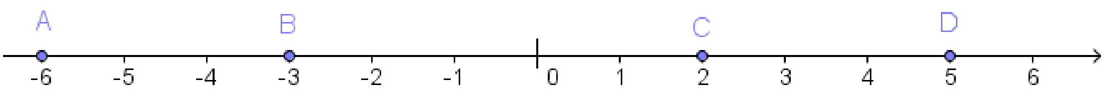

圖 10.1-17

習題 10.1-3

一數線以右方為正向。在此數線上，A 點所表示的數為－2，從 A 點先向右移動 4 單位，再向左移動 6 單位到達 B 點，則 B 點所表示的數為多少？

習題 10.1-4

如圖 10.1-18，請標示出座標平面上 O、A、B、C、D、E、F、G、H 九點的座標，並判斷各點所在的位置屬於哪一象限。

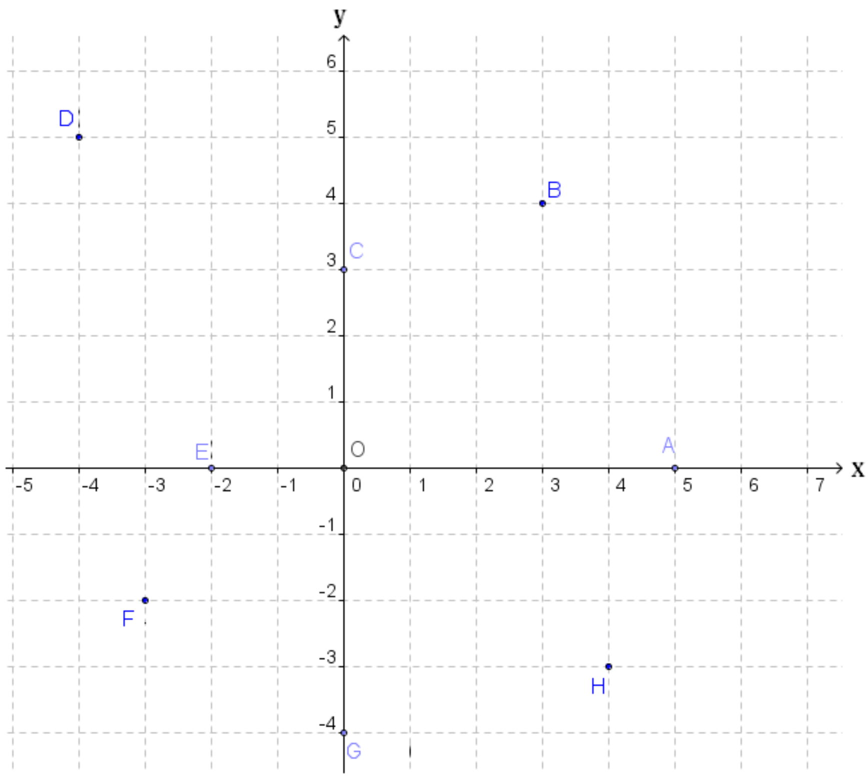

圖 10.1-18

習題 10.1-5

座標平面上有 A、B、C、D 四個點，且各點座標分別為 A(3,4)、B(−4,5)、C(−3,−2)、D(4,−3)，則各點與兩座標軸的距離分別為何？

習題 10.1-6

直角座標平面上有一矩形 ABCD，已知其四個頂點座標分別為 A(5,2)、B(−2,2)、C(−2,−4)、D(5,−4)，則$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$之值各為何？

習題 10.1-7

直角座標平面上有一點 A(5,3)，若自 A 點出發，向下 6 個單位到達 B 點，再向左 9 個單位到達 C 點，接著向上 8 個單位到達 D 點，接著向右 6 個單位到達 E 點，最後向下 4 個單位到達 F 點，則 B、C、D、E、F 各點的座標為何？

習題 10.1-8

已知四邊形 ABCD 為平行四邊形，已知其中三頂點的座標分別為 A(3,4)、B(－2,4)、C(－4,－2)，則平行四邊形 ABCD 另一個頂點 D 的座標為何？

習題 10.1-9

已知四邊形 ABCD 為平行四邊形，四頂點的座標分別為 A(3,4)、B(－2,4)、C(－4,－2)、D(1,－2)，則平行四邊形 ABCD 的面積為何？

習題 10.1-10

已知座標平面上有一四邊形 ABCD，且此四邊形的頂點座標分別為 A(－3,2)、B(1,5)、C(4,－3)、D(－1,－4)，則此四邊形的面積為何？

10.2節　座標平面與幾何性質

本節我將敘述一些座標平面與幾何的相關性，利用幾何性質求座標，利用座標平面來證明幾何定理等。

定理 10.2-1 座標平面上兩點距離公式

座標平面上 A、B 兩點，A 點座標為(x_1, y_1)，B 點座標為(x_2, y_2)，則 A、B 兩點的距離 $d = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ **。　(即** $\overline{AB} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ **)**

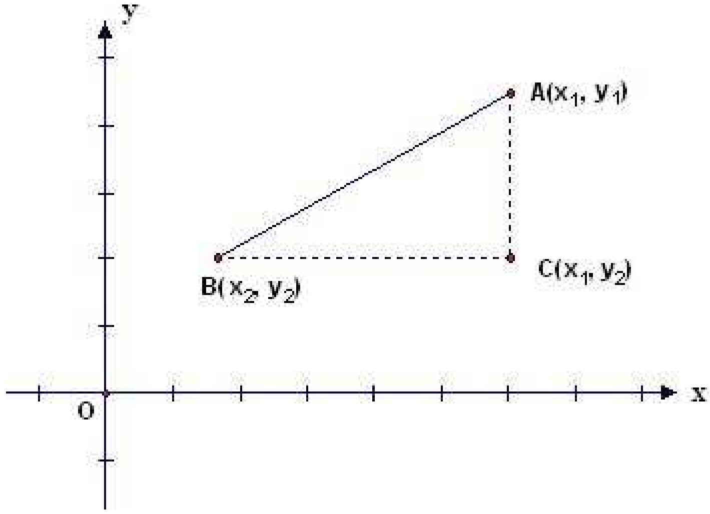

圖 10.2-1

已知： 如圖 10.2-1，座標平面上 A 點坐標為(x_1, y_1)，B 點座標為(x_2, y_2)。

求證： A、B 兩點的距離 $d = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 。

(即 $\overline{AB} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$)

想法： 利用畢氏定理。

證明：

敘述	理由
(1) 過 A 點作平行 y 軸的直線，過 B 作平行 x 軸的直線，兩直線交於 C 點，如圖 10.2-1 所示，則 C 點座標為(x_1, y_2)，且 $\overline{AC} \perp \overline{BC}$	過線外一點的平行線作圖 & 已知 A 點坐標為(x_1, y_1)，B 點座標為(x_2, y_2) & $\overline{AC}$ 平行 y 軸，$\overline{BC}$ 平行 x 軸，兩坐標軸相互垂直

