習題 8.1

習題 8.1-1

若 6：x＝5：8，則 x 之值為何？

想法：利用比例式之內項乘積等於外項乘積性質(定理 8.1-1)。

解：

敘述	理由
(1) $5 \times x = 6 \times 8$	已知 6：x＝5：8 & 任一比例式中，內項乘積等於外項乘積
(2) $x = \frac{6\times 8}{5} = \frac{48}{5}$	由(1) & 解一元一次方程式

習題 8.1-2

若 $(x+2)$：3＝5：8，則 x 之值為何？

想法：利用比例式之內項乘積等於外項乘積性質(定理 8.1-1)。

解：

敘述	理由
(1) $3 \times 5 = (x+2) \times 8$	已知$(x+2)$：3＝5：8 & 任一比例式中，內項乘積等於外項乘積
(2) $x = \frac{3\times 5}{8} - 2 = -\frac{1}{8}$	由(1) & 解一元一次方程式

習題 8.1-3

已知 x 為 4 與 16 的比例中項，且 x＞0，求 x 之值為何？

想法：利用兩量的比例中項的平方等於這兩量的乘積求 x 之值

解：

敘述	理由
(1) x^2＝4 × 16	已知 x 為 4 與 16 的比例中項 ＆ 兩量的比例中項的平方等於這兩量的乘積
(2) x＝±8 (負不合)	由(1) ＆ 求平方根 ＆ 已知 x＞0
(3) 所以 x＝8	由(2)

習題 8.1-4

已知 x：y＝2：3，且 x＋y＝20，求 x 與 y 之值為？

想法：若 a：b＝c：d，則我們可以假設 a＝c×r、b＝d×r 。 (r 為常數)

解：

敘述	理由
(1) 假設 x＝2r、y＝3r	已知 x：y＝2：3
(2) 2r＋3r＝20	將(1) 假設 x＝2r、y＝3r 代入已知 x＋y＝20
(3) r＝20÷(2＋3)＝4	由(2) ＆ 解一元一次方程式
(4) x＝2r＝2×4＝8 y＝3r＝3×4＝12	將(3) r＝4 已證 代入(1) 假設 x＝2r、y＝3r

習題 8.1-5

已知(x＋y)：(x－y)＝11：3，求 x 與 y 之比為？

想法： 若 a：b＝c：d，則我們可以假設 a＝c×r、b＝d×r 。 (r 為常數)

解：

敘述	理由
(1) 假設 x＋y＝11r、x－y＝3r	已知(x＋y)：(x－y)＝11：3
(2) x＝7r、y＝4r	由(1) ＆ 解二元一次聯立方程式
(3) 所以 x：y＝7r：4r＝7：4	由(2) ＆ 倍比定理

習題 8.1-6

三角形 ABC 中，若∠A：∠B：∠C＝3：4：8，則∠A＝__________度，∠B＝__________度，∠C＝__________度。

想法： 利用三角形內角和 180°，求三內角之度數

解：

敘述	理由
(1) 假設∠A＝3r、∠B＝4r、∠C＝8r	已知∠A：∠B：∠C＝3：4：8
(2) ∠A＋∠B＋∠C＝180°	三角形內角和 180°
(3) 3r＋4r＋8r＝180°	將(1)式代入(2)式得
(4) r＝180°÷(3＋4＋8)＝12°	由(3) ＆ 解一元一次方程式
(5) 所以∠A＝3×12°＝36° ∠B＝4×12°＝48° ∠C＝8×12°＝96°	將(4) r＝12° 代入(1)式得

習題 8.1-7

有一正 n 邊形，其一個外角度數與一個內角度數的比為 2：1，
則 n＝______________，內角和為______________度。

想法：利用正 n 邊形內角與外角的關係求值

解：

敘述	理由
(1) 正 n 邊形一個外角度數＝$\frac{360^0}{n}$	正 n 邊形外角和 360° & 正 n 邊形的每個外角均相等
(2) 正 n 邊形一個內角度數＝$\frac{(n-2)\times 180^0}{n}$	正 n 邊形內角和(n－2)×180° & 正 n 邊形的每個內角均相等
(3) $\frac{360^0}{n}$ ： $\frac{(n-2)\times 180^0}{n}$ ＝2：1	由(1)、(2) & 已知正 n 邊形，其一個外角度數與一個內角度數的比為 2：1
(4) $\frac{360^0}{n}\times 1=\frac{(n-2)\times 180^0}{n}\times 2$	由(3) & 內項乘積等於外項乘積
(5) 360°×1＝(n－2)×180°×2	由(4) & 等式兩邊同乘 n 仍相等
(6) n＝$\frac{360^0\times 1}{180^0\times 2}$＋2＝3	由(5) & 解一元一次方程式
(7) 正三角形內角和為(3－2)×180°＝180°	正 n 邊形內角和(n－2)×180° & 由(6) n＝3

習題 8.1-8

如圖 8.1-27，△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$，$\overline{AD}=5$，$\overline{BD}=4$，$\overline{CE}=6$，則$\overline{AC}=$？

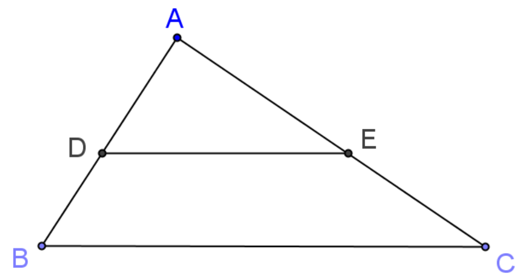


圖 8.1-27

想法：利用三角形之平行線截比例線段性質求解

解：

敘述	理由
(1) △ABC 中， $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$	已知△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ & 三角形之平行線截比例線段
(2) $5:4=\overline{AE}:6$	將已知$\overline{AD}=5$，$\overline{BD}=4$，$\overline{CE}=6$ 代入(1)式得
(3) $5\times6=4\times\overline{AE}$	由(2) & 內項相乘等於外項相乘
(4) $\overline{AE}=5\times6\div4=7.5$	由(3)式移項得
(5) 所以$\overline{AC}=\overline{AE}+\overline{EC}$ $=7.5+6=13.5$	如圖所示 & 全量等於分量之和 將(4) $\overline{AE}=7.5$ & 已知$\overline{CE}=6$ 代入

習題 8.1-9

如圖 8.1-28，△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{AC}$，且$\overline{BD}$：$\overline{DA}$＝3：5，若$\overline{BC}$＝24，試求$\overline{EC}$。

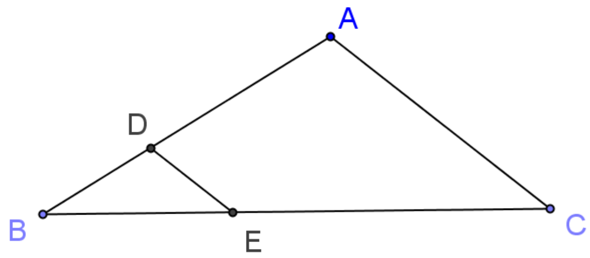


圖 8.1-28

想法：利用三角形之平行線截比例線段性質求解

解：

敘述	理由
(1) $\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{EC}$	如圖所示 & 全量等於分量之和
(2) $24=\overline{BE}+\overline{EC}$	將已知$\overline{BC}=24$ 代入(1)式得
(3) $\overline{BE}=24-\overline{EC}$	由(2)式移項得
(4) △ABC 中， $\overline{BD}:\overline{DA}=\overline{BE}:\overline{EC}$	已知△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ & 三角形之平行線截比例線段
(5) $3:5=(24-\overline{EC}):\overline{EC}$	將已知$\overline{BD}:\overline{DA}=3:5$ & (3) $\overline{BE}=24-\overline{EC}$ 代入(4)式得
(6) $3\times\overline{EC}=5\times(24-\overline{EC})$	由(5) & 內項相乘等於外項相乘
(7) $\overline{EC}=5\times24\div(3+5)=15$	由(6)式解一元一次方程式

習題 8.1-10

如圖 8.1-29，$\triangle ABC$ 中，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$，且$\overline{AD}=10$，$\overline{DB}=x$， $\overline{AE}=2x-2$，$\overline{EC}=6$，試求 x 之值。

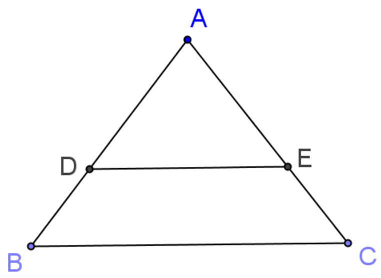


圖 8.1-29

想法：利用三角形之平行線截比例線段性質求解

解：

敘述	理由
(1) $\triangle ABC$ 中， $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$	已知$\triangle ABC$ 中，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ & 三角形之平行線截比例線段
(2) $10: x=(2x-2):6$	將已知$\overline{AD}=10$，$\overline{DB}=x$， $\overline{AE}=2x-2$，$\overline{EC}=6$ 代入(1)式得
(3) $10\times6=x\times(2x-2)$	由(2) & 內項相乘等於外項相乘
(4) $60=2x^2-2x$ $30=x^2-x$ $x^2-x-30=0$ $(x-6)(x+5)=0$ $x=6$ 或 $x=-5$(不合)	由(3)式展開 等式兩邊同除 2 仍相等 移項 十字交乘因式分解一元二次方程式 已知 $x=\overline{DB}$ 為線段長度必大於 0
(5) 所以 $x=6$	由(4)

習題 8.1-11

如圖 8.1-30，△ABC 中，$\overline{AD}$＝16，$\overline{DB}$＝8，$\overline{AE}$＝22，$\overline{EC}$＝11，試問$\overline{DE}$與$\overline{BC}$是否平行？為什麼？

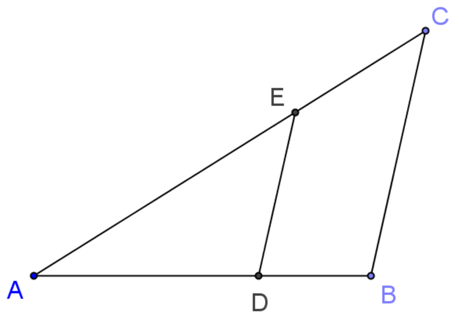


圖 8.1-30

想法：一直線截三角形的兩邊成比例線段，則這直線必平行三角形的第三邊

解：

敘述	理由
(1) △ABC 中，$\overline{AD}$：$\overline{DB}$＝16：8＝2：1	已知$\overline{AD}$＝16，$\overline{DB}$＝8 & 化成最簡單整數比
(2) △ABC 中，$\overline{AE}$：$\overline{EC}$＝22：11＝2：1	已知$\overline{AE}$＝22，$\overline{EC}$＝11 & 化成最簡單整數比
(3) 所以$\overline{AD}$：$\overline{DB}$＝$\overline{AE}$：$\overline{EC}$成比例線段	由(1) & (2) 遞移律
(4) 所以$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$	由(3) 一直線截三角形的兩邊成比例線段，則這直線必平行這三角形的第三邊

習題 8.1-12

如圖 8.1-31，$L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$，若$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=9$，$\overline{DE}=10$，則$\overline{EF}=$？

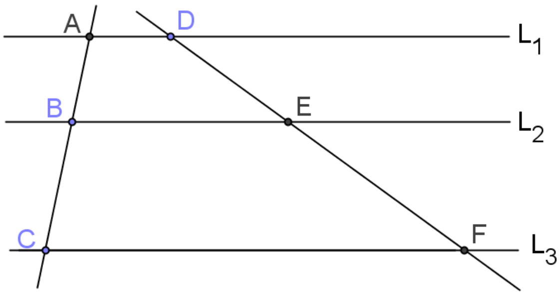


圖 8.1-31

想法：平行線截比例線段定理：任意兩直線被一組平行線所截，則截於平行線間的對應線段成比例。

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DE}:\overline{EF}$	已知 $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$，$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{DF}$為截線 & 平行線截比例線段定理
(2) $6:9=10:\overline{EF}$	由(1) & 已知$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=9$，$\overline{DE}=10$
(3) $6\times\overline{EF}=9\times10$	由(2) & 外項乘積等於內項乘積
(4) $\overline{EF}=15$	由(3) & 解一元一次方程式

習題 8.1-13

如圖 8.1-32，$L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$，若$\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=6$，$\overline{DE}=3x-2$，$\overline{EF}=2x+4$，則 x＝？

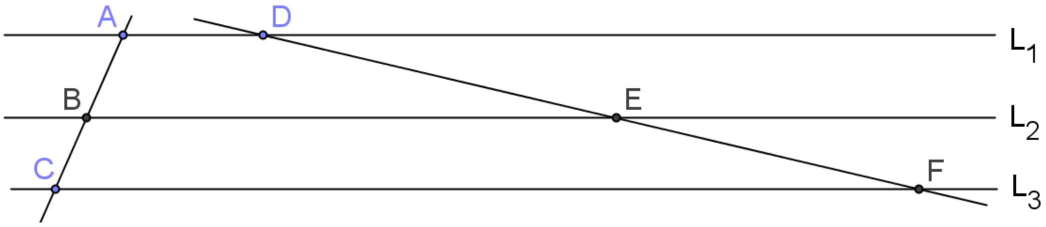


圖 8.1-32

想法：平行線截比例線段定理: 任意兩直線被一組平行線所截，則截於平行線間的對應線段成比例。

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DE}:\overline{EF}$	已知 $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$，$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{DF}$為截線 & 平行線截比例線段定理
(2) $7:6=(3x-2):(2x+4)$	由(1) & 已知$\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=6$，$\overline{DE}=3x-2$，$\overline{EF}=2x+4$
(3) $7\times(2x+4)=6\times(3x-2)$	由(2) & 外項乘積等於內項乘積
(4) $x=10$	由(3) & 解一元一次方程式

習題 8.1-14

如圖 8.1-33，M_1、M_2、M_3、M_4 皆為直線，若 $M_1 \parallel M_2 \parallel M_3 \parallel M_4$，直線 L_1 與 L_2 為截線，$\overline{EF}：\overline{FG}：\overline{GH}=3：5：4$，$\overline{AD}=60$，試求$\overline{BC}$和$\overline{CD}$。

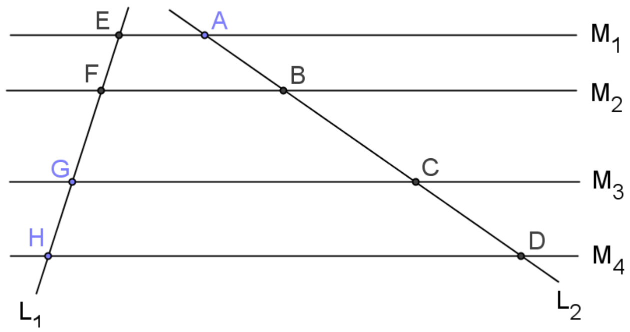


圖 8.1-33

想法：平行線截比例線段定理: 任意兩直線被一組平行線所截，則截於平行線間的對應線段成比例。

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}：\overline{BC}：\overline{CD}=\overline{EF}：\overline{FG}：\overline{GH}$	已知 $M_1 \parallel M_2 \parallel M_3 \parallel M_4$，直線 L_1 與 L_2 為截線 & 平行線截比例線段定理
(2) $\overline{AB}：\overline{BC}：\overline{CD}=3：5：4$	由(1) & 已知$\overline{EF}：\overline{FG}：\overline{GH}=3：5：4$
(3) 假設$\overline{AB}=3r$、$\overline{BC}=5r$、$\overline{CD}=4r$	由(2) & 假設
(4) $\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$	如圖 & 全量等於分量之和
(5) $60=3r+5r+4r$	將(3) 假設 & 已知$\overline{AD}=60$ 代入(4)式得
(6) $r=60\div(3+5+4)=5$	由(5) & 解一元一次方程式
(7) $\overline{BC}=5r=5\times5=25$ $\overline{CD}=4r=4\times5=20$	將(6) $r=5$ 代入(3) $\overline{BC}=5r$、$\overline{CD}=4r$

習題 8.1-15

如圖 8.1-34，已知三角形 ABC 中，$\overline{AD}$為∠BAC 的角平分線，若$\overline{AB}$＝10，$\overline{AC}$＝6，$\overline{BC}$＝12，則$\overline{DC}$＝？

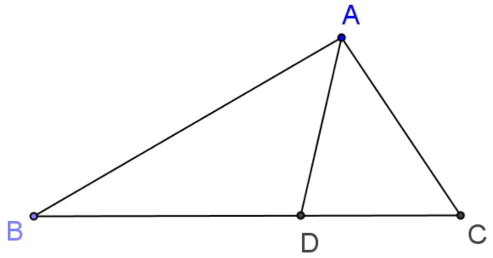


圖 8.1-34

想法：三角形內角平分線定理：三角形任一內角的角平分線，內分對邊所成兩線段的比，等於夾這內角的兩邊的比。

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$	已知三角形 ABC 中，$\overline{AD}$為∠BAC 的角平分線 & 三角形內角平分線定理
(2) $10:6=\overline{BD}:\overline{DC}$	由(1) & 已知$\overline{AB}$＝10，$\overline{AC}$＝6
(3) 假設$\overline{BD}$＝10r、$\overline{DC}$＝6r	由(2) & 假設
(4) $\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{DC}$	如圖 & 全量等於分量之和
(5) $12=10r+6r$	由(4) & 已知$\overline{BC}$＝12 & (3) 假設
(6) $r=\frac{3}{4}$	由(5) & 解一元一次方程式
(7) $\overline{DC}=6r=6\times\frac{3}{4}=\frac{9}{2}$	由(3) 假設$\overline{DC}$＝6r & (6) $r=\frac{3}{4}$ 已證

