目　錄

第八章 比例與相似形

8.1 節　比例

定義 8.1-1 比與比值

比的定義：比較兩個同類量的表示方法，稱為比，":"為比的符號。

例如：男生有 8 人, 女生有 5 人, 則男女人數之比為 8 人: 5 人＝8∶5。

比值:比的前面的數除以後面的數所得的商，稱為比值。

例如：男生有 8 人, 女生有 5 人, 則男女人數之比為 8∶5，

比值為 $8\div 5=\frac{8}{5}$。(所以 $8:5=\frac{8}{5}$。)

定義 8.1-2 比例式

兩比相等，用等號將兩比聯成的等式，叫做比例式。

例如：　a：b＝c：d 為比例式。

定義 8.1-3 前項、後項；內項、外項

兩量相比，在比號":"前面的量叫做前項，在比號":"後面的量叫做後項。一個比例式的第一項與第三項為前項，第二項與第四項為後項； 第一項與第四項為外項，第二項與第三項為內項。

例如： 在 a 與 b 兩量之比 a：b 中，a 為前項，b 為後項。
在比例式 a：b＝c：d 中，a, c 為前項，b,d 為後項；a,d 為外項，b,c 為內項。

定義 8.1-4 比例中項

同類三量中，若第一量比第二量等於第二量比第三量，則第二量稱為的第一量與第三量的比例中項。

例如：　在比例式 a：b＝b：c 中，b 為 a, c 兩量的比例中項。

定理 8.1-1 內外項關係定理

在任一比例式中，兩內項的乘積必等於兩外項的乘積。
(內項乘積等於外項乘積)

已知：若 a：b＝c：d
求證： a×d＝b×c
證明：

敘述	理由
(1) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$	已知 a：b＝c：d 及比值的定義
(2) $\frac{a}{b}\times b\times d=\frac{c}{d}\times b\times d$	等式的兩邊同乘等量 b×d 兩邊仍相等
(3) 所以 a×d＝b×c	由(2)

Q. E. D.

例題 8.1-1：

若 3：8＝5：x，則 x 之值為何？

想法：利用比例式之內項乘積等於外項乘積性質(定理 8.1-1)。

解：

敘述	理由
(1) $3\times x=8\times 5$	已知 3：8＝5：x ＆ 任一比例式中， 內項乘積等於外項乘積
(2) $x=\frac{8\times 5}{3}=\frac{40}{3}$	由(1) ＆ 解一元一次方程式

例題 8.1-2：

若 3：(x－7)＝5：8，則 x 之值為何？

想法：利用比例式之內項乘積等於外項乘積性質(定理 8.1-1)。

解：

敘述	理由
(1) $3\times 8=(x-7)\times 5$	已知 3：(x－7)＝5：8 ＆ 任一比例式中， 內項乘積等於外項乘積
(2) $x=\frac{3\times 8}{5}+7=\frac{59}{5}$	由(1) ＆ 解一元一次方程式

定理 8.1-2 比例中項定理

兩量的比例中項的平方等於這兩量的乘積。

已知：在比例式 a：b＝b：c 中。

求證：$b^2＝a×c$

證明：

敘述	理由
(1) a：b＝b：c	已知
(2) $b^2＝a×c$	由(1) & 內項乘積等於外項乘積

Q. E. D.

例題 8.1-3：

已知 x 為 4 與 9 的比例中項，且 x＞0，求 x 之值為何？

想法：利用兩量的比例中項的平方等於這兩量的乘積求 x 之值

解：

敘述	理由
(1) $x^2＝4 \times 9$	已知 x 為 4 與 9 的比例中項 & 兩量的比例中項的平方等於這兩量的乘積
(2) x＝±6 (負不合)	由(1) & 求平方根 & 已知 x＞0
(3) 所以 x＝6	由(2)

定理 8.1-3 更比定理

任何比例式中，兩內項可以互換，兩外項也可以互換。

已知： 若 a：b＝c：d

求證： a：c＝b：d ； d：b＝c：a

證明：

敘述	理由
(1) $a\times d = b\times c$	已知 a：b＝c：d & 內項乘積等於外項乘積
(2) $a\times d = c\times b$	由(1) & 乘法交換律 $b\times c = c\times b$
(3) $\frac{a\times d}{d\times c} = \frac{c\times b}{d\times c}$	由(2) & 等式的兩邊同除等量 $d\times c$ 兩邊仍相等
(4) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$	由(3)
(5) 所以 a：c＝b：d	由(4) & 比與比值的定義
(6) $d\times a = b\times c$	由(1) & 乘法交換律 $a\times d = d\times a$
(7) $\frac{d\times a}{a\times b} = \frac{b\times c}{a\times b}$	由(6) & 等式的兩邊同除等量 $a\times b$ 兩邊仍相等
(8) $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$	由(7)
(9) 所以 d：b＝c：a	由(8) & 比與比值的定義

Q. E. D.

定理 8.1-4 反比定理

任何比例式中，兩內項與兩外項可以互換。

已知：若 a：b＝c：d
求證： b：a＝d：c
證明：

敘述	理由
(1) a×d＝b×c	已知 a：b＝c：d ＆ 內項乘積等於外項乘積
(2) $\frac{a\times d}{a\times c}=\frac{b\times c}{a\times c}$	由(1) ＆ 等式的兩邊同除等量 a×c 兩邊仍相等
(3) $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$	由(2)
(4) 所以 d：c＝b：a	由(3) ＆ 比與比值的定義
(5) b：a＝d：c	由(4)

Q. E. D.

定理 8.1-5 合比定理

任何比例式中，前兩項的和比第二項等於後兩項的和比第四項。

已知：若 a：b＝c：d
求證： (a＋b)：b＝(c＋d)：d
證明：

敘述	理由
(1) a×d＝b×c	已知 a：b＝c：d ＆ 內項乘積等於外項乘積
(2) a×d＋b×d＝b×c＋b×d	由(1) ＆ 等式的兩邊同加 b×d 兩邊仍相等
(3) (a＋b)×d＝b×(c＋d)	由(2) ＆ 提出公因數
(4) $\frac{(a+b)\times d}{b\times d}=\frac{b\times(c+d)}{b\times d}$	由(3) ＆ 等式的兩邊同除 b×d 兩邊仍相等
(5) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$	由(4)
(6) 所以(a＋b)：b＝(c＋d)：d	由(5) ＆ 比與比值的定義

Q. E. D.

定理 8.1-6 分比定理

任何比例式中，前兩項的差比第二項等於後兩項的差比第四項。

已知：若 a：b＝c：d

求證： (a－b)：b＝(c－d)：d

證明：

敘述	理由
(1) a×d＝b×c	已知 a：b＝c：d ＆ 內項乘積等於外項乘積
(2) a×d－b×d＝b×c－b×d	由(1) ＆ 等式的兩邊同減 b×d 兩邊仍相等
(3) (a－b)×d＝b×(c－d)	由(2) ＆ 提出公因數
(4) $\dfrac{(a-b)\times d}{b\times d}=\dfrac{b\times(c-d)}{b\times d}$	由(3) ＆ 等式的兩邊同除 b×d 兩邊仍相等
(5) $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$	由(4)
(6) 所以(a－b)：b＝(c－d)：d	由(5) ＆ 比與比值的定義

Q. E. D.

定理 8.1-7 合分比定理

任何比例式中，前兩項的和比前兩項的差等於後兩項的和比後兩項的差。

已知：若 a：b＝c：d

求證： (a＋b)：(a－b)＝(c＋d)：(c－d)

證明：

敘述	理由
(1) (a＋b)：b＝(c＋d)：d	已知 a：b＝c：d ＆ 合比定理
(2) (a＋b)×d＝b×(c＋d)	由(1) ＆ 內項乘積等於外項乘積
(3) (a－b)：b＝(c－d)：d	已知 a：b＝c：d ＆ 分比定理
(4) (a－b)×d＝b×(c－d)	由(3) ＆ 內項乘積等於外項乘積
(5) $\dfrac{(a+b)\times d}{(a-b)\times d}=\dfrac{b\times(c+d)}{b\times(c-d)}$	由(2)式÷(4)式 ＆ 等量除法公理：等量除等量，其商相等
(6) $\dfrac{(a+b)}{(a-b)}=\dfrac{(c+d)}{(c-d)}$	由(5)
(7) 所以(a＋b)：(a－b)＝(c＋d)：(c－d)	由(6) ＆ 比與比值的定義

Q. E. D.

定理 8.1-8 比例乘法定理

兩個比例式的對應項乘積仍成比例。

已知：若 a：b＝c：d 且 p：q＝m：n

求證： (a×p)：(b×q)＝(c×m)：(d×n)

證明：

敘述	理由
(1) a×d＝b×c & p×n＝q×m	已知 a：b＝c：d 與 p：q＝m：n & 內項乘積等於外項乘積
(2) a×d×p×n＝b×c×q×m	由(1) & 等量乘法公理：等量乘等量，其積相等
(3) (a×p)×(d×n)＝(b×q)×(c×m)	由(2) & 乘法交換律與結合律
(4) $\frac{(a\times p)\times(d\times n)}{b\times q\times d\times n}=\frac{(b\times q)\times(c\times m)}{b\times q\times d\times n}$	由(3) & 等式的兩邊同除 b×q×d×n 兩邊仍相等
(5) $\frac{(a\times p)}{(b\times q)}=\frac{(c\times m)}{(d\times n)}$	由(4)
(6) (a×p)：(b×q)＝(c×m)：(d×n)	由(5) & 比與比值的定義

Q. E. D.

定理 8.1-9 和比定理

諸比相等，則諸比前項的和和諸比後項的和之比，等於原比。
(我們只證明三個比的情形，三個以上的情形可以類推。)

已知：若 a：b＝c：d＝e：f＝r
求證：(a＋c＋e)： (b＋d＋f)＝r
證明：

(1) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=r$	已知 a：b＝c：d＝e：f＝r ＆ 比與比值的定義
(2) a＝b×r； c＝d×r； e＝f×r	由(1)
(3) a＋c＋e＝b×r＋d×r＋f×r	由(2) ＆ 等量加法公理：等量加等量，其和相等
(4) a＋c＋e＝r×(b＋d＋f)	由(3) ＆ 提出公因數
(5) $\frac{a+c+e}{b+d+f}=r$	由(4) ＆ 等式兩邊同除(b＋d＋f)仍相等
(6) 所以(a＋c＋e)：(b＋d＋f)＝r	由(5) ＆ 比與比值的定義

Q. E. D.

定理 8.1-10 倍比定理

兩量同倍量的比等於這兩量的比。

已知：若 a，b，m 為任意三數。
求證：a：b＝(m×a)：(m×b)
證明：

敘述	理由
(1) 設 $\frac{a}{b}=r$	假設
(2) a= b×r	由(1) ＆ 等式兩邊同乘 b 仍相等
(3) m×a＝m×b×r	由(2) ＆ 等式兩邊同乘 m 仍相等
(4) $\frac{m\times a}{m\times b}=r$	由(3) ＆ 等式兩邊同除(m×b)仍相等
(5) 所以 $\frac{a}{b}=\frac{m\times a}{m\times b}$	由(1) ＆ (4) 遞移律
(6) a：b＝(m×a)：(m×b)	由(5) ＆ 比與比值的定義

Q. E. D.

例題 8.1-4：

試證明在比例式 a：b＝c：d 中，存在一常數 r，使得 a＝c×r、b＝d×r 。

已知：若 a：b＝c：d。

求證：存在一常數 r，使得 a＝c×r、b＝d×r 。

證明：

敘述	理由
(1) a×d＝b×c	已知 a：b＝c：d & 內項乘積等於外項乘積
(2) $\frac{a\times d}{d}=\frac{b\times c}{d}$ (即 a＝$\frac{b}{d}\times c$)	由(1) & 等式兩邊同除 d 仍相等
(3) a＝$\frac{b}{d}\times c=c\times\frac{b}{d}$	由(2) & 乘法交換律
(4) 假設 r＝$\frac{b}{d}$	假設
(5) 所以 a＝c×r	將(4) r＝$\frac{b}{d}$ 代入 (3) a＝$c\times\frac{b}{d}$ 得
(6) b＝1×b＝$\frac{d}{d}$×b＝$\frac{d\times b}{d}$＝d×$\frac{b}{d}$	任何數乘 1 其值不變 & 1＝$\frac{d}{d}$
(7) 所以 b＝d×r	將(4) r＝$\frac{b}{d}$ 代入 (6) b＝d×$\frac{b}{d}$ 得

由上述例題中，我們可以得到一個結論：

若 a：b＝c：d，則我們可以假設存在一常數 r，使得 a＝c×r、b＝d×r。

而此結論也可以延伸到三個數以上的比例式：

若 x：y：z＝p：q：s，則我們可以假設存在一常數 r，使得 x＝p×r、y＝q×r、z＝s×r。

例題 8.1-5：

已知 x：y＝7：3，且 x＋y＝20，求 x 與 y 之值為？

想法：若 a：b＝c：d，則我們可以假設 a＝c×r、b＝d×r 。 (r 為常數)

解：

敘述	理由
(1) 假設 x＝7r、y＝3r	已知 x：y＝7：3
(2) 7r＋3r＝20	將(1) 假設 x＝7r、y＝3r 代入已知 x＋y＝20
(3) r＝20÷(7＋3)＝2	由(2) & 解一元一次方程式
(4) x＝7r＝7×2＝14 y＝3r＝3×2＝6	將(3) r＝2 已證 代入(1) 假設 x＝7r、y＝3r

例題 8.1-6：

已知(x＋y)：(x－y)＝7：3，求 x 與 y 之比為？

想法：若 a：b＝c：d，則我們可以假設 a＝c×r、b＝d×r 。 (r 為常數)

解：

敘述	理由
(1) 假設 x＋y＝7r、x－y＝3r	已知(x＋y)：(x－y)＝7：3
(2) x＝5r、y＝2r	由(1) & 解二元一次聯立方程式
(3) 所以 x：y＝5r：2r＝5：2	由(2) & 倍比定理

例題 8.1-7：

已知(x＋y)：(x－y)＝9：5，求 x^2 與 y^2 之比為？

想法：若 a：b＝c：d，則我們可以假設 a＝c×r、b＝d×r 。 (r 為常數)

解：

敘述	理由
(1) 假設 x＋y＝9r、x－y＝5r	已知(x＋y)：(x－y)＝9：5
(2) x＝7r、y＝2r	由(1) ＆ 解二元一次聯立方程式
(3) 所以 $x^2：y^2＝(7r)^2：(2r)^2$ $＝49r^2：4r^2$ ＝49：4	由(2) ＆ 倍比定理

例題 8.1-8：

三角形 ABC 中，若∠A：∠B：∠C＝3：4：5，則∠A＝__________度，∠B＝__________度，∠C＝__________度。

想法：利用三角形內角和 180°，求三內角之度數

解：

敘述	理由
(1) 假設∠A＝3r、∠B＝4r、∠C＝5r	已知∠A：∠B：∠C＝3：4：5
(2) ∠A＋∠B＋∠C＝180°	三角形內角和 180°
(3) 3r＋4r＋5r＝180°	將(1)式代入(2)式得
(4) r＝180°÷(3＋4＋5)＝15°	由(3) ＆ 解一元一次方程式
(5) 所以∠A＝3×15°＝45° ∠B＝4×15°＝60° ∠C＝5×15°＝75°	將(4) r＝15° 代入(1)式得

例題 8.1-9：

五邊形 ABCDE 中，∠A、∠B、∠C、∠D、∠E 的一組外角分別為 x°、y°、z°、s°、t°。若 x：y：z：s：t＝2：5：4：6：1，則∠A＝_____度，∠E＝_____度。

想法：利用五邊形外角和為 360°，求∠A 與∠E 之度數

解：

敘述	理由
(1) 假設 x＝2r、y＝5r、z＝4r、 s＝6r、t＝r	已知 x：y：z：s：t＝2：5：4：6：1
(2) x°＋y°＋z°＋s°＋t°＝360°	五邊形外角和為 360°
(3) 2r＋5r＋4r＋6r＋r＝360	將(1)式代入(2)式得
(4) r＝360°÷(2＋5＋4＋6＋1)＝20	由(3) & 解一元一次方程式
(5) 所以 x＝2×20＝40 t＝1×20＝20	將(4) r＝20 代入(1)式得
(6) 所以∠A＝180°－x° ＝180°－40°＝140° ∠E＝180°－t° ＝180°－20°＝160°	已知∠A、∠E 的外角分別為 x°、t° & 將(5) x＝40、 t＝20 代入得

例題 8.1-10：

有一正 n 邊形，其一個外角度數與一個內角度數的比為 1：2，
則 n＝______________，內角和為______________度。

想法：利用正 n 邊形內角與外角的關係求值

解：

敘述	理由
(1) 正 n 邊形一個外角度數＝$\dfrac{360^0}{n}$	正 n 邊形外角和 360° & 正 n 邊形的每個外角均相等
(2) 正 n 邊形一個內角度數＝$\dfrac{(n-2)\times180^0}{n}$	正 n 邊形內角和(n－2)×180° & 正 n 邊形的每個內角均相等
(3) $\dfrac{360^0}{n}$：$\dfrac{(n-2)\times180^0}{n}$＝1：2	由(1)、(2) & 已知正 n 邊形，其一個外角度數與一個內角度數的比為 1：2
(4) $\dfrac{360^0}{n}\times2=\dfrac{(n-2)\times180^0}{n}\times1$	由(3) & 內項乘積等於外項乘積
(5) 360°×2＝(n－2)×180°	由(4) & 等式兩邊同乘 n 仍相等
(6) n＝$\dfrac{360^0\times2}{180^0}+2=6$	由(5) & 解一元一次方程式
(7) 正六邊形內角和為(6－2)×180°＝720°	正 n 邊形內角和(n－2)×180° & 由(6) n＝6

定理 8.1-11 三角形之平行線截比例線段定理

三角形一邊的平行線，必分另兩邊成比例線段。

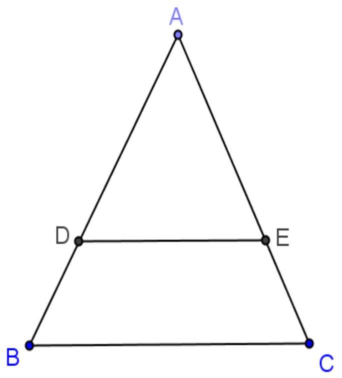


圖 8.1-1(a)

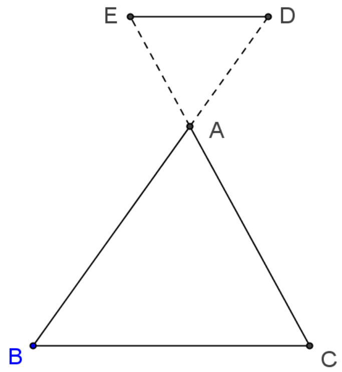


圖 8.1-1(b)

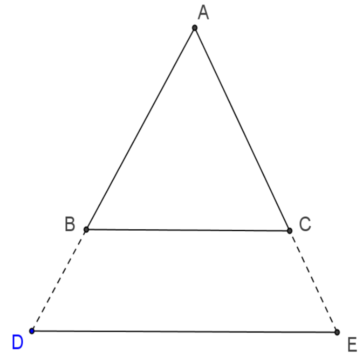


圖 8.1-1(c)

已知：如圖 8.1-1(a、b、c)，△ABC 中，$\overline{BC}$的平行線$\overline{DE}$分別與$\overleftrightarrow{AB}$及$\overleftrightarrow{AC}$交於 D 點及 E 點。

求證：$\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$

想法：將$\overline{AD}$與$\overline{DB}$等分成 m 個及 n 個相同單位長度，得$\overline{AD}:\overline{DB}=$m：n 及平行三角形一邊的平行線性質。

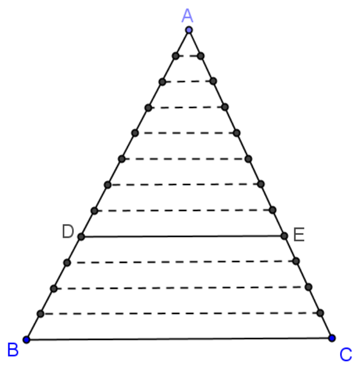


圖 8.1-2(a)

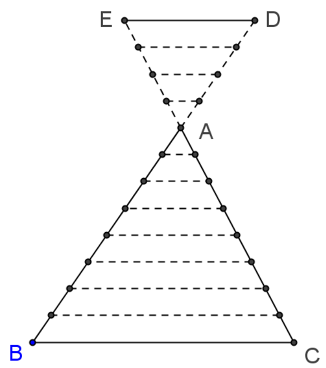


圖 8.1-2(b)

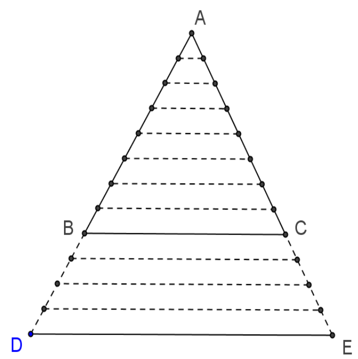


圖 8.1-2(c)

證明：

敘述	理由
(1) 取$\overline{AD}$長度與$\overline{DB}$長度的公因數 u 為單位長，將$\overline{AD}$分為 m 等分與$\overline{DB}$分為 n 等分， ∴$\overline{AD}=$m×u， $\overline{DB}=$n×u	等分線段作圖
(2) 過$\overline{AD}$與$\overline{DB}$各等分點作$\overline{BC}$的平行線，則將$\overline{AE}$分為 m 等分，$\overline{EC}$分為 n 等分，設每等分長度為 v，如圖 8.1-2(a、b、c) ∴$\overline{AE}=$m×v，$\overline{EC}=$n×v	平行線作圖 平行線截等線段定理 (定理 6.2-9)

(3) $\overline{AD}:\overline{DB}=(m\times u):(n\times u)=m:n$	倍比定理
(4) $\overline{AE}:\overline{EC}=(m\times v):(n\times v)=m:n$	倍比定理
(5) $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$	由(3) & (4) 遞移律

Q. E. D.

例題 8.1-11：

如圖 8.1-3，△ABE 中，$\overline{DC} \parallel \overline{AB}$，且$\overline{AD}=6$，$\overline{DE}=9$，$\overline{CE}=12$，試求$\overline{CB}$。

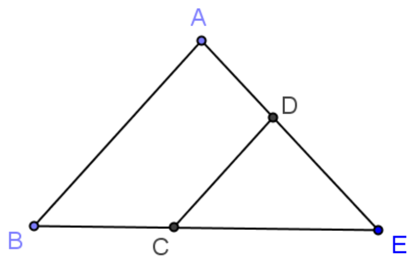


圖 8.1-3

想法：利用三角形之平行線截比例線段性質求解

解：

敘述	理由
(1) △ABE 中， $\overline{ED}:\overline{DA}=\overline{EC}:\overline{CB}$	已知△ABE 中，$\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ & 三角形之平行線截比例線段
(2) $9:6=12:\overline{CB}$	將已知$\overline{AD}=6$，$\overline{DE}=9$，$\overline{CE}=12$ 代入(1)式得
(3) $9\times\overline{CB}=6\times 12$	由(2) & 內項相乘等於外項相乘
(4) $\overline{CB}=6\times 12\div 9=8$	由(3) 等量除法公理

例題 8.1-12：

如圖 8.1-4，△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$，$\overline{AD}=5$，$\overline{BD}=3$，$\overline{CE}=6$，則$\overline{AC}=$？

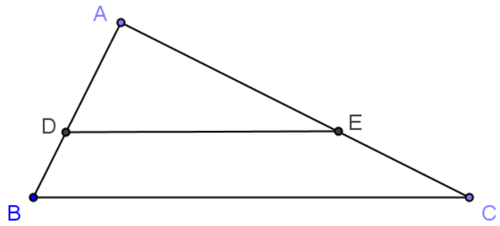


圖 8.1-4

想法：利用三角形之平行線截比例線段性質求解

解：

敘述	理由
(1) △ABC 中， $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$	已知△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ & 三角形之平行線截比例線段
(2) $5:3=\overline{AE}:6$	將已知$\overline{AD}=5$，$\overline{BD}=3$，$\overline{CE}=6$ 代入(1)式得
(3) $5\times6=3\times\overline{AE}$	由(2) & 內項相乘等於外項相乘
(4) $\overline{AE}=5\times6\div3=10$	由(3) 等量除法公理
(5) 所以$\overline{AC}=\overline{AE}+\overline{EC}$ $=10+6=16$	如圖 8.1-4 所示 & 全量等於分量之和 將(4) $\overline{AE}=10$ & 已知$\overline{CE}=6$ 代入

此例題另外也可用合比定理解題：

敘述	理由
(1) △ABC 中， $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$	已知△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ & 三角形之平行線截比例線段
(2) $(\overline{AD}+\overline{DB}):\overline{DB}=(\overline{AE}+\overline{EC}):\overline{EC}$	由(1) & 合比定理
(3) $(\overline{AD}+\overline{DB}):\overline{DB}=\overline{AC}:\overline{EC}$	由(2) & $\overline{AE}+\overline{EC}=\overline{AC}$ (分量之和等於全量)
(4) $(5+3):3=\overline{AC}:6$	將已知$\overline{AD}=5$，$\overline{BD}=3$，$\overline{CE}=6$ 代入(3)式得
(5) $(5+3)\times6=3\times\overline{AC}$	由(4) & 內項相乘等於外項相乘
(6) $\overline{AC}=(5+3)\times6\div3=16$	由(5) 等量除法公理

例題 8.1-13：

如圖 8.1-5，△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{AC}$，且$\overline{BD}:\overline{DA}=4:5$，若$\overline{BC}=27$，試求$\overline{EC}$。

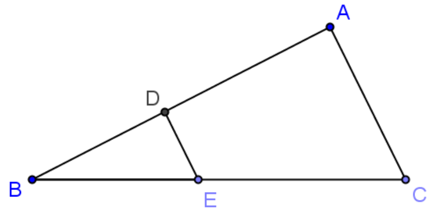


圖 8.1-5

想法：利用三角形之平行線截比例線段性質求解

解：

敘述	理由
(1) $\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{EC}$	如圖 8.1-5 所示 & 全量等於分量之和
(2) $27=\overline{BE}+\overline{EC}$	將已知$\overline{BC}=27$ 代入(1)式得
(3) $\overline{BE}=27-\overline{EC}$	由(2) 等量減法公理
(4) △ABC 中， $\overline{BD}:\overline{DA}=\overline{BE}:\overline{EC}$	已知△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ & 三角形之平行線截比例線段
(5) $4:5=(27-\overline{EC}):\overline{EC}$	將已知$\overline{BD}:\overline{DA}=4:5$ & (3) $\overline{BE}=27-\overline{EC}$ 代入(4)式得
(6) $4\times\overline{EC}=5\times(27-\overline{EC})$	由(5) & 內項相乘等於外項相乘
(7) $\overline{EC}=5\times27\div(4+5)=15$	由(6)式解一元一次方程式