(2) $\overline{AC} = \|y_1 - y_2\|$	已知 A(x_1, y_1) & (1) C(x_1, y_2) & $\overline{AC}$為 A、C 兩點 y 座標的距離
(3) $\overline{BC} = \|x_1 - x_2\|$	已知 B(x_2, y_2) & (1) C(x_1, y_2) & $\overline{BC}$為 B、C 兩點 x 座標的距離
(4) △ABC 為直角三角形 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$	由(1) $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ & 畢氏定理
(5) $\overline{AB}^2 = \|x_1 - x_2\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2$	由(4) & (2) $\overline{AC} = y_1 - y_2$、(3) $\overline{BC} = x_1 - x_2$
(6) $\overline{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ 或 $\overline{AB} = -\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$	由(5) 求平方根
(7) 所以$\overline{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$	由(6) & $\overline{AB}$為線段長度必大於 0

Q. E. D.

例題 10.2-1

如圖 10.2-2，已知座標平面上有一四邊形 ABCD，且此四邊形的頂點座標分別為 A(－4,3)、B(1,4)、C(4,－2)、D(－2,－3)，則此四邊形的周長為何？

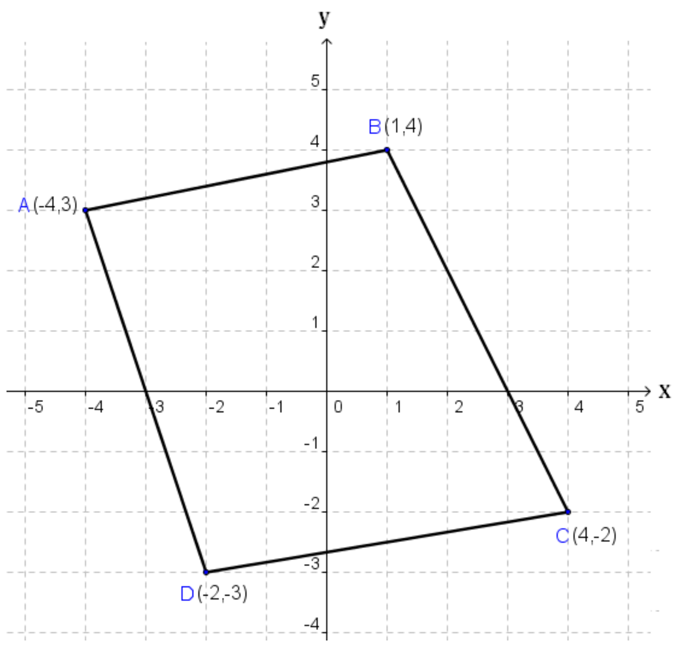

圖 10.2-2

想法：座標平面上兩點距離公式

解：

敘述	理由
(1) 在直角座標平面上畫出此四邊形 ABCD，如圖 10.2-2 所示	利用已知 A(－4,3)、B(1,4)、C(4,－2)、D(－2,－3)作圖
(2) $\overline{AB}=\sqrt{(-4-1)^2+(3-4)^2}=\sqrt{26}$	已知 A(－4,3)、B(1,4) & 兩點距離公式
(3) $\overline{BC}=\sqrt{(1-4)^2+[4-(-2)]^2}=3\sqrt{5}$	已知 B(1,4)、C(4,－2) & 兩點距離公式
(4) $\overline{CD}=\sqrt{[4-(-2)]^2+[-2-(-3)]^2}=\sqrt{37}$	已知 C(4,－2)、D(－2,－3)& 兩點距離公式
(5) $\overline{DA}=\sqrt{[-2-(-4)]^2+(-3-3)^2}=2\sqrt{10}$	已知 D(－2,－3)、A(－4,3)& 兩點距離公式
(6) 四邊形 ABCD 周長 $=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}$ $=\sqrt{26}+3\sqrt{5}+\sqrt{37}+2\sqrt{10}$	周長定義 & (2)~(5)

定理 10.2-2 數線上的分點公式

數線上有 A、B 兩點，A 點座標為(a)、B 點座標為(b)，若有一點 C 在$\overline{AB}$上，且$\overline{AC}$：$\overline{BC}$＝m：n，則 C 點座標為($\dfrac{na+mb}{m+n}$)

圖 10.2-3(a)

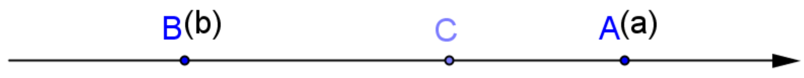

圖 10.2-3(b)

已知：數線上有 A、B 兩點，A 點座標為(a)、B 點座標為(b)，若有一點 C 在$\overline{AB}$上，且$\overline{AC}$：$\overline{BC}$＝m：n　(如圖 10.2-3(a)及圖 10.2-3(b)所示)

求證：C 點座標為($\dfrac{na+mb}{m+n}$)

想法：(1) 線段長度就是兩點間的距離

(2) 比例式中內項乘積等於外項乘積

證明：

敘述	理由
(1) 假設 b＞a，且 C 點座標為(c)，如圖 10.2-3(a)，則 b＞c＞a	假設 & 已知 A 點座標為(a)、B 點座標為(b)，且 C 點在$\overline{AB}$上
(2) $\overline{AC}$＝c－a	由(1) c＞a & 已知 A 點座標為(a)、假設 C 點座標為(c)
(3) $\overline{BC}$＝b－c	由(1) b＞c & 已知 B 點座標為(b)、假設 C 點座標為(c)
(4) (c－a)：(b－c)＝m：n	將(2) & (3) 代入已知$\overline{AC}$：$\overline{BC}$＝m：n
(5) m×(b－c)＝n×(c－a)	由(4) & 內項乘積等於外項乘積
(6) m×b－m×c＝n×c－n×a	由(5) 展開
(7) m×b＋n×a＝n×c＋m×c	由(6) 移項

(8) n×a＋m×b＝(n＋m)×c	由(7) 等式左邊加法交換律 & 等式右邊乘法分配律提出 c
(9) c＝$\dfrac{na+mb}{m+n}$	由(8) 等量除法公理
(10) 假設 a＞b，且 C 點座標為(c')，如圖 10.2-3(b)，則 a＞c'＞b	假設 & 已知 A 點座標為(a)、B 點座標為(b)，且 C 點在$\overline{AB}$上
(11) $\overline{AC}$＝a－c'	由(10) a＞c' & 已知 A 點座標為(a)、假設 C 點座標為(c')
(12) $\overline{BC}$＝c'－b	由(10) c'＞b & 已知 B 點座標為(b)、假設 C 點座標為(c')
(13) (a－c')：(c'－b)＝m：n	將(11) & (12) 代入已知$\overline{AC}$：$\overline{BC}$＝m：n
(14) m×(c'－b)＝n×(a－c')	由(13) & 內項乘積等於外項乘積
(15) m×c'－m×b＝n×a－n×c'	由(14) 展開
(16) m×c'＋n×c'＝n×a＋m×b	由(15) 移項
(17) (m＋n)×c'＝n×a＋m×b	由(16) 等式左邊乘法分配律提出 c'
(18) c'＝$\dfrac{na+mb}{m+n}$	由(17) 等量除法公理
(19) 所以 C 點座標為($\dfrac{na+mb}{m+n}$)	由(9) & (18) 已證