習題 8.1-16

如圖 8.1-35，已知三角形 ABC 中，∠EAC 為∠BAC 的外角，$\overline{AF}$為∠EAC 的角平分線，若$\overline{AB}$＝10，$\overline{AC}$＝6，$\overline{BC}$＝8，則$\overline{FC}$＝？

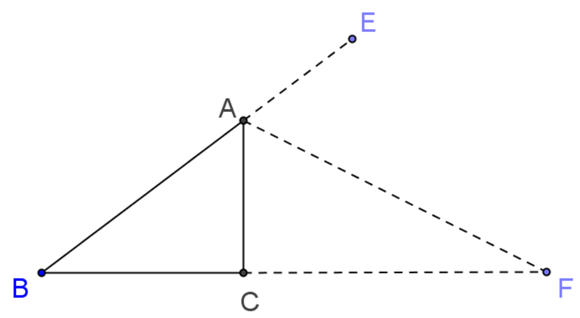


圖 8.1-35

想法： 三角形外角平分線定理：三角形任一外角的角平分線，外分對邊延長線所成兩線段的比，等於夾這外角的鄰角兩邊的比。

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BF}:\overline{FC}$	已知三角形 ABC 中，$\overline{AF}$為∠EAC 的角平分線 & 三角形外角平分線定理
(2) $10:6=(\overline{BC}+\overline{FC}):\overline{FC}$	由(1) & 已知$\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=6$ & $\overline{BF}=\overline{BC}+\overline{FC}$
(3) $10:6=(8+\overline{FC}):\overline{FC}$	由(2) & 已知$\overline{BC}=8$
(4) $10\times\overline{FC}=6\times(8+\overline{FC})$	由(3) & 外項乘積等於內項乘積
(5) $\overline{FC}=12$	由(4) & 解一元一次方程式

習題 8.2

習題 8.2-1

已知四邊形 ABCD～四邊形 EFGH，∠A＝90°，∠C＝75°，∠H＝105°，試求∠F。

想法：利用相似多邊形對應角相等

解：

敘述	理由
(1) ∠B＝∠F ＆∠D＝∠H＝105°	已知已知四邊形 ABCD～四邊形 EFGH ＆ 相似多邊形對應角相等 ＆ 已知∠H＝105°
(2) 四邊形 ABCD 中 ∠A＋∠B＋∠C＋∠D＝360°	四邊形內角和為(4－2)×180°＝360°
(3) ∠B＝360°－(∠A＋∠C＋∠D) ＝360°－(90°＋75°＋105°) ＝90°	由(2)移項 ＆ 已知∠A＝90°，∠C＝75° ＆ (1) ∠D＝∠H＝105° 已證
(4) 所以∠F＝∠B＝90°	由(1) ∠B＝∠F ＆ (3) ∠B＝90° 遞移律

習題 8.2-2

設四邊形 ABCD～四邊形 EFGH，$\angle A$：$\angle B$：$\angle C$＝3：5：7，且 $\angle D$＝60°，試求 $\angle F$、$\angle G$。

想法：利用相似多邊形對應角相等

解：

敘述	理由
(1) 假設 $\angle A$＝3r、$\angle B$＝5r、$\angle C$＝7r	已知 $\angle A$：$\angle B$：$\angle C$＝3：5：7 ＆假設
(2) 四邊形 ABCD 中 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$	四邊形內角和為$(4-2)\times180°=360°$
(3) $3r+5r+7r+60°=360°$	將(1) 假設 ＆ 已知 $\angle D$＝60° 代入(2)
(4) $r=(360°-60°)\div(3+5+7)=20°$	由(3) ＆ 解一元一次方程式
(5) $\angle B=5r=5\times20°=100°$ $\angle C=7r=7\times20°=140°$	將 (4) r＝20° 代入(1) 假設 $\angle B$＝5r 將 (4) r＝20° 代入(1) 假設 $\angle C$＝7r
(6) $\angle F=\angle B=100°$ $\angle G=\angle C=140°$	已知四邊形 ABCD～四邊形 EFGH ＆ 相似多邊形對應角相等 ＆ 由(5) $\angle B$＝100°、$\angle C$＝140° 已證

習題 8.2-3

如圖 8.2-47，已知△ABC～△DEC，且$\overline{AB}$＝6，$\overline{BC}$＝14，$\overline{DE}$＝9，試求$\overline{EC}$。

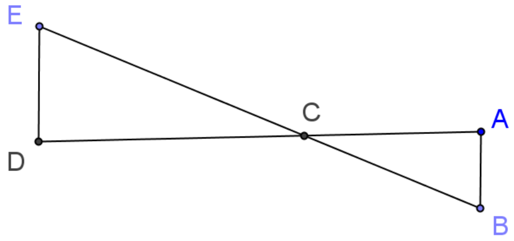


圖 8.2-47

想法：利用相似多邊形對應邊成比例

敘述	理由
(1) $\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{BC}:\overline{EC}$	已知△ABC～△DEC & 相似多邊形對應邊成比例
(2) 6：9＝14：$\overline{EC}$	將已知$\overline{AB}$＝6，$\overline{BC}$＝14，$\overline{DE}$＝9 代入(1)得
(3) 6×$\overline{EC}$＝9×14	由(2) & 外項乘積等於內項乘積
(4) $\overline{EC}$＝(9×14)÷6＝21	由(3) 移項

習題 8.2-4

已知四邊形 ABCD～四邊形 EFGH，若$\overline{BC}$＝10，$\overline{CD}$＝20，$\overline{FG}$＝4，試求$\overline{GH}$。

想法：利用相似多邊形對應邊成比例

解：

敘述	理由
(1) $\overline{BC}:\overline{FG}=\overline{CD}:\overline{GH}$	已知四邊形 *ABCD*～四邊形 *EFGH* & 相似多邊形對應邊成比例
(2) 10：4＝20：$\overline{EC}$	將已知$\overline{BC}$＝10，$\overline{CD}$＝20，$\overline{FG}$＝4 代入(1)得
(3) 10×$\overline{EC}$＝4×20	由(2) & 外項乘積等於內項乘積
(4) $\overline{EC}$＝(4×20)÷10＝8	由(3) 移項

習題 8.2-5

如圖 8.2-48，△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$，且$\overline{AD}=4$，$\overline{DB}=2$，$\overline{DE}=6$，試求$\overline{BC}$。

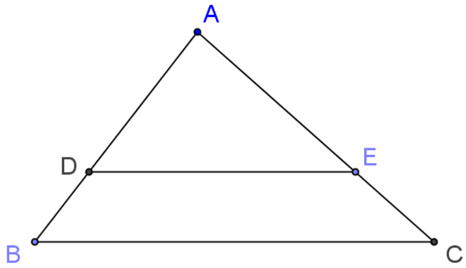


圖 8.2-48

想法：(1) 利用三角形(AAA)相似定理

(2) 相似多邊形對應邊成比例

解：

敘述	理由
(1) ∠ADE＝∠B ＆ ∠AED＝∠C	已知$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ＆ 同位角相等
(2) 在△ABC 與△ADE 中 ∠A＝∠A ∠ADE＝∠B ∠AED＝∠C	如圖 8.2-48 所示 共同角 由(1) 已證 由(1) 已證
(3) △ABC～△ADE	由(2) ＆ 根據三角形(AAA)相似定理
(4) $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{BC}:\overline{DE}$	由(3) ＆ 相似多邊形對應邊成比例
(5) $\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{DB}=4+2=6$	全量等於分量之和 ＆ 已知$\overline{AD}=4$，$\overline{DB}=2$
(6) $6:4=\overline{BC}:6$	將(5) $\overline{AB}=6$ 已證 ＆ 已知$\overline{AD}=4$、$\overline{DE}=6$ 代入(4)
(7) $6\times6=4\times\overline{BC}$	由(6) ＆ 外項乘積等於內項乘積
(8) $\overline{BC}=(6\times6)\div4=9$	由(7) 移項

習題 8.2-6

如圖 8.2-49，△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$，若$\overline{AD}$：$\overline{BD}$＝3：5，則$\overline{DE}$：$\overline{BC}$＝？

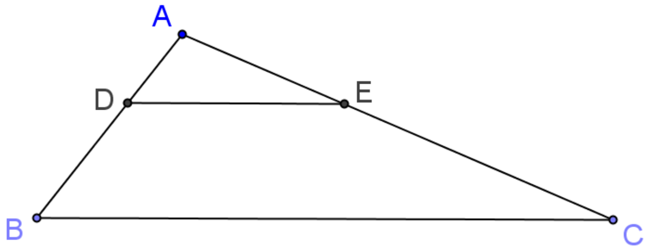


圖 8.2-49

想法：(1) 利用三角形(AAA)相似定理

(2) 相似多邊形對應邊成比例

解：

敘述	理由
(1) ∠ADE＝∠B ＆ ∠AED＝∠C	已知$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ＆ 同位角相等
(2) 在△ADE 與△ABC 中 ∠A＝∠A ∠B＝∠ADE ∠C＝∠AED	如圖 8.2-49 所示 共同角 由(1) 已證 由(1) 已證
(3) △ADE～△ABC	由(2) ＆ 根據三角形(AAA)相似定理
(4) $\overline{DE}$：$\overline{BC}$＝$\overline{AD}$：$\overline{AB}$	由(3) ＆ 相似多邊形對應邊成比例
(5) $\overline{BD}$：$\overline{AD}$＝5：3	已知$\overline{AD}$：$\overline{BD}$＝3：5 ＆ 反比定理
(6) ($\overline{BD}$＋$\overline{AD}$)：$\overline{AD}$＝(5＋3)：3	由(5) ＆ 合比定理
(7) $\overline{AB}$：$\overline{AD}$＝8：3	由(6) ＆ $\overline{AB}$＝$\overline{BD}$＋$\overline{AD}$
(8) $\overline{AD}$：$\overline{AB}$＝3：8	由(7) ＆ 反比定理
(9) $\overline{DE}$：$\overline{BC}$＝$\overline{AD}$：$\overline{AB}$＝3：8	由(4) ＆ (8) 遞移律

習題 8.2-7

如圖 8.2-50，△ABC 中，∠BDE＝∠A，且$\overline{DE}$：$\overline{AC}$＝3：5，若$\overline{BC}$＝20，$\overline{DB}$＝9，試求$\overline{AD}$和$\overline{BE}$。

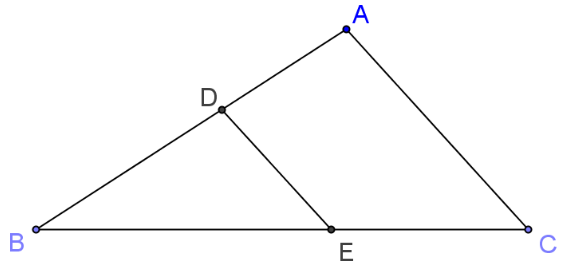


圖 8.2-50

想法：(1) 利用三角形(AAA)相似定理

(2) 相似多邊形對應邊成比例

解：

敘述	理由
(1) $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$	已知∠BDE＝∠A & 同位角相等的兩直線互相平行
(2) 在△DBE 與△ABC 中 ∠BDE＝∠A ∠B＝∠B ∠BED＝∠C	如圖 8.2-50 所示 已知 共同角 由(1) $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ & 同位角相等
(3) △DBE～△ABC	由(2) & 根據三角形(AAA)相似定理
(4) $\overline{DE}$：$\overline{AC}$＝$\overline{DB}$：$\overline{AB}$	由(3) & 相似多邊形對應邊成比例
(5) $\overline{DE}$：$\overline{AC}$＝$\overline{DB}$：($\overline{AD}$＋$\overline{DB}$)	由(4) & $\overline{AB}$＝$\overline{AD}$＋$\overline{DB}$
(6) 3：5＝9：($\overline{AD}$＋9)	將已知$\overline{DE}$：$\overline{AC}$＝3：5 & $\overline{DB}$＝9 代入(5)
(7) 3×($\overline{AD}$＋9)＝5×9	由(6) & 外項乘積等於內項乘積
(8) $\overline{AD}$＝(5×9)÷3－9＝6	由(7) & 解一元一次方程式
(9) $\overline{DE}$：$\overline{AC}$＝$\overline{BE}$：$\overline{BC}$	由(3) & 相似多邊形對應邊成比例
(10) 3：5＝$\overline{BE}$：20	將已知$\overline{DE}$：$\overline{AC}$＝3：5 & $\overline{BC}$＝20 代入(9)
(11) 5×$\overline{BE}$＝3×20	由(10) & 內項乘積等於外項乘積
(12) $\overline{BE}$＝(3×20)÷5＝12	由(11) 移項

(13) 所以$\overline{AD}=6$ & $\overline{BE}=12$	由(8) & (12)

習題 8.2-8

如圖 8.2-51，$\angle B=\angle E$，且$\overline{AB}=9$，$\overline{BC}=6$，$\overline{DE}=12$，試求$\overline{EC}$。

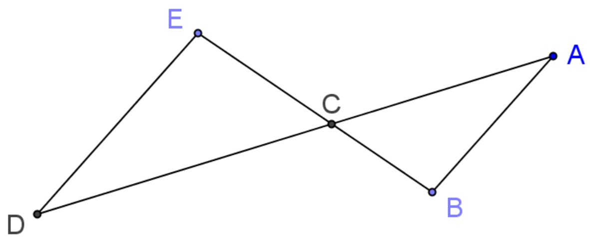


圖 8.2-51

想法：(1) 利用三角形(AAA)相似定理

(2) 相似多邊形對應邊成比例

解：

敘述	理由
(1) $\angle B=\angle E$	已知$\angle B=\angle E$
(2) $\angle ACB=\angle DCE$	對頂角相等
(3) $\angle B+\angle ACB=\angle E+\angle DCE$	由(1)式加(2)式 等量加法公理
(4) $\triangle ABC$ 中，$\angle A=180°-(\angle B+\angle ACB)$	三角形內角和 180°
(5) $\triangle DEC$ 中，$\angle D=180°-(\angle E+\angle DCE)$	三角形內角和 180°
(6) $\angle A=180°-(\angle B+\angle ACB)$ $=180°-(\angle E+\angle DCE)=\angle D$	由(3)、(4) & (5) 代換
(7) 在$\triangle ABC$與$\triangle DEC$中 $\angle A=\angle D$ $\angle B=\angle E$ $\angle ACB=\angle DCE$	如圖 8.2-51 所示 由(6) 已證 已知$\angle B=\angle E$ 由(2) 對頂角相等
(8) $\triangle ABC\sim\triangle DEC$	由(7) & 根據三角形(AAA)相似定理
(9) $\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{BC}:\overline{EC}$	由(8) & 相似多邊形對應邊成比例
(10) $9:12=6:\overline{EC}$	將已知$\overline{AB}=9$，$\overline{BC}=6$， $\overline{DE}=12$ 代入(9)得

(11) $9 \times \overline{EC} = 12 \times 6$	由(10) & 外項乘積等於內項乘積
(12) $\overline{EC} = (12 \times 6) \div 9 = 8$	由(11) 移項

習題 8.2-9

如圖 8.2-52，△ABC 中，若$\overline{AD}\perp\overline{BC}$且$\overline{BE}\perp\overline{AC}$，求證△AFE～△BFD。

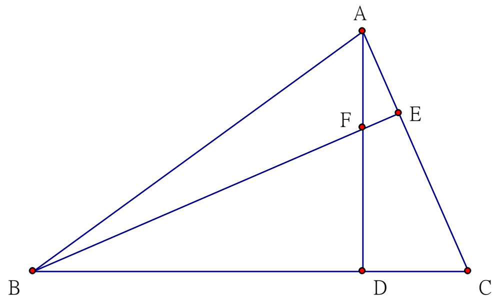


圖 8.2-52

想法：利用三角形(AAA)相似定理

證明：

敘述	理由
(1) ∠BDF＝∠AEF＝90°	已知$\overline{AD}\perp\overline{BC}$且$\overline{BE}\perp\overline{AC}$
(2) ∠AFE＝∠BFD	對頂角相等
(3) △AFE 中，	如圖 8.2-52 所示
∠EAF＝180°－(∠AEF＋∠AFE)	三角形內角和為 180°
＝180°－(90°＋∠AFE)	由(1) ∠AEF＝90°
＝90°－∠AFE	化簡
(4) △BFD 中，	如圖 8.2-52 所示
∠DBF＝180°－(∠BDF＋∠BFD)	三角形內角和為 180°
＝180°－(90°＋∠BFD)	由(1) ∠BDF＝90°
＝90°－∠BFD	化簡
＝90°－∠AFE＝∠EAF	由(2) & (3) 代換
(5) 在△AFE 與△BFD 中	如圖 8.2-52 所示
∠AEF＝∠BDF	由(1) 已證
∠AFE＝∠BFD	對頂角相等
∠EAF＝∠DBF	由(4) 已證
(6) △AFE～△BFD	由(5) & 根據三角形(AAA)相似定理