此例題另外也可用合比定理解題：

敘述	理由
(1) △ABC 中， $\overline{BD}:\overline{DA}=\overline{BE}:\overline{EC}$	已知△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ & 三角形之平行線截比例線段
(2) $(\overline{BD}+\overline{DA}):\overline{DA}=(\overline{BE}+\overline{EC}):\overline{EC}$	由(1) & 合比定理
(3) $(\overline{BD}+\overline{DA}):\overline{DA}=\overline{BC}:\overline{EC}$	由(2) & $\overline{BE}+\overline{EC}=\overline{BC}$(分量之和等於全量)
(4) $(4+5):5=27:\overline{EC}$	將已知$\overline{BD}:\overline{DA}=4:5$ & 合比定理 $(\overline{BD}+\overline{DA}):\overline{DA}=(4+5):5$ & 已知$\overline{BC}=27$ 代入(3)式得
(5) $(4+5)\times\overline{EC}=5\times27$	由(4) & 內項相乘等於外項相乘
(6) $\overline{EC}=5\times27\div(4+5)=15$	由(5) 等量除法公理

例題 8.1-14：

如圖 8.1-6，△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$，且$\overline{AD}=10$，$\overline{DB}=x$， $\overline{AE}=2x+2$，$\overline{EC}=6$，試求 x 之值。

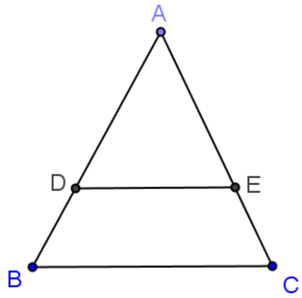


圖 8.1-6

想法：利用三角形之平行線截比例線段性質求解

解：

敘述	理由
(1) △ABC 中，$\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$	已知△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ & 三角形之平行線截比例線段
(2) $10:x=(2x+2):6$	將已知$\overline{AD}=10$，$\overline{DB}=x$， $\overline{AE}=2x+2$，$\overline{EC}=6$ 代入(1)式得
(3) $10\times6=x\times(2x+2)$	由(2) & 內項相乘等於外項相乘
(4) $60=2x^2+2x$ $30=x^2+x$ $x^2+x-30=0$ $(x+6)(x-5)=0$ $x=-6$(不合) 或 $x=5$	由(3)式展開 等式兩邊同除 2 仍相等 等量減法公理 十字交乘因式分解一元二次方程式 已知 $x=\overline{DB}$ 為線段長度必大於 0
(5) 所以 $x=5$	由(4)

例題 8.1-15：　　比例線段作圖

如圖 8.1-7，用尺規依下面作法，在$\overline{AB}$上找出一點 C，使得 $\overline{AC}$：$\overline{CB}$＝4：2。

圖 8.1-7

作法：如圖 8.1-7(a)

(1) 過 A 點作一條異於$\overline{AB}$的直線 L。

(2) 在 L 上依序取 D、E、F、G、H、I 六點，使得 $\overline{AD}$＝$\overline{DE}$＝$\overline{EF}$＝$\overline{FG}$＝$\overline{GH}$＝$\overline{HI}$。

(3) 連接$\overline{IB}$。

(4) 過 G 作直線 M $\parallel$ $\overline{IB}$，使 M 與$\overline{AB}$交於 C 點，則 C 點即為所求。

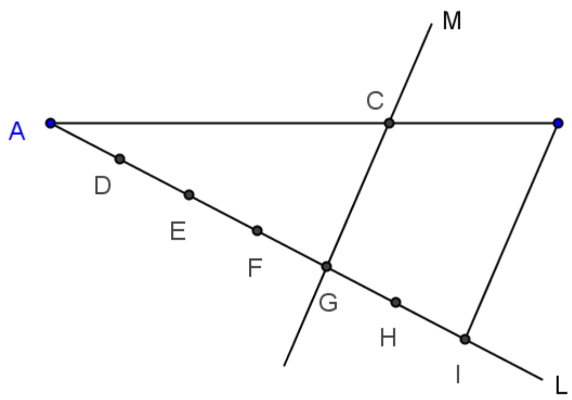


圖 8.1-7(a)

接下來我們要證明以上作法是正確的：

敘述	理由
(1) 如圖 8.1-7(a)，$\overline{AG}$：$\overline{GI}$＝4：2	由作法(1) ＆ (2)
(2) △ABI 中， $\overline{AC}$：$\overline{CB}$＝$\overline{AG}$：$\overline{GI}$	由作法(4)可得知△ABI 中，$\overline{CG}$ $\parallel$ $\overline{IB}$ ＆ 三角形之平行線截比例線段
(3) 所以$\overline{AC}$：$\overline{CB}$＝4：2	由(1) ＆ (2)　遞移律

例題 8.1-16：

如圖 8.1-8，△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$，試證明$\overline{DB}$：$\overline{AD}$＝$\overline{EC}$：$\overline{AE}$

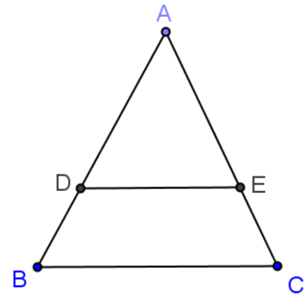


圖 8.1-8

想法：(1) 利用三角形之平行線截比例線段定理

(2) 反比定理： 若 a：b＝c：d，則 b：a＝d：c

證明：

敘述	理由
(1) △ABC 中， $\overline{AD}$：$\overline{DB}$＝$\overline{AE}$：$\overline{EC}$	已知△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ & 三角形之平行線截比例線段
(2) 所以$\overline{DB}$：$\overline{AD}$＝$\overline{EC}$：$\overline{AE}$	由(1) & 反比定理

例題 8.1-17：

如圖 8.1-9，△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$，試證明

(1) $\overline{AB}:\overline{DB}=\overline{AC}:\overline{EC}$　　(2) $\overline{DB}:\overline{AB}=\overline{EC}:\overline{AC}$

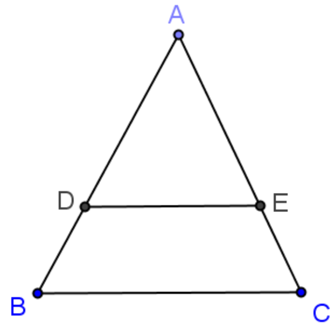


圖 8.1-9

想法：(1) 利用三角形之平行線截比例線段定理

(2) 合比定理：若 a：b＝c：d，則 (a＋b)：b＝(c＋d)：d

(3) 反比定理：若 a：b＝c：d，則 b：a＝d：c

證明：

敘述	理由
(1) △ABC 中， $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$	已知△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ & 三角形之平行線截比例線段
(2) 所以($\overline{AD}+\overline{DB}$)：$\overline{DB}$＝($\overline{AE}+\overline{EC}$)：$\overline{EC}$	由(1) & 合比定理
(3) $\overline{AB}:\overline{DB}=\overline{AC}:\overline{EC}$	由(2) & $\overline{AD}+\overline{DB}=\overline{AB}$ $\overline{AE}+\overline{EC}=\overline{AC}$
(4) 所以$\overline{DB}:\overline{AB}=\overline{EC}:\overline{AC}$	由(3) & 反比定理

例題 8.1-18：

如圖 8.1-10，△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$，試證明

(1) $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}$　　　　(2) $\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AE}:\overline{AC}$

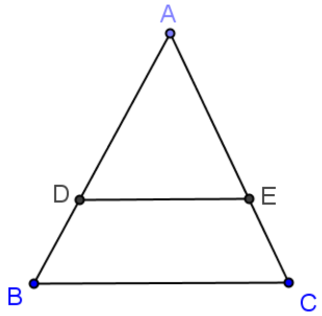


圖 8.1-10

想法：(1) 利用三角形之平行線截比例線段定理

(2) 合比定理：若 a：b＝c：d，則 (a＋b)：b＝(c＋d)：d

(3) 反比定理：若 a：b＝c：d，則 b：a＝d：c

證明：

敘述	理由
(1) △ABC 中， $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$	已知△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ & 三角形之平行線截比例線段
(2) 所以$\overline{DB}:\overline{AD}=\overline{EC}:\overline{AE}$	由(1) & 反比定理
(3) 所以$(\overline{DB}+\overline{AD}):\overline{AD}=(\overline{EC}+\overline{AE}):\overline{AE}$	由(2) & 合比定理
(4) $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}$	由(3) & $\overline{DB}+\overline{AD}=\overline{AB}$ $\overline{EC}+\overline{AE}=\overline{AC}$
(5) 所以$\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AE}:\overline{AC}$	由(4) & 反比定理

如圖 8.1-11，在△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$，根據三角形之平行線截比例線段定理，我們知道$\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$。若我們將三角形之平行線截比例線段定理應用在例題 8.1-16~例題 8.1-18 中，再配合上合比、反比定理，我們還可以得到以下的結果：

(1) $\overline{DB}:\overline{AD}=\overline{EC}:\overline{AE}$

(2) $\overline{AB}:\overline{DB}=\overline{AC}:\overline{EC}$

(3) $\overline{DB}:\overline{AB}=\overline{EC}:\overline{AC}$

(4) $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}$

(5) $\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AE}:\overline{AC}$

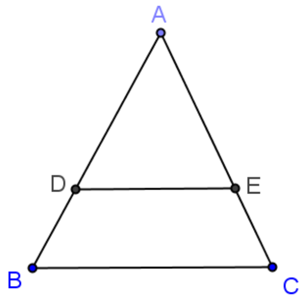


圖 8.1-11

定理 8.1-12 三角形一邊的平行判別定理

若一直線截三角形的兩邊成比例線段，則這直線必平行這三角形的第三邊。

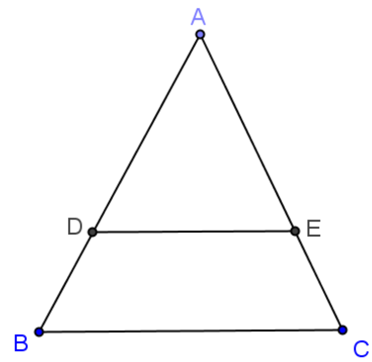


圖 8.1-12

已知：如圖 8.1-12，△ABC 中，$\overline{DE}$分別與$\overline{AB}$及$\overline{AC}$交於 D 點及 E 點，且$\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$。

求證：$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

想法：利用三角形之平行線截比例線段定理

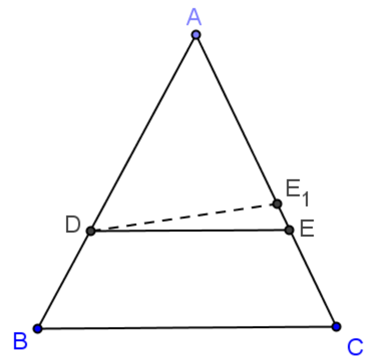


圖 8.1-12(a)

證明：

敘述	理由
(1) 過 D 點作$\overline{DE_1} \parallel \overline{BC}$，交$\overline{AC}$於 E_1，如圖 8.1-12(a)	平行線作圖
(2) $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE_1}:\overline{E_1C}$	由(1) & 三角形之平行線截比例線段
(3) $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$	已知
(4) 所以$\overline{AE_1}:\overline{E_1C}=\overline{AE}:\overline{EC}$	由(2) & (3) 遞移律
(5) $(\overline{AE_1}+\overline{E_1C}):\overline{E_1C}=(\overline{AE}+\overline{EC}):\overline{EC}$	由(4) & 合比定理

(6) 所以$\overline{AC}$：$\overline{E_1C}=\overline{AC}$：$\overline{EC}$	由(5) & $\overline{AE_1}+\overline{E_1C}=\overline{AC}$、$\overline{AE}+\overline{EC}=\overline{AC}$
(7) $\overline{AC}\times\overline{EC}=\overline{E_1C}\times\overline{AC}$	由(6) & 內項相乘等於外項相乘
(8) 所以$\overline{EC}=\overline{E_1C}$	由(7) & 等式兩邊同除$\overline{AC}$仍相等
(9) E 與 E_1 重疊	由(8) & 兩點決定一線段
(10) $\overline{DE}=\overline{DE_1}$	由(9)
(11) 所以$\overline{DE}\parallel\overline{BC}$	由(1)$\overline{DE_1}\parallel\overline{BC}$ & (10)$\overline{DE}=\overline{DE_1}$

Q. E. D.

例題 8.1-19：

如圖 8.1-13，△ABC 中，$\overline{AD}=14$，$\overline{DB}=8$，$\overline{AE}=21$，$\overline{EC}=12$，試問$\overline{DE}$與$\overline{BC}$是否平行？為什麼？

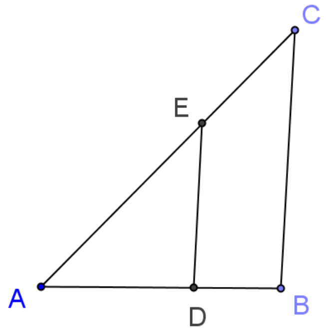


圖 8.1-13

想法：一直線截三角形的兩邊成比例線段，則這直線必平行三角形的第三邊

解：

敘述	理由
(1) △ABC 中，$\overline{AD}$：$\overline{DB}=14：8=7：4$	已知$\overline{AD}=14$，$\overline{DB}=8$ & 化成最簡單整數比
(2) △ABC 中，$\overline{AE}$：$\overline{EC}=21：12=7：4$	已知$\overline{AE}=21$，$\overline{EC}=12$ & 化成最簡單整數比
(3) $\overline{AD}$：$\overline{DB}=\overline{AE}$：$\overline{EC}$成比例線段	由(1) & (2) 遞移律
(4) 所以$\overline{DE}\parallel\overline{BC}$	由(3) & 一直線截三角形的兩邊成比例線段，則這直線必平行這三角形的第三邊

例題 8.1-20：

如圖 8.1-14，△ABC 中，$\overline{AE}$：$\overline{EC}$＝5：7，若$\overline{AB}$＝36，$\overline{AD}$＝15，試問$\overline{DE}$與$\overline{BC}$是否平行？為什麼？

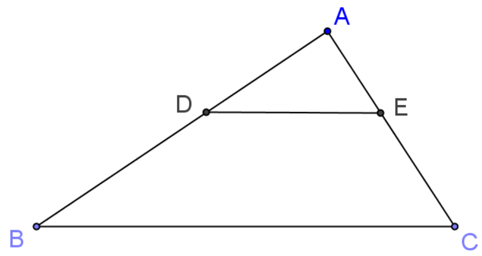


圖 8.1-14

想法：一直線截三角形的兩邊成比例線段，則這直線必平行三角形的第三邊

解：

敘述	理由
(1) △ABC 中，$\overline{DB}=\overline{AB}-\overline{AD}$ $=36-15=21$	已知$\overline{AB}$＝36 & $\overline{AD}$＝15 減法
(2) $\overline{AD}$：$\overline{DB}$＝15：21＝5：7	由(1) $\overline{DB}$＝21& 已知$\overline{AD}$＝15 化成最簡單整數比
(3) △ABC 中，$\overline{AE}$：$\overline{EC}$＝5：7	已知$\overline{AE}$：$\overline{EC}$＝5：7
(4) $\overline{AD}$：$\overline{DB}$＝$\overline{AE}$：$\overline{EC}$成比例線段	由(2) & (3) 遞移律
(5) 所以$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$	由(4) & 一直線截三角形的兩邊成比例線段，則這直線必平行這三角形的第三邊

定理 8.1-13 平行線截比例線段定理

任意兩直線被一組平行線所截，則截於平行線間的對應線段成比例。

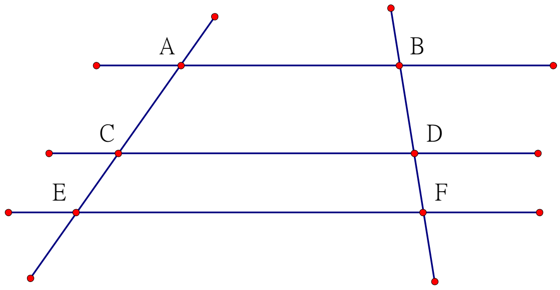


圖 8.1-15

已知：如圖 8.1-15，$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$，$\overleftrightarrow{AE}$及$\overleftrightarrow{BF}$為任意與三平行線相交的兩直線

求證：$\overline{AC}$：$\overline{CE}=\overline{BD}$：$\overline{DF}$

想法：三角形之平行線截比例線段定理

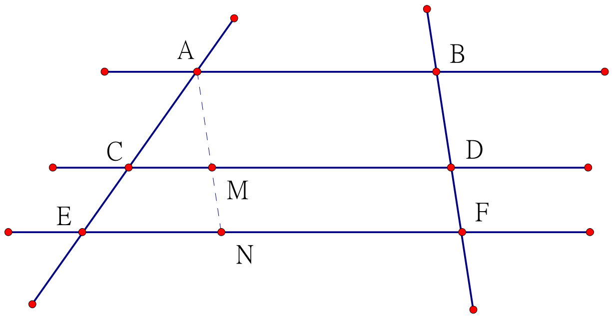


圖 8.1-15(a)

證明：

敘述	理由
(1) 過 A 點作$\overline{AN}$平行$\overleftrightarrow{BF}$，分別交$\overline{CD}$於 M 點，交$\overline{EF}$於 N 點，如圖 8.1-15(a)	平行線作圖
(2) ABDM 為平行四邊形 $\overline{AM}=\overline{BD}$	由(1) $\overline{AN} \parallel \overleftrightarrow{BF}$ & 已知$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 平行四邊形對邊等長
(3) MDFN 為平行四邊形 $\overline{MN}=\overline{DF}$	由(1) $\overline{AN} \parallel \overleftrightarrow{BF}$ & 已知$\overline{CD} \parallel \overline{EF}$ 平行四邊形對邊等長
(4) △AEN 中，$\overline{AC}$：$\overline{CE}=\overline{AM}$：$\overline{MN}$	已知$\overline{CD} \parallel \overline{EF}$ & 三角形之平行線截比例線段定理(定理 8.1-11)
(5) 所以$\overline{AC}$：$\overline{CE}=\overline{BD}$：$\overline{DF}$	由(4) & (2) $\overline{AM}=\overline{BD}$ & (3) $\overline{MN}=\overline{DF}$

Q. E. D.

例題 8.1-21：

如圖 8.1-16，$L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$，若$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=9$，$\overline{DE}=8$，則$\overline{EF}=$？

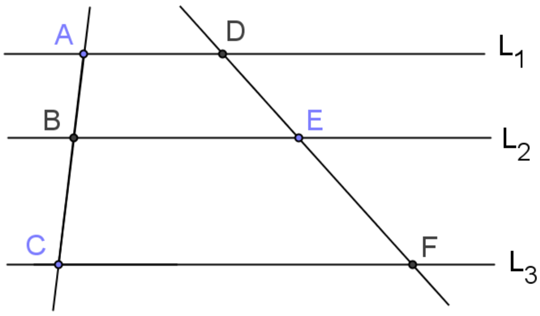


圖 8.1-16

想法：平行線截比例線段定理：任意兩直線被一組平行線所截，則截於平行線間的對應線段成比例。

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DE}:\overline{EF}$	已知 $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$，$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{DF}$為截線 & 平行線截比例線段定理
(2) $6:9=8:\overline{EF}$	由(1) & 已知$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=9$，$\overline{DE}=8$
(3) $6\times\overline{EF}=9\times8$	由(2) & 外項乘積等於內項乘積
(4) $\overline{EF}=12$	由(3) & 解一元一次方程式

例題 8.1-22：

如圖 8.1-17，$L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$，若$\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=8$，$\overline{DE}=3x-2$，$\overline{EF}=2x+4$，則 $x=$？

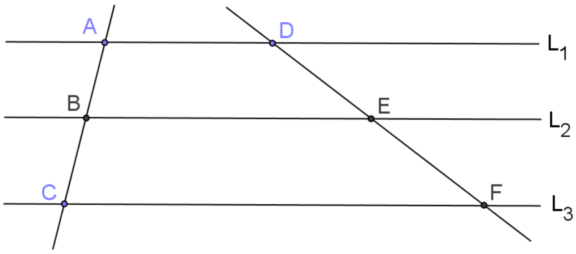


圖 8.1-17

想法：平行線截比例線段定理: 任意兩直線被一組平行線所截，則截於平行線間的對應線段成比例。

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DE}:\overline{EF}$	已知 $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$，$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{DF}$為截線 & 平行線截比例線段定理
(2) $7:8=(3x-2):(2x+4)$	由(1) & 已知$\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=8$，$\overline{DE}=3x-2$，$\overline{EF}=2x+4$
(3) $7\times(2x+4)=8\times(3x-2)$	由(2) & 外項乘積等於內項乘積
(4) $x=4.4$	由(3) & 解一元一次方程式

例題 8.1-23：

如圖 8.1-18，$L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$，若$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=9$，$\overline{DF}=20$，則$\overline{DE}=$？

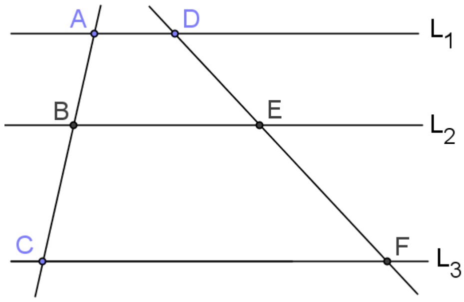


圖 8.1-18

想法：平行線截比例線段定理: 任意兩直線被一組平行線所截，則截於平行線間的對應線段成比例。

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DE}:\overline{EF}$	已知 $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$，$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{DF}$為截線 & 平行線截比例線段定理
(2) $6:9=\overline{DE}:\overline{EF}$	由(1) & 已知$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=9$
(3) 假設$\overline{DE}=6r$、$\overline{EF}=9r$	由(2) & 假設
(4) $\overline{DF}=\overline{DE}+\overline{EF}$	如圖 & 全量等於分量之和
(5) $20=6r+9r$	由(4) & 已知$\overline{DF}=20$ & (3) 假設
(6) $r=\dfrac{20}{15}=\dfrac{4}{3}$	由(5) & 解一元一次方程式
(7) $\overline{DE}=6r=6\times\dfrac{4}{3}=8$	由(3) 假設$\overline{DE}=6r$ & (6) $r=\dfrac{4}{3}$ 已證

例題 8.1-24：

如圖 8.1-19，M_1、M_2、M_3、M_4 皆為直線，若 $M_1 \parallel M_2 \parallel M_3 \parallel M_4$，且分別與截線 L_1 交於 E、F、G、H 四點、與截線 L_2 交於 A、B、C、D 四點，

(1) 試證$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}=\overline{EF}:\overline{FG}:\overline{GH}$。

(2) 若 $\overline{AB}=4$，$\overline{CD}=8$，$\overline{BC}=\overline{EF}=x$，$\overline{FG}=x+3$， 試求 x 與$\overline{GH}$之值。

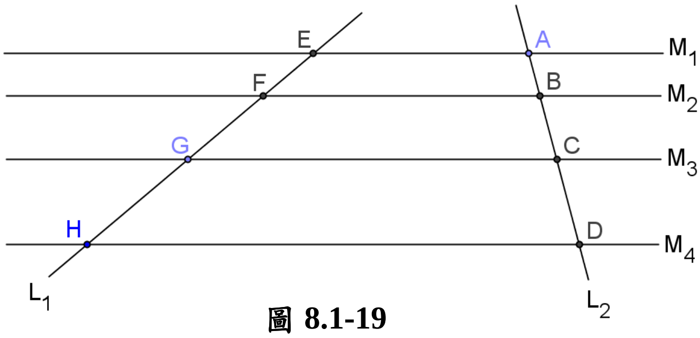


圖 8.1-19

想法：平行線截比例線段定理: 任意兩直線被一組平行線所截，則截於平行線間的對應線段成比例。

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{EF}:\overline{FG}$	已知 $M_1 \parallel M_2 \parallel M_3$ 且分別與截線 L_1 交於 E、F、G 三點、與截線 L_2 交於 A、B、C 三點＆ 平行線截比例線段定理
(2) $\overline{BC}:\overline{CD}=\overline{FG}:\overline{GH}$	已知 $M_2 \parallel M_3 \parallel M_4$ 且分別與截線 L_1 交於 F、G、H 三點、與截線 L_2 交於 B、C、D 三點＆ 平行線截比例線段定理
(3) $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}=\overline{EF}:\overline{FG}:\overline{GH}$	由(1) ＆ (2)
(4) $4:x=x:(x+3)$	由(1) ＆ 已知$\overline{AB}=4$、$\overline{BC}=\overline{EF}=x$、$\overline{FG}=x+3$，
(5) $4\times(x+3)=x^2$	由(4) ＆ 外項乘積等於內項乘積
(6) $x=6$ 或 $x=-2$(不合)	由(5) ＆ 解一元二次方程式 ＆ 已知 $x=\overline{BC}$ 為長度，必大於 0
(7) $x:8=(x+3):\overline{GH}$	由(2) ＆ 已知$\overline{CD}=8$，$\overline{BC}=x$，$\overline{FG}=x+3$
(8) $6:8=9:\overline{GH}$	將(6) $x=6$ 代入(7)式得
(9) $6\times\overline{GH}=8\times9$	由(8) ＆ 外項乘積等於內項乘積
(10) $\overline{GH}=(8\times9)\div6=12$	由(9) ＆ 等量除法公理

由例題 8.1-24 我們可以得知，在平行線截比例線段定理中：
任意兩直線被"一組平行線"所截，則截於平行線間的對應線段成比例。
其中的"一組平行線"指的是 3 條以上的平行線。

例題 8.1-25：

如圖 8.1-20，M_1、M_2、M_3、M_4 皆為直線，若 $M_1 \parallel M_2 \parallel M_3 \parallel M_4$，直線 L_1 與 L_2 為截線，$\overline{EF}:\overline{FG}:\overline{GH}=3:5:7$，$\overline{AD}=45$，試求$\overline{BC}$和$\overline{CD}$。