Q. E. D.

例題 10.2-2

如圖 10.2-4，數線上有 A、B 兩點，A 點座標為(4)、B 點座標為(20)，若有一點 C 在$\overline{AB}$上，且$\overline{AC}$：$\overline{BC}$＝5：3，則 C 點座標為何？

圖 10.2-4

想法：數線上的分點公式

解：

敘述	理由
(1) C 點座標為 $\dfrac{na+mb}{m+n}$ $=\dfrac{3\times4+5\times20}{5+3}$ ＝14	已知 A 點座標為(4)、B 點座標為(20)，點 C 在$\overline{AB}$上，且$\overline{AC}$：$\overline{BC}$＝5：3 & 數線上的分點公式，C 點座標為 $\dfrac{na+mb}{m+n}$

例題 10.2-3

如圖 10.2-5，數線上有 A、B 兩點，A 點座標為(－8)、B 點座標為(12)，若有一點 C 在$\overline{AB}$上，且$\overline{AC}$：$\overline{BC}$＝7：3，則 C 點座標為何？

圖 10.2-5

想法：數線上的分點公式

解：

敘述	理由
(1) C 點座標為 $\dfrac{na+mb}{m+n}$ $=\dfrac{3\times(-8)+7\times12}{7+3}$ ＝6	已知 A 點座標為(－8)、B 點座標為(12)，點 C 在$\overline{AB}$上，且$\overline{AC}$：$\overline{BC}$＝7：3 & 數線上的分點公式，C 點座標為 $\dfrac{na+mb}{m+n}$

例題 10.2-4

如圖 10.2-6，數線上有 A、B 兩點，A 點座標為(-8)、B 點座標為(-2)，若有一點 C 在$\overline{AB}$上，且$\overline{AC}$：$\overline{BC}=1$：2，則 C 點座標為何？

圖 10.2-6

想法：數線上的分點公式

解：

敘述	理由
(1) C 點座標為$\dfrac{na+mb}{m+n}$ $=\dfrac{2\times(-8)+1\times(-2)}{1+2}$ $=-6$	已知 A 點座標為(-8)、B 點座標為(-2)，點 C 在$\overline{AB}$上，且$\overline{AC}$：$\overline{BC}=1$：2 & 數線上的分點公式，C 點座標為$\dfrac{na+mb}{m+n}$

定理 10.2-3 數線上的中點公式

數線上有 A、B 兩點，A 點座標為(a)、B 點座標為(b)；若 C 點為$\overline{AB}$中點，則 C 點座標為($\frac{a+b}{2}$)

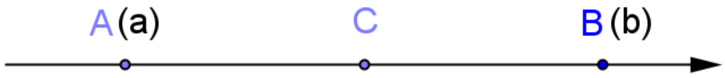

圖 10.2-7

已知：如圖 10.2-7，數線上有 A、B 兩點，A 點座標為(a)、B 點座標為(b)，且 C 點為$\overline{AB}$中點

求證：C 點座標為($\frac{a+b}{2}$)

想法：利用數線上的分點公式來證明

證明：

敘述	理由
(1) 假設 C 點座標為(c)，如圖 10.2-7，$\overline{AC}:\overline{BC}=1:1$	假設 & 已知 C 點為$\overline{AB}$中點
(2) $c=\frac{1\times a+1\times b}{1+1}=\frac{a+b}{2}$	已知 A 點座標為(a)、B 點座標為(b) 、(1) 假設 C 點座標為(c)、$\overline{AC}:\overline{BC}=1:1$ & 根據數線上的分點公式，$c=\frac{na+mb}{m+n}$
(3) 所以 C 點座標為($\frac{a+b}{2}$)	由(1) 假設 C 點座標為(c) & (2) 已證

Q. E. D.

例題 10.2-5

如圖 10.2-8，數線上有 A、B 兩點，A 點座標為(4)、B 點座標為(20)，則$\overline{AB}$中點 C 的座標為何？

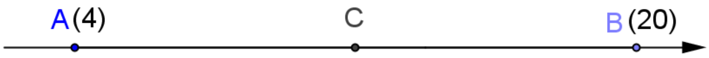

圖 10.2-8

想法：數線上的中點公式

解：

敘述	理由
(1) C 點座標為$\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{4+20}{2}=12$	已知 A 點座標為(4)、B 點座標為(20)， C 點為$\overline{AB}$中點 & 數線上的中點公式

例題 10.2-6

如圖 10.2-9，數線上有 A、B 兩點，A 點座標為(－8)、B 點座標為(12) ，則$\overline{AB}$中點 C 的座標為何？

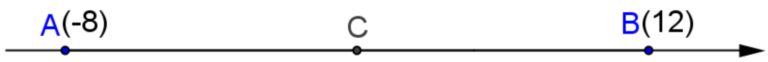

圖 10.2-9

想法：數線上的中點公式

解：

敘述	理由
(1) C 點座標為$\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{-8+12}{2}=2$	已知 A 點座標為(－8)、B 點座標為(12)， C 點為$\overline{AB}$中點 & 數線上的中點公式

例題 10.2-7

如圖 10.2-10，數線上有 A、B 兩點，A 點座標為(-8)、B 點座標為(-2) ，則$\overline{AB}$中點 C 的座標為何？

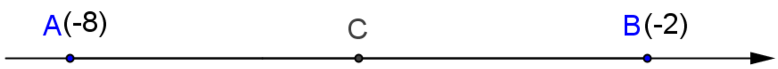

圖 10.2-10

想法：數線上的中點公式

解：

敘述	理由
(1) C 點座標為 $\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{(-8)+(-2)}{2}=-5$	已知 A 點座標為(-8)、B 點座標為(-2)，C 點為$\overline{AB}$中點 ＆ 數線上的中點公式

定理 10.2-4 座標平面上的分點公式

座標平面上有 A、B 兩點，A 點座標為(x_1, y_1)、B 點座標為(x_2,y_2)；若有一點 C 在$\overline{AB}$上，且$\overline{AC}$：$\overline{BC}$＝m：n，則 C 點座標為$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$

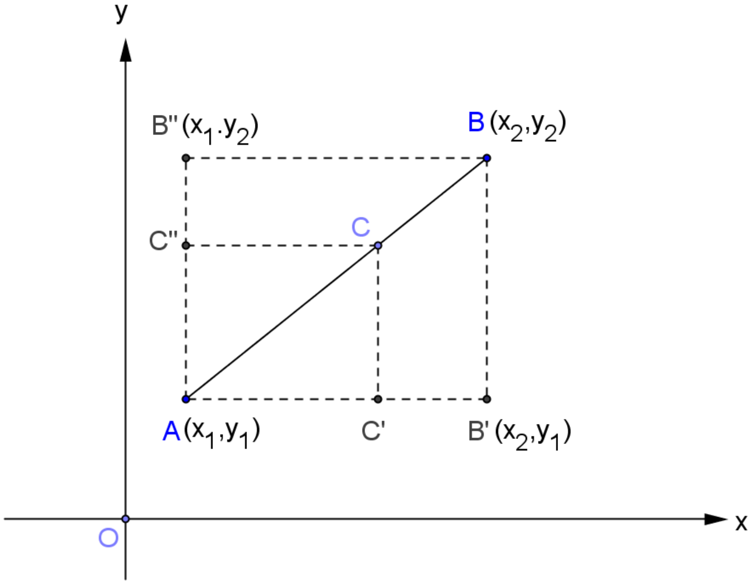

圖 10.2-11

已知：如圖 10.2-11，座標平面上有 A、B 兩點，A 點座標為(x_1, y_1)、B 點座標為(x_2,y_2)；若有一點 C 在$\overline{AB}$上，且$\overline{AC}$：$\overline{BC}$＝m：n