習題 8.2-10

如圖 8.2-53，∠C＝∠D＝90°，若$\overline{AC}$＝6，$\overline{AE}$＝8，$\overline{BD}$＝3，則$\overline{BE}$＝？

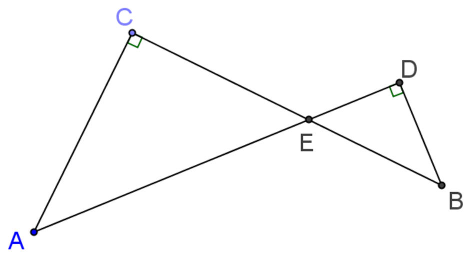


圖 8.2-53

想法：(1) 利用三角形(AAA)相似定理

(2) 相似多邊形對應邊成比例

證明：

敘述	理由
(1) ∠AEC＝∠BED	對項角相等
(2) △AEC 中， ∠A＝180°－(∠AEC＋∠C) ＝180°－(∠AEC＋90°) ＝90°－∠AEC	如圖 8.2-53 所示 三角形內角和為 180° 已知∠C＝90° 化簡
(3) △BED 中， ∠B＝180°－(∠BED＋∠D) ＝180°－(∠BED＋90°) ＝90°－∠BED ＝90°－∠AEC＝∠A	如圖 8.2-53 所示 三角形內角和為 180° 已知∠D＝90° 化簡 由(1) & (2) 代換
(4) 在△AEC 與△BED 中 ∠C＝∠D ∠AEC＝∠BED ∠A＝∠B	如圖 8.2-53 所示 已知∠C＝∠D＝90° 對頂角相等 由(3) 已證
(5) △AEC～△BED	由(4) & 根據三角形(AAA)相似定理
(6) $\overline{AC}$：$\overline{BD}$＝$\overline{AE}$：$\overline{BE}$	由(5) & 相似多邊形對應邊成比例
(7) 6：3＝8：$\overline{BE}$	將已知$\overline{AC}$＝6，$\overline{AE}$＝8，$\overline{BD}$＝3 代入(6)式得
(8) 6×$\overline{BE}$＝3×8	由(7) & 內項乘積等於外項乘積
(9) $\overline{BE}$＝(3×8)÷6＝4	由(8) 移項

習題 8.2-11

如圖 8.2-54，△ABC 中，若$\overline{AB}=\overline{AC}=12$，$\overline{BC}=\overline{BD}=6$，則$\overline{AD}=$？

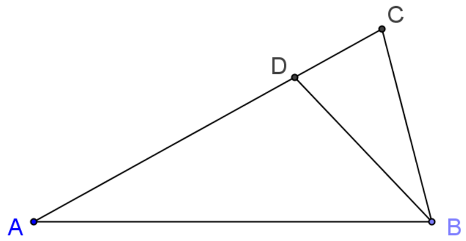


圖 8.2-54

想法：(1) 利用三角形(AAA)相似定理

(2) 相似多邊形對應邊成比例

解：

敘述	理由
(1) △ABC 為等腰三角形	已知$\overline{AB}=\overline{AC}$ & 兩腰等長為等腰三角形
(2) ∠ABC＝∠C	由(1) & 等腰三角形兩底角相等
(3) △BDC 為等腰三角形	已知$\overline{BC}=\overline{BD}$ & 兩腰等長為等腰三角形
(4) ∠BDC＝∠C	由(3) & 等腰三角形兩底角相等
(5) ∠ABC＝∠BDC＝∠C	由(2) & (4) 遞移律
(6) △ABC 中，∠A＝180°－(∠ABC＋∠C) ＝180°－(∠C＋∠C) ＝180°－2∠C	三角形內角和 180° & 由(2) ∠ABC＝∠C
(7) △BDC 中，∠DBC＝180°－(∠BDC＋∠C) ＝180°－(∠C＋∠C) ＝180°－2∠C	三角形內角和 180° 由(4) ∠BDC＝∠C
(8) ∠A＝∠DBC	由(6) & (7) 遞移律
(9) 在△ABC 與△BDC 中 ∠A＝∠DBC ∠ABC＝∠BDC ∠C＝∠C	如圖 8.2-54 所示 由(8) 已證 由(5) ∠ABC＝∠BDC 已證 共同角

(10) △ABC～△BDC	由(9) ＆ 根據三角形(AAA)相似定理
(11) $\overline{AB}：\overline{BD}＝\overline{BC}：\overline{DC}$	由(10) ＆ 相似多邊形對應邊成比例
(12) $12：6＝6：\overline{DC}$	將已知$\overline{AB}＝12$，$\overline{BC}＝\overline{BD}＝6$代入(11)得
(13) $12\times\overline{DC}＝6\times6$	由(12) ＆ 外項乘積等於內項乘積
(14) $\overline{DC}＝(6\times6)\div12＝3$	由(13) 移項
(15) $\overline{AD}＝\overline{AC}－\overline{DC}＝12－3＝9$	如圖$\overline{AD}＝\overline{AC}－\overline{DC}$ ＆ 已知$\overline{AC}＝12$ ＆ 由(14) $\overline{DC}＝3$ 已證

習題 8.2-12

如圖 8.2-55，△ABC～△A'B'C'，$\overline{AD}$與$\overline{A'D'}$分別為$\overline{BC}$與$\overline{B'C'}$上的高，若$\overline{BC}$＝24 公分，$\overline{B'C'}$＝18 公分，$\overline{AD}$＝16 公分，則$\overline{A'D'}$＝？

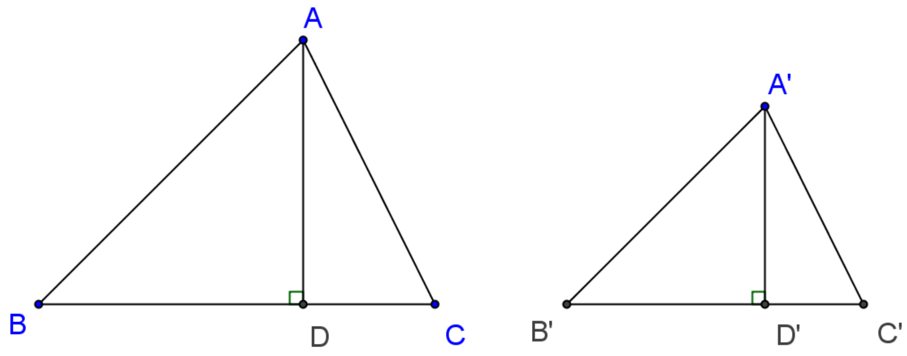


圖 8.2-55

想法：相似三角形對應高的比等於對應邊的比

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AD}$：$\overline{A'D'}$＝$\overline{BC}$：$\overline{B'C'}$	已知△ABC～△A'B'C'，$\overline{AD}$與$\overline{A'D'}$分別為$\overline{BC}$與$\overline{B'C'}$上的高 & 相似三角形對應高的比等於對應邊的比
(2) 16 公分：$\overline{A'D'}$＝24 公分：18 公分	由(1) & 已知$\overline{BC}$＝24 公分，$\overline{B'C'}$＝18 公分，$\overline{AD}$＝16 公分
(3) $\overline{A'D'}$×24 公分＝16 公分×18 公分	由(2) 內項乘積等於外項乘積
(4) $\overline{A'D'}$＝(16 公分×18 公分)÷24 公分 ＝12 公分	由(3) 移項

習題 8.2-13

如圖 8.2-56，設$\overline{AB}$為圓之直徑，$\overline{BD}$切圓於 B 點，$\overline{AD}$與圓周相交於 E 點，

求證：

(a) $\overline{AB}^2=\overline{AE}\times\overline{AD}$

(b) $\overline{EB}^2=\overline{EA}\times\overline{ED}$

(c) $\overline{DB}^2=\overline{DE}\times\overline{DA}$

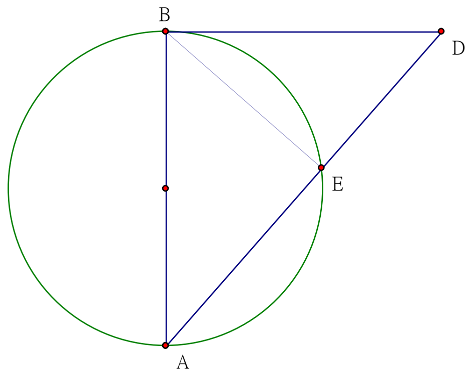


圖 8.2-56

想法：(1) 切線與過切點的半徑互相垂直

(2) 直徑所對的圓周角為直角

(3) 直角三角形中比例中項定理

(4) 直角三角形中直角邊比例中項定理

證明：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}\perp\overline{BD}$，$\triangle$ABD 為直角三角形	已知$\overline{AB}$為圓之直徑，$\overline{BD}$切圓於 B 點 & 切線與過切點的半徑互相垂直
(2) $\angle$BEA$=90°$，$\overline{BE}\perp\overline{AD}$	已知$\overline{AB}$為圓之直徑，$\overline{AD}$與圓周相交於 E 點 & 直徑所對的圓周角為直角
(3) $\overline{EB}^2=\overline{EA}\times\overline{ED}$	由(1)&(2) 直角三角形中比例中項定理
(4) $\overline{AB}^2=\overline{AE}\times\overline{AD}$ & $\overline{DB}^2=\overline{DE}\times\overline{DA}$	由(1) & (2) 直角三角形中直角邊比例中項定理

習題 8.2-14

如圖 8.2-57，△ABC 中，已知∠ABC＝90°，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$，且$\overline{DA}$＝5、$\overline{DC}$＝10，則：(1) $\overline{DB}$＝？　(2) $\overline{AB}$＝？　(3) $\overline{CB}$＝？

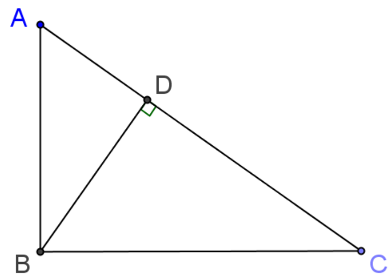


圖 8.2-57

想法：(1) 直角三角形中比例中項定理

(2) 直角三角形中直角邊比例中項定理

解：

敘述	理由
(1) $\overline{DB}^2=\overline{DA}\times\overline{DC}$	已知∠ABC＝90°，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$ & 直角三角形中比例中項定理
(2) $\overline{DB}^2=5\times10$	由(1) & 已知$\overline{DA}$＝5、$\overline{DC}$＝10
(3) $\overline{DB}=\pm5\sqrt{2}$	由(2) & 求平方根
(4) 所以$\overline{DB}=5\sqrt{2}$	由(3) & $\overline{DB}$為線段長度必大於 0
(5) $\overline{AB}^2=\overline{AC}\times\overline{AD}$	已知∠ABC＝90°，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$ & 直角三角形中直角邊比例中項定理
(6) $\overline{AB}^2=15\times5$	由(5) & $\overline{AC}=\overline{DA}+\overline{DC}$ & 已知$\overline{DA}$＝5、$\overline{DC}$＝10
(7) $\overline{AB}=\pm5\sqrt{3}$	由(6) & 求平方根
(8) 所以$\overline{AB}=5\sqrt{3}$	由(7) & $\overline{AB}$為線段長度必大於 0
(9) $\overline{CB}^2=\overline{CA}\times\overline{CD}$	已知∠ABC＝90°，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$ & 直角三角形中直角邊比例中項定理
(10) $\overline{CB}^2=15\times10$	由(9) & $\overline{CA}=\overline{DA}+\overline{DC}$ & 已知$\overline{DA}$＝5、$\overline{DC}$＝10
(11) $\overline{CB}=\pm5\sqrt{6}$	由(10) & 求平方根
(12) 所以$\overline{CB}=5\sqrt{6}$	由(11) & $\overline{CB}$為線段長度必大於 0

(13) 所以$\overline{DB}=5\sqrt{2}$ $\overline{AB}=5\sqrt{3}$ $\overline{CB}=5\sqrt{6}$	由(4)、(8) & (12) 已證

習題 8.2-15

如圖 8.2-58，△ABC 中，已知∠ABC＝90°，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$，且$\overline{AB}$＝9、$\overline{BC}$＝12、$\overline{AC}$＝15，則：(1) $\overline{AD}$＝？ (2) $\overline{CD}$＝？ (3) $\overline{BD}$＝？

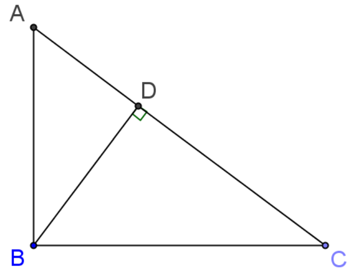


圖 8.2-58

想法：(1) 直角三角形中比例中項定理

(2) 直角三角形中直角邊比例中項定理

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}^2=\overline{AC}\times\overline{AD}$	已知∠ABC＝90°，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$ & 直角三角形中直角邊比例中項定理
(2) $9^2=15\times\overline{AD}$	由(1) & 已知$\overline{AB}$＝9、$\overline{AC}$＝15
(3) $\overline{AD}=9^2\div15=5.4$	由(2) 移項
(4) $\overline{CB}^2=\overline{CA}\times\overline{CD}$	已知∠ABC＝90°，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$ & 直角三角形中直角邊比例中項定理
(5) $12^2=15\times\overline{CD}$	由(4) & 已知$\overline{BC}$＝12、$\overline{AC}$＝15
(6) $\overline{CD}=12^2\div15=9.6$	由(5) 移項
(7) $\overline{DB}^2=\overline{DA}\times\overline{DC}$	已知∠ABC＝90°，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$ & 直角三角形中比例中項定理
(8) $\overline{DB}^2=5.4\times9.6$	將(3) $\overline{AD}$＝5.4 & (6) $\overline{CD}$＝9.6 代入(7)得
(9) $\overline{DB}=\pm\sqrt{5.4\times9.6}$ $=\pm7.2$	由(8) & 求平方根
(10) 所以$\overline{DB}$＝7.2	由(9) & $\overline{DB}$為線段長度必大於 0
(11) 所以$\overline{AD}$＝5.4 $\overline{CD}$＝9.6 $\overline{DB}$＝7.2	由(3)、(6) & (10) 已證

習題 8.2-16

如圖 8.2-59，△ABC 與△EDC 中，$\overline{CA}=6$，$\overline{CB}=12$，$\overline{CE}=10$，$\overline{CD}=20$，則△ABC 與△EDC 是否相似？為什麼？

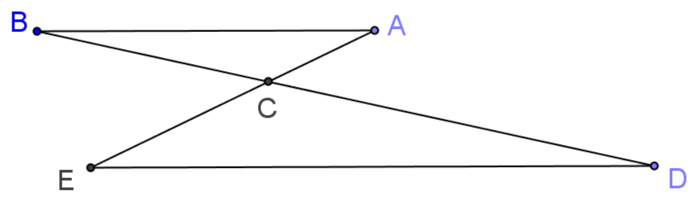


圖 8.2-59

想法：利用三角形(SAS)相似定理

解：

敘述	理由
(1) $\overline{CB}:\overline{CD}=12:20=3:5$	已知$\overline{CB}=12$、$\overline{CD}=20$ & 倍比定理
(2) $\overline{CA}:\overline{CE}=6:10=3:5$	已知$\overline{CA}=6$、$\overline{CE}=10$ & 倍比定理
(3) 在△ABC 與△EDC 中， ∠ACB＝∠ECD $\overline{CB}:\overline{CD}=\overline{CA}:\overline{CE}$	如圖 8.2-59 所示 對頂角相等 由(1) & (2) 遞移律
(4) 所以△ABC～△EDC	由(3) & 根據三角形(SAS)相似定理

習題 8.2-17

如圖 8.2-60，△ABC 中，$\overline{AE}$＝4，$\overline{BE}$＝6，$\overline{BD}$＝3，$\overline{CD}$＝17，則：