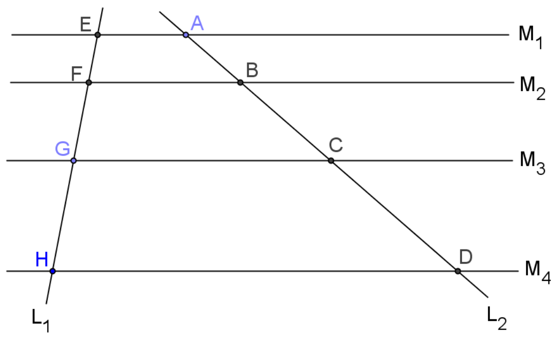


圖 8.1-20

想法：平行線截比例線段定理: 任意兩直線被一組平行線所截，則截於平行線間的對應線段成比例。

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}=\overline{EF}:\overline{FG}:\overline{GH}$	已知 $M_1 \parallel M_2 \parallel M_3 \parallel M_4$，直線 L_1 與 L_2 為截線 & 平行線截比例線段定理
(2) $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}=3:5:7$	由(1) & 已知$\overline{EF}:\overline{FG}:\overline{GH}=3:5:7$
(3) 假設$\overline{AB}=3r$、$\overline{BC}=5r$、$\overline{CD}=7r$	由(2) & 假設
(4) $\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$	如圖 & 全量等於分量之和
(5) $45=3r+5r+7r$	由(4) &(3) 假設 & 已知$\overline{AD}=45$
(6) $r=45\div(3+5+7)=3$	由(5) & 解一元一次方程式
(7) $\overline{BC}=5r=5\times3=15$ $\overline{CD}=7r=7\times3=21$	將(6) $r=3$ 代入(3) $\overline{BC}=5r$、$\overline{CD}=7r$

定理 8.1-14 三角形內角平分線定理（三角形內分比定理）

三角形任一內角的角平分線，內分對邊所成兩線段的比，等於夾這內角的兩邊的比。

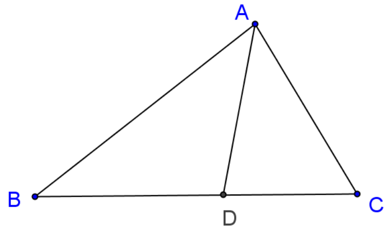


圖 8.1-21

已知：如圖 8.1-21，三角形 ABC 中，$\overline{AD}$為∠BAC 的角平分線。

求證：$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$

想法：利用三角形之平行線截比例線段定理。

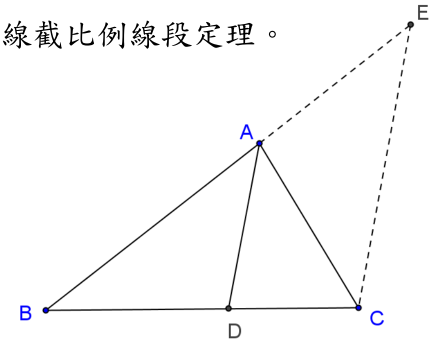


圖 8.1-21(a)

證明：

敘述	理由
(1) 過 C 點作$\overline{CE}\parallel\overline{AD}$，交$\overline{BA}$的延長線於 E 點，如圖 8.1-21(a)	平行線作圖
(2) $\overline{AB}:\overline{AE}=\overline{BD}:\overline{DC}$	由(1) $\overline{CE}\parallel\overline{AD}$ & 三角形之平行線截比例線段定理
(3) ∠ACE＝∠DAC	由(1) $\overline{CE}\parallel\overline{AD}$ & 內錯角相等
(4) ∠BAD＝∠AEC	由(1) $\overline{CE}\parallel\overline{AD}$ & 同位角相等
(5) ∠BAD＝∠DAC	已知$\overline{AD}$為∠BAC 的角平分線
(6) 所以∠ACE＝∠AEC	由(3)、(4) & (5) 遞移律
(7) △ACE 為等腰三角形	由(3) & 兩底角相等為等腰三角形
(8) $\overline{AE}=\overline{AC}$	由(7) & 等腰三角形的兩腰相等
(9) 所以$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$	由(2) $\overline{AB}:\overline{AE}=\overline{BD}:\overline{DC}$ & (7) $\overline{AE}=\overline{AC}$ 代換

Q. E. D.

例題 8.1-26：

如圖 8.1-22，已知三角形 ABC 中，$\overline{AD}$為∠BAC 的角平分線，若$\overline{AB}$＝9，$\overline{AC}$＝6，$\overline{BD}$＝6，則$\overline{DC}$＝？

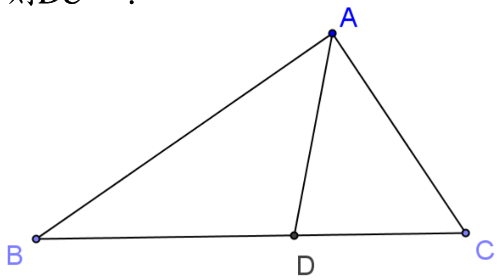


圖 8.1-22

想法：三角形內角平分線定理：三角形任一內角的角平分線，內分對邊所成兩線段的比，等於夾這內角的兩邊的比。

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}$：$\overline{AC}$＝$\overline{BD}$：$\overline{DC}$	已知三角形 ABC 中，$\overline{AD}$為∠BAC 的角平分線 & 三角形內角平分線定理
(2) 9：6＝6：$\overline{DC}$	由(1) & 已知$\overline{AB}$＝9，$\overline{AC}$＝6，$\overline{BD}$＝6
(3) 9×$\overline{DC}$＝6×6	由(2) & 外項乘積等於內項乘積
(4) $\overline{DC}$＝(6×6)÷9＝4	由(3) 等量除法公理

例題 8.1-27：

如圖 8.1-23，已知三角形 ABC 中，$\overline{AD}$為∠BAC 的角平分線，若$\overline{AB}$＝9，$\overline{AC}$＝6，$\overline{BC}$＝10，則$\overline{DC}$＝？

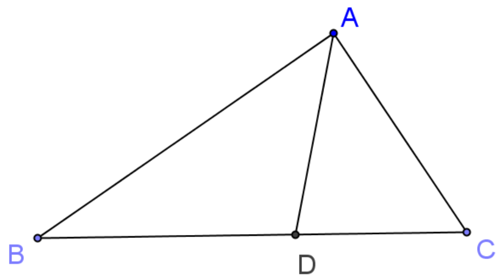


圖 8.1-23

想法：三角形內角平分線定理：三角形任一內角的角平分線，內分對邊所成兩線段的比，等於夾這內角的兩邊的比。

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$	已知三角形 ABC 中，$\overline{AD}$為∠BAC 的角平分線 & 三角形內角平分線定理
(2) $9:6=\overline{BD}:\overline{DC}$	由(1) & 已知$\overline{AB}$＝9，$\overline{AC}$＝6
(3) 假設$\overline{BD}$＝9r、$\overline{DC}$＝6r	由(2) & 假設
(4) $\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{DC}$	如圖 & 全量等於分量之和
(5) 10＝9r＋6r	由(4) & 已知$\overline{BC}$＝10 & (3) 假設
(6) $r=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$	由(5) & 解一元一次方程式
(7) $\overline{DC}=6r=6\times\frac{2}{3}=4$	由(3) 假設$\overline{DC}$＝6r & (6) $r=\frac{2}{3}$ 已證

定理 8.1-15 三角形外角平分線定理（三角形外分比定理）

三角形任一外角的角平分線，外分對邊延長線所成兩線段的比，等於夾這外角的鄰角兩邊的比。

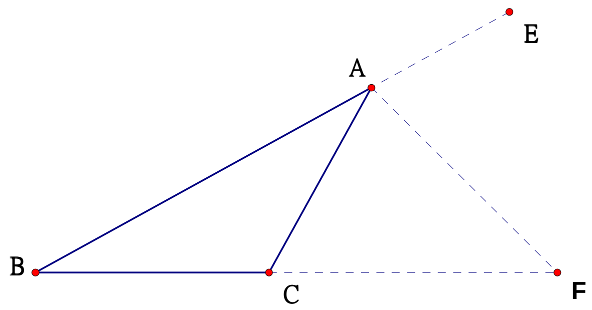


圖 8.1-24

已知：如圖 8.1-24，三角形 ABC 中，∠CAE 為∠BAC 的外角，$\overline{AF}$為∠CAE 的角平分線。

求證：$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BF}:\overline{FC}$

想法：利用三角形之平行線截比例線段定理。

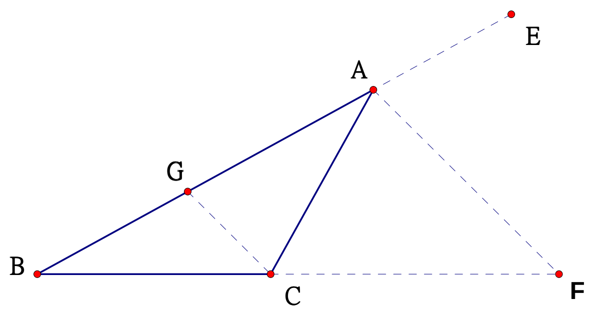


圖 8.1-24(a)

證明：

敘述	理由
(1) 過 C 點作$\overline{CG}\parallel\overline{AF}$，交$\overline{AB}$於 G 點，如圖 8.1-24(a)。	平行線作圖。
(2) $\overline{BG}:\overline{GA}=\overline{BC}:\overline{CF}$	由(1) $\overline{CG}\parallel\overline{AF}$ & 三角形之平行線截比例線段定理
(3) $(\overline{BG}+\overline{GA}):\overline{GA}=(\overline{BC}+\overline{CF}):\overline{CF}$	由(2) & 合比定理
(4) 所以$\overline{AB}:\overline{GA}=\overline{BF}:\overline{CF}$	由(3) & $\overline{BG}+\overline{GA}=\overline{AB}$、$\overline{BC}+\overline{CF}=\overline{BF}$

(5) $\angle GCA = \angle CAF$	由(1) $\overline{CG} \parallel \overline{AF}$ & 內錯角相等
(6) $\angle AGC = \angle EAF$	由(1) $\overline{CG} \parallel \overline{AF}$ & 同位角相等
(7) $\angle CAF = \angle EAF$	已知$\overline{AF}$為$\angle CAE$ 的角平分線
(8) $\angle GCA = \angle AGC$	由(5)、(6) & (7) 遞移律
(9) $\triangle AGC$ 為等腰三角形	由(8) & 兩底角相等為等腰三角形
(10) $\overline{GA} = \overline{AC}$	由(9) & 等腰三角形的兩腰相等
(11) 所以 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BF} : \overline{FC}$	由(4) & (10) $\overline{GA} = \overline{AC}$ 代換

Q. E. D.

例題 8.1-28：

如圖 8.1-25，已知三角形 ABC 中，$\angle EAC$ 為$\angle BAC$ 的外角， $\overline{AF}$為$\angle EAC$ 的角平分線，若$\overline{AB}=9$，$\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=8$，則$\overline{FC}=$？

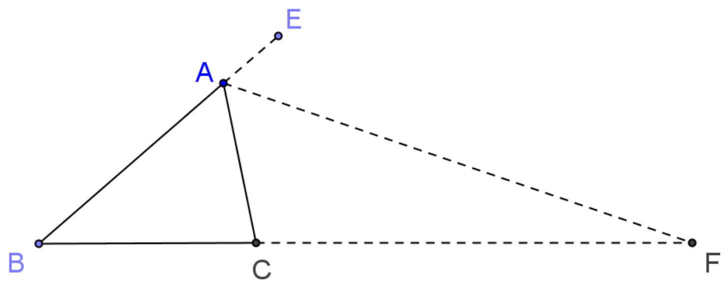


圖 8.1-25

想法：三角形外角平分線定理：三角形任一外角的角平分線，外分對邊延長線所成兩線段的比，等於夾這外角的鄰角兩邊的比。

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BF} : \overline{FC}$	已知三角形 ABC 中，$\overline{AF}$為$\angle EAC$ 的角平分線 & 三角形外角平分線定理
(2) $9 : 6 = (\overline{BC} + \overline{FC}) : \overline{FC}$	由(1) & 已知$\overline{AB}=9$，$\overline{AC}=6$ & $\overline{BF}=\overline{BC}+\overline{FC}$
(3) $9 : 6 = (8 + \overline{FC}) : \overline{FC}$	由(2) & 已知$\overline{BC}=8$
(4) $9 \times \overline{FC} = 6 \times (8 + \overline{FC})$	由(3) & 外項乘積等於內項乘積
(5) $\overline{FC} = 16$	由(4) & 解一元一次方程式

例題 8.1-29：

如圖 8.1-26，已知三角形 ABC 中，∠EAC 為∠BAC 的外角， $\overline{AF}$為∠EAC 的角平分線，若$\overline{AB}$＝3，$\overline{AC}$＝2，$\overline{BF}$＝9，則$\overline{BC}$＝？

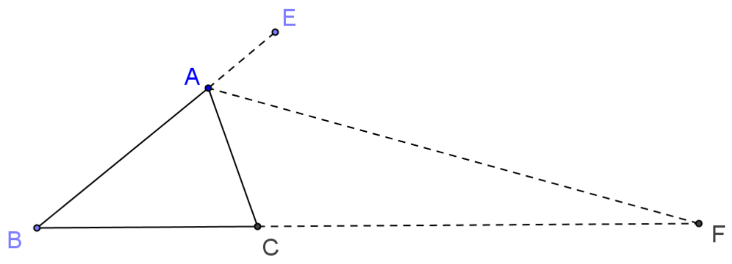


圖 8.1-26

想法：三角形外角平分線定理：三角形任一外角的角平分線，外分對邊延長線所成兩線段的比，等於夾這外角的鄰角兩邊的比。

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}$：$\overline{AC}$＝$\overline{BF}$：$\overline{FC}$	已知三角形 ABC 中，$\overline{AF}$為∠EAC 的角平分線 ＆ 三角形外角平分線定理
(2) 3：2＝9：$\overline{FC}$	由(1) ＆ 已知$\overline{AB}$＝3、$\overline{AC}$＝2、$\overline{BF}$＝9
(3) 3×$\overline{FC}$＝2x9	由(2) ＆ 外項乘積等於內項乘積
(4) $\overline{FC}$＝(2x9)÷3＝6	由(3) 等量除法公理
(5) $\overline{BF}$＝$\overline{BC}$＋$\overline{FC}$	如圖 ＆ 全量等於分量之和
(6) $\overline{BC}$＝$\overline{BF}$－$\overline{FC}$ ＝9－6＝3	由(5) 等量減法公理 ＆ 已知$\overline{BF}$＝9 ＆ (4) $\overline{FC}$＝6 已證
(7) 所以$\overline{BC}$＝3	由(6)

習題 8.1

習題 8.1-1

若 6：x＝5：8，則 x 之值為何？

習題 8.1-2

若 (x＋2)：3＝5：8，則 x 之值為何？

習題 8.1-3

已知 x 為 4 與 16 的比例中項，且 x＞0，求 x 之值為何？

習題 8.1-4

已知 x：y＝2：3，且 x＋y＝20，求 x 與 y 之值為？

習題 8.1-5

已知(x＋y)：(x－y)＝11：3，求 x 與 y 之比為？

習題 8.1-6

三角形 ABC 中，若∠A：∠B：∠C＝3：4：8，則∠A＝__________度，∠B＝__________度，∠C＝__________度。

習題 8.1-7

有一正 n 邊形，其一個外角度數與一個內角度數的比為 2：1，
則 n＝______________，內角和為______________度。

習題 8.1-8

如圖 8.1-27，△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$，$\overline{AD}$＝5，$\overline{BD}$＝4，$\overline{CE}$＝6，則$\overline{AC}$＝？

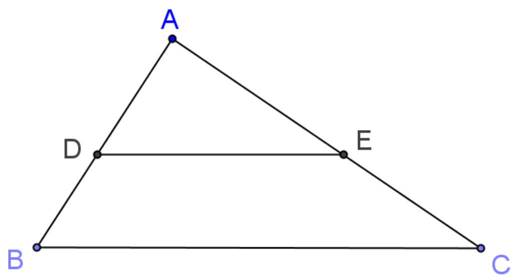


圖 8.1-27

習題 8.1-9

如圖 8.1-28，△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{AC}$，且$\overline{BD}$：$\overline{DA}$＝3：5，若$\overline{BC}$＝24，試求$\overline{EC}$。

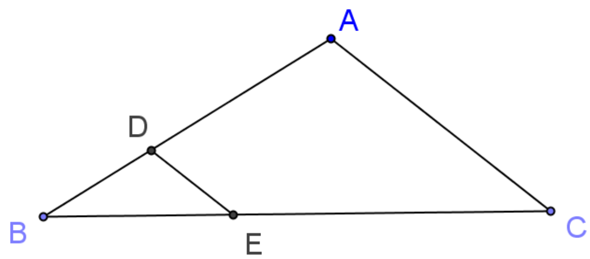


圖 8.1-28

習題 8.1-10

如圖 8.1-29，△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$，且$\overline{AD}$＝10，$\overline{DB}$＝$x$， $\overline{AE}$＝$2x-2$，$\overline{EC}$＝6，試求 x 之值。

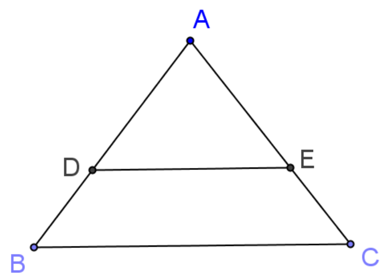


圖 8.1-29

習題 8.1-11

如圖 8.1-30，△ABC 中，$\overline{AD}=16$，$\overline{DB}=8$，$\overline{AE}=22$，$\overline{EC}=11$，試問$\overline{DE}$與$\overline{BC}$是否平行？為什麼？

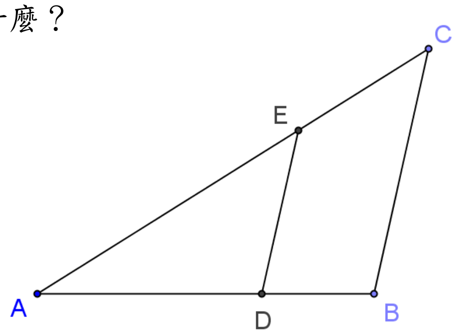


圖 8.1-30

習題 8.1-12

如圖 8.1-31，$L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$，若$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=9$，$\overline{DE}=10$，則$\overline{EF}=$？

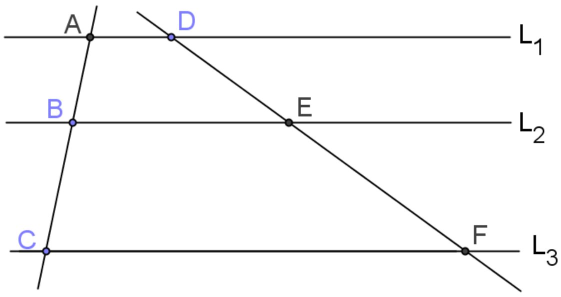


圖 8.1-31

習題 8.1-13

如圖 8.1-32，$L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$，若$\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=6$，$\overline{DE}=3x-2$，$\overline{EF}=2x+4$，則 $x=$？

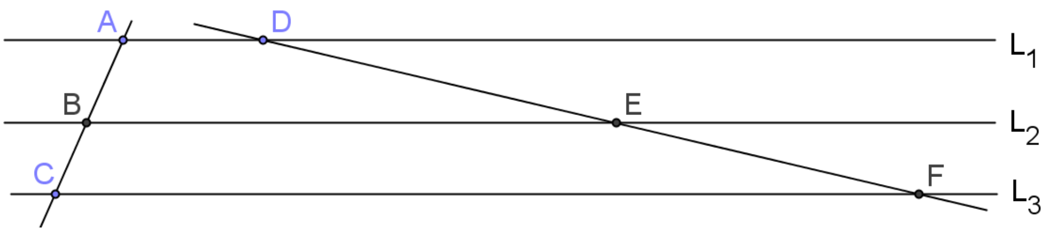


圖 8.1-32

習題 8.1-14

如圖 8.1-33，M_1、M_2、M_3、M_4 皆為直線，若 $M_1 \parallel M_2 \parallel M_3 \parallel M_4$，直線 L_1 與 L_2 為截線，$\overline{EF}:\overline{FG}:\overline{GH}=3:5:4$，$\overline{AD}=60$，試求$\overline{BC}$和$\overline{CD}$。

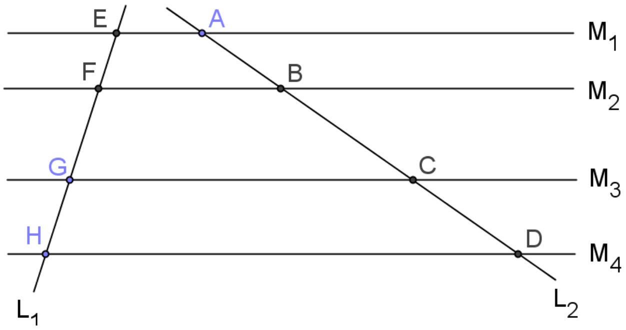


圖 8.1-33

習題 8.1-15

如圖 8.1-34，已知三角形 ABC 中，$\overline{AD}$為$\angle BAC$ 的角平分線，若$\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=12$，則$\overline{DC}=$？

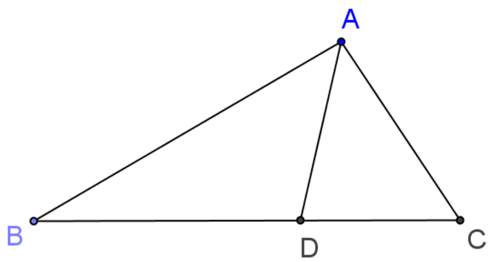


圖 8.1-34

習題 8.1-16

如圖 8.1-35，已知三角形 ABC 中，$\angle EAC$ 為$\angle BAC$ 的外角，$\overline{AF}$為$\angle EAC$ 的角平分線，若$\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=8$，則$\overline{FC}=$？

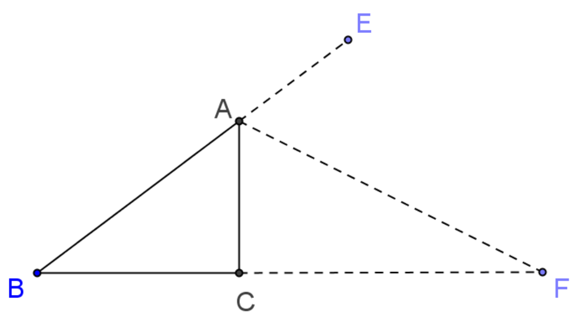


圖 8.1-35

8.2 節　相似形

定義 8.2-1 相似多邊形

> **若兩多邊形的各對應角相等，且各對應邊的比相等，則這兩多邊形相似。(換句話說，若兩多邊形相似，則對應角相等且對應邊成比例。) 相似形以「～」符號表示。**

如圖 8.2-1，△ABC 與△$A_1B_1C_1$ 中，∠A＝∠A_1，∠B＝∠B_1，∠C＝∠C_1 且$\overline{AB}$：$\overline{A_1B_1}$＝$\overline{AC}$：$\overline{A_1C_1}$＝$\overline{BC}$：$\overline{B_1C_1}$，則△ABC 與△$A_1B_1C_1$ 相似，記作△ABC～△$A_1B_1C_1$。

(也就是說，若△ABC～△$A_1B_1C_1$，則∠A＝∠A_1，∠B＝∠B_1，∠C＝∠C_1 且$\overline{AB}$：$\overline{A_1B_1}$＝$\overline{AC}$：$\overline{A_1C_1}$＝$\overline{BC}$：$\overline{B_1C_1}$)

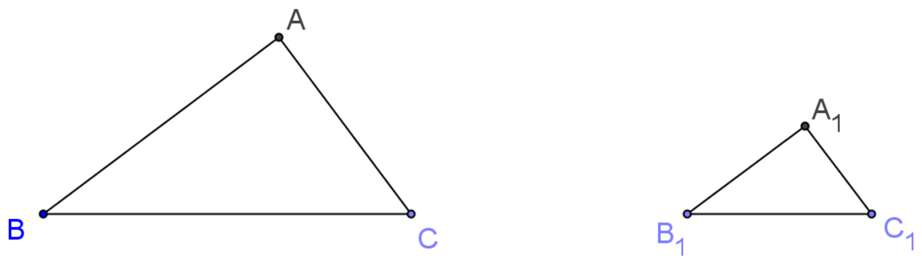


圖 8.2-1

在此特別強調一點，若兩多邊形的各對應角相等，且各對應邊的比相等，則這兩多邊形才會相似。我們用以下兩個例子來說明：

例：正方形與長方形的每一角都是直角，它們的對應角相等，但其對應邊的比例並不相等，所以正方形與長方形就不是相似形。

例：圖 8.2-2 中的兩個五邊形雖然其對應角都相等，∠ABC＝∠$A_1B_1C_1$、∠BCD＝∠$B_1C_1D_1$、∠CDE＝∠$C_1D_1E_1$、∠DEA＝∠$D_1E_1A_1$、∠EAB＝∠$E_1A_1B_1$，但由圖上明顯可以看出，其對應邊的比並不相等，所以這兩個五邊形也不是相似形。

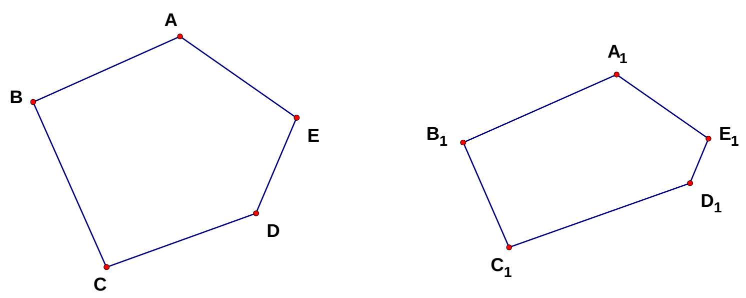


圖 8.2-2

例題 8.2-1：

已知四邊形 ABCD～四邊形 EFGH，∠A＝80°，∠C＝75°，∠H＝105°，試求∠F。

想法：利用相似多邊形對應角相等

解：

敘述	理由
(1) ∠B＝∠F ＆∠D＝∠H＝105°	已知已知四邊形 ABCD～四邊形 EFGH ＆ 相似多邊形對應角相等 ＆ 已知∠H＝105°
(2) 四邊形 ABCD 中 ∠A＋∠B＋∠C＋∠D＝360°	四邊形內角和為(4－2)x180°＝360°
(3) ∠B＝360°－(∠A＋∠C＋∠D) ＝360°－(80°＋75°＋105°) ＝100°	由(2) 等量減法公理 ＆ 已知∠A＝80°，∠C＝75° ＆ (1) ∠D＝∠H＝105° 已證
(4) 所以∠F＝∠B＝100°	由(1) ∠B＝∠F ＆ (3) ∠B＝100° 遞移律