求證：C 點座標為$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$

想法：(1) 利用三角形之平行線截比例線段性質

(2) 利用數線上的分點公式來證明

證明：

敘述	理由
(1) 分別過 A、B、C 三點作 x 軸、y 軸的垂直線相交於 B'、B"、C'、C"四點，如圖 10.2-11 所示，則： $\overline{CC'} \parallel \overline{BB'}$、$\overline{CC''} \parallel \overline{BB''}$； B'座標為($x_2$,$y_1$)、B"座標為($x_1$, y_2)	已知 A 點座標為(x_1, y_1)、B 點座標為(x_2,y_2)且 C 點在$\overline{AB}$上 & 直角坐標平面的 x 軸與 y 軸互相垂直 & 垂直於同一直線的兩直線互相平行
(2) △ABB'中 $\overline{AC'}$：$\overline{C'B'}$＝$\overline{AC}$：$\overline{CB}$	由(1) △ABB'中，$\overline{CC'} \parallel \overline{BB'}$ & 三角形之平行線截比例線段
(3) $\overline{AC'}$：$\overline{C'B'}$＝m：n	由(2) & 已知$\overline{AC}$：$\overline{BC}$＝m：n 遞移律

(4)	C'點的橫座標為$(\frac{nx_1+mx_2}{m+n})$ C'點的縱座標為(y_1) 因此 C'點的座標為$(\frac{nx_1+mx_2}{m+n}, y_1)$	C'點縱座標與 A、B'兩點的縱座標相同 & 由(3) $\overline{AC'}:\overline{C'B'}$＝m：n、C'點的橫座標可由數線上的分點公式求得 & 由(1) B'座標為(x_2,y_1) & 已知 A 點座標為(x_1, y_1)
(5)	△ABB"中 $\overline{AC''}:\overline{C''B''}=\overline{AC}:\overline{CB}$	由(1) △ABB"中，$\overline{CC''} \parallel \overline{BB''}$ & 三角形之平行線截比例線段
(6)	$\overline{AC''}:\overline{C''B''}$＝m：n	由(5) & 已知$\overline{AC}:\overline{BC}$＝m：n 遞移律
(7)	C"點的橫座標為(x_1) C"點的縱座標為$(\frac{ny_1+my_2}{m+n})$ 因此 C"點座標為$(x_1, \frac{ny_1+my_2}{m+n})$	C"點橫坐標與 A、B"兩點的橫座標相同 & 由(6) $\overline{AC''}:\overline{C''B''}$＝m：n、C"點的縱座標可由數線上的分點公式求得 & 由(1) B"座標為(x_1, y_2) & 已知 A 點座標為(x_1, y_1)
(8)	C 點的橫座標為$(\frac{nx_1+mx_2}{m+n})$ C 點的縱座標為$(\frac{ny_1+my_2}{m+n})$	C 點橫座標與 C'點橫座標相同 & (4) C'點的橫座標為$(\frac{nx_1+mx_2}{m+n})$ C 點縱座標與 C"點縱座標相同 & (7) C"點的縱座標為$(\frac{ny_1+my_2}{m+n})$
(9)	因此 C 點的座標為$(\frac{nx_1+mx_2}{m+n}, \frac{ny_1+my_2}{m+n})$	由(8)

Q. E. D.

例題 10.2-8

如圖 10.2-12，座標平面上有 A、B 兩點，A 點座標為(1,2)、B 點座標為(5,4)，若 $\overline{AB}$上有一點 C，且$\overline{AC}$：$\overline{BC}$＝1：3，則 C 點座標為何？

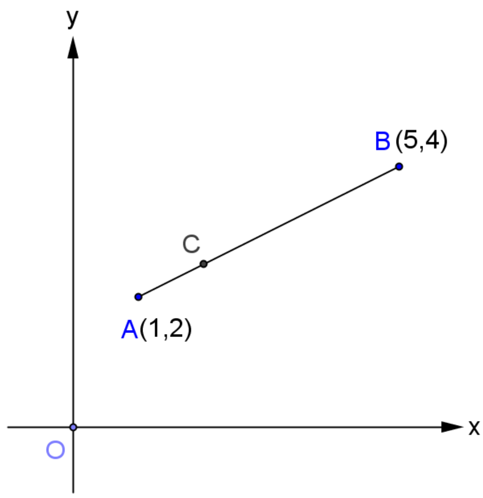

圖 10.2-12

想法：座標平面上的分點公式

解：

敘述	理由
(1) C 點的橫座標為 $\frac{nx_1+mx_2}{m+n}$ $=\frac{3\times1+1\times5}{1+3}$ $=2$ C 點的縱座標為 $\frac{ny_1+my_2}{m+n}$ $=\frac{3\times2+1\times4}{1+3}$ $=\frac{5}{2}$	已知 A 點座標為(1,2)、B 點座標為(5,4)，且$\overline{AC}$：$\overline{BC}$＝1：3 & 座標平面上的分點公式 C 點的橫座標為 $\frac{nx_1+mx_2}{m+n}$ C 點的縱座標為 $\frac{ny_1+my_2}{m+n}$
(2) C 點座標為$(2, \frac{5}{2})$	由(1) 已證

定理 10.2-5 座標平面上的中點公式

座標平面上有 A、B 兩點，A 點座標為(x_1, y_1)、B 點座標為(x_2,y_2)；若 C 點為$\overline{AB}$中點，則 C 點座標為$(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$

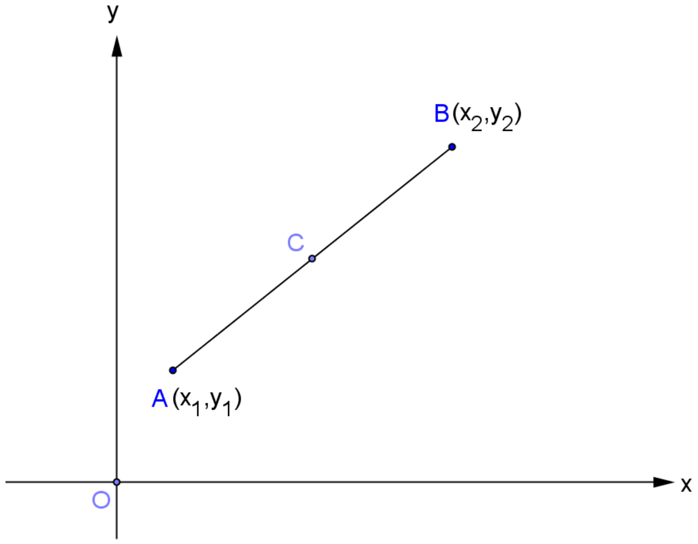

圖 10.2-13

已知：如圖 10.2-13，座標平面上有 A、B 兩點，A 點座標為(x_1, y_1)、B 點座標為(x_2,y_2)；若 C 點為$\overline{AB}$中點