(1) △BAC 與△BDE 是否相似？為什麼？

(2) 若$\overline{AC}$＝16，試求$\overline{DE}$。

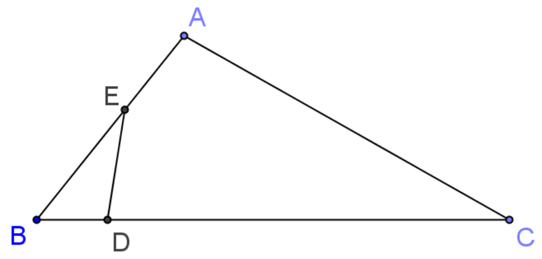


圖 8.2-60

想法：利用三角形(SAS)相似定理

解：

	敘述	理由
(1)	$\overline{BA}=\overline{BE}+\overline{AE}=6+4=10$	全量等於分量之和 & 已知$\overline{AE}$＝4、$\overline{BE}$＝6
(2)	$\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}=3+17=20$	全量等於分量之和 & 已知$\overline{BD}$＝3、$\overline{CD}$＝17
(3)	$\overline{BA}:\overline{BD}=10:3$	由(1)$\overline{BA}$＝10 已證、已知$\overline{BD}$＝3
(4)	$\overline{BC}:\overline{BE}=20:6=10:3$	由(2)$\overline{BC}$＝20 已證、已知$\overline{BE}$＝6 & 倍比定理
(5)	在△BAC 與△BDE 中， ∠B＝∠B $\overline{BA}:\overline{BD}=\overline{BC}:\overline{BE}$	如圖 8.2-60 所示 共同角 由(3) & (4) 遞移律
(6)	所以△BAC～△BDE	由(5) & 根據三角形(SAS)相似定理
(7)	$\overline{AC}:\overline{DE}=\overline{BC}:\overline{BE}$	由(6) & 相似多邊形對應邊成比例
(8)	$16:\overline{DE}=10:3$	將已知$\overline{AC}$＝16 & (4) $\overline{BC}:\overline{BE}=10:3$ 已證代入(7)得
(9)	$\overline{DE}\times 10=16\times 3$	由(8) & 內項乘積等於外項乘積
(10)	$\overline{DE}=(16\times 3)\div 10=4.8$	由(9) 移項

習題 8.2-18

如圖 8.2-61，$\overline{AB}$＝18，$\overline{BC}$＝24，$\overline{CA}$＝12，$\overline{DC}$＝8，$\overline{AD}$＝16，則：

(1) 證明：△ABC～△CAD

(2) ∠ACD 與△ABC 的哪個角相等？

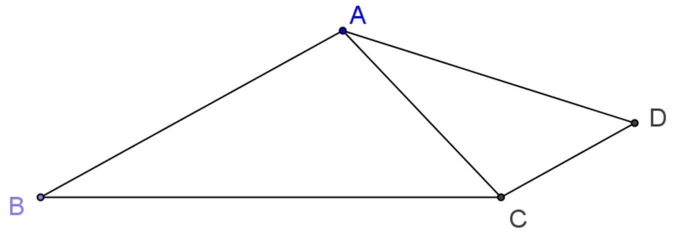


圖 8.2-61

想法：(1) 利用三角形(SSS)相似定理

(2) 相似多邊形對應角相等

解：

敘述	理由
(1) 在△ABC 與△CAD 中 $\overline{AB}$：$\overline{CA}$＝18：12＝3：2 $\overline{BC}$：$\overline{AD}$＝24：16＝3：2 $\overline{CA}$：$\overline{DC}$＝12：8＝3：2	如圖 8.2-61 所示 已知$\overline{AB}$＝18、$\overline{CA}$＝12 & 倍比定理 已知$\overline{BC}$＝24、$\overline{AD}$＝16 & 倍比定理 已知$\overline{CA}$＝12、$\overline{DC}$＝8 & 倍比定理
(2) $\overline{AB}$：$\overline{CA}$＝$\overline{BC}$：$\overline{AD}$＝$\overline{CA}$：$\overline{DC}$	由(1) & 遞移律
(3) 所以△ABC～△CAD	由(2) & 根據三角形(SSS)相似定理
(4) ∠ACD＝∠BAC	由(3) & 相似多邊形對應角相等

習題 8.2-19

如圖 8.2-62，弦$\overline{AB}$與弦$\overline{CD}$交於 P 點。若$\overline{PA}=5$，$\overline{PB}=6$，則$\overline{PC}\times\overline{PD}=$______。

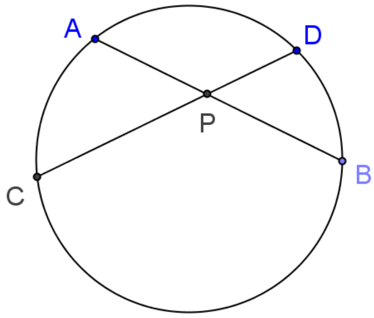


圖 8.2-62

想法：利用圓內冪性質來解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{PC}\times\overline{PD}=\overline{PA}\times\overline{PB}$	已知弦$\overline{AB}$與弦$\overline{CD}$交於 P 點 & 圓內冪性質
(2) $\overline{PC}\times\overline{PD}=5\times6=30$	由(1) & 已知$\overline{PA}=5$，$\overline{PB}=6$

習題 8.2-20

如圖 8.2-63，圓的兩弦 $\overline{AB}$和$\overline{CD}$相交於 P 點。若$\overline{CP}=15$，$\overline{DP}=4$，$\overline{BP}=5$，則$\overline{PA}=$________。

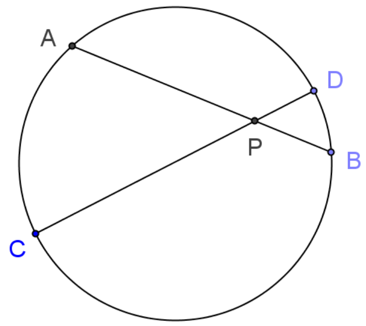


圖 8.2-63

想法：利用圓內冪性質來解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$	已知弦$\overline{AB}$與弦$\overline{CD}$交於 P 點 & 圓內冪性質
(2) $\overline{PA}\times5=15\times4$	由(1) & 已知$\overline{CP}=15$，$\overline{DP}=4$，$\overline{BP}=5$
(3) $\overline{PA}=(15\times4)\div5=12$	由(2) 移項

習題 8.2-21

如圖 8.2-64，圓的兩弦$\overline{AB}$和$\overline{CD}$相交於 E 點，且$\overline{AE}>\overline{BE}$。若$\overline{CE}=15$，$\overline{DE}=5$，$\overline{AB}=28$，則$\overline{AE}=$______。

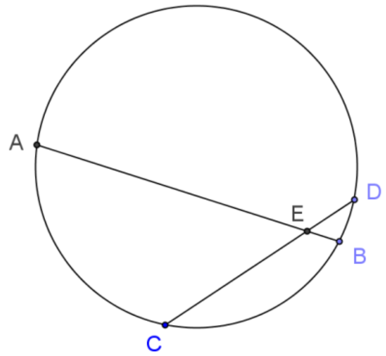


圖 8.2-64

想法：利用圓內冪性質來解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}=\overline{AE}+\overline{BE}$	如圖 8.2-64 所示，全量等於分量之和
(2) $\overline{BE}=\overline{AB}-\overline{AE}=28-\overline{AE}$	由(1) 移項 & 已知$\overline{AB}=28$
(3) $\overline{AE}\times\overline{BE}=\overline{CE}\times\overline{DE}$	已知圓的兩弦$\overline{AB}$和$\overline{CD}$相交於 E 點 & 圓內冪性質
(4) $\overline{AE}\times(28-\overline{AE})=15\times5$	將(2) $\overline{BE}=28-\overline{AE}$ 已證 & 已知$\overline{CE}=15$，$\overline{DE}=5$ 代入(3)
(5) $\overline{AE}=3$ 或 $\overline{AE}=25$	由(4) & 解一元二次方程式
(6) 當$\overline{AE}=3$ 時， $\overline{BE}=28-\overline{AE}=28-3=25$ 不合	將(5) $\overline{AE}=3$ 代入 (2) $\overline{BE}=28-\overline{AE}$ & 已知$\overline{AE}>\overline{BE}$
(7) 當$\overline{AE}=25$ 時， $\overline{BE}=28-\overline{AE}=28-25=3$	將(5)$\overline{AE}=25$ 代入 (2) $\overline{BE}=28-\overline{AE}$ & 已知$\overline{AE}>\overline{BE}$
(8) 所以$\overline{AE}=25$	由(7)

習題 8.2-22

如圖 8.2-65，通過圓外一點 P，作兩條割線，分別與圓交於 A、B 及 C、D\ 四點。已知$\overline{PA}$＝6，$\overline{PB}$＝15，$\overline{PC}$＝5，則$\overline{PD}$＝？

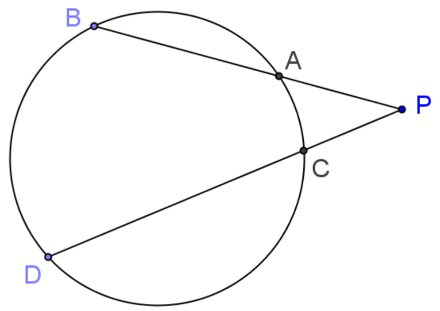


圖 8.2-65

想法： 利用圓外冪性質解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$	已知通過圓外一點 P，作兩條割線，分別與圓交於 A、B 及 C、D 四點 & 圓外冪性質
(2) $6\times15=5\times\overline{PD}$	由(1) & 已知$\overline{PA}$＝6，$\overline{PB}$＝15，$\overline{PC}$＝5
(3) $\overline{PD}=6\times15\div5=18$	由(2) 移項

習題 8.2-23

如圖 8.2-66，若圓的兩弦$\overline{AB}$與$\overline{CD}$延長線相交於圓外一點 P。已知$\overline{PA}=4$，$\overline{PC}=5$，$\overline{AB}=6$，則$\overline{CD}=$________。

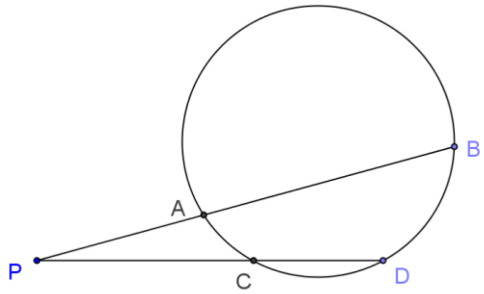


圖 8.2-66

想法：利用圓外冪性質解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$	已知圓的兩弦$\overline{AB}$與$\overline{CD}$延長線相交於圓外一點 P ＆ 圓外冪性質
(2) $\overline{PA}\times(\overline{PA}+\overline{AB})=\overline{PC}\times(\overline{PC}+\overline{CD})$	由(1) ＆ $\overline{PB}=\overline{PA}+\overline{AB}$、$\overline{PD}=\overline{PC}+\overline{CD}$
(3) $4\times(4+6)=5\times(5+\overline{CD})$	由(2) ＆ 已知$\overline{PA}=4$，$\overline{PC}=5$，$\overline{AB}=6$
(4) $\overline{CD}=[4\times(4+6)-5\times5]\div5=3$	由(3) ＆ 解一元一次方程式

習題 8.2-24

如圖 8.2-67，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為圓的兩弦，且兩弦的延長線相交於 P 點。

若$\overline{AB}=\overline{AP}=x$，$\overline{PC}=x-2$，$\overline{CD}=3x-4$，則$\overline{CD}=$？

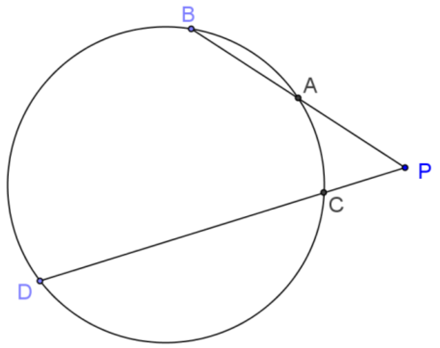


圖 8.2-67

想法：利用圓外冪性質解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$	已知$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為圓的兩弦，且兩弦的延長線相交於 P 點 & 圓外冪性質
(2) $\overline{PA}\times(\overline{PA}+\overline{AB})=\overline{PC}\times(\overline{PC}+\overline{CD})$	由(1) & $\overline{PB}=\overline{PA}+\overline{AB}$、$\overline{PD}=\overline{PC}+\overline{CD}$
(3) $x(x+x)=(x-2)[(x-2)+(3x-4)]$	由(2) & 已知$\overline{AB}=\overline{AP}=x$，$\overline{PC}=x-2$，$\overline{CD}=3x-4$
(4) $x=1$ 或 $x=6$	由(3) & 解一元二次方程式
(5) 當 $x=1$ 時， $\overline{PC}=x-2=1-2=-1$ 不合	將(4) $x=1$ 代入已知$\overline{PC}=x-2$ & $\overline{PC}$為線段長度必大於 0
(6) 當 $x=6$ 時， $\overline{AB}=\overline{AP}=x=6$ $\overline{PC}=x-2=6-2=4$ $\overline{CD}=3x-4=3\times 6-4=14$	將(4) $x=6$ 代入已知 $\overline{AB}=\overline{AP}=x$ $\overline{PC}=x-2$ $\overline{CD}=3x-4$
(7) 所以$\overline{CD}=14$	由(6) $\overline{CD}=14$ 已證

習題 8.2-25

如圖 8.2-68，$\overline{PA}$切圓於 A 點，$\overline{PD}$為割線且交圓於 C、D 兩點。若$\overline{PA}$＝8，$\overline{PD}$＝16，則$\overline{PC}$＝？

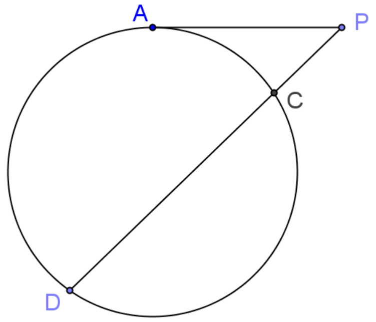


圖 8.2-68

想法：利用圓切冪性質解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{PA}^2=\overline{PD}\times\overline{PC}$	已知$\overline{PA}$切圓於 A 點，$\overline{PD}$為割線且交圓於 C、D 兩點 ＆ 圓切冪性質
(2) $8^2=16\times\overline{PC}$	由(1) ＆ 已知$\overline{PA}$＝8，$\overline{PD}$＝16
(3) $\overline{PC}=8^2\div16=4$	由(2) 移項

習題 8.2-26

如圖 8.2-69，$\overline{PA}$切圓於 A 點，$\overline{PD}$為割線且交圓於 C、D 兩點。若$\overline{PC}=4$，$\overline{CD}=12$，則$\overline{PA}=$？

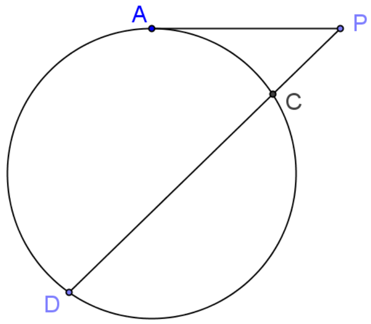


圖 8.2-69

想法：利用圓切冪性質解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{PA}^2=\overline{PD}\times\overline{PC}$	已知$\overline{PA}$切圓於 A 點，$\overline{PD}$為割線且交圓於 C、D 兩點 & 圓切冪性質
(2) $\overline{PA}^2=(\overline{PC}+\overline{CD})\times\overline{PC}$	由(1) & $\overline{PD}=\overline{PC}+\overline{CD}$
(3) $\overline{PA}^2=(4+12)\times4$	由(2) & 已知$\overline{PC}=4$，$\overline{CD}=12$
(4) $\overline{PA}=8$ 或 $\overline{PA}=-8$	由(3) 求平方根
(5) 所以$\overline{PA}=8$	由(4) & $\overline{PA}$為線段長度必大於 0

習題 8.3

習題 8.3-1

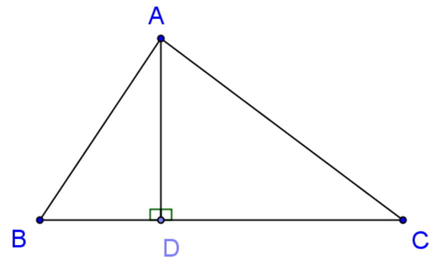


圖 8.3-54

已知：如圖 8.3-54，$\overline{AD}$為△ABC 中$\overline{BC}$上的高

求證：$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=\overline{BD}^2-\overline{CD}^2$

想法：利用畢氏定理來證明

證明：

敘述	理由
(1) $\overline{AD}\perp\overline{BC}$，∠ADB＝∠ADC＝90°	已知$\overline{AD}$為△ABC 中$\overline{BC}$上的高
(2) △ADB 為直角三角形 $\overline{AB}^2=\overline{BD}^2+\overline{AD}^2$	由(1) ∠ADB＝90° 畢氏定理
(3) △ADC 為直角三角形 $\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2$	由(1) ∠ADC＝90° 畢氏定理
(4) $\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=(\overline{BD}^2+\overline{AD}^2)-(\overline{AD}^2+\overline{CD}^2)$	由(2)式－(3)式得
(5) 所以$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=\overline{BD}^2-\overline{CD}^2$	由(4) 化簡

習題 8.3-2

如圖 8.3-55，已知△ABC、△ACD、△ADE 為直角三角形，其中 ∠B＝∠ACD＝∠ADE＝90°，且$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=1$，求$\overline{AE}=$？