例題 8.2-2：

設四邊形 ABCD～四邊形 EFGH，∠A：∠B：∠C＝3：5：6，且∠D＝80°，試求 ∠F、∠G。

想法：利用相似多邊形對應角相等

解：

敘述	理由
(1) 假設∠A＝3r、∠B＝5r、∠C＝6r	已知∠A：∠B：∠C＝3：5：6 ＆假設
(2) 四邊形 ABCD 中 ∠A＋∠B＋∠C＋∠D＝360°	四邊形內角和為(4－2)x180°＝360°
(3) 3r＋5r＋6r＋80°＝360°	將(1) 假設 ＆ 已知∠D＝80° 代入(2)
(4) r＝(360°－80°)÷(3＋5＋6)＝20°	由(3) ＆ 解一元一次方程式
(5) ∠B＝5r＝5x20°＝100° ∠C＝6r＝6x20°＝120°	將 (4) r＝20° 代入(1) 假設∠B＝5r 將 (4) r＝20° 代入(1) 假設∠C＝6r
(6) ∠F＝∠B＝100° ∠G＝∠C＝120°	已知四邊形 ABCD～四邊形 EFGH ＆ 相似多邊形對應角相等 ＆ 由(5) ∠B＝100°、∠C＝120° 已證

例題 8.2-3：

如圖 8.2-3，已知△ABC～△DEC，且$\overline{AB}$＝9，$\overline{BC}$＝15，$\overline{DE}$＝6，試求$\overline{EC}$。

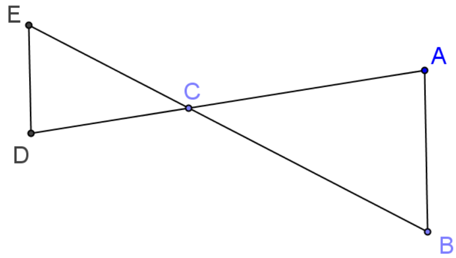


圖 8.2-3

想法：利用相似多邊形對應邊成比例

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}$：$\overline{DE}$＝$\overline{BC}$：$\overline{EC}$	已知△ABC～△DEC ＆ 相似多邊形對應邊成比例
(2) 9：6＝15：$\overline{EC}$	將已知$\overline{AB}$＝9，$\overline{BC}$＝15，$\overline{DE}$＝6 代入(1)得
(3) 9×$\overline{EC}$＝6x15	由(2) ＆ 外項乘積等於內項乘積
(4) $\overline{EC}$＝(6x15)÷9＝10	由(3) 等量除法公理

例題 8.2-4：

已知四邊形 ABCD～四邊形 EFGH，若$\overline{BC}$＝10，$\overline{CD}$＝15，$\overline{FG}$＝4，試求$\overline{GH}$。

想法：利用相似多邊形對應邊成比例

解：

敘述	理由
(1) $\overline{BC}$：$\overline{FG}$＝$\overline{CD}$：$\overline{GH}$	已知四邊形 *ABCD*～四邊形 *EFGH* ＆ 相似多邊形對應邊成比例
(2) 10：4＝15：$\overline{EC}$	將已知$\overline{BC}$＝10，$\overline{CD}$＝15，$\overline{FG}$＝4 代入(1)得
(3) 10×$\overline{EC}$＝4x15	由(2) ＆ 外項乘積等於內項乘積
(4) $\overline{EC}$＝(4x15)÷10＝6	由(3) 等量除法公理

定理 8.2-1 相似多邊形邊長和之比值定理

兩相似多邊形邊長和的比值等於它們的任意兩對應邊的比值。

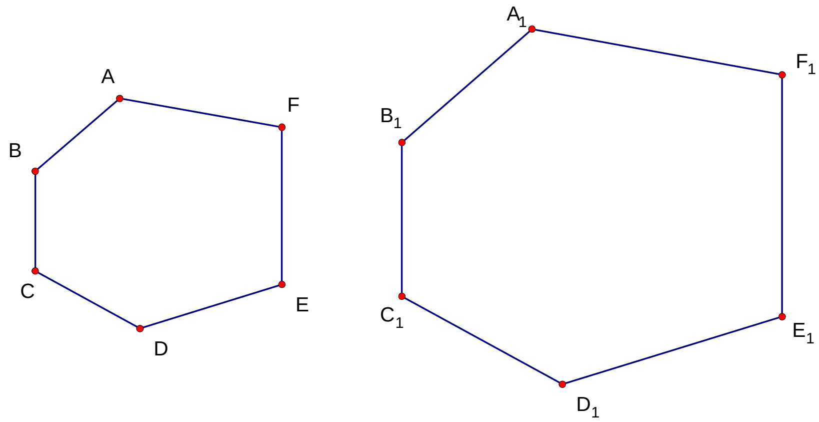


圖 8.2-4

已知：如圖 8.2-4，多邊形 ABCDEF 與多邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 為兩相似多邊形。

求證： $\dfrac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FA}}{\overline{A_1B_1}+\overline{B_1C_1}+\overline{C_1D_1}+\overline{D_1E_1}+\overline{E_1F_1}+\overline{F_1A_1}}$

$=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}}=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{C_1D_1}}=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{D_1E_1}}=\dfrac{\overline{EF}}{\overline{E_1F_1}}=\dfrac{\overline{FA}}{\overline{F_1A_1}}=r$ **，(r＞0)**

想法：利用和比定理。

證明：

敘述	理由
(1) 假設 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}}=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{C_1D_1}}=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{D_1E_1}}=\dfrac{\overline{EF}}{\overline{E_1F_1}}=\dfrac{\overline{FA}}{\overline{F_1A_1}}=r$ (r＞0)	已知多邊形 ABCDEF 與多邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 為兩相似多邊形 & 兩相似多邊形對應邊的比相等
(2) $\dfrac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FA}}{\overline{A_1B_1}+\overline{B_1C_1}+\overline{C_1D_1}+\overline{D_1E_1}+\overline{E_1F_1}+\overline{F_1A_1}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}}=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{C_1D_1}}=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{D_1E_1}}=\dfrac{\overline{EF}}{\overline{E_1F_1}}=\dfrac{\overline{FA}}{\overline{F_1A_1}}=r$ ， (r＞0)	由(1) & 和比定理

Q. E. D.

定理 8.2-2 三角形(AAA)相似定理

若一個三角形的三個內角與另一個三角形的三個內角對應相等，則這兩個三角形相似。

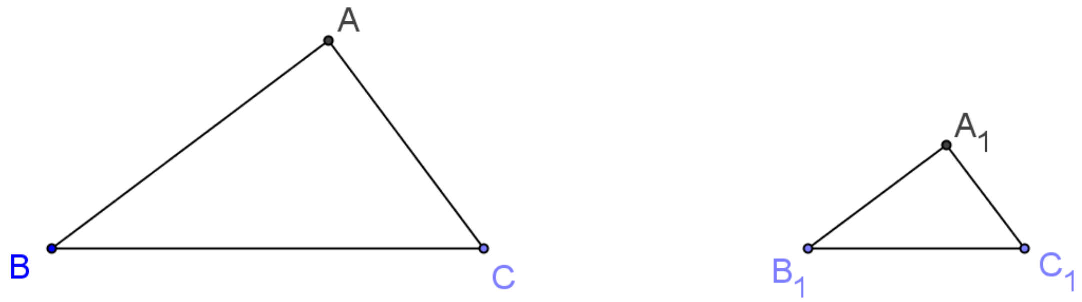


圖 8.2-5

已知：如圖 8.2-5，$\triangle ABC$ 與$\triangle A_1B_1C_1$ 中，$\angle A=\angle A_1$，$\angle B=\angle B_1$，$\angle C=\angle C_1$。

求證：$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

想法：利用三角形之平行線截比例線段定理來證明$\triangle ABC$ 與$\triangle A_1B_1C_1$ 兩三角形對應邊的比相等。

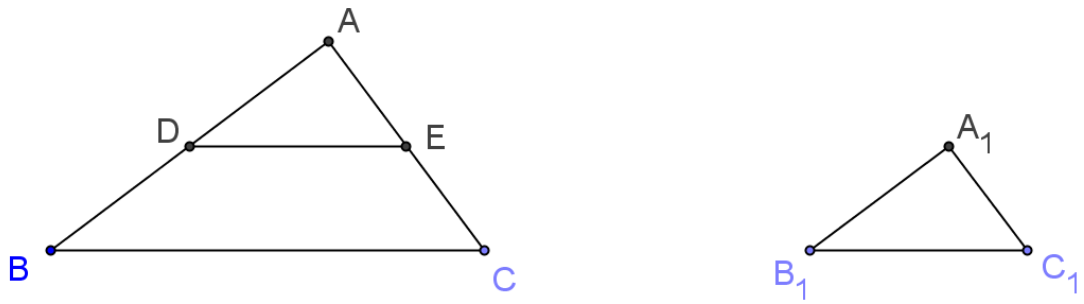


圖 8.2-5(a)

證明：

敘述	理由
(1) 在$\overline{AB}$上取$\overline{AD}=\overline{A_1B_1}$，在$\overline{AC}$上取 $\overline{AE}=\overline{A_1C_1}$，連接$\overline{DE}$，如圖 8.2-5(a)	等線段作圖
(2) 在$\triangle ADE$ 與 $\triangle A_1B_1C_1$ 中	如圖 8.2-5(a)所示
$\angle A=\angle A_1$	已知
$\overline{AD}=\overline{A_1B_1}$	由(1) 作圖
$\overline{AE}=\overline{A_1C_1}$	由(1) 作圖
(3) $\triangle ADE \cong \triangle A_1B_1C_1$	由(2) & 根據 S.A.S. 三角形全等定理
(4) $\angle ADE=\angle B_1$	由(3) & 全等三角形的對應角相等
(5) 所以$\angle ADE=\angle B_1=\angle B$	由(4) & 已知$\angle B=\angle B_1$

(6) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$	由(5) ∠ADE＝∠B ＆ 同位角相等的兩線平行
(7) $\overline{AB}$：$\overline{AD}$＝$\overline{AC}$：$\overline{AE}$	由(6) ＆ 三角形之平行線截比例線段定理 ＆ 例題 8.1-18
(8) $\overline{AB}$：$\overline{A_1B_1}$＝$\overline{AC}$：$\overline{A_1C_1}$	由(1) $\overline{AD}$＝$\overline{A_1B_1}$、$\overline{AE}$＝$\overline{A_1C_1}$ ＆ (7) $\overline{AB}$：$\overline{AD}$＝$\overline{AC}$：$\overline{AE}$ 代換
(9) 同理可證：$\overline{AB}$：$\overline{A_1B_1}$＝$\overline{BC}$：$\overline{B_1C_1}$	在$\overline{AB}$及$\overline{BC}$上用(1)~(8)的作法
(10) $\overline{AB}$：$\overline{A_1B_1}$＝$\overline{AC}$：$\overline{A_1C_1}$＝$\overline{BC}$：$\overline{B_1C_1}$	由(8) & (9) 遞移律
(11) △ABC 與△$A_1B_1C_1$ 中， ∠A＝∠A_1、∠B＝∠B_1、∠C＝∠C_1 $\overline{AB}$：$\overline{A_1B_1}$＝$\overline{AC}$：$\overline{A_1C_1}$＝$\overline{BC}$：$\overline{B_1C_1}$	如圖 8.2-5(a)所示 已知 由(10) 已證
(12) 所以△ABC～△$A_1B_1C_1$	由(11) ＆ 相似形的定義

Q. E. D.

例題 8.2-5：

如圖 8.2-6，△ABC 與△ECD 中，$\overline{AB} \parallel \overline{EC}$，$\overline{AC} \parallel \overline{ED}$，試證△ABC～△ECD。

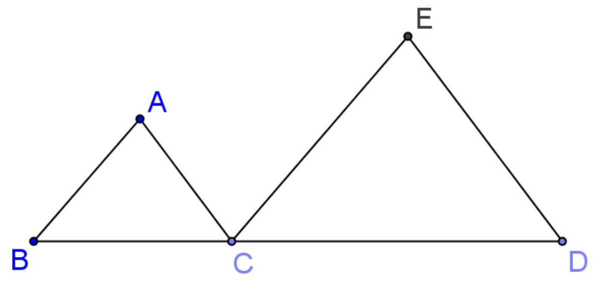


圖 8.2-6

想法：利用三角形(AAA)相似定理

證明：

敘述	理由
(1) ∠B＝∠ECD	已知$\overline{AB} \parallel \overline{EC}$ & 同位角相等
(2) ∠ACB＝∠D	已知$\overline{AC} \parallel \overline{ED}$ & 同位角相等
(3) ∠B＋∠ACB＝∠ECD＋∠D	由(1)式加(2)式　等量加法公理
(4) △ABC 中，∠A＝180°－(∠B＋∠ACB)	三角形內角和 180°
(5) △ECD 中，∠E＝180°－(∠ECD＋∠D)	三角形內角和 180°
(6) 所以∠A＝180°－(∠B＋∠ACB) ＝180°－(∠ECD＋∠D)　＝∠E	由(3)、(4) & (5) 代換
(7) 在△ABC 與△ECD 中 ∠A＝∠E ∠B＝∠ECD ∠ACB＝∠D	如圖 8.2-6 所示 由(6) 已證 由(1) 已證 由(2) 已證
(8) △ABC～△ECD	由(7) & 根據三角形(AAA)相似定理

Q. E. D.

例題 8.2-6：

如圖 8.2-7，△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$，$\overline{EF} \parallel \overline{AB}$，$\overline{DF} \parallel \overline{AC}$，
試證△ABC～△FED。

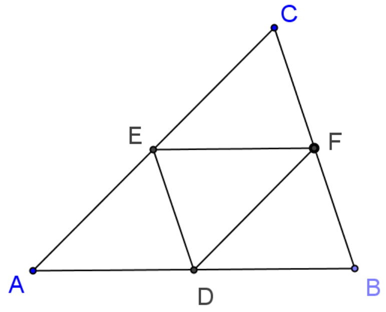


圖 8.2-7

想法：利用三角形(AAA)相似定理

證明：

敘述	理由
(1) ADFE 為平行四邊形	已知$\overline{EF} \parallel \overline{AB}$，$\overline{DF} \parallel \overline{AC}$ & 兩組對邊平行為平行四邊形
(2) ∠A＝∠DFE	由(1) & 平行四邊形對角相等
(3) CEDF 為平行四邊形	已知$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$，$\overline{DF} \parallel \overline{AC}$ & 兩組對邊平行為平行四邊形
(4) ∠C＝∠EDF	由(3) & 平行四邊形對角相等
(5) BDEF 為平行四邊形	已知$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$，$\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ & 兩組對邊平行為平行四邊形
(6) ∠B＝∠DEF	由(5) & 平行四邊形對角相等
(7) 在△ABC 與△FED 中 ∠A＝∠DFE ∠C＝∠EDF ∠B＝∠DEF	如圖 8.2-7 所示 由(2) 已證 由(4) 已證 由(6) 已證
(8) △ABC～△FED	由(7) & 根據三角形(AAA)相似定理

Q. E. D.

例題 8.2-7：

如圖 8.2-8，△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$，且$\overline{AD}$＝6，$\overline{DB}$＝4，$\overline{DE}$＝9，試求$\overline{BC}$。

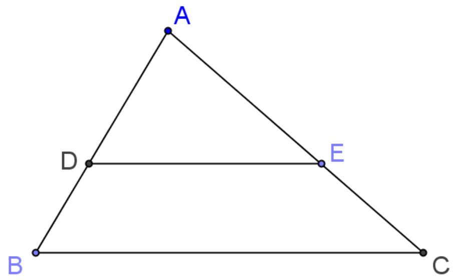


圖 8.2-8

想法：(1) 利用三角形(AAA)相似定理

(2) 相似多邊形對應邊成比例

解：

敘述	理由
(1) ∠ADE＝∠B & ∠AED＝∠C	已知$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ & 同位角相等
(2) 在△ABC 與△ADE 中 ∠A＝∠A ∠ADE＝∠B ∠AED＝∠C	如圖 8.2-8 所示 共同角 由(1) 已證 由(1) 已證
(3) △ABC～△ADE	由(2) & 根據三角形(AAA)相似定理
(4) $\overline{AB}$：$\overline{AD}$＝$\overline{BC}$：$\overline{DE}$	由(3) & 相似多邊形對應邊成比例
(5) $\overline{AB}$＝$\overline{AD}$＋$\overline{DB}$＝6＋4＝10	全量等於分量之和 & 已知$\overline{AD}$＝6，$\overline{DB}$＝4
(6) 10：6＝$\overline{BC}$：9	將(5) $\overline{AB}$＝10 已證 & 已知$\overline{AD}$＝6、$\overline{DE}$＝9 代入(4)
(7) 10×9＝6×$\overline{BC}$	由(6) & 外項乘積等於內項乘積
(8) $\overline{BC}$＝(10×9)÷6＝15	由(7) 等量除法公理

例題 8.2-8：

如圖 8.2-9，△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$，若$\overline{AD}$：$\overline{BD}$＝3：4，則$\overline{DE}$：$\overline{BC}$＝？

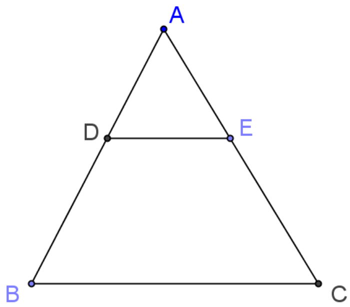


圖 8.2-9

想法：(1) 利用三角形(AAA)相似定理

(2) 相似多邊形對應邊成比例

解：

敘述	理由
(1) ∠ADE＝∠B ＆ ∠AED＝∠C	已知$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ＆ 同位角相等
(2) 在△ADE 與△ABC 中 ∠A＝∠A ∠ADE＝∠B ∠AED＝∠C	如圖 8.2-9 所示 共同角 由(1) 已證 由(1) 已證
(3) △ADE～△ABC	由(2) ＆ 根據三角形(AAA)相似定理
(4) $\overline{DE}$：$\overline{BC}$＝$\overline{AD}$：$\overline{AB}$	由(3) ＆ 相似多邊形對應邊成比例
(5) $\overline{BD}$：$\overline{AD}$＝4：3	已知$\overline{AD}$：$\overline{BD}$＝3：4 ＆ 反比定理
(6) ($\overline{BD}$＋$\overline{AD}$)：$\overline{AD}$＝(4＋3)：3	由(1) ＆ 合比定理
(7) $\overline{AB}$：$\overline{AD}$＝7：3	由(2) ＆ $\overline{AB}$＝$\overline{BD}$＋$\overline{AD}$
(8) $\overline{AD}$：$\overline{AB}$＝3：7	由(7) ＆ 反比定理
(9) $\overline{DE}$：$\overline{BC}$＝$\overline{AD}$：$\overline{AB}$＝3：7	由(4) ＆ (8) 遞移律

例題 8.2-9：

如圖 8.2-10，△ABC 中，∠BDE＝∠A，且$\overline{DE}$：$\overline{AC}$＝3：7，若$\overline{BC}$＝28，$\overline{DB}$＝15，試求$\overline{AD}$和$\overline{BE}$。

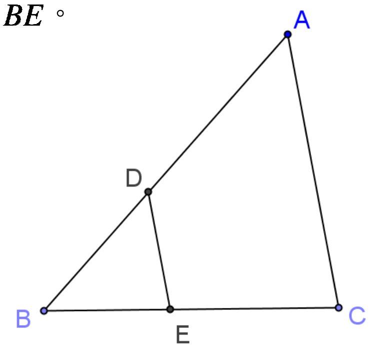


圖 8.2-10

想法：(1) 利用三角形(AAA)相似定理　　(2) 相似多邊形對應邊成比例

解：

敘述	理由
(1) $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$	已知∠BDE＝∠A & 同位角相等的兩直線互相平行
(2) 在△DBE 與△ABC 中 ∠BDE＝∠A ∠B＝∠B ∠BED＝∠C	如圖 8.2-10 所示 已知 共同角 由(1) $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ & 同位角相等
(3) △DBE～△ABC	由(2) & 根據三角形(AAA)相似定理
(4) $\overline{DE}$：$\overline{AC}$＝$\overline{DB}$：$\overline{AB}$	由(3) & 相似多邊形對應邊成比例
(5) $\overline{DE}$：$\overline{AC}$＝$\overline{DB}$：($\overline{AD}$＋$\overline{DB}$)	由(4) & $\overline{AB}$＝$\overline{AD}$＋$\overline{DB}$
(6) 3：7＝15：($\overline{AD}$＋15)	將已知$\overline{DE}$：$\overline{AC}$＝3：7 & $\overline{DB}$＝15 代入(5)
(7) 3x($\overline{AD}$＋15)＝7x15	由(6) & 外項乘積等於內項乘積
(8) $\overline{AD}$＝(7x15)÷3－15＝20	由(7) & 解一元一次方程式
(9) $\overline{DE}$：$\overline{AC}$＝$\overline{BE}$：$\overline{BC}$	由(3) & 相似多邊形對應邊成比例
(10) 3：7＝$\overline{BE}$：28	將已知$\overline{DE}$：$\overline{AC}$＝3：7 & $\overline{BC}$＝28 代入(9)
(11) 7x$\overline{BE}$＝3x28	由(10) & 內項乘積等於外項乘積
(12) $\overline{BE}$＝(3x28)÷7＝12	由(11) 等量除法公理
(13) 所以$\overline{AD}$＝20 & $\overline{BE}$＝12	由(8) & (12)

例題 8.2-10：

如圖 8.2-11，$\angle B=\angle E$，且$\overline{AB}=9$，$\overline{BC}=15$，$\overline{DE}=6$，試求$\overline{EC}$。

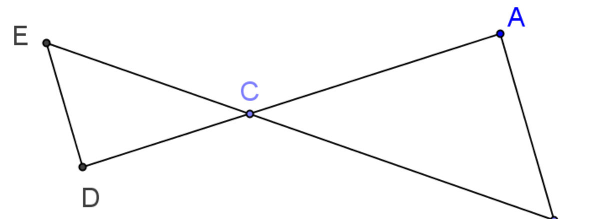


圖 8.2-11

想法：(1) 利用三角形(AAA)相似定理

(2) 相似多邊形對應邊成比例

解：

敘述	理由
(1) $\angle B=\angle E$	已知$\angle B=\angle E$
(2) $\angle ACB=\angle DCE$	對頂角相等
(3) $\angle B+\angle ACB=\angle E+\angle DCE$	由(1)式加(2)式　等量加法公理
(4) $\triangle ABC$ 中，$\angle A=180°-(\angle B+\angle ACB)$	三角形內角和 180°
(5) $\triangle DEC$ 中，$\angle D=180°-(\angle E+\angle DCE)$	三角形內角和 180°
(6) $\angle A=180°-(\angle B+\angle ACB)$ $=180°-(\angle E+\angle DCE)=\angle D$	由(3)、(4) & (5) 代換
(7) 在$\triangle ABC$與$\triangle DEC$中 $\angle A=\angle D$ $\angle B=\angle E$ $\angle ACB=\angle DCE$	如圖 8.2-11 所示 由(6) 已證 已知$\angle B=\angle E$ 由(2) 對頂角相等
(8) $\triangle ABC\sim\triangle DEC$	由(7) & 根據三角形(AAA)相似定理
(9) $\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{BC}:\overline{EC}$	由(8) & 相似多邊形對應邊成比例
(10) $9:6=15:\overline{EC}$	將已知$\overline{AB}=9$，$\overline{BC}=15$， $\overline{DE}=6$ 代入(9)得
(11) $9\times\overline{EC}=6\times15$	由(10) & 外項乘積等於內項乘積
(12) $\overline{EC}=(6\times15)\div9=10$	由(11) 等量除法公理

例題 8.2-11：

如圖 8.2-12，△ABC 中，若$\overline{AB}$＝$\overline{AC}$＝10，$\overline{BC}$＝$\overline{BD}$＝5，則$\overline{AD}$＝？

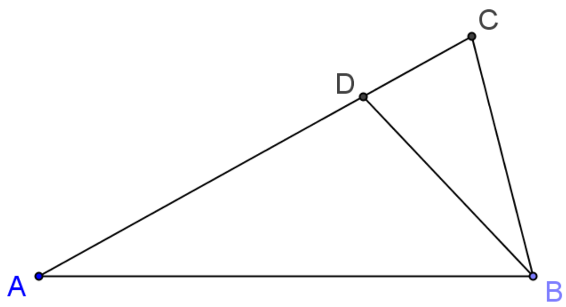


圖 8.2-12

想法：(1) 利用三角形(AAA)相似定理

(2) 相似多邊形對應邊成比例

解：

敘述	理由
(1) △ABC 為等腰三角形	已知$\overline{AB}$＝$\overline{AC}$ & 兩腰等長為等腰三角形
(2) ∠ABC＝∠C	由(1) & 等腰三角形兩底角相等
(3) △BDC 為等腰三角形	已知$\overline{BC}$＝$\overline{BD}$ & 兩腰等長為等腰三角形
(4) ∠BDC＝∠C	由(3) & 等腰三角形兩底角相等
(5) ∠ABC＝∠BDC＝∠C	由(2) & (4) 遞移律
(6) △ABC 中，∠A＝180°－(∠ABC＋∠C) ＝180°－(∠C＋∠C) ＝180°－2∠C	三角形內角和 180° & 由(2) ∠ABC＝∠C
(7) △BDC 中，∠DBC＝180°－(∠BDC＋∠C) ＝180°－(∠C＋∠C) ＝180°－2∠C	三角形內角和 180° 由(4) ∠BDC＝∠C
(8) ∠A＝∠DBC	由(6) & (7) 遞移律
(9) 在△ABC 與△BDC 中 ∠A＝∠DBC	如圖 8.2-12 所示 由(8) 已證

∠ABC＝∠BDC ∠C＝∠C	由(5) ∠ABC＝∠BDC 已證 共同角
(10) △ABC～△BDC	由(9) ＆ 根據三角形(AAA)相似定理
(11) $\overline{AB}$：$\overline{BD}$＝$\overline{BC}$：$\overline{DC}$	由(10) ＆ 相似多邊形對應邊成比例
(12) 10：5＝5：$\overline{DC}$	將已知$\overline{AB}$＝10，$\overline{BC}$＝$\overline{BD}$＝5 代入(11)得
(13) 10×$\overline{DC}$＝5×5	由(12) ＆ 外項乘積等於內項乘積
(14) $\overline{DC}$＝(5×5)÷10＝2.5	由(13) 等量除法公理
(15) $\overline{AD}$＝$\overline{AC}$－$\overline{DC}$＝10－2.5＝7.5	如圖 8.2-12，$\overline{AD}$＝$\overline{AC}$－$\overline{DC}$ ＆ 已知$\overline{AC}$＝10 ＆ 由(14) $\overline{DC}$＝2.5 已證