求證：C 點座標為$(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$

想法：利用座標平面上的分點公式

證明：

敘述	理由
(1) $\overline{AC}:\overline{BC}=1:1$	已知 C 點為$\overline{AB}$中點
(2) C 點橫座標為 $\frac{nx_1+mx_2}{m+n}=\frac{1\times x_1+1\times x_2}{1+1}=\frac{x_1+x_2}{2}$	已知 A 點座標為(x_1, y_1)、B 點座標為(x_2,y_2) & (1) $\overline{AC}:\overline{BC}=1:1$ & 座標平面上的分點公式
(3) C 點縱座標為 $\frac{ny_1+my_2}{m+n}=\frac{1\times y_1+1\times y_2}{1+1}=\frac{y_1+y_2}{2}$	已知 A 點座標為(x_1, y_1)、B 點座標為(x_2,y_2) & (1) $\overline{AC}:\overline{BC}=1:1$ & 座標平面上的分點公式
(4) 所以 C 點座標為$(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$	由(2) & (3)

Q. E. D.

例題 10.2-9

如圖 10.2-14，座標平面上有 A、B 兩點，A 點座標為(1,2)、B 點座標為(5,4)，則 $\overline{AB}$中點 C 的座標為何？

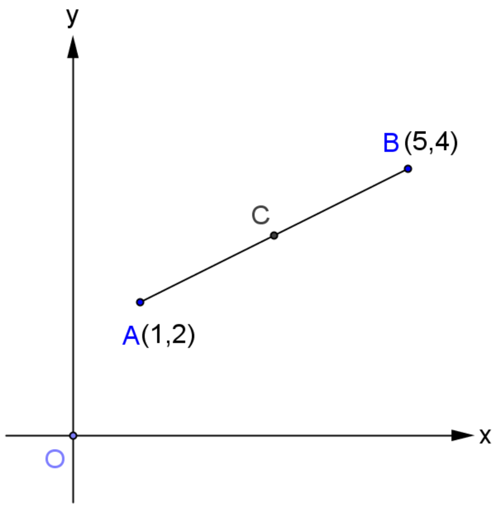

圖 10.2-14

想法：座標平面上的中點公式

解：

敘述	理由
(1) C 點的橫座標為$\dfrac{1+5}{2}=3$ C 點的縱座標為$\dfrac{2+4}{2}=3$	已知 A 點座標為(1,2)、B 點座標為(5,4) & 座標平面上的中點公式
(2) C 點座標為(3,3)	由(1) 已證

接下來，讓我們利用直角座標平面的分點公式，搭配上先前所學平行四邊形的性質與圓的性質，來作以下例題 10.2-10、例題 10.2-11。

例題 10.2-10

如圖 10.2-15，座標平面上有一平行四邊形 ABCD，已知其中三個頂點座標分別為 A(2,1)、B(6,2)、D(3,5)，則平行四邊形 ABCD 另一個頂點 C 的座標為何？

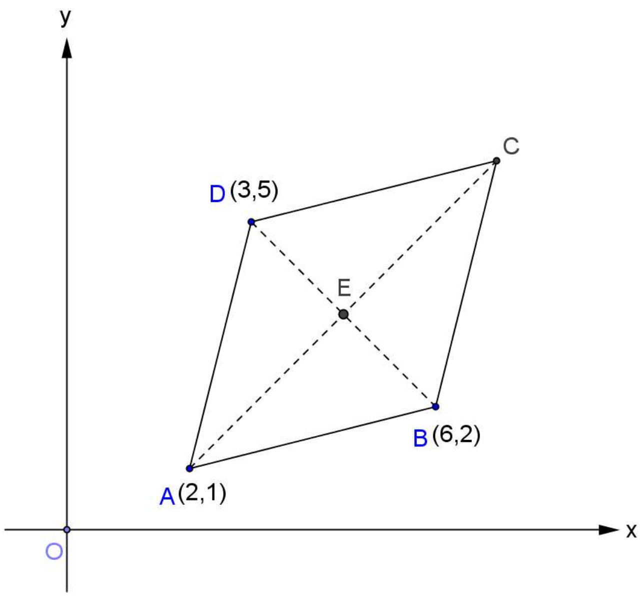

圖 10.2-15

想法：(1) 平行四邊形對角線互相平分

(2) 座標平面上的中點公式

解：

敘述	理由
(1) 根據題義在直角座標平面上畫出此平行四邊形 ABCD，並作兩對角線$\overline{AC}$及$\overline{BD}$，如圖 10.2-15 所示；則 E 點為$\overline{BD}$中點、E 點為$\overline{AC}$中點	已知平行四邊形 ABCD 中，其中三個頂點座標分別為 A(2,1)、B(6,2)、D(3,5) & 平行四邊形對角線互相平分
(2) E 點的橫座標為$\dfrac{6+3}{2}=\dfrac{9}{2}$ E 點的縱座標為$\dfrac{2+5}{2}=\dfrac{7}{2}$	由(1) E 點為$\overline{BD}$中點 & 已知 B(6,2)、D(3,5) & 座標平面上的中點公式
(3) E 點座標為$(\dfrac{9}{2},\dfrac{7}{2})$	由(2) 已證
(4) 假設 C 點座標為(a,b)	假設

(5) $\overline{AC}$中點 E 座標為$(\frac{2+a}{2},\frac{1+b}{2})$	已知 A(2,1) ＆ (4) 假設 C 點座標為(a,b) ＆ 座標平面上的中點公式 ＆ (1) E 點為$\overline{AC}$中點
(6) $\frac{2+a}{2}=\frac{9}{2}$ 、 $\frac{1+b}{2}=\frac{7}{2}$	由(3) ＆ (5)
(7) a＝7 、 b＝6	由(6) 解一元一次方程式
(8) 所以 C 點座標為(7,6)	由(4) 假設 ＆ (7) 已證