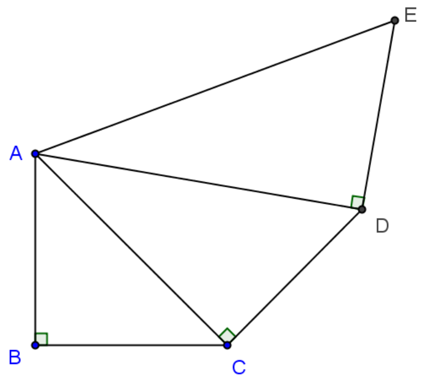


圖 8.3-55

想法：利用畢氏定理解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$	已知△ABC 為直角三角形，∠B＝90° & 畢氏定理
(2) $1^2+1^2=\overline{AC}^2$	由(1) & 已知$\overline{AB}=\overline{BC}=1$
(3) $\overline{AC}=-\sqrt{2}$ 或 $\overline{AC}=\sqrt{2}$	由(2) 求平方根
(4) 所以$\overline{AC}=\sqrt{2}$	由(3) & $\overline{AC}$為線段長度必大於 0
(5) $\overline{AC}^2+\overline{CD}^2=\overline{AD}^2$	已知△ACD 為直角三角形，∠ACD＝90° & 畢氏定理
(6) $\sqrt{2}^{\,2}+1^2=\overline{AD}^2$	由(5) & 已知$\overline{CD}=1$、(4) $\overline{AC}=\sqrt{2}$
(7) $\overline{AD}=-\sqrt{3}$ 或 $\overline{AD}=\sqrt{3}$	由(6) 求平方根
(8) 所以$\overline{AD}=\sqrt{3}$	由(7) & $\overline{AD}$為線段長度必大於 0
(9) $\overline{AD}^2+\overline{DE}^2=\overline{AE}^2$	已知△ADE 為直角三角形，∠ADE＝90° & 畢氏定理
(10) $\sqrt{3}^{\,2}+1^2=\overline{AE}^2$	由(9) & 已知$\overline{DE}=1$、(8) $\overline{AD}=\sqrt{3}$
(11) $\overline{AE}=-2$ 或 $\overline{AE}=2$	由(10) 求平方根
(12) 所以$\overline{AE}=2$	由(11) & $\overline{AE}$為線段長度必大於 0

習題 8.3-3

如圖 8.3-56，$\overline{AE}\perp\overline{BC}$，∠B＝30°，∠ADE＝60°，∠C＝45°，若$\overline{AD}$＝2，求$\overline{BD}$與$\overline{AC}$之值。

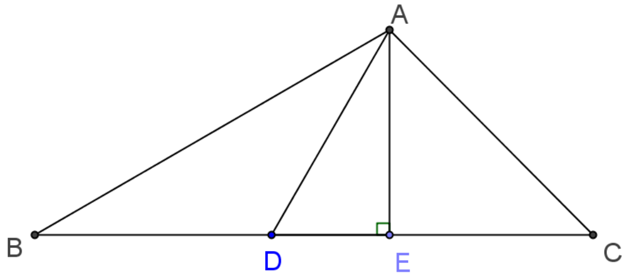


圖 8.3-56

想法：(1) 利用 30°-90°-60°的直角三角形邊長比為 1：2：$\sqrt{3}$

(2) 等腰直角三角形邊長比為 1：1：$\sqrt{2}$

解：

敘述	理由
(1) ∠AEB＝∠AEC＝90°	已知$\overline{AE}\perp\overline{BC}$
(2) △AED 中， ∠DAE＋∠ADE＋∠AED＝180°	如圖 8.3-56 所示 三角形內角和 180°
(3) ∠DAE＝180°－∠ADE－∠AED ＝180°－60°－90° ＝30°	由(3) 移項 將已知∠ADE＝60° & (1) ∠AEB＝90° 代入
(4) △AED 為 30°-90°-60°的直角三角形	由(3) ∠DAE＝30° & 已知∠ADE＝60° &(1)∠AEB＝90°
(5) $\overline{DE}$：$\overline{AD}$：$\overline{AE}$＝1：2：$\sqrt{3}$	由(4) & 30°-90°-60°的直角三角形邊長比為 1：2：$\sqrt{3}$
(6) $\overline{DE}$：2：$\overline{AE}$＝1：2：$\sqrt{3}$	由(5) & 已知$\overline{AD}$＝2
(7) $\overline{DE}$＝1 & $\overline{AE}$＝$\sqrt{3}$	由(6)
(8) △BAE 中， ∠B＋∠AEB＋∠BAE＝180°	如圖 8.3-56 所示 三角形內角和 180°
(9) ∠BAE＝180°－∠AEB－∠B ＝180°－90°－30°＝60°	由(8) 移項 將已知∠B＝30° & (1)∠AEB＝90° 代入
(10) △BEA 為 30°-90°-60°的直角三角形	由(1) ∠AEB＝90°、(9) ∠BAE＝60°

	& 已知∠B＝30°
(11) $\overline{AE}:\overline{AB}:\overline{BE}=1:2:\sqrt{3}$	由(10) & 30°-90°-60°的直角三角形邊長比為 $1:2:\sqrt{3}$
(12) $\overline{AE}:\overline{BE}=1:\sqrt{3}$	由(11)
(13) $\overline{BE}=\overline{AE}\times\sqrt{3}=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$	由(12) & 內項乘積等於外項乘積 & (7) $\overline{AE}=\sqrt{3}$ 已證
(14) $\overline{BE}=\overline{BD}+\overline{DE}$	如圖所示，全量等於分量之和
(15) $\overline{BD}=\overline{BE}-\overline{DE}=3-1=2$	由(14) 移項 & (13) $\overline{BE}=3$ & (7) $\overline{DE}=1$ 已證
(16) △AEC 中， ∠C＋∠AEC＋∠CAE＝180°	如圖 8.3-56 所示 三角形內角和 180°
(17) ∠CAE＝180°－∠C－∠AEC ＝180°－45°－90° ＝45°	由(16) 移項 已知∠C＝45° & (1) ∠AEC＝90°
(18) △AEC 為等腰直角三角形	由(17) ∠CAE＝45°、(1) ∠AEC＝90° & 已知∠C＝45°
(19) $\overline{AE}:\overline{EC}:\overline{AC}=1:1:\sqrt{2}$	由(18) & 等腰直角三角形邊長比為 $1:1:\sqrt{2}$
(20) $\overline{AE}:\overline{AC}=1:\sqrt{2}$	由(19)
(21) $\sqrt{3}:\overline{AC}=1:\sqrt{2}$	由(20) & (7) $\overline{AE}=\sqrt{3}$ 已證
(22) $\overline{AC}=\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{6}$	由(21) & 內項乘積等於外項乘積
(23) 所以$\overline{BD}=2$ & $\overline{AC}=\sqrt{6}$	由(15) & (22) 已證

習題 8.3-4

如圖 8.3-57，圓 I 為直角三角形 ABC 的內切圓，D、E、F 為切點，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$。若 $\overline{AB}$＝4 公分，$\overline{BC}$＝3 公分，求圓 I 的半徑。

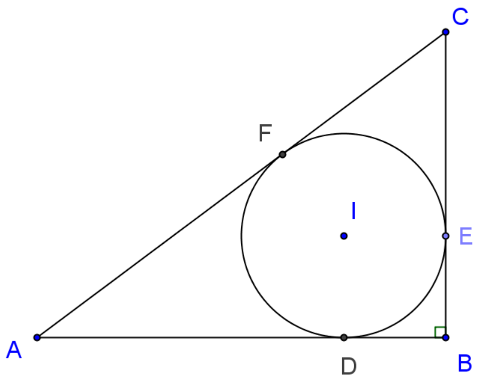
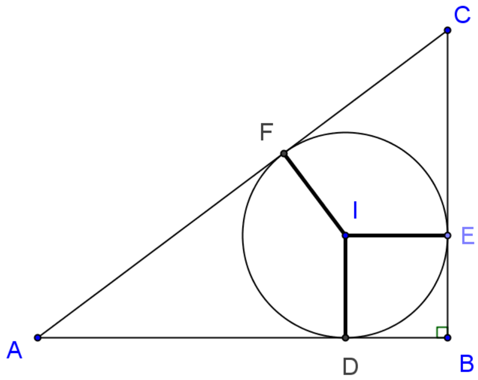


圖 8.3-57

想法：(1) 利用畢氏定理求出直角三角形的斜邊長

(2) 利用第七章例題 7.3-11 的結論，求出直角三角形內切圓半徑



圖(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{ID}$、$\overline{IE}$、$\overline{IF}$如上圖(a)所示，則$\overline{ID}$＝$\overline{IE}$＝$\overline{IF}$為圓 I 半徑	作圖 & 已知圓 I 為直角三角形 ABC 的內切圓，D、E、F 為切點
(2) 直角三角形 ABC 中 $\overline{AC}^2$＝$\overline{AB}^2$＋$\overline{BC}^2$ ＝(4 公分)^2＋(3 公分)^2 ＝16 平方公分＋9 平方公分 ＝25 平方公分	畢氏定理 & 已知直角三角形 ABC 中，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$ & $\overline{AB}$＝4 公分，$\overline{BC}$＝3 公分
(3) $\overline{AC}$＝5 公分 或 $\overline{AC}$＝－5 公分	由(2) 求平方根
(4) $\overline{AC}$＝5 公分	由(2) & $\overline{AC}$為線段長度必大於 0

(5) 圓 I 半徑$\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}$ $=\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}-\overline{\mathrm{AC}}}{2}$ $=\dfrac{4公分+3公分-5公分}{2}$ ＝1 公分	由(1) $\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}$為圓 I 半徑 & 利用第七章例題 7.3-11 的結論：直角三角形內接圓半徑＝(兩股和減去斜邊)÷2 & 已知圓 I 為直角三角形 ABC 的內切圓，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$ & $\overline{AB}$＝4 公分，$\overline{BC}$＝3 公分 & 由(4) $\overline{AC}$＝5 公分 已證

習題 8.3-5

如圖 8.3-58，已知 I 為△ABC 的內心，若∠BIC＝135°，且$\overline{AB}$＝7 公分，$\overline{AC}$＝24 公分，試求△ABC 內切圓的半徑。

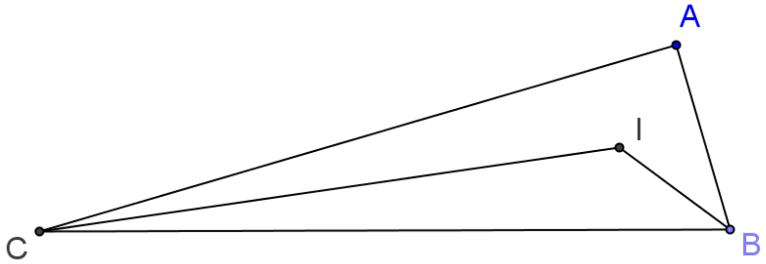


圖 8.3-58

想法：(1) 利用例題 4.3-2 結論：若 I 點為△ABC 的內心，則$\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC$

(2) 利用畢氏定理求出直角三角形的第三邊

(3) 利用第七章例題 7.3-11 的結論，求出直角三角形內切圓半徑

解：

敘述	理由
(1) $\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC$	已知 I 點為△ABC 的內心 & 利用例題 4.3-2 結論
(2) $135° = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC$	由(1) & 已知∠BIC＝135°
(3) ∠BAC＝(135°－90°)×2＝90°	由(2) 求∠BAC 之值
(4) △ABC 為直角三角形 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$	由(3) & 直角三角形定義 & 畢氏定理
(5) $\overline{BC}^2$＝(7 公分)^2＋(24 公分)^2 ＝49 平方公分＋576 平方公分 ＝625 平方公分	由(4) & 已知$\overline{AB}$＝7 公分，$\overline{AC}$＝24 公分
(6) $\overline{BC}$＝25 公分 或 $\overline{BC}$＝－25 公分	由(5) 求平方根
(7) $\overline{BC}$＝25 公分	由(6) & $\overline{BC}$為線段長度必大於 0
(8) △ABC 內切圓半徑 $= \frac{\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC}}{2}$ $= \frac{7公分+24公分-25公分}{2}$＝3 公分	已知 I 為△ABC 的內心 & 利用第七章例題 7.3-11 的結論 & 已知$\overline{AB}$＝7 公分，$\overline{AC}$＝24 公分 & (7) $\overline{BC}$＝25 公分 已證

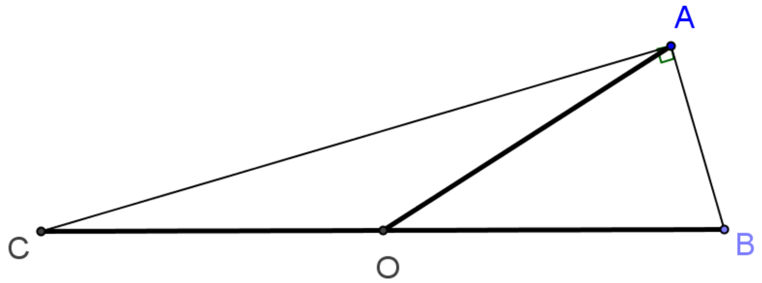
習題 8.3-6

有一個直角三角形，其外心到三頂點的距離和為 75 公分，若有一股長為 14 公分，則：

(1) 此直角三角形外接圓半徑為何？

(2) 此三角形的另一股長為何？

(3) 此直角三角形內切圓半徑為何？



圖(a)

想法：(1) 利用例題 4.3-3 結論：直角三角形斜邊中點為此三角形的外心。在圖形中找出直角三角形的外心

(2) 利用三角形的外心到三頂點等距離的性質，求出斜邊長

(3) 利用畢氏定理求出另一股長

(4) 利用第七章例題 7.3-11 的結論，求出直角三角形內切圓半徑

解：

敘述	理由
(1) 依題目敘述畫出圖形，如上圖(a)所示，其中△ABC 為直角三角形，$\angle BAC=90°$，$\overline{AB}=14$ 公分，O 點為其外接圓圓心，$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$為此直角三角形 ABC 的外接圓半徑	作圖 & 已知有一股長為 14 公分 & 例題 4.3-3 結論：直角三角形斜邊中點為此三角形的外心 & 三角形的外心到三頂點等距離
(2) $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=75$ 公分	由(1) O 點為△ABC 外接圓圓心& 已知外心到三頂點的距離和為 75 公分
(3) $\overline{OC}+\overline{OC}+\overline{OC}=75$ 公分	由(2) & (1) $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$
(4) 外接圓半徑$\overline{OC}=(75$ 公分$)\div3=25$ 公分	由(3) 求$\overline{OC}$之值
(5) $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=25$ 公分	由(1) $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ & (4) $\overline{OC}=25$ 公分 遞移律
(6) $\overline{BC}=\overline{OB}+\overline{OC}$ $=25$ 公分$+25$ 公分$=50$ 公分	全量等於分量之和 & (5) $\overline{OB}=\overline{OC}=25$ 公分
(7) △ABC 中，$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$	已知△ABC 為直角三角形 & 畢氏定理

(8) $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2$ $= (50\text{ 公分})^2 - (14\text{ 公分})^2$ $= 2304$ 平方公分	由(7) 移項 ＆ (1) $\overline{AB} = 14$ 公分 ＆ (6) $\overline{BC} = 50$ 公分
(9) $\overline{AC} = 48$ 公分 或 $\overline{AC} = -48$ 公分	由(8) 求平方根
(10) 另一股長$\overline{AC} = 48$ 公分	由(9) ＆ $\overline{AC}$為線段長度必大於 0
(11) 直角三角形 ABC 內切圓半徑 $= \dfrac{\overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BC}}{2}$ $= \dfrac{14\text{公分} + 48\text{公分} - 50\text{公分}}{2}$ $= 6$ 公分	利用第七章例題 7.3-11 的結論求直角三角形內切圓半徑 ＆ (1) $\overline{AB} = 14$ 公分 ＆ (6) $\overline{BC} = 50$ 公分 ＆ (10) $\overline{AC} = 48$ 公分 已證

習題 8.3-7

如圖 8.3-59，長方形 ABCD 中，對角線$\overline{AC}$、$\overline{BD}$相交於 O 點，且$\overline{AD}=24$，$\overline{AB}=7$，求$\overline{OD}$之值。

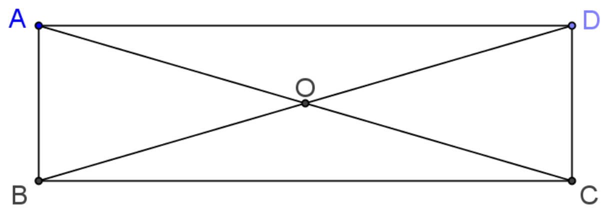


圖 8.3-59

想法：(1) 長方形對角線互相平分

(2) 畢氏定理

解：

敘述	理由
(1) $\angle BAD=90°$	已知 ABCD 為長方形 & 長方形四個內角皆為直角
(2) $\triangle BAD$ 為直角三角形	由(1)
(3) $\overline{AB}^2+\overline{AD}^2=\overline{BD}^2$	由(2) & 畢氏定理
(4) $7^2+24^2=\overline{BD}^2$	由(3) & 已知$\overline{AB}=7$、$\overline{AD}=24$
(5) $\overline{BD}=-25$ 或 $\overline{BD}=25$	由(4) 求平方根
(6) 所以$\overline{BD}=25$	由(5) & $\overline{BD}$為線段長度必大於 0
(7) $\overline{OB}=\overline{OD}=\frac{1}{2}\overline{BD}$	已知 ABCD 為長方形，對角線$\overline{AC}$、$\overline{BD}$相交於 O 點 & 長方形對角線互相平分
(8) 所以$\overline{OD}=\frac{1}{2}\times 25=12.5$	將(6) $\overline{BD}=25$ 代入(7) $\overline{OD}=\frac{1}{2}\overline{BD}$