例題 8.2-12：

如圖 8.2-13，平行四邊形 ABCD 中，過 B 點做一直線分別交$\overrightarrow{DA}$、$\overrightarrow{DC}$於 E、F 兩點，若$\overline{EA}=4$，$\overline{CD}=3$，$\overline{CF}=4$，則$\overline{BC}=$？

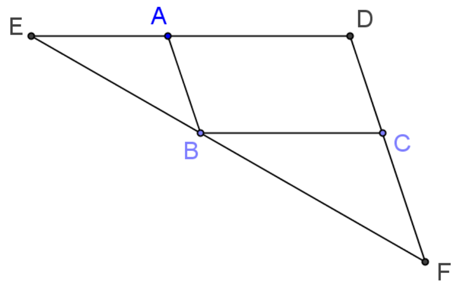


圖 8.2-13

想法：(1) 利用三角形(AAA)相似定理

(2) 相似多邊形對應邊成比例

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}\parallel\overline{DC}$ (即$\overline{AB}\parallel\overline{DF}$) $\overline{CB}\parallel\overline{DA}$ (即$\overline{CB}\parallel\overline{DE}$)	已知 ABCD 為平行四邊形 & 平行四邊形兩組對邊互相平行
(2) $\overline{AB}=\overline{CD}$ & $\overline{AD}=\overline{BC}$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 平行四邊形兩組對邊相等
(3) 在△EAB 與△EDF 中 ∠E＝∠E ∠EAB＝∠D ∠EBA＝∠F	如圖 8.2-13 所示 共同角 由(1) $\overline{AB}\parallel\overline{DF}$ & 同位角相等 由(1) $\overline{AB}\parallel\overline{DF}$ & 同位角相等
(4) △EAB～△EDF	由(3) & 根據三角形(AAA)相似定理
(5) $\overline{EA}:\overline{ED}=\overline{AB}:\overline{DF}$	由(4) & 兩相似多邊形對應邊成比例
(6) $\overline{EA}:(\overline{EA}+\overline{AD})=\overline{CD}:(\overline{CD}+\overline{CF})$	將(2)$\overline{AB}=\overline{CD}$已證 & $\overline{ED}=\overline{EA}+\overline{AD}$ 、$\overline{DF}=\overline{DC}+\overline{CF}$ 代入(5)得
(7) $\overline{EA}:(\overline{EA}+\overline{BC})=\overline{CD}:(\overline{CD}+\overline{CF})$	將(2) $\overline{AD}=\overline{BC}$ 已證 代入(6)得
(8) $4:(4+\overline{BC})=3:(3+4)$	由(7) & 已知$\overline{EA}=4$，$\overline{CD}=3$，$\overline{CF}=4$
(9) $(4+\overline{BC})\times 3=4\times(3+4)$	由(8) & 內項乘積等於外項乘積
(10) 所以$\overline{BC}=4\times(3+4)\div 3-4=\dfrac{16}{3}$	由(9) & 解一元一次方程式

定理 8.2-3 直角三角形斜邊上的高分成相似形定理
(直角三角形子母相似定理)

直角三角形斜邊上的高分原直角三角形成兩相似三角形,並各與原直角三角形相似。

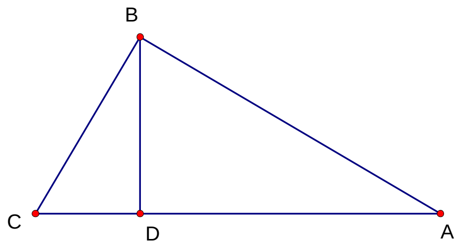


圖 8.2-14

已知: 如圖 8.2-14,△ABC 為直角三角形,∠ABC=90°,$\overline{BD}\perp\overline{AC}$
求證: △ABC~△ADB~△BDC
想法: 利用三角形(AAA)相似定理
證明:

敘述	理由
(1) ∠ADB=∠BDC=90°	已知$\overline{BD}\perp\overline{AC}$
(2) △ABC 中, ∠BAC=180°−(∠ABC+∠C) =180°−(90°+∠C)	如圖 8.2-14 所示 三角形內角和為 180° 已知∠ABC=90°
(3) △BDC 中, ∠DBC=180°−(∠BDC+∠C) =180°−(90°+∠C)	如圖 8.2-14 所示 三角形內角和為 180° 由(1) ∠BDC=90° 已證
(4) ∠BAC=∠DBC	由(2) & (3) 遞移律
(5) 在△ABC 與△BDC 中, ∠C=∠C ∠ABC=∠BDC=90° ∠BAC=∠DBC	如圖 8.2-14 所示 共同角 已知∠ABC=90° & 由(1) ∠BDC=90° 由(4) 已證
(6) △ABC~△BDC	由(5) & 根據三角形(AAA)相似定理
(7) △ABC 中, ∠BCA=180°−(∠ABC+∠A) =180°−(90°+∠A)	如圖 8.2-14 所示 三角形內角和為 180° 已知∠ABC=90°

(8) △ADB 中， ∠DBA＝180°－(∠ADB＋∠A) ＝180°－(90°＋∠A)	如圖 8.2-14 所示 三角形內角和為 180° 由(1) ∠ADB＝90° 已證
(9) ∠BCA＝∠DBA	由(7) & (8) 遞移律
(10) △ABC 與△ADB 中， ∠A＝∠A ∠ABC＝∠ADB＝90° ∠BCA＝∠DBA	如圖 8.2-14 所示 共同角 已知∠ABC＝90° & (1) ∠ADB＝90° 由(9) 已證
(11) △ABC～△ADB	由(10) & 根據三角形(AAA)相似定理
(12) △ABC～△ADB～△BDC	由(6) & (11) 遞移律

Q. E. D.

定理 8.2-4 直角三角形中比例中項定理

直角三角形斜邊上的高分斜邊成兩線段，斜邊上的高為這兩線段的比例中項。

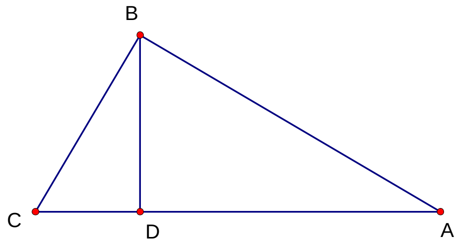


圖 8.2-15

已知：如圖 8.2-15，△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90°，$\overline{BD}\perp\overline{AC}$

求證： $\overline{DB}^2=\overline{DA}\times\overline{DC}$

想法：利用直角三角形子母相似定理

證明：

敘述	理由
(1) △BDC～△ADB	已知△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90°，$\overline{BD}\perp\overline{AC}$ & 直角三角形子母相似定理
(2) $\overline{DC}:\overline{DB}=\overline{DB}:\overline{DA}$	由(1) & 相似多邊形對應邊成比例
(3) $\overline{DB}^2=\overline{DA}\times\overline{DC}$	由(2) & 內項乘積等於外項乘積

Q. E. D.

定理 8.2-5 直角三角形中直角邊比例中項定理

直角三角形斜邊上的高分斜邊成兩線段，任一直角邊為斜邊與這直角邊相鄰斜邊上的線段的比例中項。

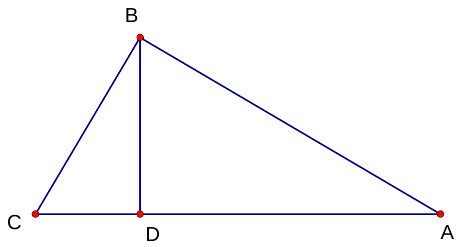


圖 8.2-16

已知：如圖 8.2-16，△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90°，$\overline{BD}\perp\overline{AC}$

求證：(1) $\overline{CB}^2=\overline{CA}\times\overline{CD}$　　(2) $\overline{AB}^2=\overline{AC}\times\overline{AD}$

想法：利用直角三角形子母相似定理

證明：

敘述	理由
(1) △ABC～△BDC	已知△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90°，$\overline{BD}\perp\overline{AC}$ & 直角三角形子母相似定理
(2) $\overline{CA}:\overline{CB}=\overline{CB}:\overline{CD}$	由(1) & 相似多邊形對應邊成比例
(3) $\overline{CB}^2=\overline{CA}\times\overline{CD}$	由(2) & 內項乘積等於外項乘積
(4) △ABC～△ADB	已知△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90°，$\overline{BD}\perp\overline{AC}$ & 直角三角形子母相似定理
(5) $\overline{AC}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{AD}$	由(4) & 相似多邊形對應邊成比例
(6) $\overline{AB}^2=\overline{AC}\times\overline{AD}$	由(5) & 內項乘積等於外項乘積

Q. E. D.

例題 8.2-13：

如圖 8.2-17，△ABC 中，已知∠ABC＝90°，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$，且$\overline{DA}$＝4、$\overline{DC}$＝16，則：(1) $\overline{DB}$＝？ (2) $\overline{AB}$＝？ (3) $\overline{CB}$＝？

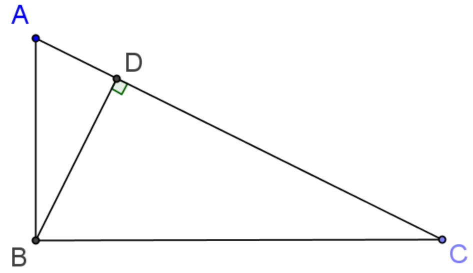


圖 8.2-17

想法：(1) 直角三角形中比例中項定理 (2) 直角三角形中直角邊比例中項定理

解：

敘述	理由
(1) $\overline{DB}^2=\overline{DA}\times\overline{DC}$	已知∠ABC＝90°，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$ & 直角三角形中比例中項定理
(2) $\overline{DB}^2=4\times16$	由(1) & 已知$\overline{DA}$＝4、$\overline{DC}$＝16
(3) $\overline{DB}=\pm\sqrt{4\times16}=\pm8$	由(2) & 求平方根
(4) 所以$\overline{DB}=8$	由(3) & $\overline{DB}$為線段長度必大於 0
(5) $\overline{AB}^2=\overline{AC}\times\overline{AD}$	已知∠ABC＝90°，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$ & 直角三角形中直角邊比例中項定理
(6) $\overline{AB}^2=20\times4$	由(5) & $\overline{AC}=\overline{DA}+\overline{DC}$ & 已知$\overline{DA}$＝4、$\overline{DC}$＝16
(7) $\overline{AB}=\pm4\sqrt{5}$	由(6) & 求平方根
(8) 所以$\overline{AB}=4\sqrt{5}$	由(7) & $\overline{AB}$為線段長度必大於 0
(9) $\overline{CB}^2=\overline{CA}\times\overline{CD}$	已知∠ABC＝90°，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$ & 直角三角形中直角邊比例中項定理
(10) $\overline{CB}^2=20\times16$	由(9) & $\overline{CA}=\overline{DA}+\overline{DC}$ & 已知$\overline{DA}$＝4、$\overline{DC}$＝16
(11) $\overline{CB}=\pm8\sqrt{5}$	由(10) & 求平方根
(12) 所以$\overline{CB}=8\sqrt{5}$	由(11) & $\overline{CB}$為線段長度必大於 0
(13) 所以$\overline{DB}=8$ $\overline{AB}=4\sqrt{5}$ $\overline{CB}=8\sqrt{5}$	由(4)、(8) & (12) 已證

例題 8.2-14：

如圖 8.2-18，△ABC 中，已知∠ABC＝90°，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$，且$\overline{DB}=6$、$\overline{DA}=4$，則：(1) $\overline{DC}=$？ (2) $\overline{AB}=$？ (3) $\overline{CB}=$？

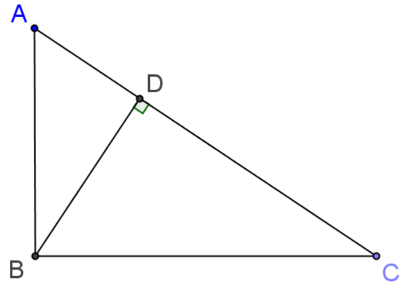


圖 8.2-18

想法：(1) 直角三角形中比例中項定理 (2) 直角三角形中直角邊比例中項定理

解：

敘述	理由
(1) $\overline{DB}^2=\overline{DA}\times\overline{DC}$	已知∠ABC＝90°，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$ & 直角三角形中比例中項定理
(2) $6^2=4\times\overline{DC}$	由(1) & 已知$\overline{DB}=6$、$\overline{DA}=4$
(3) $\overline{DC}=6^2\div4=9$	由(2) 等量除法公理
(4) $\overline{AB}^2=\overline{AC}\times\overline{AD}$	已知∠ABC＝90°，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$ & 直角三角形中直角邊比例中項定理
(5) $\overline{AB}^2=13\times4$	由(4) & $\overline{AC}=\overline{DA}+\overline{DC}$ & 已知$\overline{DA}=4$ & 由(3) $\overline{DC}=9$ 已證
(6) $\overline{AB}=\pm2\sqrt{13}$	由(5) & 求平方根
(7) 所以$\overline{AB}=2\sqrt{13}$	由(6) & $\overline{AB}$為線段長度必大於 0
(8) $\overline{CB}^2=\overline{CA}\times\overline{CD}$	已知∠ABC＝90°，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$ & 直角三角形中直角邊比例中項定理
(9) $\overline{CB}^2=13\times9$	由(8) & $\overline{CA}=\overline{DA}+\overline{DC}$ & 已知$\overline{DA}=4$ & 由(3) $\overline{DC}=9$ 已證
(10) $\overline{CB}=\pm3\sqrt{13}$	由(9) & 求平方根
(11) 所以$\overline{CB}=3\sqrt{13}$	由(10) & $\overline{CB}$為線段長度必大於 0
(12) 所以$\overline{DC}=9$ $\overline{AB}=2\sqrt{13}$ $\overline{CB}=3\sqrt{13}$	由(3)、(7) & (11) 已證

例題 8.2-15：

如圖 8.2-19，△ABC 中，已知∠ABC＝90°，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$，且$\overline{AB}=6$、$\overline{BC}=8$、$\overline{AC}=10$，則：(1) $\overline{AD}=$？ (2) $\overline{CD}=$？ (3) $\overline{BD}=$？

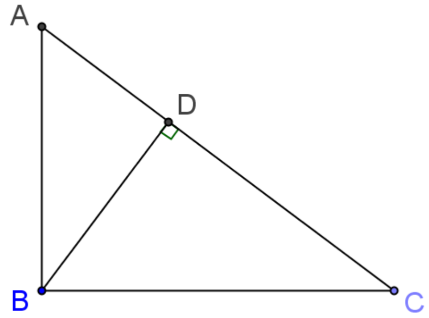


圖 8.2-19

想法：(1) 直角三角形中比例中項定理

(2) 直角三角形中直角邊比例中項定理

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}^2=\overline{AC}\times\overline{AD}$	已知∠ABC＝90°，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$ & 直角三角形中直角邊比例中項定理
(2) $6^2=10\times\overline{AD}$	由(1) & 已知$\overline{AB}=6$、$\overline{AC}=10$
(3) $\overline{AD}=6^2\div10=3.6$	由(2) 等量除法公理
(4) $\overline{CB}^2=\overline{CA}\times\overline{CD}$	已知∠ABC＝90°，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$ & 直角三角形中直角邊比例中項定理
(5) $8^2=10\times\overline{CD}$	由(4) & 已知$\overline{BC}=8$、$\overline{AC}=10$
(6) $\overline{CD}=8^2\div10=6.4$	由(5) 等量除法公理
(7) $\overline{DB}^2=\overline{DA}\times\overline{DC}$	已知∠ABC＝90°，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$ & 直角三角形中比例中項定理
(8) $\overline{DB}^2=3.6\times6.4$	將(3) $\overline{AD}=3.6$ & (6) $\overline{CD}=6.4$ 代入(7)得
(9) $\overline{DB}=\pm\sqrt{3.6\times6.4}$ $=\pm4.8$	由(8) & 求平方根
(10) 所以$\overline{DB}=4.8$	由(9) & $\overline{DB}$為線段長度必大於 0
(11) 所以$\overline{AD}=3.6$ $\overline{CD}=6.4$ $\overline{DB}=4.8$	由(3)、(6) & (10) 已證

定理 8.2-6 三角形(SAS)相似定理

若兩三角形中有一相同角度的角，又夾這角的兩邊成比例，則這兩個三角形相似。

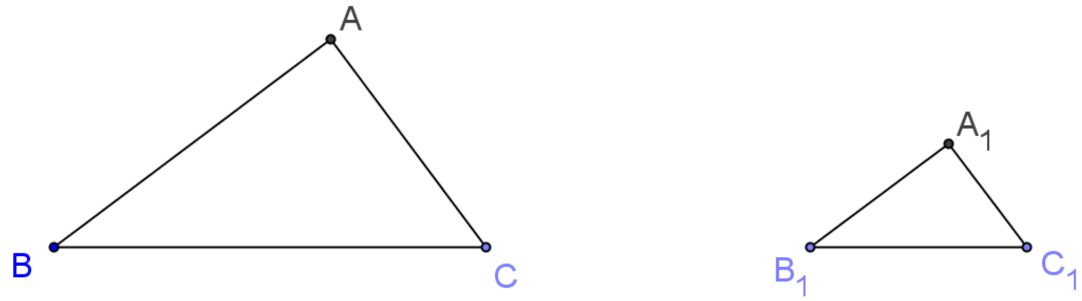


圖 8.2-20

已知：如圖 8.2-20，$\triangle$ABC 與$\triangle A_1B_1C_1$中，$\angle A=\angle A_1$，$\overline{AB}:\overline{A_1B_1}=\overline{AC}:\overline{A_1C_1}$

求證：$\triangle ABC\sim\triangle A_1B_1C_1$

想法：(1) 利用三角形一邊的平行判別定理(定理 8.1-12)

(2) 三角形(AAA)相似定理

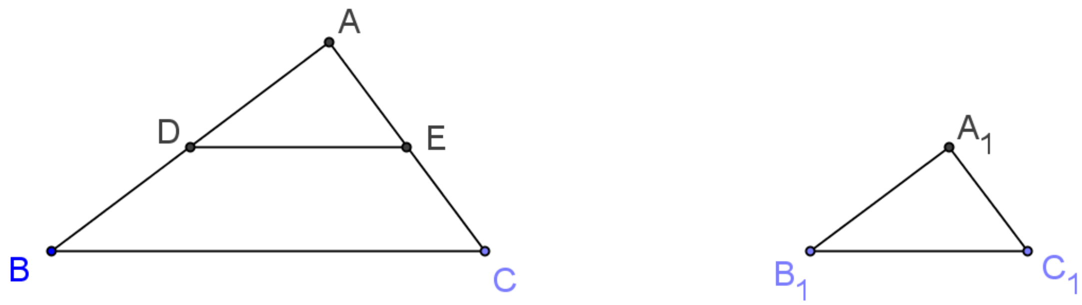


圖 8.2-20(a)

證明：

敘述	理由
(1) 假設$\overline{AB}>\overline{A_1B_1}$，在$\overline{AB}$上取$\overline{AD}=\overline{A_1B_1}$， 在$\overline{AC}$上取$\overline{AE}=\overline{A_1C_1}$，連接$\overline{DE}$， 如圖 8.2-20(a)	假設 & 等線段作圖
(2) 在$\triangle$ADE 與$\triangle A_1B_1C_1$中， $\overline{AD}=\overline{A_1B_1}$ $\angle A=\angle A_1$ $\overline{AE}=\overline{A_1C_1}$	如圖 8.2-20(a)所示 由(1) 作圖 已知 由(1) 作圖
(3) $\triangle ADE\cong\triangle A_1B_1C_1$	由(2) & 根據 S.A.S.三角形全等定理

(4) $\angle ADE = \angle B_1$ ＆ $\angle AED = \angle C_1$	由(3) ＆ 對應角相等
(5) $\overline{AB}:\overline{A_1B_1} = \overline{AC}:\overline{A_1C_1}$	已知
(6) $\overline{AB}:\overline{AD} = \overline{AC}:\overline{AE}$	由(5) ＆ (1) $\overline{AD} = \overline{A_1B_1}$、$\overline{AE} = \overline{A_1C_1}$ 作圖
(7) $(\overline{AB} - \overline{AD}):\overline{AD} = (\overline{AC} - \overline{AE}):\overline{AE}$	由(6) ＆ 分比定理
(8) $\overline{DB}:\overline{AD} = \overline{EC}:\overline{AE}$	由(7) ＆ $\overline{AB} - \overline{AD} = \overline{DB}$、$\overline{AC} - \overline{AE} = \overline{EC}$
(9) $\overline{AD}:\overline{DB} = \overline{AE}:\overline{EC}$	由(8) ＆ 反比定理
(10) 所以$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$	由(9) ＆ 三角形一邊的平行判別定理(定理 8.1-12)
(11) $\angle ADE = \angle B$ ＆ $\angle AED = \angle C$	由(10) ＆ 同位角相等
(12) 所以$\angle B = \angle B_1$ ＆ $\angle C = \angle C_1$	由(4) & (11) 遞移律
(13) 在△ABC 與△$A_1B_1C_1$ 中， $\angle A = \angle A_1$ $\angle B = \angle B_1$ $\angle C = \angle C_1$	如圖 8.2-20(a)所示 已知 由(12) 已證 由(12) 已證
(14) 所以△ABC～△$A_1B_1C_1$	由(13) ＆ 根據三角形(AAA)相似定理

Q. E. D.

例題　8.2-16：

在△ABC 和△DEF 中，∠B＝∠E，且$\overline{BA}$＝4，$\overline{BC}$＝6，$\overline{ED}$＝10，$\overline{EF}$＝15，則△ABC 和△DEF 是否相似？為什麼？

想法：利用三角形(SAS)相似定理

解：

敘述	理由
(1) $\overline{BA}$：$\overline{ED}$＝4：10＝2：5	已知$\overline{BA}$＝4、$\overline{ED}$＝10 ＆ 倍比定理
(2) $\overline{BC}$：$\overline{EF}$＝6：15＝2：5	已知$\overline{BC}$＝6、$\overline{EF}$＝15 ＆ 倍比定理
(3) 在△ABC 與△DEF 中， ∠B＝∠E $\overline{BA}$：$\overline{ED}$＝$\overline{BC}$：$\overline{EF}$	 已知 由(1) ＆ (2) 遞移律
(4) 所以△ABC～△DEF	由(3) ＆ 根據三角形(SAS)相似定理

例題　8.2-17：

如圖 8.2-21，△ABC 與△EDC 中，$\overline{CA}$＝5，$\overline{CB}$＝10，$\overline{CE}$＝12，$\overline{CD}$＝24，則△ABC 與△EDC 是否相似？為什麼？

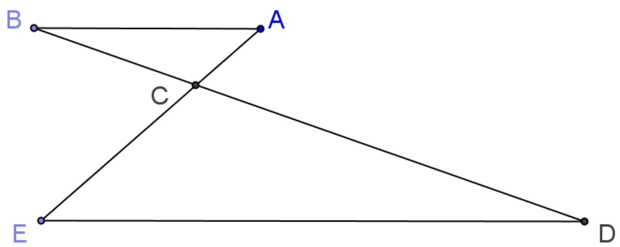


圖 8.2-21

想法：利用三角形(SAS)相似定理

解：

敘述	理由
(1) $\overline{CB}$：$\overline{CD}$＝10：24＝5：12	已知$\overline{CB}$＝10、$\overline{CD}$＝24 ＆ 倍比定理
(2) $\overline{CA}$：$\overline{CE}$＝5：12	已知$\overline{CA}$＝5、$\overline{CE}$＝12
(3) 在△ABC 與△EDC 中， ∠ACB＝∠ECD $\overline{CB}$：$\overline{CD}$＝$\overline{CA}$：$\overline{CE}$	如圖 8.2-21 所示 對頂角相等 由(1) ＆ (2) 遞移律
(4) 所以△ABC～△EDC	由(3) ＆ 根據三角形(SAS)相似定理

例題 8.2-18：

如圖 8.2-22，△ABC 中，$\overline{AE}$＝5，$\overline{BE}$＝7，$\overline{BD}$＝3，$\overline{CD}$＝25，回答下列問題：(1) △BAC 與△BDE 是否相似？為什麼？

(2) 若$\overline{AC}$＝18，試求$\overline{DE}$。

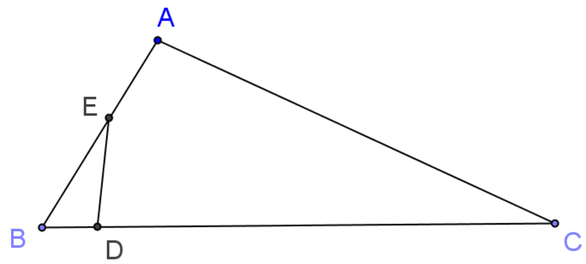


圖 8.2-22

想法：利用三角形(SAS)相似定理

解：

敘述	理由
(1) $\overline{BA}=\overline{BE}+\overline{AE}=7+5=12$	全量等於分量之和 & 已知$\overline{AE}$＝5、$\overline{BE}$＝7
(2) $\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}=3+25=28$	全量等於分量之和 & 已知$\overline{BD}$＝3、$\overline{CD}$＝25
(3) $\overline{BA}:\overline{BD}=12:3=4:1$	由(1)$\overline{BA}$＝12 已證、已知$\overline{BD}$＝3 & 倍比定理
(4) $\overline{BC}:\overline{BE}=28:7=4:1$	由(2)$\overline{BC}$＝28 已證、已知$\overline{BE}$＝7 & 倍比定理
(5) 在△BAC 與△BDE 中， ∠B＝∠B $\overline{BA}:\overline{BD}=\overline{BC}:\overline{BE}$	如圖 8.2-22 所示 共同角 由(3) & (4) 遞移律
(6) 所以△BAC～△BDE	由(5) & 根據三角形(SAS)相似定理
(7) $\overline{AC}:\overline{DE}=\overline{BC}:\overline{BE}$	由(6) & 相似多邊形對應邊成比例
(8) $18:\overline{DE}=4:1$	將已知$\overline{AC}$＝18 & (4) $\overline{BC}:\overline{BE}=4:1$ 已證代入(7)得
(9) $\overline{DE}\times4=18\times1$	由(8) & 內項乘積等於外項乘積
(10) $\overline{DE}=(18\times1)\div4=4.5$	由(9) 等量除法公理

例題 8.2-19：

如圖 8.2-23，在△ABC 和△CED 中，$\overline{AB} \parallel \overline{EC}$，且$\overline{BA}$＝6，$\overline{BC}$＝5，$\overline{AC}$＝3.5，$\overline{CE}$＝24，$\overline{CD}$＝20，試求$\overline{ED}$。