例題 10.2-11

如圖 10.2-16，圓 K 與座標軸交於原點 O(0,0)、點 A (－12, 0) 與點 B (0,7)，則圓心 K 的座標為何？

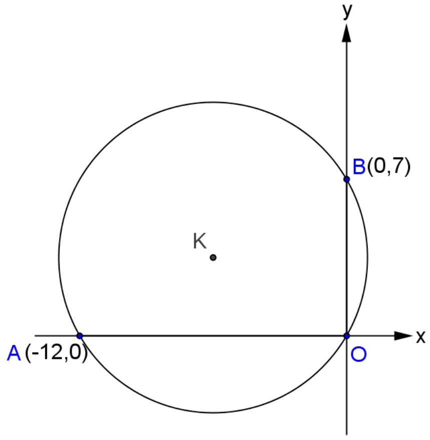

圖 10.2-16

想法：(1) 通過圓心對弦作垂直線，則此線段必平分此弦

(2) 數線上的的中點公式

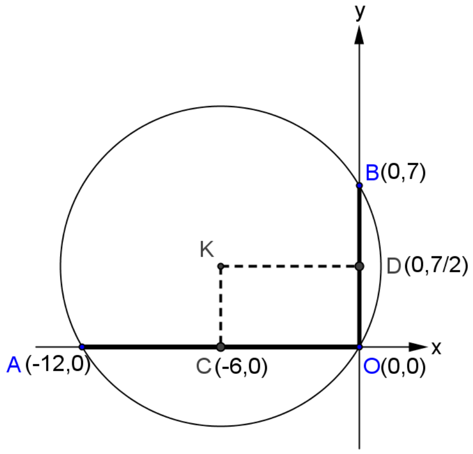

圖 10.2-16(a)

解：

敘述	理由
(1) $\overline{OA}$與$\overline{OB}$為圓 K 之兩弦	已知圓 K 與座標軸交於原點 O(0,0)、點 A (－12,0) 與點 B (0,7)
(2) 過 K 點作$\overline{KC}$垂直 x 軸、過 K 點作$\overline{KD}$垂直 y 軸，如圖 10.2-16(a)；則 C 點為$\overline{OA}$之中點、D 點為$\overline{OB}$之中點	通過圓心對弦作垂直線，則此線段必平分此弦 (詳見定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理)

(3) C點橫座標為$\frac{-12+0}{2}=-6$ C點縱座標為0	由(2) C點為$\overline{OA}$之中點 ＆ O(0,0)、A (－12,0)皆在x軸上 ＆ 數線上的中點公式
(4) C點座標為$(-6,0)$	由(3) 已證
(5) D點橫座標為0 D點縱座標為$\frac{7+0}{2}=\frac{7}{2}$	由(2) D點為$\overline{OB}$之中點 ＆ O(0,0)、B (0,7)皆在y軸上 ＆ 數線上的中點公式
(6) D點座標為$(0,\frac{7}{2})$	由(5) 已證
(7) 圓心K的座標為$(-6,\frac{7}{2})$	K點橫坐標與C點橫座標相同、K點縱座標與D點縱座標相同 ＆ (4) C點座標為$(-6,0)$、(6) D點座標為$(0,\frac{7}{2})$已證

定理 10.2-6 座標平面上三角形的重心公式

座標平面上有一△ABC，其頂點 A 點座標為(x_1, y_1)、B 點座標為(x_2,y_2)、C 點座標為(x_3,y_3)；若 G 點為△ABC 重心，則 G 點座標為 $(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3})$

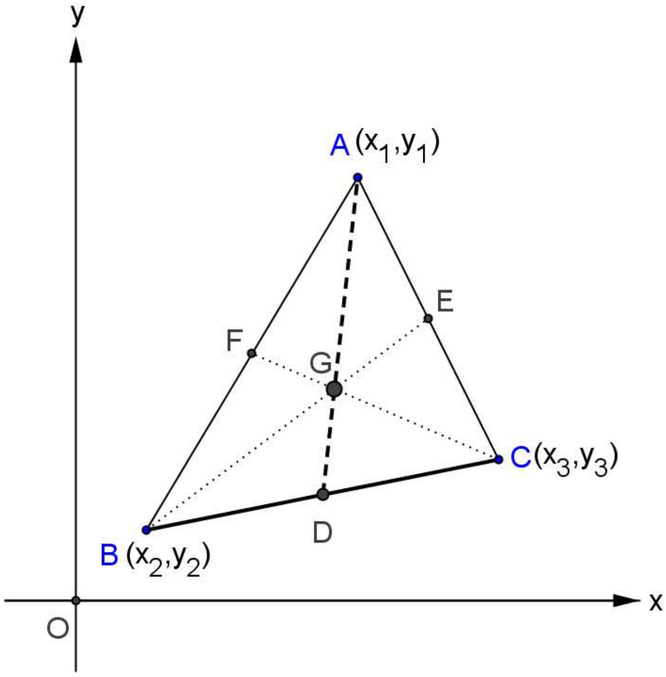

圖 10.2-17

已知：如圖 10.2-17，座標平面上有一△ABC，其頂點 A 點座標為(x_1, y_1)、B 點座標為(x_2,y_2)、C 點座標為(x_3,y_3)，且 G 點為△ABC 重心

求證：G 點座標為 $(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3})$

想法：利用座標平面上的分點與中點公式

證明：

敘述	理由
(1) 作△ABC 重心 G 點，如圖 10.2-17 則 D 點為$\overline{BC}$之中點、$\overline{AG}$：$\overline{GD}$＝2：1	尺規作圖 & 三角形重心為三中線之交點 & 重心到頂點的距離為中線長的$\frac{2}{3}$
(2) D 點座標為 $(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2})$	已知 B 點座標為(x_2,y_2)、C 點座標為(x_3,y_3) & (1) D 點為$\overline{BC}$之中點 & 座標平面上的中點公式

(3) G 點橫坐標為$\dfrac{nx_1+m\times(\frac{x_2+x_3}{2})}{m+n}$ $=\dfrac{1\times x_1+2\times(\frac{x_2+x_3}{2})}{2+1}$ $=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$	已知 A 點座標為(x_1, y_1) & (2) D 點座標為$(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2})$ & (1) $\overline{AG}$：$\overline{GD}$＝2：1 & 座標平面上的分點公式
(4) G 點縱座標為$\dfrac{ny_1+m\times(\frac{y_2+y_3}{2})}{m+n}$ $=\dfrac{1\times y_1+2\times(\frac{y_2+y_3}{2})}{2+1}$ $=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$	已知 A 點座標為(x_1, y_1) & (2) D 點座標為$(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2})$ & (1) $\overline{AG}$：$\overline{GD}$＝2：1 & 座標平面上的分點公式
(5) 所以 G 點座標為 $(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3})$	由(3) & (4)

Q. E. D.

例題 10.2-12

如圖 10.2-18，座標平面上有一△ABC，其頂點 A 點座標為(4,6)、B 點座標為(2,1)、C 點座標為(6,2)，則△ABC 重心 G 點座標為何？

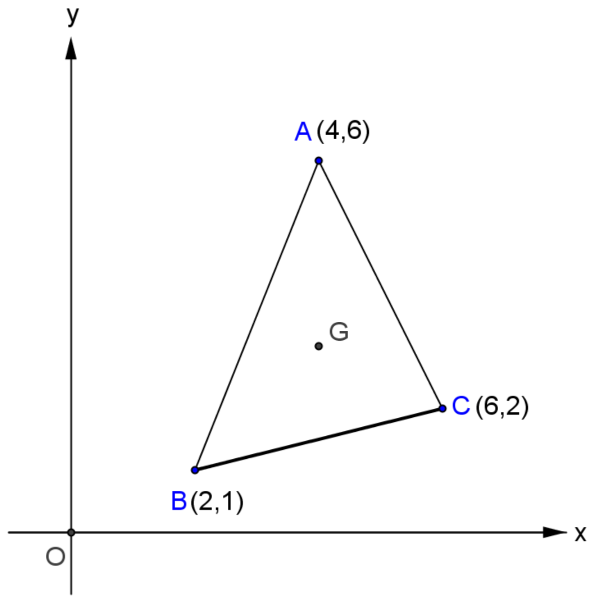

圖 10.2-18

想法：座標平面上三角形的重心公式

解：

敘述	理由
(1) G 點橫坐標為 $\dfrac{4+2+6}{3}=4$ G 點縱座標為 $\dfrac{6+1+2}{3}=3$	已知 A 點座標為(4,6)、B 點座標為(2,1)、C 點座標為(6,2) & 座標平面上三角形的重心公式
(2) 所以 G 點座標為(4,3)	由(1) 已證