習題 8.3-8

如圖 8.3-60，長方形 ABCD 中，對角線$\overline{AC}$、$\overline{BD}$相交於 O 點，且$\overline{OA}=13$，$\overline{BC}=10$，求$\overline{OC}+\overline{OD}+\overline{CD}$之值。

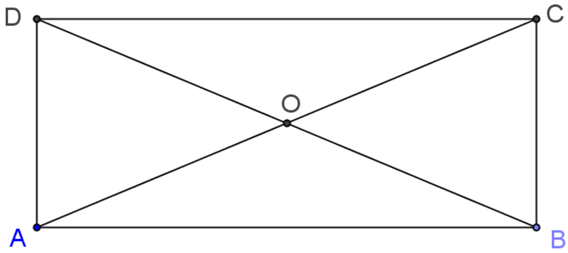


圖 8.3-60

想法：(1) 長方形對角線等長

(2) 長方形對角線互相平分

(3) 長方形對邊等長

(4) 畢氏定理

解：

敘述	理由
(1) $\overline{OC}=\overline{OA}=13$	已知 ABCD 為長方形，對角線$\overline{AC}$、$\overline{BD}$相交於 O 點 & 長方形對角線互相平分 & 已知$\overline{OA}=13$
(2) $\overline{AC}=\overline{OC}+\overline{OA}=13+13=26$	全量等於分量之和 & (1) $\overline{OC}=\overline{OA}=13$
(3) $\overline{BD}=\overline{AC}=26$	已知 ABCD 為長方形 & 長方形對角線等長 & (2) $\overline{AC}=26$ 已證
(4) $\overline{OD}=\overline{OB}=\frac{1}{2}\overline{BD}=13$	已知 ABCD 為長方形，對角線$\overline{AC}$、$\overline{BD}$相交於 O 點 & 長方形對角線互相平分 & (3) $\overline{BD}=26$ 已證
(5) $\angle ABC=90°$	已知 ABCD 為長方形
(6) $\triangle ABC$ 為直角三角形	由(5)
(7) $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$	由(6) & 畢氏定理
(8) $\overline{AB}^2+10^2=26^2$	由(7) & 已知$\overline{BC}=10$ & (2) $\overline{AC}=26$ 已證
(9) $\overline{AB}=-24$ 或 $\overline{AB}=24$	由(8) 求平方根
(10) 所以$\overline{AB}=24$	由(9) & $\overline{AB}$為線段長度必大於 0
(11) $\overline{CD}=\overline{AB}=24$	已知 ABCD 為長方形 & 長方形對邊等長 & 由(10) $\overline{AB}=24$ 已證

(12) 所以$\overline{OC}+\overline{OD}+\overline{CD}$ $=13+13+24=50$	由(1) $\overline{OC}=13$ & (4) $\overline{OD}=13$ & (11) $\overline{CD}=24$ 已證

習題 8.3-9

如圖 8.3-61，矩形 ABCD 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{AD}=12$。以 A 為圓心，r 為半徑畫圓，使得 B、 C、D 中的一點在圓外，兩點在圓內，求 r 的範圍。

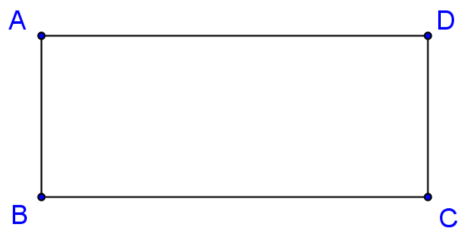
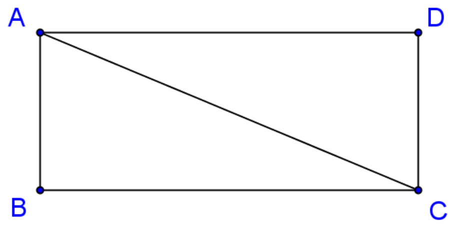


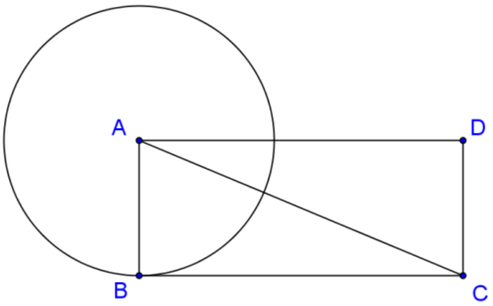
圖 8.3-61

想法：(1) 利用畢氏定理求出$\overline{AC}$之值；

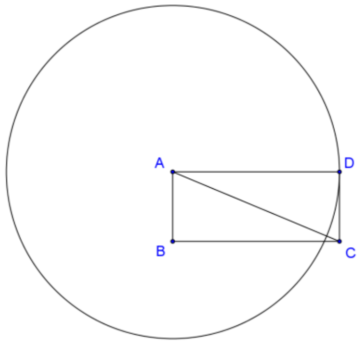
(2) 利用點與圓心的距離來判斷點與圓的關係：
1. 點與圓心的距離小於 r，則此點位於圓內；
2. 點與圓心的距離等於 r，則此點位於圓周上；
3. 點與圓心的距離大於 r，則此點位於圓外；



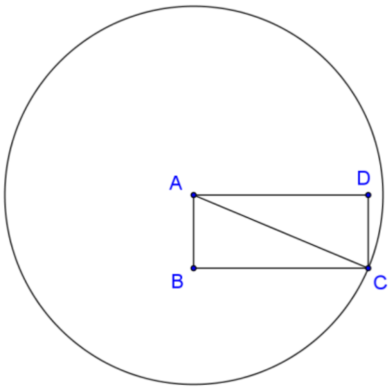
圖(a)

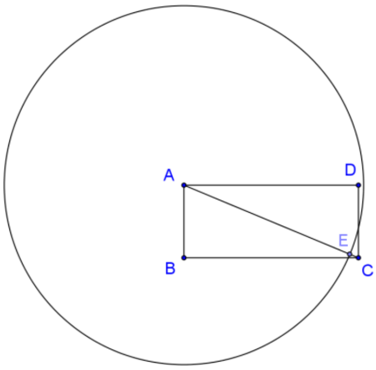


圖(b)



圖(c)





圖(d) **圖(e)**

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{AC}$，如上圖(a)所示	作圖
(2) $\overline{BC}=\overline{AD}=12$	已知 ABCD 為矩形 & 矩形對邊相等 & 已知$\overline{AD}=12$
(3) △ABC 為直角三角形， $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$	已知 ABCD 為矩形 & ∠B＝90° 畢氏定理
(4) $5^2+12^2=\overline{AC}^2$	由(3) & 已知$\overline{AB}=5$ & (2) $\overline{BC}=12$
(5) $\overline{AC}=-13$ 或 $\overline{AC}=13$	由(4) 求平方根
(6) 所以$\overline{AC}=13$	由(5) & $\overline{AC}$為線段長度必大於 0
(7) 以 A 為圓心，$\overline{AB}=5$ 為半徑畫圓，如上圖(b)所示， 因$\overline{AB}=5=r$，故 B 點在圓周上； 因$\overline{AC}=13>r$，故 C 點在圓外； 因$\overline{AD}=12>r$，故 D 點在圓外；	作圖 點與圓心的距離等於 r，則此點位於圓周上 點與圓心的距離大於 r，則此點位於圓外 點與圓心的距離大於 r，則此點位於圓外
(8) 以 A 為圓心，$\overline{AD}=12$ 為半徑畫圓如上圖(c)所示， 因$\overline{AB}=5<r$，故 B 點在圓內； 因$\overline{AC}=13>r$，故 C 點在圓外； 因$\overline{AD}=12=r$，故 D 點在圓周上；	作圖 點與圓心的距離小於 r，則此點位於圓內 點與圓心的距離大於 r，則此點位於圓外 點與圓心的距離等於 r，則此點位於圓周上
(9) 以 A 為圓心，$\overline{AC}=13$ 為半徑畫圓，如上圖(d)所示， 因$\overline{AB}=5<r$，故 B 點在圓內； 因$\overline{AC}=13=r$，故 C 點在圓周上； 因$\overline{AD}=12<r$，故 D 點在圓內；	作圖 點與圓心的距離小於 r，則此點位於圓內 點與圓心的距離等於 r，則此點位於圓周上 點與圓心的距離小於 r，則此點位於圓內
(10) 以 A 為圓心，$12<\overline{AE}<13$ 為半徑畫圓，如上圖(e)所示， 因$\overline{AB}=5<r$，故 B 點在圓內； 因$\overline{AC}=13>r$，故 C 點在圓外； 因$\overline{AD}=12<r$，故 D 點在圓內；	作圖 點與圓心的距離小於 r，則此點位於圓內 點與圓心的距離大於 r，則此點位於圓外 點與圓心的距離小於 r，則此點位於圓內
(11) 所以當 $12<r<13$ 時， B、D 兩點在圓內；C 點在圓外	由(10) 已證

習題 8.3-10

如圖 8.3-62 ，已知半圓 O 的半徑為 2，且 C、D、E 三點將半圓弧分成四等分，則$\overline{AC}^2+\overline{AD}^2+\overline{AE}^2=$？

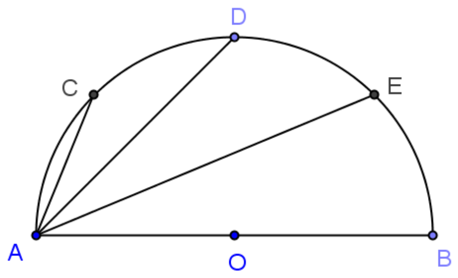
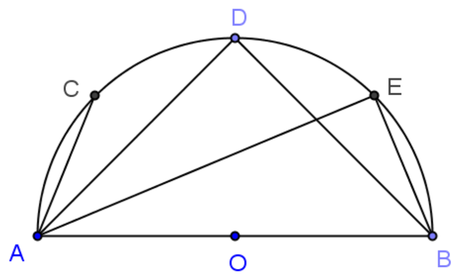


圖 8.3-62

想法：(1) 同圓中等弧對等弦

(2) 利用直徑所對的圓周角為直角

(3) 畢氏定理



圖(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{BE}$、$\overline{BD}$，如上圖(a)所示	作圖
(2) $\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{AC}$、$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AD}$	已知 C、D、E 三點將半圓弧分成四等分
(3) $\overline{BE}=\overline{AC}$、$\overline{BD}=\overline{AD}$	由(2) & 同圓中等弧對等弦
(4) △ABE 為直角三角形，$\overline{AE}^2+\overline{BE}^2=\overline{AB}^2$	$\overline{AB}$為直徑 & 直徑所對的圓周角∠E 為直角 & 畢氏定理
(5) $\overline{AE}^2+\overline{AC}^2=4^2=16$	由(4) & (3) $\overline{BE}=\overline{AC}$ & 已知圓半徑為 2，圓直徑$\overline{AB}=4$
(6) △ABD 為直角三角形，$\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2$	$\overline{AB}$為直徑 & 直徑所對的圓周角∠D 為直角 & 畢氏定理
(7) $\overline{AD}^2+\overline{AD}^2=4^2=16$	由(6) & (3) $\overline{BD}=\overline{AD}$ & 已知圓半徑為 2，圓直徑$\overline{AB}=4$

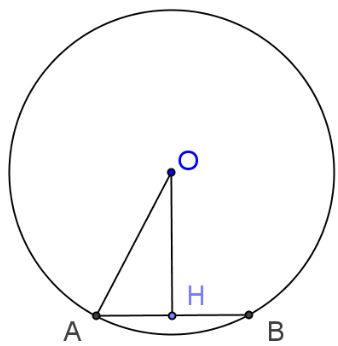
(8) $\overline{AD}^2=8$	由(7)
(9) 所以$\overline{AC}^2+\overline{AD}^2+\overline{AE}^2$ $=(\overline{AC}^2+\overline{AE}^2)+\overline{AD}^2$ $=16+8=24$	題目所求 加法交換律 由(5) $\overline{AE}^2+\overline{AC}^2=16$ ＆ (8) $\overline{AD}^2=8$

習題 8.3-11

已知有一圓 O，$\overline{AB}$為其一弦，且$\overline{AB}=16$ 公分，此弦到圓心的距離是 15 公分，則此圓 O 的直徑為______公分。

想法：(1) 利用定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理

(2) 畢氏定理



圖(a)

解：

敘述	理由
(1) 根據已知作圖，如上圖(a)所示 $\overline{OA}$為圓 O 之半徑；$\overline{OH}$為弦心距	已知有一圓 O，$\overline{AB}$為其一弦，且$\overline{AB}=16$ 公分，此弦到圓心的距離是 15 公分
(2) $\overline{OH}\perp\overline{AB}$，$\angle OHA=90°$	由(1) $\overline{OH}$為弦心距
(3) $\overline{AH}=\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times16=8$	根據定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理＆ $\overline{OH}$垂直平分$\overline{AB}$ ＆ 已知$\overline{AB}=16$
(4) $\triangle$OHA 為直角三角形， $\overline{OH}^2+\overline{AH}^2=\overline{OA}^2$	由(2) $\angle OHA=90°$ 畢氏定理
(5) $15^2+8^2=\overline{OA}^2$	由(4) ＆ 已知弦到圓心的距離$\overline{OH}=15$ ＆ (3) $\overline{AH}=8$
(6) $\overline{OA}=-17$ 或 $\overline{OA}=17$	由(5) 求平方根
(7) 所以$\overline{OA}=17$	由(6) ＆ $\overline{OA}$為線段長度必大於 0

(8) 所以圓 O 的直徑為 $2\overline{OA}=34$	由(7) ＆ 直徑為半徑的 2 倍

習題 8.3-12

如圖 8.3-63，圓 O 是半徑為 5 的圓，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為圓 O 的兩弦，$\overline{OM}\perp\overline{AB}$，$\overline{ON}\perp\overline{CD}$。則：

(1) 若 $\overline{OM}=4$，則 $\overline{AB}=$？

(2) 若 $\overline{CD}=8$，則 $\overline{ON}=$？

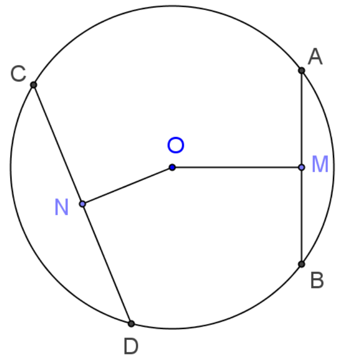
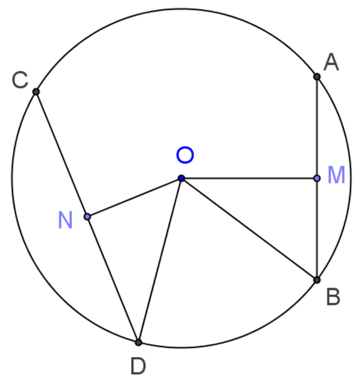


圖 8.3-63

想法：(1) 利用定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理

(2) 畢氏定理



圖(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{OB}$、$\overline{OD}$，如上圖(a)所示， $\overline{OB}=\overline{OD}=5$ 為圓 O 之半徑，	作圖 已知圓之半徑為 5
(2) $\angle OMB=90°$	已知$\overline{OM}\perp\overline{AB}$
(3) $\overline{AM}=\overline{BM}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}$	根據定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理 ＆ $\overline{OM}$垂直平分$\overline{AB}$

(4) △OBM 為直角三角形， $\overline{OM}^2+\overline{BM}^2=\overline{OB}^2$	由(2) ∠OMB＝90° 畢氏定理
(5) $4^2+\overline{BM}^2=5^2$	由(4) & 已知$\overline{OM}=4$ & (1) $\overline{OB}=5$
(6) $\overline{BM}=-3$ 或 $\overline{BM}=3$	由(5) 求平方根
(7) 所以$\overline{BM}=3$	由(6) & $\overline{BM}$為線段長度必大於 0
(8) $3=\frac{1}{2}\overline{AB}$	由(3) $\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ & (7) $\overline{BM}=3$
(9) $\overline{AB}=2\times3=6$	由(8) 等式兩邊同乘以 2
(10) ∠OND＝90°	已知$\overline{ON}\perp\overline{CD}$
(11) $\overline{CN}=\overline{DN}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\frac{1}{2}\times8=4$	根據定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理 & $\overline{ON}$垂直平分$\overline{CD}$ & 已知$\overline{CD}=8$
(12) △OND 為直角三角形， $\overline{ON}^2+\overline{DN}^2=\overline{OD}^2$	由(10) ∠OND＝90° 畢氏定理
(13) $\overline{ON}^2+4^2=5^2$	由(12) & (11) $\overline{DN}=4$ & (1) $\overline{OD}=5$
(14) $\overline{ON}=-3$ 或 $\overline{ON}=3$	由(13) 求平方根
(15) 所以$\overline{ON}=3$	由(14) & $\overline{ON}$為線段長度必大於 0