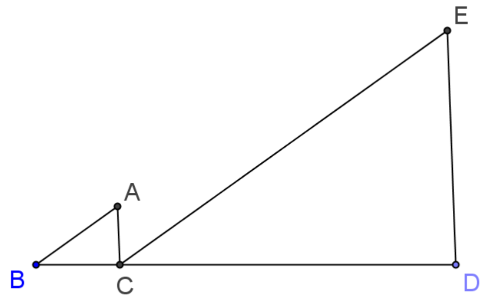


圖 8.2-23

想法：利用三角形(SAS)相似定理

解：

敘述	理由
(1) ∠B＝∠ECD	已知$\overline{AB} \parallel \overline{EC}$ & 同位角相等
(2) $\overline{BA}$：$\overline{CE}$＝6：24＝1：4	已知$\overline{BA}$＝6、$\overline{CE}$＝24 & 倍比定理
(3) $\overline{BC}$：$\overline{CD}$＝5：20＝1：4	已知$\overline{BC}$＝5、$\overline{CD}$＝20 & 倍比定理
(4) 在△BAC 和△CED 中， ∠B＝∠ECD $\overline{BA}$：$\overline{CE}$＝$\overline{BC}$：$\overline{CD}$	如圖 8.2-23 所示 由(1) 已證 由(2) & (3) 遞移律
(5) 所以△BAC～△CED	由(4) & 根據三角形(SAS)相似定理
(6) $\overline{AC}$：$\overline{ED}$＝$\overline{BA}$：$\overline{CE}$	由(5) & 相似多邊形對應邊成比例
(7) $\overline{AC}$：$\overline{ED}$＝1：4	由(2) & (6) 遞移律
(8) 3.5：$\overline{ED}$＝1：4	由(7) & 已知$\overline{AC}$＝3.5
(9) $\overline{ED}$＝3.5x4＝14	由(8) & 內項乘積等於外項乘積

定理 8.2-7 三角形(SSS)相似定理

若兩三角形對應邊的比相等，則這兩個三角形相似。

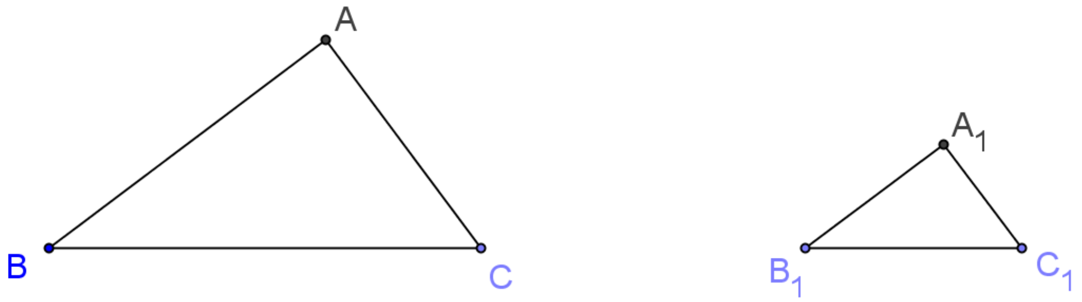


圖 8.2-24

已知：如圖 8.2-24，△ABC 與△$A_1B_1C_1$ 中，$\overline{AB}:\overline{A_1B_1}=\overline{AC}:\overline{A_1C_1}=\overline{BC}:\overline{B_1C_1}$

求證： △ABC～△$A_1B_1C_1$

想法：利用三角形(SAS)相似定理

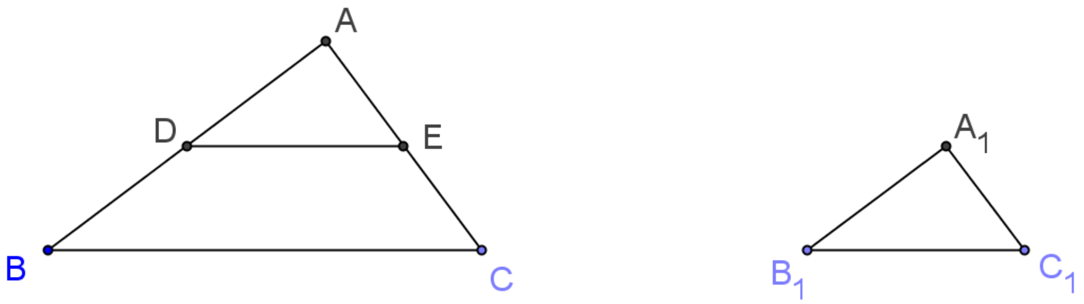


圖 8.2-24(a)

證明：

敘述	理由
(1) 假設$\overline{AB}>\overline{A_1B_1}$，在$\overline{AB}$上取$\overline{AD}=\overline{A_1B_1}$，在$\overline{AC}$上取$\overline{AE}=\overline{A_1C_1}$，連接$\overline{DE}$，如圖 8.2-24(a)	假設 & 等線段作圖
(2) $\overline{AB}:\overline{A_1B_1}=\overline{AC}:\overline{A_1C_1}$	已知
(3) $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}$	將(1) $\overline{AD}=\overline{A_1B_1}$、$\overline{AE}=\overline{A_1C_1}$ 代入(2)得
(4) 在△ABC 與△ADE 中， ∠A＝∠A $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}$	如圖 8.2-24(a)所示 共同角 由(3) 已證
(5) 所以△ABC～△ADE	由(4) & 根據三角形(SAS)相似定理

(6) $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{BC}:\overline{DE}$	由(5) ＆ 兩相似多邊形對應邊成比例
(7) $\overline{AB}:\overline{A_1B_1}=\overline{BC}:\overline{DE}$	將(1) $\overline{AD}=\overline{A_1B_1}$ 代入(6)得
(8) $\overline{AB}:\overline{A_1B_1}=\overline{BC}:\overline{B_1C_1}$	已知$\overline{AB}:\overline{A_1B_1}=\overline{BC}:\overline{B_1C_1}$
(9) 所以$\overline{DE}=\overline{B_1C_1}$	由(7) & (8)
(10) 在△ADE 與△$A_1B_1C_1$ 中， $\overline{AD}=\overline{A_1B_1}$ $\overline{AE}=\overline{A_1C_1}$ $\overline{DE}=\overline{B_1C_1}$	如圖 8.2-24(a)所示 由(1) 作圖 由(1) 作圖 由(9) 已證
(11) 所以△ADE ≅ △$A_1B_1C_1$	由(10) ＆ 根據S.S.S.三角形全等定理
(12) 所以△ABC～△$A_1B_1C_1$	由(5) ＆ (11)

Q. E. D.

例題 8.2-20：

如圖 8.2-25，請選出與△ABC 相似的三角形。

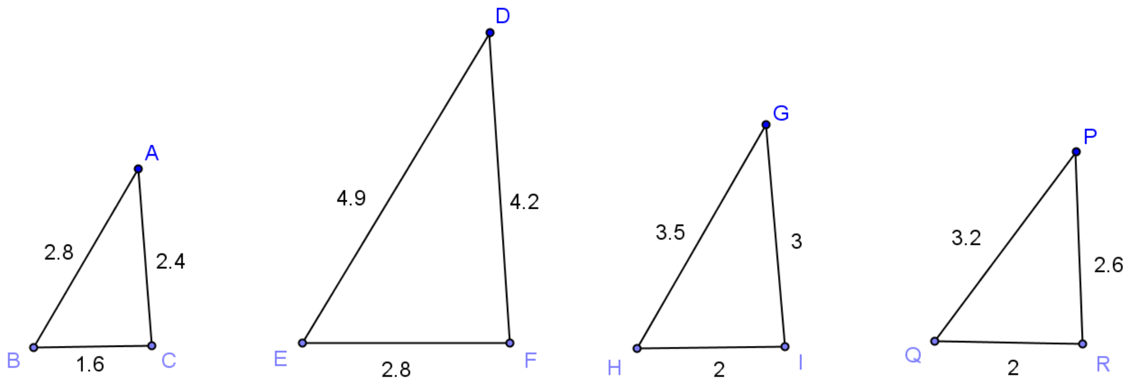


圖 8.2-25

想法：利用三角形(SSS)相似定理

解：

敘述	理由
(1) 在△ABC 與△DEF 中 $\overline{AB}：\overline{DE}=2.8：4.9=4：7$ $\overline{BC}：\overline{EF}=1.6：2.8=4：7$ $\overline{AC}：\overline{DF}=2.4：4.2=4：7$ $\overline{AB}：\overline{DE}=\overline{BC}：\overline{EF}=\overline{AC}：\overline{DF}$	如圖 8.2-25 所示 已知$\overline{AB}=2.8$、$\overline{DE}=4.9$ & 倍比定理 已知$\overline{BC}=1.6$、$\overline{EF}=2.8$ & 倍比定理 已知$\overline{AC}=2.4$、$\overline{DF}=4.2$ & 倍比定理 遞移律
(2) 所以△ABC～△DEF	由(1) & 根據三角形(SSS)相似定理
(3) 在△ABC 與△GHI 中 $\overline{AB}：\overline{GH}=2.8：3.5=4：5$ $\overline{BC}：\overline{HI}=1.6：2=4：5$ $\overline{AC}：\overline{GI}=2.4：3=4：5$ $\overline{AB}：\overline{GH}=\overline{BC}：\overline{HI}=\overline{AC}：\overline{GI}$	如圖 8.2-25 所示 已知$\overline{AB}=2.8$、$\overline{GH}=3.5$ & 倍比定理 已知$\overline{BC}=1.6$、$\overline{HI}=2$ & 倍比定理 已知$\overline{AC}=2.4$、$\overline{GI}=3$ & 倍比定理 遞移律
(4) 所以△ABC～△GHI	由(3) & 根據三角形(SSS)相似定理
(5) 在△ABC 與△PQR 中 $\overline{AB}：\overline{PQ}=2.8：3.2=7：8$ $\overline{BC}：\overline{QR}=1.6：2=4：5$ $\overline{AC}：\overline{PR}=2.4：2.6=12：13$ $\overline{AB}：\overline{PQ}\neq\overline{BC}：\overline{QR}\neq\overline{AC}：\overline{PR}$	如圖 8.2-25 所示 已知$\overline{AB}=2.8$、$\overline{PQ}=3.2$ & 倍比定理 已知$\overline{BC}=1.6$、$\overline{QR}=2$ & 倍比定理 已知$\overline{AC}=2.4$、$\overline{PR}=2.6$ & 倍比定理
(6) 所以△ABC 與△PQR 並不相似	由(5)

例題 8.2-21：

如圖 8.2-26，$\overline{AB}=9$，$\overline{BC}=12$，$\overline{CA}=6$，$\overline{DC}=4$，$\overline{AD}=8$，回答下列問題：

(1) 證明：△ABC∼△CAD

(2) ∠ACD 與△ABC 的哪個角相等？

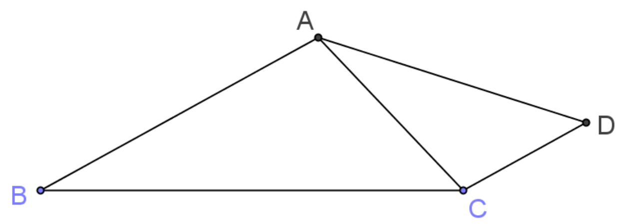


圖 8.2-26

想法：(1) 利用三角形(SSS)相似定理

(2) 相似多邊形對應角相等

解：

敘述	理由
(1) 在△ABC 與△CAD 中 $\overline{AB}:\overline{CA}=9:6=3:2$ $\overline{BC}:\overline{AD}=12:8=3:2$ $\overline{CA}:\overline{DC}=6:4=3:2$	如圖 8.2-26 所示 已知$\overline{AB}=9$、$\overline{CA}=6$ & 倍比定理 已知$\overline{BC}=12$、$\overline{AD}=8$ & 倍比定理 已知$\overline{CA}=6$、$\overline{DC}=4$ & 倍比定理
(2) $\overline{AB}:\overline{CA}=\overline{BC}:\overline{AD}=\overline{CA}:\overline{DC}$	由(1) & 遞移律
(3) 所以△ABC∼△CAD	由(2) & 根據三角形(SSS)相似定理
(4) ∠ACD＝∠BAC	由(3) & 相似多邊形對應角相等

定理 8.2-8 相似三角形對應高比與對應邊比定理

相似三角形對應高的比等於對應邊的比

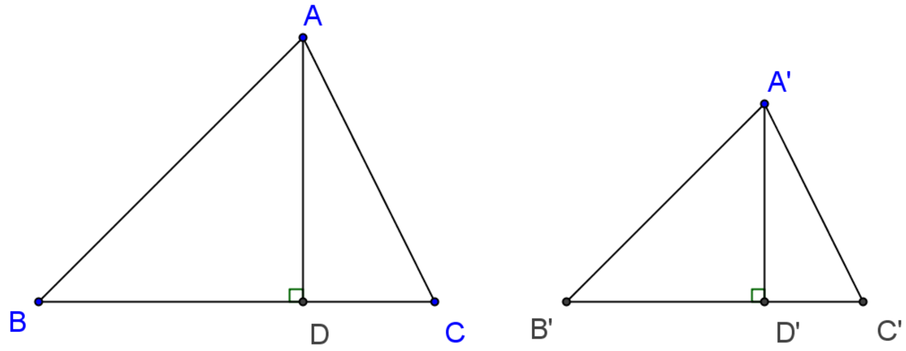


圖 8.2-27

已知：如圖 8.2-27，△ABC～△A'B'C'，$\overline{AD}$與$\overline{A'D'}$分別為$\overline{BC}$與$\overline{B'C'}$上的高

求證： $\overline{AD}$：$\overline{A'D'}$＝$\overline{AB}$：$\overline{A'B'}$＝$\overline{BC}$：$\overline{B'C'}$＝$\overline{AC}$：$\overline{A'C'}$

想法：兩相似三角形對應角相等、對應邊成比例

證明：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}$：$\overline{A'B'}$＝$\overline{BC}$：$\overline{B'C'}$＝$\overline{AC}$：$\overline{A'C'}$ ＆ ∠B＝∠B'	已知△ABC～△A'B'C' ＆ 兩相似三角形對應角相等、對應邊成比例
(2) $\overline{AD}\perp\overline{BC}$ ＆ $\overline{A'D'}\perp\overline{B'C'}$ (即∠ADB＝∠A'D'B'＝90°)	已知$\overline{AD}$與$\overline{A'D'}$分別為$\overline{BC}$與$\overline{B'C'}$上的高
(3) △ABD 中， ∠BAD＋∠ADB＋∠B＝180°	如圖 8.2-27 所示 三角形三內角和為 180°
(4) ∠BAD＝180°－(∠ADB＋∠B) ＝180°－(90°＋∠B) ＝90°－∠B	由(3) 等量減法公理 將(2) ∠ADB＝90° 代入
(5) △A'B'D'中， ∠B'A'D'＋∠A'D'B'＋∠B'＝180°	如圖 8.2-27 所示 三角形三內角和為 180°
(6) ∠B'A'D'＝180°－(∠A'D'B'＋∠B') ＝180°－(90°＋∠B') ＝90°－∠B' ＝90°－∠B	由(5) 等量減法公理 將(2) ∠A'D'B'＝90° 代入 將(1) ∠B＝∠B' 代入

(7) ∠BAD＝∠B'A'D'	由(4) ＆ (6) 遞移律
(8) 在△ABD 與△A'B'D'中 ∠B＝∠B' ∠ADB＝∠A'D'B' ∠BAD＝∠B'A'D'	如圖 8.2-27 所示 由(1) 已證 由(2) 已證 由(7) 已證
(9) △ABD ～ △A'B'D'	由(8) ＆ 根據 A.A.A.三角形相似定理
(10) $\overline{AD}$：$\overline{A'D'}$＝$\overline{AB}$：$\overline{A'B'}$	由(9) ＆ 兩相似三角形對應邊成比例
(11) 所以$\overline{AD}$：$\overline{A'D'}$＝$\overline{AB}$：$\overline{A'B'}$ ＝$\overline{BC}$：$\overline{B'C'}$＝$\overline{AC}$：$\overline{A'C'}$	由(1) $\overline{AB}$：$\overline{A'B'}$＝$\overline{BC}$：$\overline{B'C'}$＝$\overline{AC}$：$\overline{A'C'}$ ＆ (10) 遞移律

Q. E. D.

例題 8.2-22：

如圖 8.2-28 所示，△ABC～△A'B'C'，$\overline{AD}$與$\overline{A'D'}$分別為$\overline{BC}$與$\overline{B'C'}$上的高，若$\overline{BC}$＝12 公分，$\overline{B'C'}$＝9 公分，$\overline{AD}$＝8 公分，則$\overline{A'D'}$＝？

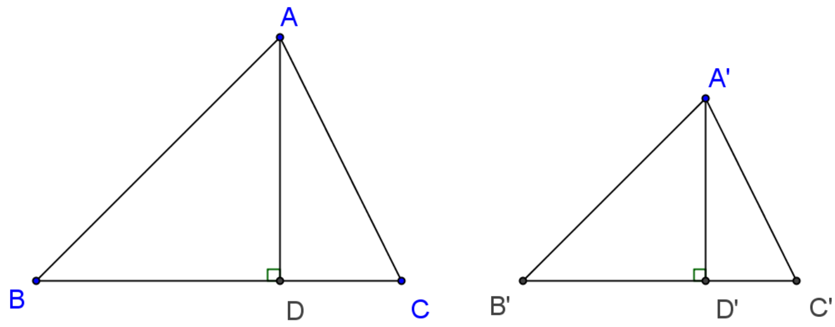


圖 8.2-28

想法：相似三角形對應高的比等於對應邊的比

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AD}$：$\overline{A'D'}$＝$\overline{BC}$：$\overline{B'C'}$	已知△ABC～△A'B'C'，$\overline{AD}$與$\overline{A'D'}$分別為$\overline{BC}$與$\overline{B'C'}$上的高 ＆ 相似三角形對應高的比等於對應邊的比
(2) 8 公分：$\overline{A'D'}$＝12 公分：9 公分	由(1) ＆ 已知$\overline{BC}$＝12 公分，$\overline{B'C'}$＝9 公分，$\overline{AD}$＝8 公分
(3) $\overline{A'D'}$×(12 公分)＝(8 公分)×(9 公分)	由(2) 內項乘積等於外項乘積
(4) $\overline{A'D'}$＝(8 公分)×(9 公分)÷(12 公分) ＝6 公分	由(3) 等量除法公理

定理 8.2-9 相似多邊形分成定理

兩相似多邊形，可分成個數相同的相似三角形，且其關係位置相同。

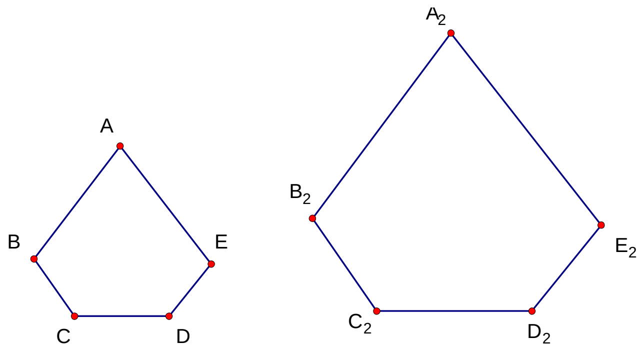
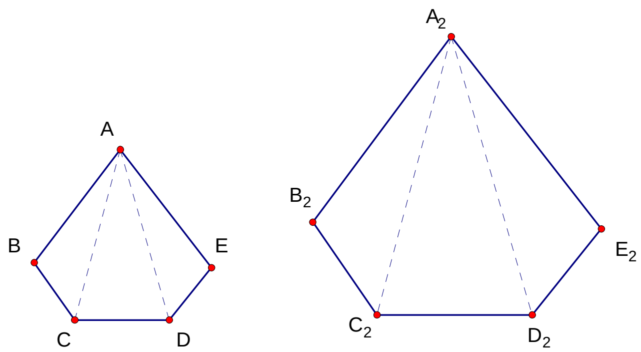


圖 8.2-29

已知： 如圖 8.2-29，五邊形 ABCDE 與五邊形 $A_2B_2C_2D_2E_2$ 為兩似多邊形，頂點 A、B、C、D、E 分別與頂點 A_2、B_2、C_2、D_2、E_2 對應。

求證： 五邊形 ABCDE 與五邊形 $A_2B_2C_2D_2E_2$ 可分成個數相同且位置對應的相似三角形。

想法： 利用相似多邊形定義及三角形(SAS)相似定理證明對應位置的三角形相似。



證明：

圖 8.2-29(a)

敘述	理由
(1) 過 A 點作對角線$\overline{AC}$及$\overline{AD}$，得△ABC、△ACD 與△ADE； 過 A_2 點作對角線$\overline{A_2C_2}$及$\overline{A_2D_2}$，得△$A_2B_2C_2$、△$A_2C_2D_2$ 與△$A_2D_2E_2$。如圖 8.2-29(a)	直線作圖
(2) $\angle B=\angle B_2$、$\angle BCD=\angle B_2C_2D_2$、$\angle E=\angle E_2$ & $\overline{AB}:\overline{A_2B_2}=\overline{BC}:\overline{B_2C_2}=\overline{CD}:\overline{C_2D_2}$ $=\overline{DE}:\overline{D_2E_2}=\overline{AE}:\overline{A_2E_2}$	已知五邊形 ABCDE 與五邊形 $A_2B_2C_2D_2E_2$ 為兩似多邊形 & 相似多邊形對應角相等且對應邊成比例

(3) 在△ABC 與△$A_2B_2C_2$ 中 $\angle B = \angle B_2$ $\overline{AB} : \overline{A_2B_2} = \overline{BC} : \overline{B_2C_2}$	如圖 8.2-29(a)所示 由(2) 已證 由(2) 已證
(4) 所以△ABC～△$A_2B_2C_2$	由(3) ＆ 根據三角形(SAS)相似定理
(5) $\angle ACB = \angle A_2C_2B_2$	由(4) ＆ 相似三角形的對應角相等
(6) $\angle BCD = \angle B_2C_2D_2$	由(2) 已證
(7) $\angle BCD - \angle ACB = \angle B_2C_2D_2 - \angle A_2C_2B_2$ (即$\angle ACD = \angle A_2C_2D_2$)	由(6)式減(5)式 等量減法公理
(8) $\overline{BC} : \overline{B_2C_2} = \overline{AC} : \overline{A_2C_2}$	由(4) ＆ 相似多邊形對應邊成比例
(9) $\overline{BC} : \overline{B_2C_2} = \overline{CD} : \overline{C_2D_2}$	由(2) 已證
(10) $\overline{AC} : \overline{A_2C_2} = \overline{CD} : \overline{C_2D_2}$	由(8) ＆ (9) 遞移律
(11) 在△ACD 與△$A_2C_2D_2$ 中 $\angle ACD = \angle A_2C_2D_2$ $\overline{AC} : \overline{A_2C_2} = \overline{CD} : \overline{C_2D_2}$	如圖 8.2-29(a)所示 由(7) 已證 由(10) 已證
(12) 所以△ACD～△$A_2C_2D_2$	由(11) ＆ 根據三角形(SAS)相似定理
(13) 在△ADE 與△$A_2D_2E_2$ 中 $\angle E = \angle E_2$ $\overline{DE} : \overline{D_2E_2} = \overline{AE} : \overline{A_2E_2}$	如圖 8.2-29(a)所示 由(2) 已證 由(2) 已證
(14) △ADE～△$A_2D_2E_2$	由(13) ＆ 根據三角形(SAS)相似定理

Q. E. D.

定理 8.2-10 相似多邊形組成定理

兩多邊形，若由個數相等，關係位置相同的相似三角形所組成，則這兩多邊形相似。

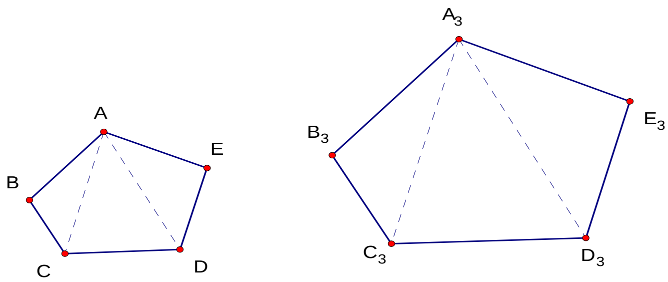


圖 8.2-30

已知：如圖 8.2-30，五邊形 ABCDE 與五邊形 $A_3B_3C_3D_3E_3$ 中，
若△ABC～$\triangle A_3B_3C_3$， △ACD～$\triangle A_3C_3D_3$， △ADE～$\triangle A_3D_3E_3$。

求證：五邊形 ABCDE～五邊形 $A_3B_3C_3D_3E_3$

想法：證明五邊形 ABCDE 與五邊形 $A_3B_3C_3D_3E_3$ 的對應邊成比例及對應角相等

證明：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}:\overline{A_3B_3}=\overline{BC}:\overline{B_3C_3}=\overline{AC}:\overline{A_3C_3}$ & $\angle ABC=\angle A_3B_3C_3$，$\angle BCA=\angle B_3C_3A_3$，$\angle BAC=\angle B_3A_3C_3$	已知△ABC～$\triangle A_3B_3C_3$ & 相似形三角形的對應邊成比例且對應角相等
(2) $\overline{AD}:\overline{A_3D_3}=\overline{CD}:\overline{C_3D_3}=\overline{AC}:\overline{A_3C_3}$ & $\angle ACD=\angle A_3C_3D_3$，$\angle CAD=\angle C_3A_3D_3$，$\angle CDA=\angle C_3D_3A_3$	已知△ACD～$\triangle A_3C_3D_3$ & 相似形三角形的對應邊成比例且對應角相等
(3) $\overline{AD}:\overline{A_3D_3}=\overline{DE}:\overline{D_3E_3}=\overline{AE}:\overline{A_3E_3}$ & $\angle ADE=\angle A_3D_3E_3$，$\angle DAE=\angle D_3A_3E_3$，$\angle DEA=\angle D_3E_3A_3$	已知△ADE～$\triangle A_3D_3E_3$ & 相似形三角形的對應邊成比例且對應角相等
(4) $\overline{AB}:\overline{A_3B_3}=\overline{BC}:\overline{B_3C_3}=\overline{CD}:\overline{C_3D_3}$ $=\overline{DE}:\overline{D_3E_3}=\overline{AE}:\overline{A_3E_3}$	由(1)、(2) & (3) 遞移律
(5) $\angle BAC+\angle CAD+\angle DAE$ $=\angle B_3A_3C_3+\angle C_3A_3D_3+\angle D_3A_3E_3$	由(1)、(2) & (3) & 等量加法公理
(6) $\angle BAE=\angle B_3A_3E_3$	由(5) & $\angle BAE=\angle BAC+\angle CAD+\angle DAE$ $\angle B_3A_3E_3=\angle B_3A_3C_3+\angle C_3A_3D_3+\angle D_3A_3E_3$