在本章的最後，讓我們將圓搬到直角座標平面上，利用圓的性質以及畢氏定理來作以下例題 10.2-13。

例題 10.2-13

如圖 10.2-19，圓 P 的圓心在 x 軸上，且圓 P 與 x 軸相交於 A (24 , 0)，且與 y 軸相交於 B (0 , 12)，則圓心 P 的座標為何？

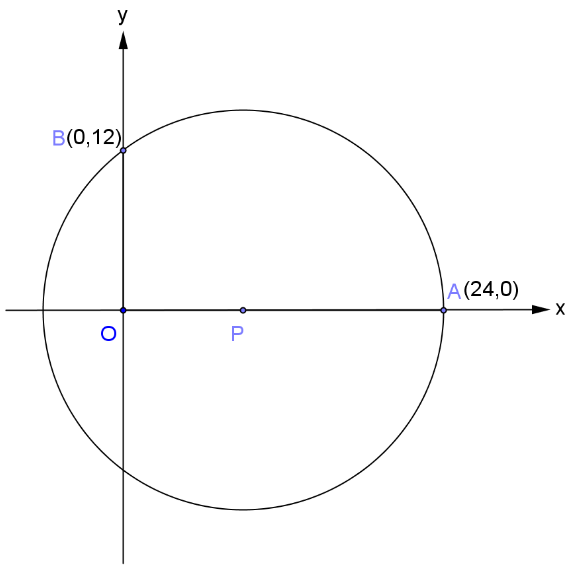

圖 10.2-19

想法：(1) 同圓半徑相等

(2) 畢氏定理

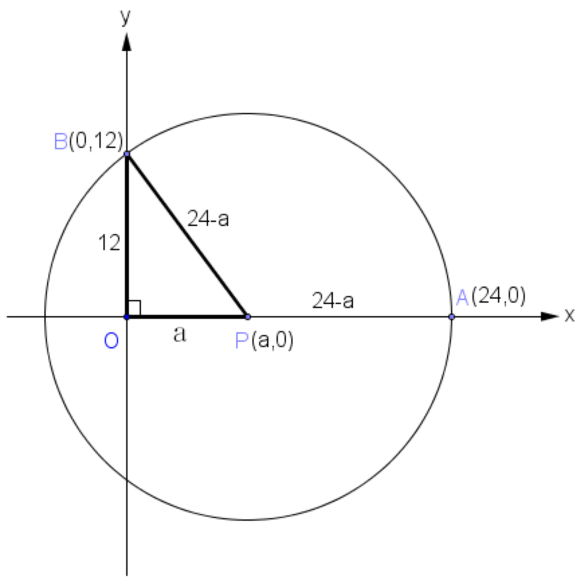

圖 10.2-19(a)

解：

敘述	理由
(1) 假設圓心 P 點座標為(a,0)，作 $\overline{PB}$，如圖 10.2-19(a)；則$\overline{OP}$＝a	已知圓 P 的圓心在 x 軸上 & 作圖
(2) $\overline{OA}$＝24 、 $\overline{OB}$＝12	已知圓 P 與 x 軸相交於 A (24 , 0)，且與 y 軸相交於 B (0 , 12)
(3) $\overline{OP}+\overline{PA}=\overline{OA}$	全量等於分量之和
(4) $\overline{PA}=\overline{OA}-\overline{OP}$ ＝24－a	由(3) 等量減法公理 & (2) $\overline{OA}$＝24 、 (1) $\overline{OP}$＝a
(5) $\overline{BP}=\overline{PA}$＝24－a	同圓半徑相等 & (4) $\overline{PA}$＝24－a
(6) △BOP 為直角三角形 $\overline{OB}^2+\overline{OP}^2=\overline{BP}^2$	直角坐標平面兩座標軸互相垂直 & 畢氏定理
(7) $(12)^2+a^2=(24-a)^2$	將(2) $\overline{OB}$＝12、(1) $\overline{OP}$＝a、(5) $\overline{BP}$＝24－a 代入(6) $\overline{OB}^2+\overline{OP}^2=\overline{BP}^2$
(8) a＝9	由(7) 解一元二次方程式
(9) 所以圓心 P 的座標為(9,0)	由(1) 假設圓心 P 點座標為(a,0) & (8) a＝9 已證

習題 10.2

習題 10.2-1

已知座標平面上有一四邊形 ABCD，且此四邊形的頂點座標分別為 A(2,4)、B(－4,1)、C(－1,－4)、D(4,－3)，則此四邊形的周長為何？

習題 10.2-2

數線上有 A、B 兩點，A 點座標為(1)、B 點座標為(31)，若有一點 C 在$\overline{AB}$上，且$\overline{AC}$：$\overline{BC}$＝2：3，則 C 點座標為何？

習題 10.2-3

數線上有 A、B 兩點，A 點座標為(－10)、B 點座標為(20)，若有一點 C 在$\overline{AB}$上，且$\overline{AC}$：$\overline{BC}$＝3：7，則 C 點座標為何？

習題 10.2-4

數線上有 A、B 兩點，A 點座標為(－41)、B 點座標為(－11)，若有一點 C 在$\overline{AB}$上，且$\overline{AC}$：$\overline{BC}$＝4：1，則 C 點座標為何？

習題 10.2-5

數線上有 A、B 兩點，A 點座標為(1)、B 點座標為(31)，則$\overline{AB}$中點 C 的座標為何？

習題 10.2-6

數線上有 A、B 兩點，A 點座標為(－10)、B 點座標為(20) ，則$\overline{AB}$中點 C 的座標為何？

習題 10.2-7

數線上有 A、B 兩點，A 點座標為(－41)、B 點座標為(－11) ，則$\overline{AB}$中點 C 的座標為何？

習題 10.2-8

座標平面上有 A、B 兩點，A 點座標為(－1,2)、B 點座標為(3,5)，若$\overline{AB}$上有一點 C，且$\overline{AC}$：$\overline{BC}$＝5：3，則 C 點座標為何？