習題 8.3-13

如圖 8.3-64，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$與$\overline{EF}$皆為圓 O 的弦，其弦心距分別為$\overline{OX}$、$\overline{OY}$與$\overline{OZ}$。已知$\overline{AB}=16$，$\overline{OX}=6$，$\overline{OZ}=8$，$\overline{CD}=14$，則：

(1) 圓 O 的半徑＝______。

(2) $\overline{OY}=$______。

(3) 弦$\overline{EF}=$______。

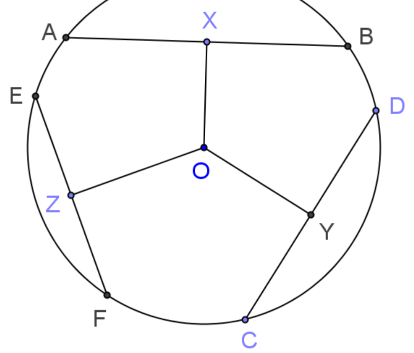
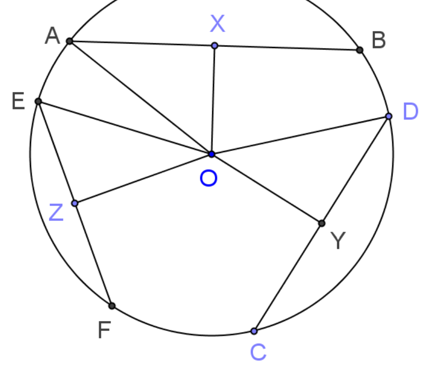


圖 8.3-64

想法：(1) 利用定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理

(2) 畢氏定理



圖(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{OD}$、$\overline{OA}$與$\overline{OE}$，如上圖(a)所示；$\overline{OD}=\overline{OA}=\overline{OE}$為圓 O 之半徑；	作圖
(2) $\overline{OX}\perp\overline{AB}$，$\angle OXA=90°$	已知$\overline{OX}$為弦心距
(3) $\overline{AX}=\overline{BX}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times16=8$	根據定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理＆$\overline{OX}$垂直平分$\overline{AB}$ ＆ 已知$\overline{AB}=16$
(4) △OXA 為直角三角形，	由(2) ∠OXA＝90°

$\overline{OX}^2+\overline{AX}^2=\overline{OA}^2$	畢氏定理
(5) $6^2+8^2=\overline{OA}^2$	由(4) & 已知$\overline{OX}=6$ & (3) $\overline{AX}=8$
(6) $\overline{OA}=-10$ 或 $\overline{OA}=10$	由(5) 求平方根
(7) 所以圓半徑$\overline{OA}=10$	由(6) & $\overline{OA}$為線段長度必大於 0
(8) $\overline{OD}=\overline{OA}=\overline{OE}=10$	由(7) & (1) $\overline{OD}=\overline{OA}=\overline{OE}$ 遞移律
(9) $\overline{OY}\perp\overline{CD}$，$\angle$OYD$=90°$	已知$\overline{OY}$為弦心距
(10) $\overline{CY}=\overline{DY}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\frac{1}{2}\times14=7$	根據定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理& $\overline{OY}$垂直平分$\overline{CD}$ & 已知$\overline{CD}=14$
(11) △OYD 為直角三角形， $\overline{OY}^2+\overline{DY}^2=\overline{OD}^2$	由(9) $\angle$ OYD$=90°$ 畢氏定理
(12) $\overline{OY}^2+7^2=10^2$	由(11) & (10) $\overline{DY}=7$ & (8) $\overline{OD}=10$
(13) $\overline{OY}=-\sqrt{51}$ 或 $\overline{OY}=\sqrt{51}$	由(12) 求平方根
(14) 所以$\overline{OY}=\sqrt{51}$	由(13) & $\overline{OY}$為線段長度必大於 0
(15) $\overline{OZ}\perp\overline{EF}$，$\angle$OZE$=90°$	已知$\overline{OZ}$為弦心距
(16) $\overline{EZ}=\overline{FZ}=\frac{1}{2}\overline{EF}$	根據定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理& $\overline{OZ}$垂直平分$\overline{EF}$
(17) △OEZ 為直角三角形， $\overline{OZ}^2+\overline{EZ}^2=\overline{OE}^2$	由(15) $\angle$ OZE$=90°$ 畢氏定理
(18) $8^2+\overline{EZ}^2=10^2$	由(17) & 已知$\overline{OZ}=8$ & (8) $\overline{OE}=10$
(19) $\overline{EZ}=-6$ 或 $\overline{EZ}=6$	由(18) 求平方根
(20) 所以$\overline{EZ}=6$	由(19) & $\overline{EZ}$為線段長度必大於 0
(21) $6=\frac{1}{2}\overline{EF}$	將(20) $\overline{EZ}=6$ 代入 (16) $\overline{EZ}=\frac{1}{2}\overline{EF}$
(22) 所以$\overline{EF}=2\times6=12$	由(21) 等式兩邊同乘以 2

習題 8.3-14

如圖 8.3-65，$\overline{AB}$ 是圓 O 的直徑，$\overline{AB} \perp \overline{CD}$ 於 E 點，且 $\overline{AE} = \overline{CD} = 20$，則 $\overline{OE} =$ ？

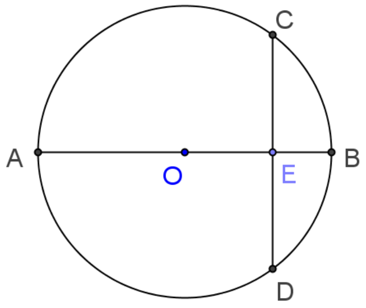
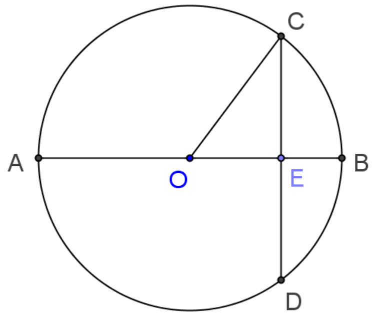


圖 8.3-65

想法：(1) 利用定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理

(2) 畢氏定理



圖(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{OC}$，如上圖(a)所示 則$\overline{OC} = \overline{OA}$為圓 O 之半徑，	作圖
(2) $\angle OEC = 90°$	已知$\overline{AB} \perp \overline{CD}$
(3) $\overline{CE} = \overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{CD} = \frac{1}{2} \times 20 = 10$	根據定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理＆ $\overline{AB}$垂直平分$\overline{CD}$ ＆ 已知$\overline{CD} = 20$
(4) $\overline{AE} = \overline{OA} + \overline{OE}$	如圖所示，全量等於分量之和
(5) $\overline{OA} = \overline{AE} - \overline{OE} = 20 - \overline{OE}$	由(4) 移項 ＆ 已知$\overline{AE} = 20$
(6) $\overline{OC} = \overline{OA} = 20 - \overline{OE}$	由(5) ＆ (1) $\overline{OC} = \overline{OA}$ 遞移律
(7) $\triangle OEC$ 為直角三角形， $\overline{OE}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{OC}^2$	由(2) $\angle OEC = 90°$ 畢氏定理

(8) $\overline{OE}^2+10^2=(20-\overline{OE})^2$	由(7)&(3) $\overline{CE}=10$ & (6) $\overline{OC}=20-\overline{OE}$
(9) $\overline{OE}=7.5$	由(8) 解一元二次方程式

習題 8.3-15

如圖 8.3-66，直線 L 與圓 O 相切於 P 點，A 為直線 L 上一點，$\overline{AO}$與圓 O 交於 B 點。若$\overline{PA}=12$，$\overline{AB}=8$，則圓 O 的半徑為________。

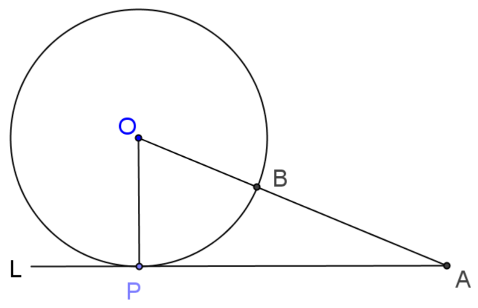


圖 8.3-66

想法：(1) 利用定理 7.3-1 切線定理：切線與過切點的半徑互相垂直

(2) 利用畢氏定理求解

解：

敘述	理由
(1) $\overline{OP}$為圓 O 之半徑且 $\overline{OP}\perp$L，∠OPA＝90°	已知直線 L 與圓 O 相切於 P 點 & 切線與過切點的半徑互相垂直
(2) △OPA 為直角三角形，$\overline{OP}^2+\overline{AP}^2=\overline{OA}^2$	由(1) ∠OPA＝90° 畢氏定理
(3) $\overline{OP}^2+\overline{AP}^2=(\overline{OB}+\overline{AB})^2$	由(2) & $\overline{OA}=\overline{OB}+\overline{AB}$
(4) $\overline{OP}^2+12^2=(\overline{OP}+8)^2$	由(3) & 已知$\overline{PA}=12$，$\overline{AB}=8$ & $\overline{OB}=\overline{OP}$為圓 O 之半徑
(5) $\overline{OP}=5$	由(4) 解一元二次方程式
(6) 所以圓 O 的半徑為 5	由(5) $\overline{OP}=5$

習題 8.3-16

如圖 8.3-67，$\overline{PA}$與$\overline{PB}$分別與圓 O 相切於 A、B 兩點。已知圓 O 的半徑為 8，$\overline{OP}$＝16。則$\overline{PA}$＝_____，$\overline{PB}$＝______，∠APB＝_____度。

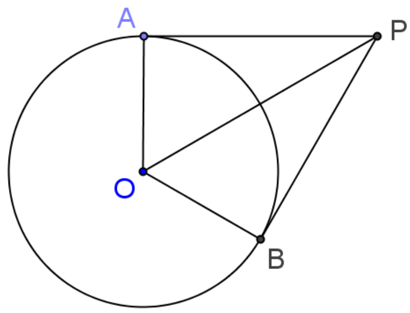


圖 8.3-67

想法：(1) 利用已知$\overleftrightarrow{PA}$與$\overleftrightarrow{PB}$分別與圓 O 相切於 A、B 兩點，得知△AOP 與△BOP 皆為直角三角形；

(2) 利用△AOP 為直角三角形 & 畢氏定理，可求得$\overline{PA}$；

(3) 利用定理 7.3-2 切線長定理(自圓外一點到圓的兩切點連線段等長)，得知$\overline{PB}$＝$\overline{PA}$；

(4) 最後利用直角三角形三邊比為 1：2：$\sqrt{3}$，則三內角為 30°-90°-60°，求得∠APB 之度數

解：

敘述	理由
(1) $\overline{OA}\perp\overleftrightarrow{PA}$ & $\overline{OB}\perp\overleftrightarrow{PB}$ 且 圓 O 的半徑$\overline{OA}=\overline{OB}=8$	已知$\overleftrightarrow{PA}$與$\overleftrightarrow{PB}$分別與圓 O 相切於 A、B 兩點 & 已知圓 O 的半徑為 8
(2) △AOP 為直角三角形 $\overline{OA}^2+\overline{PA}^2=\overline{OP}^2$	由(1) $\overline{OA}\perp\overleftrightarrow{PA}$ 畢氏定理
(3) $8^2+\overline{PA}^2=16^2$	由(2) & (1) $\overline{OA}=8$ & 已知$\overline{OP}=16$
(4) $\overline{PA}=-8\sqrt{3}$ 或 $\overline{PA}=8\sqrt{3}$	由(3) 求平方根
(5) 所以$\overline{PA}=8\sqrt{3}$	由(4) & $\overline{AP}$為線段長度必大於 0
(6) $\overline{PB}=\overline{PA}=8\sqrt{3}$	已知$\overleftrightarrow{PA}$與$\overleftrightarrow{PB}$分別與圓 O 相切於 A、B 兩點 & 定理 7.3-2 切線長定理(自圓外一點到圓的兩切點連線段等長) & (5) $\overline{PA}=8\sqrt{3}$
(7) △AOP 為直角三角形，且	由(1) $\overline{OA}\perp\overleftrightarrow{PA}$ &

$\overline{OA}$：$\overline{OP}$：$\overline{PA}$＝8：16：$8\sqrt{3}$ ＝1：2：$\sqrt{3}$	(1) $\overline{OA}$＝8、已知$\overline{OP}$＝16、(5) $\overline{PA}$＝$8\sqrt{3}$ ＆ 倍比定理
(8) 所以∠APO＝30°	由(7) ＆ 直角三角形三邊比為 1：2：$\sqrt{3}$，則三內角為 30°-90°-60°
(9) △BOP 為直角三角形，且 $\overline{OB}$：$\overline{OP}$：$\overline{PB}$＝8：16：$8\sqrt{3}$ ＝1：2：$\sqrt{3}$	由(1) $\overline{OB}\perp\overleftrightarrow{PB}$ ＆ (1) $\overline{OB}$＝8、已知$\overline{OP}$＝16、(6) $\overline{PB}$＝$8\sqrt{3}$ ＆ 倍比定理
(10) 所以∠BPO＝30°	由(9) ＆ 直角三角形三邊比為 1：2：$\sqrt{3}$，則三內角為 30°-90°-60°
(11) ∠APB＝∠APO＋∠BPO ＝30°＋30°＝60°	全量等於分量之和 ＆ (8) ∠APO＝30° ＆ (10) ∠BPO＝30°

習題 8.3-17

如圖 8.3-68，△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90°，半圓和$\overline{AC}$相切於 D 點，和$\overline{BC}$相交於 B、E 兩點。已知$\overline{AB}$＝8，$\overline{BC}$＝6，則圓 O 的半徑為______。

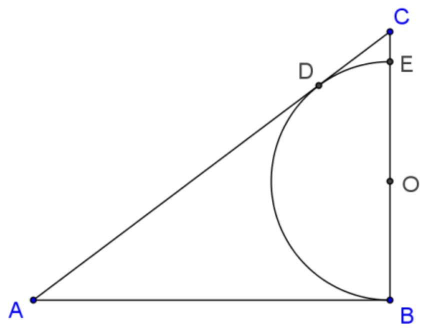
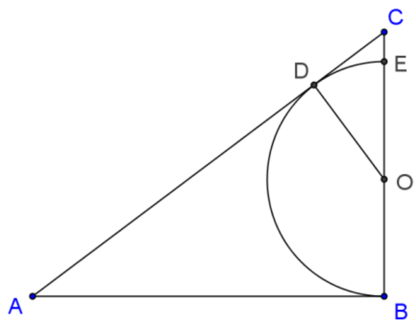


圖 8.3-68

想法：(1) 利用定理 7.3-2 切線長定理(自圓外一點到圓的兩切點連線段等長)

(2) 畢氏定理



圖(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{OD}$，如上圖(a)所示 則$\overline{OB}$＝$\overline{OD}$為圓 O 之半徑， $\overline{OD}\perp\overline{AC}$，∠ODC＝90°	作圖 已知半圓和$\overline{AC}$相切於 D 點
(2) △ABC 為直角三角形， $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$	已知∠ABC＝90° 畢氏定理
(3) $8^2+6^2=\overline{AC}^2$	由(2) & 已知$\overline{AB}$＝8，$\overline{BC}$＝6
(4) $\overline{AC}$＝－10 或 $\overline{AC}$＝10	由(3) 求平方根
(5) 所以$\overline{AC}$＝10	由(4) & $\overline{AB}$為線段長度必大於 0
(6) $\overline{AD}$＝$\overline{AB}$＝8	已知∠ABC＝90°，$\overline{AB}$為圓 O 之切線 & 已知半圓和$\overline{AC}$相切於 D 點 & 定理 7.3-2

(7) $\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{CD}$	切線長定理(自圓外一點到圓的兩切點連線段等長) & 已知$\overline{AB}=8$
(8) $\overline{CD}=\overline{AC}-\overline{AD}=10-8=2$	如圖所示，全量等於分量之和
(9) $\overline{BC}=\overline{OB}+\overline{OC}$	由(7) 移項 & (5) $\overline{AC}=10$ & (6) $\overline{AD}=8$
(10) $\overline{OC}=\overline{BC}-\overline{OB}=6-\overline{OB}$	如圖所示，全量等於分量之和
(11) △COD 為直角三角形，$\overline{CD}^2+\overline{OD}^2=\overline{OC}^2$	由(9) 移項 & 已知$\overline{BC}=6$
	由(1) ∠ODC＝90° 畢氏定理
(12) $2^2+\overline{OB}^2=(6-\overline{OB})^2$	由(11) & (8) $\overline{CD}=2$ & (1) $\overline{OB}=\overline{OD}$ & (10) $\overline{OC}=6-\overline{OB}$
(13) $\overline{OB}=\frac{8}{3}$	由(12) 解一元二次方程式
(14) 所以圓 O 的半徑為$\frac{8}{3}$	由(13) & (1) $\overline{OB}=\overline{OD}$為圓 O 之半徑

習題 8.3-18

如圖 8.3-69，圓 O_1 與圓 O_2 外切，且直線 L 分別切圓 O_1 與圓 O_2 於 A、B 兩點。已知圓 O_1 與圓 O_2 的半徑分別為 9 和 4，則外公切線段$\overline{AB}$＝______。