(7) $\angle BCA+\angle ACD=\angle B_3C_3A_3+\angle A_3C_3D_3$	由(1) & (2) & 等量加法公理
(8) $\angle BCD=\angle B_3C_3D_3$	由(7) & $\angle BCD=\angle BCA+\angle ACD$ & $\angle B_3C_3D_3=\angle B_3C_3A_3+\angle A_3C_3D_3$
(9) $\angle CDA+\angle ADE=\angle C_3D_3A_3+\angle A_3D_3E_3$	由(2) & (3) & 等量加法公理
(10) $\angle CDE=\angle C_3D_3E_3$	由(9) & $\angle CDE=\angle CDA+\angle ADE$ & $\angle C_3D_3E_3=\angle C_3D_3A_3+\angle A_3D_3E_3$
(11) $\angle BAE=\angle B_3A_3E_3$、$\angle ABC=\angle A_3B_3C_3$、 $\angle BCD=\angle B_3C_3D_3$、$\angle CDE=\angle C_3D_3E_3$、 $\angle DEA=\angle D_3E_3A_3$	由(6)、(1)、(8)、(10) & (3) 已證
(12) 五邊形 ABCDE～五邊形 $A_3B_3C_3D_3E_3$	由(4) & (11) & 相似多邊形的定義

Q. E. D.

定理 8.2-11 兩弦內分定理 (圓內冪性質)

若兩弦相交於圓內，則一弦上兩線段的積等於另一弦上兩線段的積。

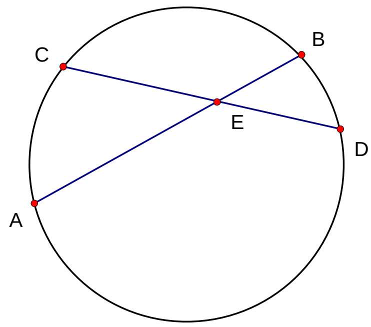


圖 8.2-31

已知： 如圖 8.2-31，$\overline{AB}$及$\overline{CD}$為圓的兩弦。

求證： $\overline{AE}\times\overline{EB}=\overline{CE}\times\overline{ED}$

想法： 如圖 8.2-31(a)，證明△AED～△CEB，再利用相似三角形的對應邊成比例的性質。

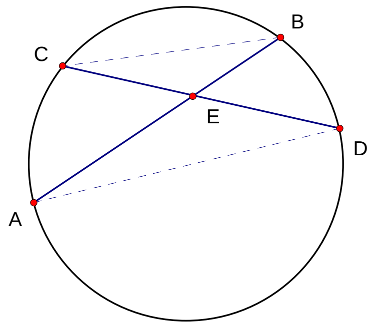


圖 8.2-31(a)

證明：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{AD}$、$\overline{BC}$，如圖 8.2-31(a)	兩點作一直線
(2) 在△AED 與△CEB 中， ∠A＝∠C ∠D＝∠B ∠AED＝∠CEB	如圖 8.2-31(a)所示 同圓中等弧對等圓周角 同圓中等弧對等圓周角 對頂角相等
(3) △AED～△CEB	由(2) & 根據三角形(AAA)相似定理
(4) $\overline{AE}:\overline{CE}=\overline{ED}:\overline{EB}$	由(3) & 相似三角形對應邊成比例
(5) $\overline{AE}\times\overline{EB}=\overline{CE}\times\overline{ED}$	由(4) & 外項乘積等於內項乘積

Q. E. D.

例題 8.2-23：

如圖 8.2-32，弦$\overline{AB}$與弦$\overline{CD}$交於 P 點。若$\overline{PA}=4$，$\overline{PB}=6$，則$\overline{PC}\times\overline{PD}=$______。

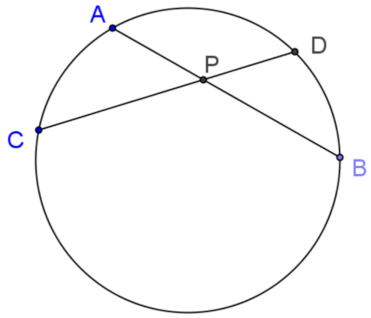


圖 8.2-32

想法：利用圓內冪性質來解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{PC}\times\overline{PD}=\overline{PA}\times\overline{PB}$	已知弦$\overline{AB}$與弦$\overline{CD}$交於 P 點 & 圓內冪性質
(2) $\overline{PC}\times\overline{PD}=4\times6=24$	由(1) & 已知$\overline{PA}=4$，$\overline{PB}=6$

例題 8.2-24：

如圖 8.2-33，圓的兩弦 $\overline{AB}$和$\overline{CD}$相交於 P 點。若$\overline{CP}=20$，$\overline{DP}=4$，$\overline{BP}=5$，則$\overline{PA}=$______。

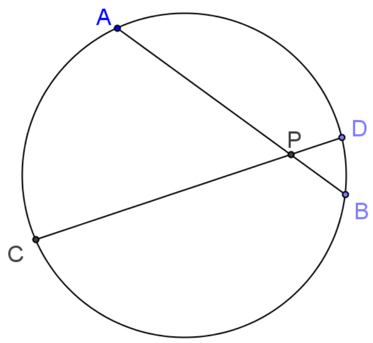


圖 8.2-33

想法：利用圓內冪性質來解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$	已知弦$\overline{AB}$與弦$\overline{CD}$交於 P 點 & 圓內冪性質
(2) $\overline{PA}\times5=20\times4$	由(1) & 已知$\overline{CP}=20$，$\overline{DP}=4$，$\overline{BP}=5$
(3) $\overline{PA}=(20\times4)\div5=16$	由(2) 等量除法公理

例題 8.2-25：

如圖 8.2-34，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為圓的兩弦，且兩弦相交於 P 點。若$\overline{AP}$＝x，$\overline{CP}$＝x＋3，$\overline{BP}$＝3x－1，$\overline{DP}$＝x＋1，則$\overline{AB}$＝？

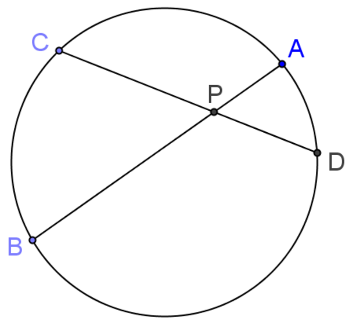


圖 8.2-34

想法：利用圓內冪性質來解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$	已知弦$\overline{AB}$與弦$\overline{CD}$交於 P 點 & 圓內冪性質
(2) x ×(3x－1)＝(x＋3)×(x＋1)	由(1) & 已知$\overline{AP}$＝x，$\overline{CP}$＝x＋3，$\overline{BP}$＝3x－1，$\overline{DP}$＝x＋1
(3) x＝$\frac{-1}{2}$ 或 x＝3	由(2) & 解一元二次方程式
(4) 所以 x＝3	由(3)& $\overline{AP}$＝x 為線段長度，必大於 0
(5) $\overline{AB}$＝$\overline{AP}$＋$\overline{BP}$＝x＋3x－1 ＝4x－1 ＝4×3－1＝11	如圖 8.2-34 所示，全量等於分量之和 & 已知$\overline{AP}$＝x，$\overline{BP}$＝3x－1 & 由(4) x＝3 代入
(6) 所以$\overline{AB}$＝11	由(5) 已證

例題 8.2-26：

如圖 8.2-35，$\overline{AE}$、$\overline{DB}$在圓內交於一點 C。$\overline{AC}=3x-1$，$\overline{CD}=x+1$，$\overline{BC}=5x+1$，$\overline{CE}=4x-4$，則 x＝______。

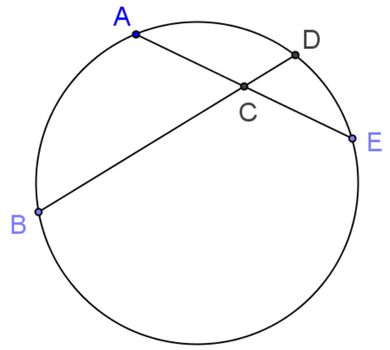


圖 8.2-35

想法：利用圓內冪性質來解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AC}\times\overline{CE}=\overline{BC}\times\overline{CD}$	已知$\overline{AE}$、$\overline{DB}$在圓內交於一點 C & 圓內冪性質
(2) $(3x-1)\times(4x-4)=(5x+1)\times(x+1)$	由(1) & 已知$\overline{AC}=3x-1$， $\overline{CD}=x+1$，$\overline{BC}=5x+1$，$\overline{CE}=4x-4$
(3) $x=\frac{1}{7}$ 或 $x=3$	由(2) & 解一元二次方程式
(4) 若 $x=\frac{1}{7}$， 則$\overline{AC}=3x-1=3\times\frac{1}{7}-1=\frac{-4}{7}$不合	將 $x=\frac{1}{7}$代入已知$\overline{AC}=3x-1$ & $\overline{AC}$為線段長度，必大於 0
(5) 若 $x=3$， 則$\overline{AC}=3x-1=3\times3-1=8$ $\overline{CD}=x+1=3+1=4$ $\overline{BC}=5x+1=5\times3+1=16$ $\overline{CE}=4x-4=4\times3-4=8$	將 $x=3$ 代入已知 $\overline{AC}=3x-1$， $\overline{CD}=x+1$， $\overline{BC}=5x+1$， $\overline{CE}=4x-4$
(6) 所以 $x=3$	由(5)

例題 8.2-27：

如圖 8.2-36，圓的兩弦$\overline{AB}$和$\overline{CD}$相交於 E 點，且$\overline{AE}>\overline{BE}$。若$\overline{CE}=20$，$\overline{DE}=4$，$\overline{AB}=21$，則$\overline{AE}=$______。

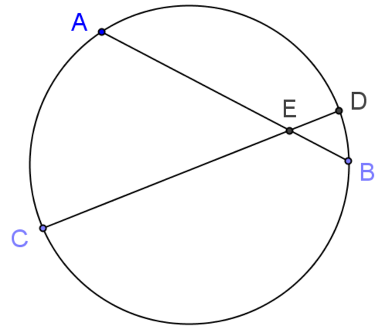


圖 8.2-36

想法：利用圓內冪性質來解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}=\overline{AE}+\overline{BE}$	如圖 8.2-36 所示，全量等於分量之和
(2) $\overline{BE}=\overline{AB}-\overline{AE}=21-\overline{AE}$	由(1) 等量減法公理 & 已知$\overline{AB}=21$
(3) $\overline{AE}\times\overline{BE}=\overline{CE}\times\overline{DE}$	已知圓的兩弦$\overline{AB}$和$\overline{CD}$相交於 E 點 & 圓內冪性質
(4) $\overline{AE}\times(21-\overline{AE})=20\times4$	將(2) $\overline{BE}=21-\overline{AE}$ 已證 & 已知$\overline{CE}=20$，$\overline{DE}=4$ 代入(3)
(5) $\overline{AE}=5$ 或 $\overline{AE}=16$	由(4) & 解一元二次方程式
(6) 當$\overline{AE}=5$ 時， $\overline{BE}=21-\overline{AE}=21-5=16$ 不合	將(5) $\overline{AE}=5$ 代入 (2) $\overline{BE}=21-\overline{AE}$ & 已知$\overline{AE}>\overline{BE}$
(7) 當$\overline{AE}=16$ 時， $\overline{BE}=21-\overline{AE}=21-16=5$	將(5)$\overline{AE}=16$ 代入 (2) $\overline{BE}=21-\overline{AE}$ & 已知$\overline{AE}>\overline{BE}$
(8) 所以$\overline{AE}=16$	由(7)

定理 8.2-12 兩割線外分定理 (圓外冪性質)

若兩割線相交於圓外一點，則一割線的全長與其圓外線段的積，等於另一割線的全長與其圓外線段的積。

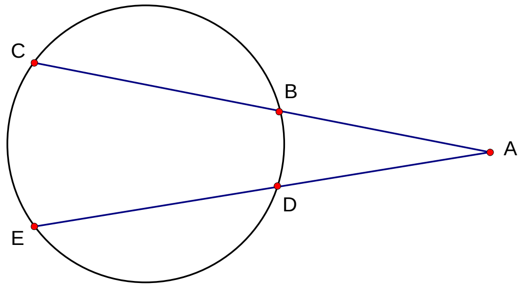


圖 8.2-37

已知：如圖 8.2-37，$\overline{AC}$及$\overline{AE}$為圓的兩割線且相交於 A 點。

求證：$\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{AD}\times\overline{AE}$

想法：如圖 8.2-37(a)，證明△ACD～△AEB，利用相似三角形的對應邊成比例的性質。

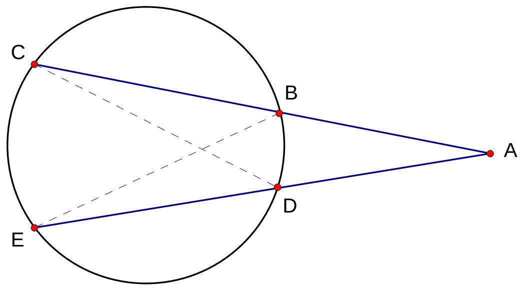


圖 8.2-37(a)

證明：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{BE}$，$\overline{CD}$，如圖 8.2-37(a)	兩點作一直線
(2) ∠CDE＝∠EBC	同圓中等弧對等圓周角
(3) ∠ADC＝180°－∠CDE	∠ADC 與∠CDE 互為補角
(4) ∠ABE＝180°－∠EBC	∠ABE 與∠EBC 互為補角
(5) ∠ADC＝∠ABE	由(2)、(3) & (4) 代換
(6) 在△ACD 與△AEB 中 ∠C＝∠E ∠A＝∠A ∠ADC＝∠ABE	如圖 8.2-37(a)所示 同圓中等弧對等圓周角 共同角 由(5) 已證

(7) △ACD～△AEB	由(6) & 根據三角形(AAA)相似定理
(8) $\overline{AC}$：$\overline{AE}$＝$\overline{AD}$：$\overline{AB}$	由(7) & 相似三角形對應邊成比例
(9) $\overline{AB}$×$\overline{AC}$＝$\overline{AD}$×$\overline{AE}$	由(8) & 外項乘積等於內項乘積

Q. E. D.

例題 8.2-28：

如圖 8.2-38，通過圓外一點 P，作兩條割線，分別與圓交於 A、B 及 C、D 四點。已知$\overline{PA}$＝6，$\overline{PB}$＝10，$\overline{PC}$＝5，則$\overline{PD}$＝？

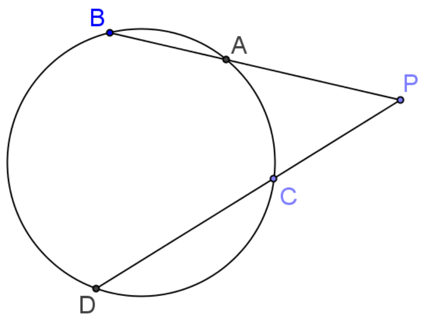


圖 8.2-38

想法： 利用圓外冪性質解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{PA}$×$\overline{PB}$＝$\overline{PC}$×$\overline{PD}$	已知通過圓外一點 P，作兩條割線，分別與圓交於 A、B 及 C、D 四點 & 圓外冪性質
(2) 6×10＝5×$\overline{PD}$	由(1) & 已知$\overline{PA}$＝6，$\overline{PB}$＝10，$\overline{PC}$＝5
(3) $\overline{PD}$＝6×10÷5＝12	由(2) & 等量除法公理

例題 8.2-29：

如圖 8.2-39，若圓的兩弦$\overline{AB}$與$\overline{CD}$延長線相交於圓外一點 P。已知$\overline{PA}=8$，$\overline{PC}=5$，$\overline{AB}=7$，則$\overline{CD}=$________。

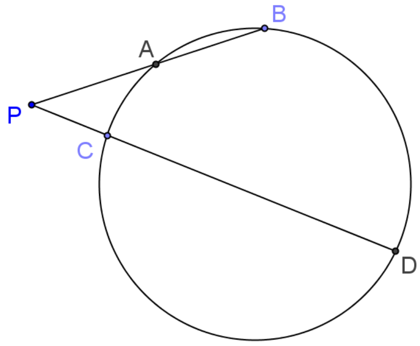


圖 8.2-39

想法：利用圓外冪性質解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$	已知圓的兩弦$\overline{AB}$與$\overline{CD}$延長線相交於圓外一點 P ＆ 圓外冪性質
(2) $\overline{PA}\times(\overline{PA}+\overline{AB})=\overline{PC}\times(\overline{PC}+\overline{CD})$	由(1) ＆ $\overline{PB}=\overline{PA}+\overline{AB}$、$\overline{PD}=\overline{PC}+\overline{CD}$
(3) $8\times(8+7)=5\times(5+\overline{CD})$	由(2) ＆ 已知$\overline{PA}=8$，$\overline{PC}=5$，$\overline{AB}=7$
(4) $\overline{CD}=[8\times(8+7)-5\times5]\div5=19$	由(3) ＆ 解一元一次方程式

例題 8.2-30：

如圖 8.2-40，P 為圓 O 外的一點，$\overline{PA}$、$\overline{PC}$為兩條割線，其中$\overline{PA}$通過圓心。若$\overline{PD}=3$，$\overline{CD}=5$，$\overline{OA}=5$，則$\overline{PB}=$？

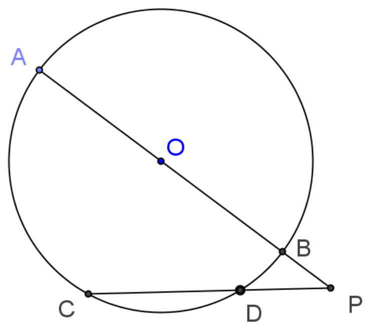


圖 8.2-40

想法：利用圓外冪性質解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}$為圓 O 之直徑	已知 P 為圓 O 外的一點，$\overline{PA}$為割線且通過圓心
(2) $\overline{AB}=2\overline{OA}=2\times5=10$	由(1) & 直徑為半徑的 2 倍 & 已知$\overline{OA}=5$
(3) $\overline{PB}\times\overline{PA}=\overline{PD}\times\overline{PC}$	已知 P 為圓 O 外的一點，$\overline{PA}$、$\overline{PC}$為兩條割線 & 圓外冪性質
(4) $\overline{PB}\times(\overline{PB}+\overline{AB})=\overline{PD}\times(\overline{PD}+\overline{CD})$	由(3) & $\overline{PA}=\overline{PB}+\overline{AB}$、$\overline{PC}=\overline{PD}+\overline{CD}$
(5) $\overline{PB}\times(\overline{PB}+10)=3\times(3+5)$	將(2) $\overline{AB}=10$ 已證 & 已知$\overline{PD}=3$，$\overline{CD}=5$ 代入(4)
(6) $\overline{PB}=-12$ 或 $\overline{PB}=2$	由(5) & 解一元二次方程式
(7) 所以$\overline{PB}=2$	由(6) & $\overline{PB}$為線段長度必大於 0

例題 8.2-31：

如圖 8.2-41，過 P 點作兩割線分別交圓於 A、B、C、D 四點。若 $\overline{PA}=3$，$\overline{PB}=3x+4$，$\overline{PC}=x+1$，$\overline{CD}=3x+1$，則 $\overline{AB}=$_______。

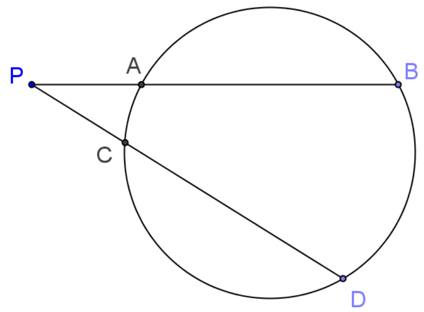


圖 8.2-41

想法：利用圓外冪性質解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$	已知過 P 點作兩割線分別交圓於 A、B、C、D 四點 & 圓外冪性質
(2) $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times(\overline{PC}+\overline{CD})$	由(1) & $\overline{PD}=\overline{PC}+\overline{CD}$
(3) $3\times(3x+4)=(x+1)\times[(x+1)+(3x+1)]$	由(2) & 已知$\overline{PA}=3$，$\overline{PB}=3x+4$，$\overline{PC}=x+1$，$\overline{CD}=3x+1$
(4) $x=\frac{-5}{4}$ 或 $x=2$	由(3) & 解一元二次方程式
(5) 當 $x=\frac{-5}{4}$ 時， $\overline{PC}=x+1=\frac{-5}{4}+1=\frac{-1}{4}$ (不合)	將(4) $x=\frac{-5}{4}$ 代入已知$\overline{PC}=x+1$ & $\overline{PC}$為線段長度必大於 0
(6) 當 $x=2$ 時， $\overline{PB}=3x+4=3\times2+4=10$ $\overline{PC}=x+1=2+1=3$ $\overline{CD}=3x+1=3\times2+1=7$	將(4) $x=2$ 代入已知 $\overline{PB}=3x+4$ $\overline{PC}=x+1$ $\overline{CD}=3x+1$
(7) 所以$\overline{AB}=\overline{PB}-\overline{PA}=10-3=7$	如圖 8.2-41 所示，$\overline{AB}=\overline{PB}-\overline{PA}$ & (6) $\overline{PB}=10$ & 已知$\overline{PA}=3$

定理 8.2-13 切線與割線外分定理 (圓切冪性質)

若切線與割線相交，則切線長是割線全長與圓外線段的比例中項。

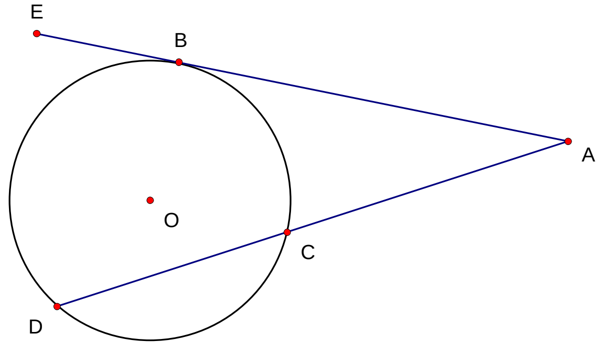


圖 8.2-42

已知：如圖 8.2-42，$\overline{AD}$為圓的割線，$\overline{AE}$與圓相切於 B 點

求證：$\overline{AB}^2=\overline{AD}\times\overline{AC}$

想法：如圖 8.2-42(a)，證明△ABD～△ACB，利用相似三角形的對應邊成比例的性質。

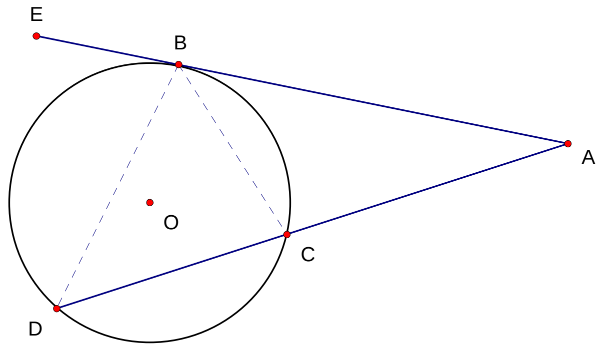


圖 8.2-42(a)

證明：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{BD}$、$\overline{BC}$，如圖 8.2-42(a)	兩點作一直線
(2) $\angle D=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$	圓周角等於所對弧度的一半
(3) $\angle ABC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$	弦切角等於所對弧度的一半
(4) $\angle D=\angle ABC$	由(2) & (3) 遞移律
(5) $\angle BCD=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$	圓周角等於所對弧度的一半

(6) $\angle EBD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$	弦切角等於所對弧度的一半
(7) $\angle BCD = \angle EBD$	由(5) & (6) 遞移律
(8) $\angle ABD = 180° - \angle EBD$	$\angle ABD$ 與$\angle EBD$ 互為補角
(9) $\angle ACB = 180° - \angle BCD$	$\angle ACB$ 與$\angle BCD$ 互為補角
(10) $\angle ABD = \angle ACB$	由(7)、(8) & (9) 代換
(11) 在$\triangle ABD$ 與$\triangle ACB$ 中， $\angle A = \angle A$ $\angle ABD = \angle ACB$ $\angle D = \angle ABC$	如圖 8.2-42(a)所示 共同角 由(10) 已證 由(4) 已證
(12) $\triangle ABD \sim \triangle ACB$	由(11) & 根據三角形(AAA)相似定理
(13) $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{AC}$	由(12) & 相似三角形對應邊成比例
(14) 所以$\overline{AB}^2 = \overline{AD} \times \overline{AC}$	由(13) & 內項乘積等於外項乘積

Q. E. D.

例題 8.2-32：

如圖 8.2-43，$\overline{PA}$切圓於 A 點，$\overline{PD}$為割線且交圓於 C、D 兩點。若$\overline{PA}=10$，$\overline{PD}=20$，則$\overline{PC}=$？

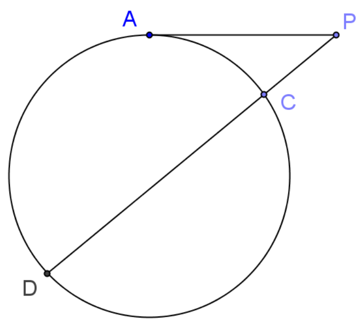


圖 8.2-43

想法：利用圓切冪性質解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{PA}^2 = \overline{PD} \times \overline{PC}$	已知$\overline{PA}$切圓於 A 點，$\overline{PD}$為割線且交圓於 C、D 兩點 & 圓切冪性質
(2) $10^2 = 20 \times \overline{PC}$	由(1) & 已知$\overline{PA}=10$，$\overline{PD}=20$
(3) $\overline{PC} = 10^2 \div 20 = 5$	由(2) 等量除法公理

例題 8.2-33：

如圖 8.2-44，$\overline{PA}$切圓於 A 點，$\overline{PD}$為割線且交圓於 C、D 兩點。若$\overline{PC}$＝4，$\overline{CD}$＝5，則$\overline{PA}$＝？

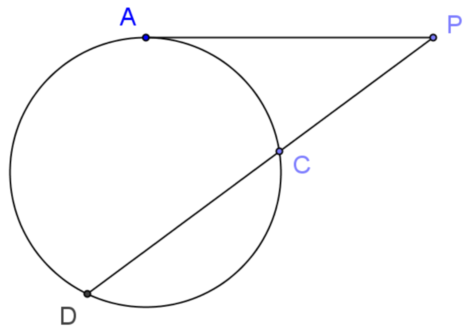


圖 8.2-44

想法：利用圓切冪性質解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{PA}^2=\overline{PD}\times\overline{PC}$	已知$\overline{PA}$切圓於 A 點，$\overline{PD}$為割線且交圓於 C、D 兩點 & 圓切冪性質
(2) $\overline{PA}^2=(\overline{PC}+\overline{CD})\times\overline{PC}$	由(1) & $\overline{PD}=\overline{PC}+\overline{CD}$
(3) $\overline{PA}^2=(4+5)\times4$	由(2) & 已知$\overline{PC}=4$，$\overline{CD}=5$
(4) $\overline{PA}=6$ 或 $\overline{PA}=-6$	由(3) 求平方根
(5) 所以$\overline{PA}=6$	由(4) & $\overline{PA}$為線段長度必大於或等於 0