習題 10.2-9

座標平面上有 A、B 兩點，A 點座標為(－1,2)、B 點座標為(3,5)，則$\overline{AB}$中點 C 的座標為何？

習題 10.2-10

座標平面上有一平行四邊形 ABCD，已知其中三個頂點座標分別為 A(1,2)、B(5,4)、D(2,6)，則平行四邊形 ABCD 另一個頂點 C 的座標為何？

習題 10.2-11

如圖 10.2-20，圓 K 與座標軸交於原點 O(0,0)、點 A (－6, 0) 與點 B (0,8)，則圓心 K 的座標為何？

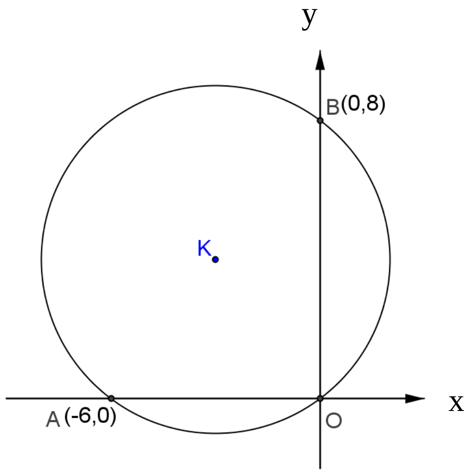

圖 10.2-20

習題 10.2-12

座標平面上有一△ABC，其頂點 A 點座標為(6,7)、B 點座標為(1,2)、C 點座標為(5,1)，則△ABC 重心 G 點座標為何？

習題 10.2-13

如圖 10.2-21，圓 P 的圓心在 x 軸上，且圓 P 與 x 軸相交於 A (8 , 0)，且與 y 軸相交於 B (0 , 4)，則圓心 P 的座標為何？

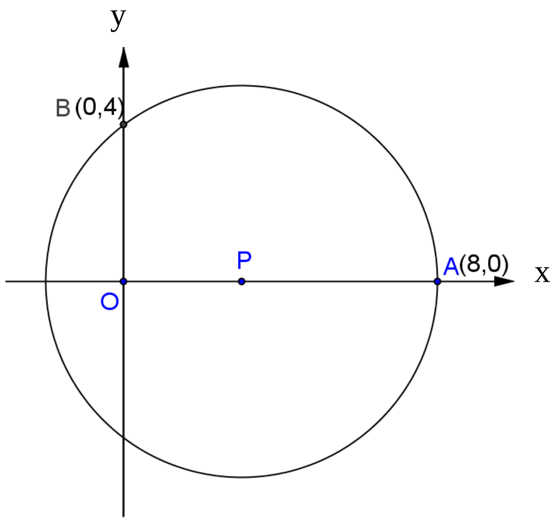

圖 10.2-21

本章重點

1. 認識數線與點座標。

2. 數線上的分點公式。

3. 數線上的中點公式。

4. 認識直角座標平面與象限。

5. 座標平面上兩點距離公式。

6. 座標平面上的分點公式。

7. 座標平面上的中點公式。

8. 座標平面上三角形的重心座標。

歷年基測題目

1. 如圖 10.1，在座標平面上，△ABC 為直角三角形，∠B＝90°，$\overline{AB}$垂直 x 軸，M 為△ABC 的外心。若 A 點座標為(3,4)，M 點座標為(−1,1)，則 B 點座標為何？**(98-1)**
(A) (3,－1)　　(B) (3,－2)　　(C) (3,－3)　　(D) (3,－4)

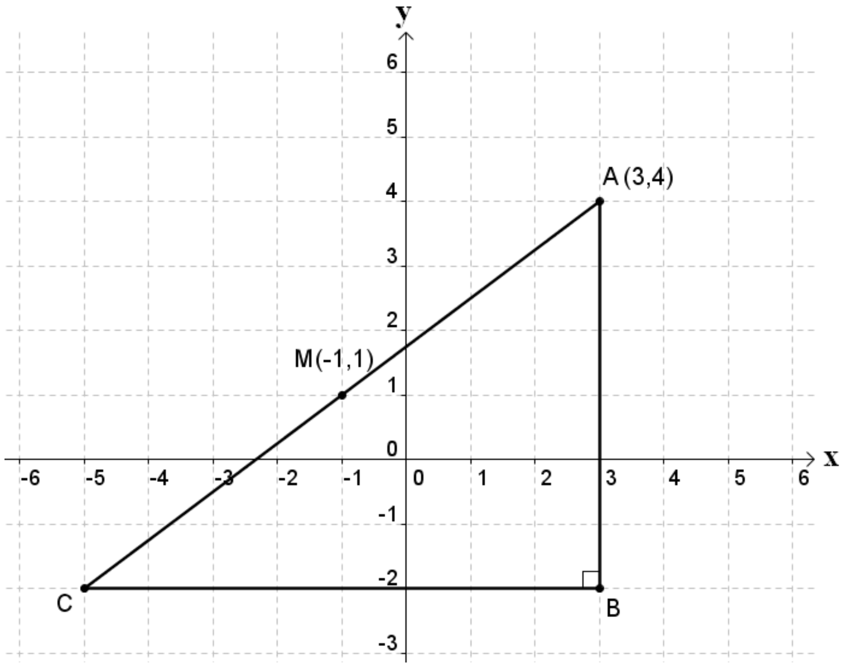

圖 10.1

解答：(B) (3,－2)

想法： (1) 直角三角形外心在斜邊中點

(2) 座標平面上中點公式

解：

敘述	理由
(1) B 點橫座標與 A 點橫座標相同；B 點縱座標與 C 點縱座標相同	已知∠B＝90°
(2) 假設 C 點座標為(a,b)，則$\overline{AC}$為直角△ABC 之斜邊，且 M 點為$\overline{AC}$中點	假設 & 已知△ABC 為直角三角形，∠B＝90° & 已知 M 為直角△ABC 的外心 & 直角三角形外心在斜邊中點
(3) $\overline{AC}$中點座標為$(\frac{3+a}{2},\frac{4+b}{2})$	已知 A 點座標為(3,4) & (1) 假設 C 點座標為(a,b) & 座標平面上中點公式

(4) $(-1,1)=(\frac{3+a}{2},\frac{4+b}{2})$	由(2) M 點為$\overline{AC}$中點 ＆ 已知 M 點座標為$(-1,1)$ ＆ (3) $\overline{AC}$中點座標為$(\frac{3+a}{2},\frac{4+b}{2})$
(5) $-1=\frac{3+a}{2}$ ＆ $1=\frac{4+b}{2}$	由(4) 縱座標相等且橫座標相等
(6) $a=2\times(-1)-3=-5$ ＆ $b=2\times1-4=-2$	由(5) 解 a 的一元一次方程式 ＆ 解 b 的一元一次方程式
(7) C 點座標為$(-5,-2)$	由(2) 假設 C 點座標為(a,b) ＆ (6) $a=-5$、$b=-2$
(8) B 點橫座標為(3) ＆ B 點縱座標為(-2)	由(1) B 點橫座標與 A 點橫座標相同；B 點縱座標與 C 點縱座標相同 ＆ 已知 A 點座標為(3,4)、 (7) C 點座標為$(-5,-2)$
(9) 所以 B 點座標為$(3,-2)$，本題選(B)	由(8)