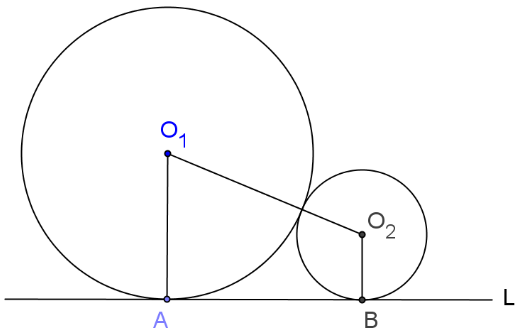
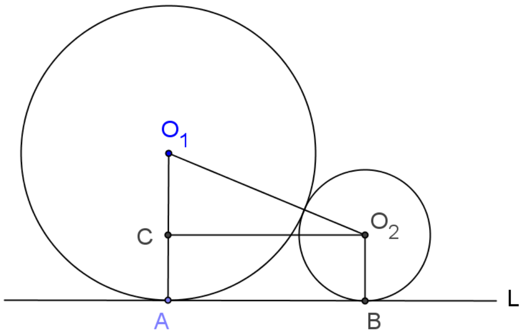


圖 8.3-69

想法：(1) 過 O_2 作$\overline{O_2C} \parallel \overline{AB}$，則$\overline{O_2C}=\overline{AB}$；

(2) 利用畢氏定理求出$\overline{O_2C}$，則外公切線$\overline{AB}=\overline{O_2C}$



圖(a)

解：

敘述	理由
(1) 過 O_2 作$\overline{O_2C} \parallel \overline{AB}$，如上圖(a)所示；所以$\overline{O_1A}\perp\overline{AB}$、$\overline{O_2B}\perp\overline{AB}$，$\angle O_1AB=90°$；$\overline{O_1A}$為圓 O_1 的半徑，$\overline{O_1A}=9$；$\overline{O_2B}$為圓 O_2 的半徑，$\overline{O_2B}=4$	作圖 已知直線 L 分別切圓 O_1 與圓 O_2 於 A、B 兩點 已知圓 O_1 與圓 O_2 的半徑分別為 9 和 4
(2) $\overline{O_1A} \parallel \overline{O_2B}$	由(1) $\overline{O_1A}\perp\overline{AB}$、$\overline{O_2B}\perp\overline{AB}$ & 定理 3.2-1 兩條直線如都與一直線垂直，則此二直線互相平行
(3) 四邊形 ACO_2B 為平行四邊形	由(1) $\overline{O_2C} \parallel \overline{AB}$ & (2) $\overline{O_1A} \parallel \overline{O_2B}$ & 兩組對邊平行為平行四邊形
(4) $\overline{O_2C}=\overline{AB}$、$\overline{AC}=\overline{O_2B}=4$	由(3) & 平行四邊形兩組對邊相等 &

	由(1) $\overline{O_2B}=4$
(5) $\overline{O_1A}=\overline{O_1C}+\overline{AC}$	如圖所示，全量等於分量之和
(6) $\overline{O_1C}=\overline{O_1A}-\overline{AC}=9-4=5$	由(5) 移項 ＆ (1) $\overline{O_1A}=9$ ＆ (4) $\overline{AC}=4$
(7) $\overline{O_1O_2}=9+4=13$	已知圓 O_1 與圓 O_2 外切 ＆ 兩圓外切，連心線長等於兩半徑之和 ＆ 已知圓 O_1 與圓 O_2 的半徑分別為 9 和 4
(8) $\angle O_1CO_2=\angle O_1AB=90°$	由(1) $\overline{O_2C}\parallel\overline{AB}$ ＆ 同位角相等 ＆ (1) $\angle O_1AB=90°$
(9) $\triangle O_1CO_2$ 為直角三角形， $\overline{O_1C}^2+\overline{O_2C}^2=\overline{O_1O_2}^2$	由(8) $\angle O_1CO_2=90°$ 畢氏定理
(10) $5^2+\overline{AB}^2=13^2$	由(9) ＆ (6) $\overline{O_1C}=5$ ＆ (4) $\overline{O_2C}=\overline{AB}$ ＆ (7) $\overline{O_1O_2}=13$
(11) $\overline{AB}=-12$ 或 $\overline{AB}=12$	由(10) 求平方根
(12) 所以外公切線段$\overline{AB}=12$	由(11) ＆ $\overline{AB}$為線段長度必大於 0

習題 8.3-19

如圖 8.3-70，直線 L 分別切圓 O_1 與圓 O_2 於 A、B 兩點。已知圓 O_1 與圓 O_2 的半徑分別為 3 和 5，且內公切線段$\overline{AB}=15$，則連心線段$\overline{O_1O_2}=$______。

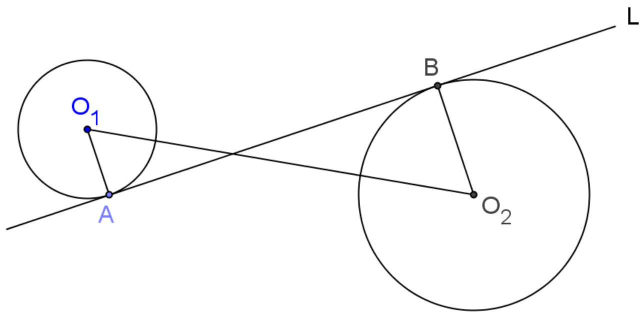
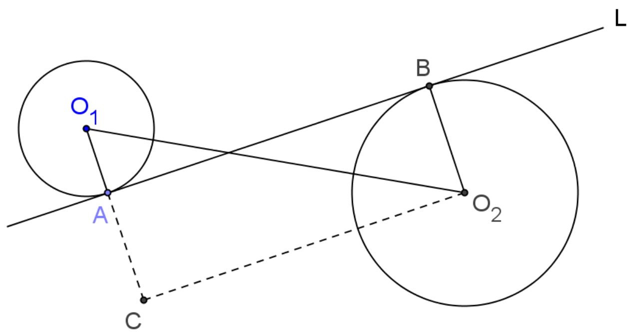


圖 8.3-70

想法：(1) 過 O_2 作$\overline{O_2C} \parallel \overline{AB}$交$\overline{O_1A}$的延長線於 C 點，則$\overline{O_2C}=\overline{AB}$；

(2) 利用畢氏定理求出連心線段$\overline{O_1O_2}$



圖(a)

解：

敘述	理由
(1) 過 O_2 作$\overline{O_2C} \parallel \overline{AB}$交$\overline{O_1A}$的延長線於 C 點，如上圖(a)所示； 所以$\overline{O_1A}\perp\overline{AB}$、$\overline{O_2B}\perp\overline{AB}$， $\angle O_1AB=90°$； $\overline{O_1A}$為圓 O_1 的半徑，$\overline{O_1A}=3$； $\overline{O_2B}$為圓 O_2 的半徑，$\overline{O_2B}=5$	作圖 已知直線 L 切圓 O_1 於 A 點，切圓 O_2 於 B 點 已知圓 O_1 的半徑為 3 已知圓 O_2 的半徑為 5
(2) $\overline{O_1A} \parallel \overline{O_2B}$ (即$\overline{O_1C} \parallel \overline{O_2B}$)	由(1) $\overline{O_1A}\perp\overline{AB}$、$\overline{O_2B}\perp\overline{AB}$ & 定理 3.2-1 兩條直線如都與一直線垂直，則此二直線互相平行
(3) 四邊形 ACO_2B 為平行四邊形	由(1) $\overline{O_2C} \parallel \overline{AB}$ & (2) $\overline{O_1C} \parallel \overline{O_2B}$ & 兩組對邊平行為平行四邊形
(4) $\overline{O_2C}=\overline{AB}=15$、$\overline{AC}=\overline{O_2B}=5$	由(3) & 平行四邊形兩組對邊相等 & 已知$\overline{AB}=15$ & 由(1) $\overline{O_2B}=5$

(5) $\overline{O_1C}=\overline{O_1A}+\overline{AC}=3+5=8$	如圖所示，全量等於分量之和 & (1) $\overline{O_1A}=3$ & (4) $\overline{AC}=5$
(6) $\angle O_1CO_2=\angle O_1AB=90°$	由(1) $\overline{O_2C} \parallel \overline{AB}$ & 同位角相等 & (1) $\angle O_1AB=90°$
(7) $\triangle O_1CO_2$ 為直角三角形，$\overline{O_1C}^2+\overline{O_2C}^2=\overline{O_1O_2}^2$	由(6) $\angle O_1CO_2=90°$ 畢氏定理
(8) $8^2+15^2=\overline{O_1O_2}^2$	由(7) & (5) $\overline{O_1C}=8$ & (4) $\overline{O_2C}=15$
(9) $\overline{O_1O_2}=-17$ 或 $\overline{O_1O_2}=17$	由(8) 求平方根
(10) 所以連心線段$\overline{O_1O_2}=17$	由(9) & $\overline{O_1O_2}$為線段長度必大於 0

習題 8.3-20

如圖 8.3-71，已知圓 O_1、圓 O_2 的半徑分別為 5 公分、2 公分。

若$\overline{O_1O_2}$＝10 公分，則：

(1) 外公切線段長為________公分。

(2) 內公切線段長為________公分。

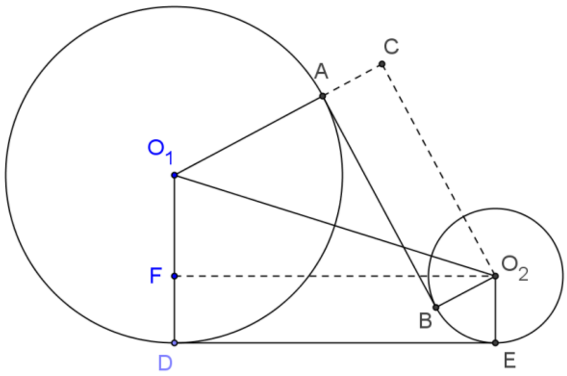


圖 8.3-71

想法：(1) 根據已知圓 O_1、圓 O_2 的半徑分別為 4 公分、2 公分，$\overline{O_1O_2}$＝10 公分，判斷兩圓的關係為外離；

(2) 利用畢氏定理求出外公切線段長與內公切線段長

解：

敘述	理由
(1) 根據已知作圖，畫出內公切線段$\overline{AB}$與外公切線段$\overline{DE}$，並作$\overline{O_2C} \parallel \overline{AB}$交$\overline{O_1A}$的延長線於 C 點、作$\overline{O_2F} \parallel \overline{DE}$交$\overline{O_1D}$於 F 點，如上圖(a)所示； 所以$\overline{O_1A} \perp \overline{AB}$、$\overline{O_2B} \perp \overline{AB}$， $\angle O_1AB$＝90°； 所以$\overline{O_1D} \perp \overline{DE}$、$\overline{O_2E} \perp \overline{DE}$， $\angle O_1DE$＝90°； $\overline{O_1A}$＝$\overline{O_1D}$為圓 O_1 的半徑， $\overline{O_1A}$＝$\overline{O_1D}$＝5； $\overline{O_2B}$＝$\overline{O_2E}$為圓 O_2 的半徑， $\overline{O_2B}$＝$\overline{O_2E}$＝2	作圖 已知圓 O_1、圓 O_2 的半徑分別為 5 公分、2 公分，$\overline{O_1O_2}$＝10 公分，
(2) $\overline{O_1A} \parallel \overline{O_2B}$ (即$\overline{O_1C} \parallel \overline{O_2B}$)	由(1) $\overline{O_1A} \perp \overline{AB}$、$\overline{O_2B} \perp \overline{AB}$ & 定理 3.2-1 兩條直線如都與一直線垂直，則此二直線互相平行
(3) 四邊形 ACO_2B 為平行四邊形	由(1) $\overline{O_2C} \parallel \overline{AB}$ & (2) $\overline{O_1C} \parallel \overline{O_2B}$ & 兩組對邊平行為平行四邊形

(4) $\overline{O_2C}=\overline{AB}$、$\overline{AC}=\overline{O_2B}=2$	由(3) ＆ 平行四邊形兩組對邊相等 ＆ 由(1) $\overline{O_2B}=2$
(5) $\overline{O_1C}=\overline{O_1A}+\overline{AC}=5+2=7$	如圖所示，全量等於分量之和 ＆ (1) $\overline{O_1A}=5$ ＆ (4) $\overline{AC}=2$
(6) $\angle O_1CO_2=\angle O_1AB=90°$	由(1) $\overline{O_2C}\parallel\overline{AB}$ ＆ 同位角相等 ＆ (1) $\angle O_1AB=90°$
(7) $\triangle O_1CO_2$ 為直角三角形， $\overline{O_1C}^2+\overline{O_2C}^2=\overline{O_1O_2}^2$	由(6) $\angle O_1CO_2=90°$ 畢氏定理
(8) $7^2+\overline{AB}^2=10^2$	由(7) ＆ (5) $\overline{O_1C}=7$ ＆ (4) $\overline{O_2C}=\overline{AB}$ ＆ 已知$\overline{O_1O_2}=10$
(9) $\overline{AB}=-\sqrt{51}$ 或 $\overline{AB}=\sqrt{51}$	由(8) 求平方根
(10) 所以內公切線段$\overline{AB}=\sqrt{51}$	由(9) ＆ $\overline{AB}$為線段長度必大於 0
(11) $\overline{O_1D}\parallel\overline{O_2E}$	由(1) $\overline{O_1D}\perp\overline{DE}$、$\overline{O_2E}\perp\overline{DE}$ ＆ 定理 3.2-1 兩條直線如都與一直線垂直， 則此二直線互相平行
(12) 四邊形 DEO_2F 為平行四邊形	由(1) $\overline{O_2F}\parallel\overline{DE}$ ＆ (11) $\overline{O_1D}\parallel\overline{O_2E}$ ＆ 兩組對邊平行為平行四邊形
(13) $\overline{DF}=\overline{O_2E}=2$、$\overline{O_2F}=\overline{DE}$	由(12) ＆ 平行四邊形兩組對邊相等 ＆ 由(1) $\overline{O_2E}=2$
(14) $\overline{O_1D}=\overline{O_1F}+\overline{DF}$	如圖所示，全量等於分量之和
(15) $\overline{O_1F}=\overline{O_1D}-\overline{DF}=5-2=3$	由(14) 移項 ＆ (1) $\overline{O_1D}=5$ ＆ (13) $\overline{DF}=2$
(16) $\angle O_1FO_2=\angle O_1DE=90°$	由(1) $\overline{O_2F}\parallel\overline{DE}$ ＆ 同位角相等 ＆ (1) $\angle O_1DE=90°$
(17) $\triangle O_1FO_2$ 為直角三角形， $\overline{O_1F}^2+\overline{O_2F}^2=\overline{O_1O_2}^2$	由(16) $\angle O_1FO_2=90°$ 畢氏定理
(18) $3^2+\overline{DE}^2=10^2$	由(17) ＆ (15) $\overline{O_1F}=3$ ＆ (13) $\overline{O_2F}=\overline{DE}$ ＆ 已知$\overline{O_1O_2}=10$
(19) $\overline{DE}=-\sqrt{91}$ 或 $\overline{DE}=\sqrt{91}$	由(18) 求平方根
(20) 所以外公切線段$\overline{DE}=\sqrt{91}$	由(19) ＆ $\overline{DE}$為線段長度必大於 0

習題 8.3-21

如圖 8.3-72，在圓 O 中，$\overline{OP}$、$\overline{OQ}$、$\overline{OR}$、$\overline{OS}$分別為弦$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$、$\overline{GH}$的弦心距。已知$\overline{AB}=5$，$\overline{CD}=6$，$\overline{EF}=7$，$\overline{GH}=8$。試判斷$\overline{OP}$、$\overline{OQ}$、$\overline{OR}$與$\overline{OS}$的大小。

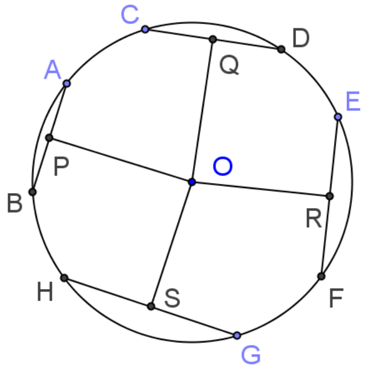


圖 8.3-72

想法： 在圓 O 中，利用同圓中大弦對小弦心距、小弦對大弦心距定理，判斷$\overline{OP}$、$\overline{OQ}$、$\overline{OR}$與$\overline{OS}$的大小。

解：

敘述	理由
(1) 在圓 O 中，$\overline{OP}>\overline{OQ}>\overline{OR}>\overline{OS}$	已知$\overline{OP}$、$\overline{OQ}$、$\overline{OR}$、$\overline{OS}$分別為弦$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$、$\overline{GH}$的弦心距 & 已知$\overline{AB}=5$，$\overline{CD}=6$，$\overline{EF}=7$，$\overline{GH}=8$ & 同圓中大弦對小弦心距、小弦對大弦心距定理