例題 8.2-34：

如圖 8.2-45，$\overline{PA}$切圓於 A 點，$\overline{PD}$為割線且交圓於 C、D 兩點。若$\overline{PA}$＝8，$\overline{CD}$＝12，則$\overline{PC}$＝？

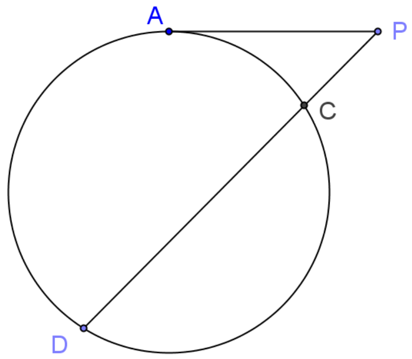


圖 8.2-45

想法：利用圓切冪性質解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{PA}^2=\overline{PD}\times\overline{PC}$	已知$\overline{PA}$切圓於 A 點，$\overline{PD}$為割線且交圓於 C、D 兩點 & 圓切冪性質
(2) $\overline{PA}^2=(\overline{PC}+\overline{CD})\times\overline{PC}$	由(1) & $\overline{PD}=\overline{PC}+\overline{CD}$
(3) $8^2=(\overline{PC}+12)\times\overline{PC}$	由(2) & 已知$\overline{PA}$＝8，$\overline{CD}$＝12
(4) $\overline{PC}=4$ 或 $\overline{PC}=-16$	由(3) 解一元二次方程式
(5) 所以$\overline{PC}=4$	由(4) & $\overline{PC}$為線段長度必大於或等於 0

例題 8.2-35：

如圖 8.2-46，$\overline{PA}$切圓 O 於 A 點，$\overline{PD}$為割線且通過圓心 O。若$\overline{PA}=8$，$\overline{PC}=4$，則圓 O 的半徑為何？

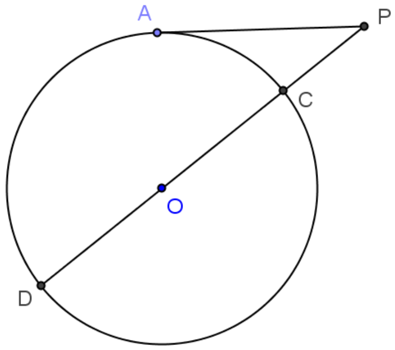


圖 8.2-46

想法：利用圓切冪性質解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{PA}^2=\overline{PD}\times\overline{PC}$	$\overline{PA}$切圓 O 於 A 點，$\overline{PD}$為割線且通過圓心 O & 圓切冪性質
(2) $\overline{PA}^2=(\overline{PC}+\overline{CD})\times\overline{PC}$	由(1) & $\overline{PD}=\overline{PC}+\overline{CD}$
(3) $8^2=(4+\overline{CD})\times4$	由(2) & 已知$\overline{PA}=8$，$\overline{PC}=4$
(4) $\overline{CD}=12$	由(3) 解一元一次方程式
(5) 所以圓 O 的半徑為 $12\div2=6$	由(4) & $\overline{CD}$為圓 O 的直徑 & 半徑為直徑的一半

習題 8.2

習題 8.2-1

已知四邊形 ABCD～四邊形 EFGH，∠A＝90°，∠C＝75°，∠H＝105°，試求∠F。

習題 8.2-2

設四邊形 ABCD～四邊形 EFGH，∠A：∠B：∠C＝3：5：7，且∠D＝60°，試求 ∠F、∠G。

習題 8.2-3

如圖 8.2-47，已知△ABC～△DEC，且$\overline{AB}$＝6，$\overline{BC}$＝14，$\overline{DE}$＝9，試求$\overline{EC}$。

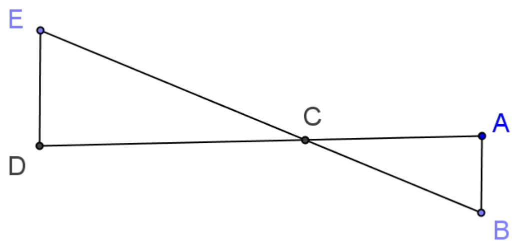


圖 8.2-47

習題 8.2-4

已知四邊形 ABCD～四邊形 EFGH，若$\overline{BC}$＝10，$\overline{CD}$＝20，$\overline{FG}$＝4，試求$\overline{GH}$。

習題 8.2-5

如圖 8.2-48，△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$，且$\overline{AD}$＝4，$\overline{DB}$＝2，$\overline{DE}$＝6，試求$\overline{BC}$。

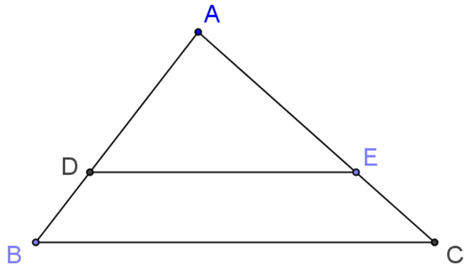


圖 8.2-48

習題 8.2-6

如圖 8.2-49，△ABC 中，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$，若$\overline{AD}$：$\overline{BD}$＝3：5，則$\overline{DE}$：$\overline{BC}$＝？

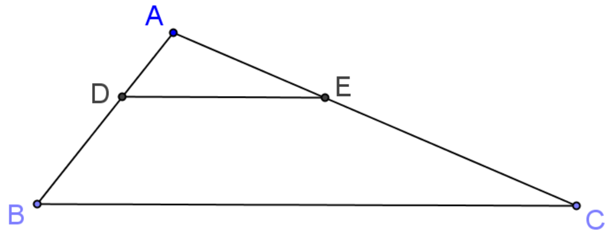


圖 8.2-49

習題 8.2-7

如圖 8.2-50，△ABC 中，∠BDE＝∠A，且$\overline{DE}$：$\overline{AC}$＝3：5，若$\overline{BC}$＝20，$\overline{DB}$＝9，試求$\overline{AD}$和$\overline{BE}$。

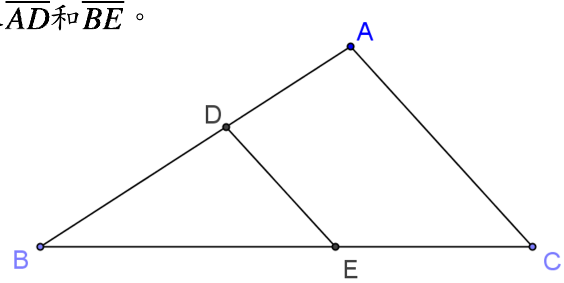


圖 8.2-50

習題 8.2-8

如圖 8.2-51，∠B＝∠E，且$\overline{AB}$＝9，$\overline{BC}$＝6，$\overline{DE}$＝12，試求$\overline{EC}$。

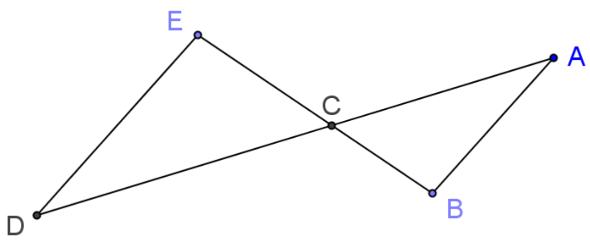


圖 8.2-51

習題 8.2-9

如圖 8.2-52，△ABC 中，若$\overline{AD} \perp \overline{BC}$且$\overline{BE} \perp \overline{AC}$，求證△AFE～△BFD。

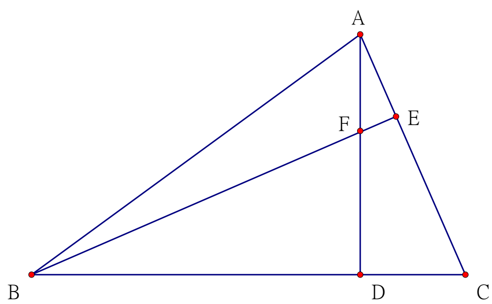


圖 8.2-52

習題 8.2-10

如圖 8.2-53，∠C＝∠D＝90°，若$\overline{AC}$＝6，$\overline{AE}$＝8，$\overline{BD}$＝3，則$\overline{BE}$＝？

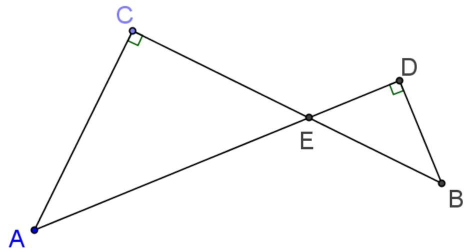


圖 8.2-53

習題 8.2-11

如圖 8.2-54，△ABC 中，若$\overline{AB}$＝$\overline{AC}$＝12，$\overline{BC}$＝$\overline{BD}$＝6，則$\overline{AD}$＝？

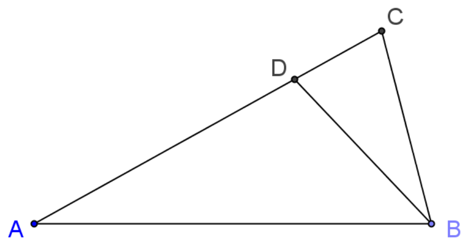


圖 8.2-54

習題 8.2-12

如圖 8.2-55，△ABC～△A'B'C'，$\overline{AD}$與$\overline{A'D'}$分別為$\overline{BC}$與$\overline{B'C'}$上的高，若$\overline{BC}$＝24 公分，$\overline{B'C'}$＝18 公分，$\overline{AD}$＝16 公分，則$\overline{A'D'}$＝？

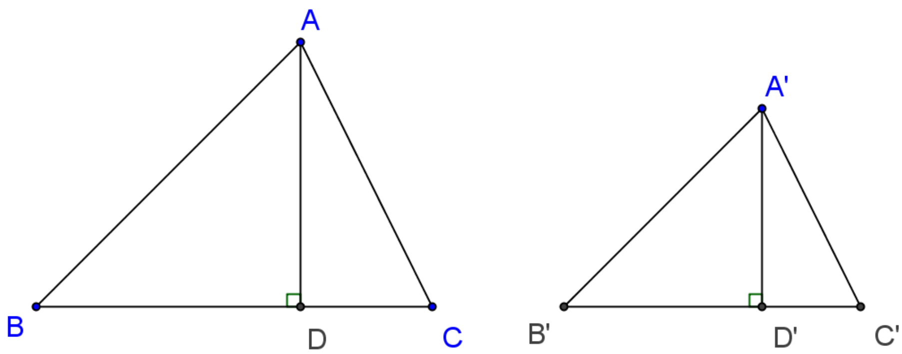


圖 8.2-55

習題 8.2-13

如圖 8.2-56，設$\overline{AB}$為圓之直徑，$\overline{BD}$切圓於 B 點，$\overline{AD}$與圓周相交於 E 點，求證：

(a) $\overline{AB}^2=\overline{AE}\times\overline{AD}$

(b) $\overline{EB}^2=\overline{EA}\times\overline{ED}$

(c) $\overline{DB}^2=\overline{DE}\times\overline{DA}$

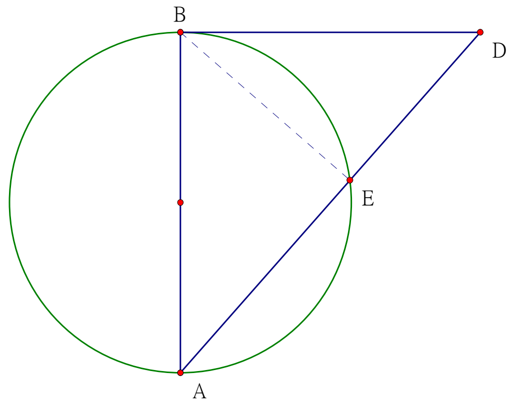


圖 8.2-56

習題 8.2-14

如圖 8.2-57，△ABC 中，已知∠ABC＝90°，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$，且$\overline{DA}=5$、$\overline{DC}=10$，則：(1) $\overline{DB}=$？ (2) $\overline{AB}=$？ (3) $\overline{CB}=$？

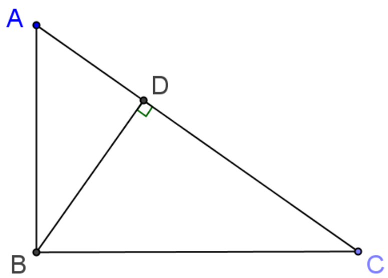


圖 8.2-57

習題 8.2-15

如圖 8.2-58，△ABC 中，已知∠ABC＝90°，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$，且$\overline{AB}=9$、$\overline{BC}=12$、$\overline{AC}=15$，則：(1) $\overline{AD}=$？ (2) $\overline{CD}=$？ (3) $\overline{BD}=$？

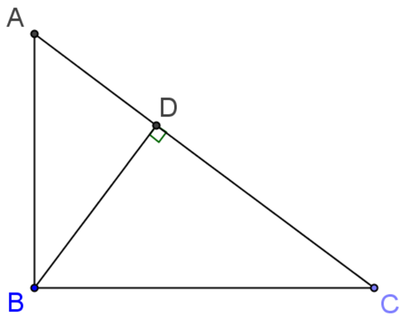


圖 8.2-58

習題 8.2-16

如圖 8.2-59，△ABC 與△EDC 中，$\overline{CA}$＝6，$\overline{CB}$＝12，$\overline{CE}$＝10，$\overline{CD}$＝20，則△ABC 與△EDC 是否相似？為什麼？

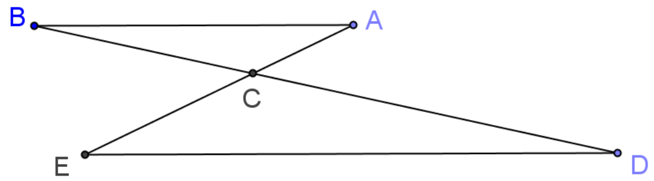


圖 8.2-59

習題 8.2-17

如圖 8.2-60，△ABC 中，$\overline{AE}$＝4，$\overline{BE}$＝6，$\overline{BD}$＝3，$\overline{CD}$＝17，則：

(1) △BAC 與△BDE 是否相似？為什麼？

(2) 若$\overline{AC}$＝16，試求$\overline{DE}$。

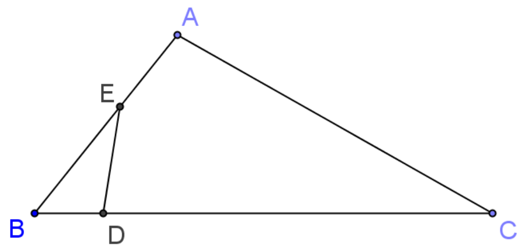


圖 8.2-60

習題 8.2-18

如圖 8.2-61，$\overline{AB}$＝18，$\overline{BC}$＝24，$\overline{CA}$＝12，$\overline{DC}$＝8，$\overline{AD}$＝16，則：

(1) 證明：△ABC∼△CAD

(2) ∠ACD 與△ABC 的哪個角相等？

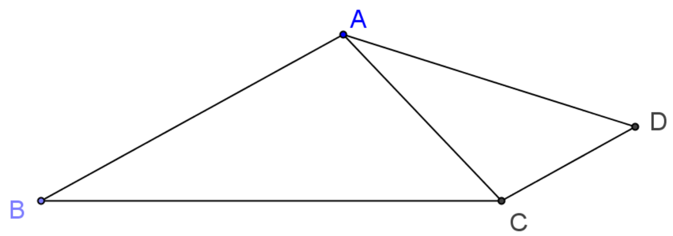


圖 8.2-61

習題 8.2-19

如圖 8.2-62，弦$\overline{AB}$與弦$\overline{CD}$交於 P 點。若$\overline{PA}=5$，$\overline{PB}=6$，則$\overline{PC}\times\overline{PD}=$_____。

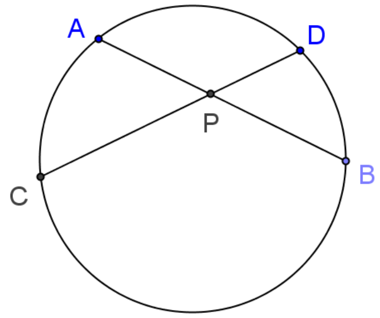


圖 8.2-62

習題 8.2-20

如圖 8.2-63，圓的兩弦$\overline{AB}$和$\overline{CD}$相交於 P 點。若$\overline{CP}=15$，$\overline{DP}=4$，$\overline{BP}=5$，則$\overline{PA}=$________。

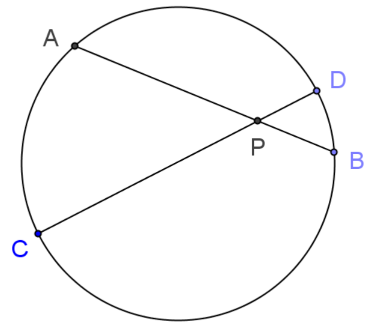


圖 8.2-63

習題 8.2-21

如圖 8.2-64，圓的兩弦$\overline{AB}$和$\overline{CD}$相交於 E 點，且$\overline{AE}>\overline{BE}$。若$\overline{CE}=15$，$\overline{DE}=5$，$\overline{AB}=28$，則$\overline{AE}=$______。

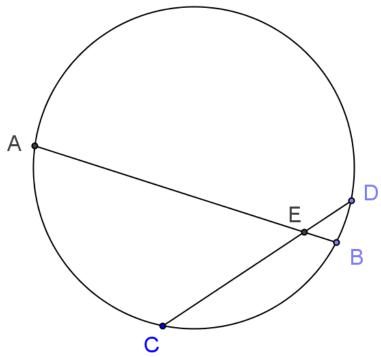


圖 8.2-64

習題 8.2-22

如圖 8.2-65，通過圓外一點 P，作兩條割線，分別與圓交於 A、B 及 C、D 四點。已知$\overline{PA}$＝6，$\overline{PB}$＝15，$\overline{PC}$＝5，則$\overline{PD}$＝？

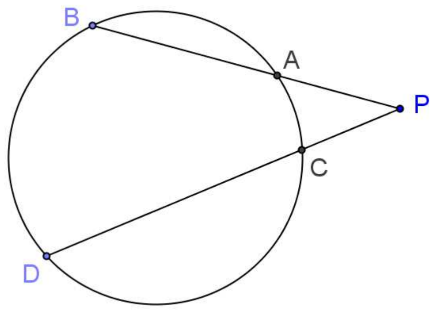


圖 8.2-65

習題 8.2-23

如圖 8.2-66，若圓的兩弦$\overline{AB}$與$\overline{CD}$延長線相交於圓外一點 P。已知$\overline{PA}$＝4，$\overline{PC}$＝5，$\overline{AB}$＝6，則$\overline{CD}$＝________。

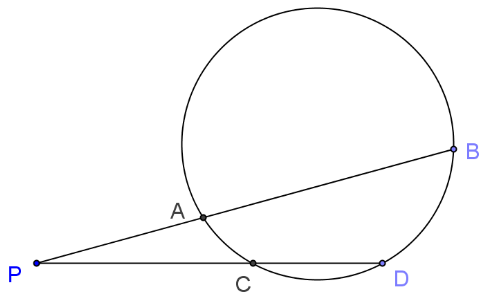


圖 8.2-66

習題 8.2-24

如圖 8.2-67，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為圓的兩弦，且兩弦的延長線相交於 P 點。若$\overline{AB}$＝$\overline{AP}$＝x，$\overline{PC}$＝$x-2$，$\overline{CD}$＝$3x-4$，則$\overline{CD}$＝？

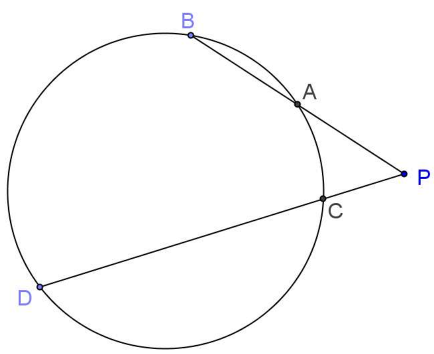


圖 8.2-67

習題 8.2-25

如圖 8.2-68，$\overline{PA}$切圓於 A 點，$\overline{PD}$為割線且交圓於 C、D 兩點。若$\overline{PA}$＝8，$\overline{PD}$＝16，則$\overline{PC}$＝？

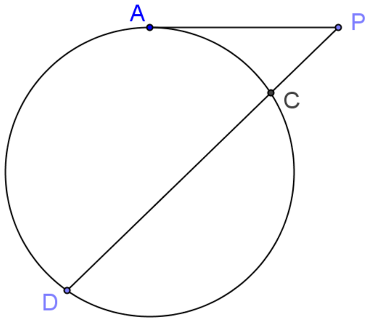


圖 8.2-68

習題 8.2-26

如圖 8.2-69，$\overline{PA}$切圓於 A 點，$\overline{PD}$為割線且交圓於 C、D 兩點。若$\overline{PC}$＝4，$\overline{CD}$＝12，則$\overline{PA}$＝？

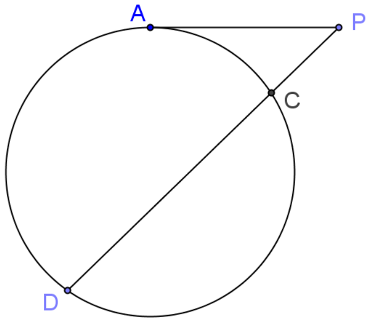


圖 8.2-69

8.3 節　勾股定理(畢氏定理)

本節介紹在平面幾何上一個非常重要的定理：
勾股定理，又稱**畢達哥拉斯**（Pythagoras）**定理**或**畢氏定理**。 傳統上認為是由古希臘的畢達哥拉斯所證明。據說畢達哥拉斯證明了這個定理後，即斬了百頭牛作慶祝，因此又稱「**百牛定理**」。在中國，《周髀算經》記載了勾股定理的公式與證明，相傳是在商代由商高發現，故又有稱之為**商高定理**。

定理 8.3-1 畢氏定理

直角三角形中，兩直角邊的平方和等於斜邊的平方和。

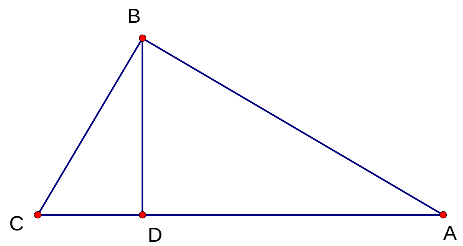


圖 8.3-1

已知：如圖 8.3-1，△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90°，$\overline{BD}\perp\overline{AC}$
求證：$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$

想法：利用直角三角形中直角邊比例中項定理

證明：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}^2=\overline{AC}\times\overline{AD}$ $\overline{BC}^2=\overline{AC}\times\overline{DC}$	已知△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90°，$\overline{BD}\perp\overline{AC}$ & 直角三角形中直角邊比例中項定理
(2) $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}\times\overline{AD}+\overline{AC}\times\overline{DC}$ $=\overline{AC}\times(\overline{AD}+\overline{DC})$ $=\overline{AC}\times\overline{AC}=\overline{AC}^2$	由(1) 等量加法公理 提出公因式$\overline{AC}$ 全量等於分量之和$\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{CD}$
(3) 所以$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$	由(2)

Q. E. D.

例題 8.3-1：

如圖 8.3-2，△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90°，若$\overline{AB}$＝3、$\overline{BC}$＝4，則$\overline{AC}$＝？

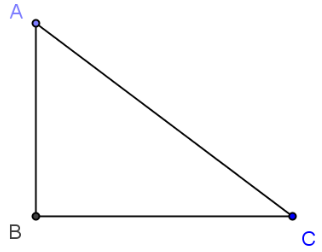


圖 8.3-2

想法：利用畢氏定理解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$	已知△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90° & 畢氏定理
(2) $3^2+4^2=\overline{AC}^2$	由(1) & 已知$\overline{AB}$＝3、$\overline{BC}$＝4
(3) $\overline{AC}=-5$ 或 $\overline{AC}=5$	由(2) 求平方根
(4) 所以$\overline{AC}$＝5	由(3) & $\overline{AC}$為線段長度必大於 0

例題 8.3-2：

如圖 8.3-3，△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90°，若$\overline{AB}$＝5、$\overline{BC}$＝12，則$\overline{AC}$＝？

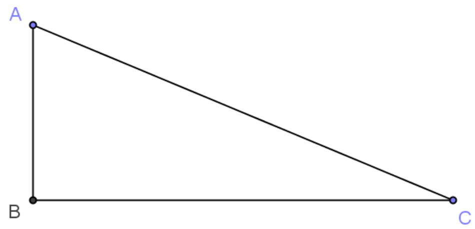


圖 8.3-3

想法：利用畢氏定理解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$	已知△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90° & 畢氏定理
(2) $5^2+12^2=\overline{AC}^2$	由(1) & 已知$\overline{AB}$＝5、$\overline{BC}$＝12
(3) $\overline{AC}=-13$ 或 $\overline{AC}=13$	由(2) 求平方根
(4) 所以$\overline{AC}$＝13	由(3) & $\overline{AC}$為線段長度必大於 0

例題 8.3-3：

如圖 8.3-4，△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90°，若$\overline{AB}$＝7、$\overline{BC}$＝24，則$\overline{AC}$＝？

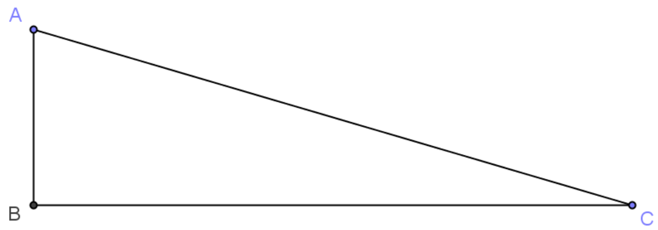


圖 8.3-4

想法：利用畢氏定理解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$	已知△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90° ＆ 畢氏定理
(2) $7^2+24^2=\overline{AC}^2$	由(1) ＆ 已知$\overline{AB}$＝7、$\overline{BC}$＝24
(3) $\overline{AC}$＝－25 或 $\overline{AC}$＝25	由(2) 求平方根
(4) 所以$\overline{AC}$＝25	由(3) ＆ $\overline{AC}$為線段長度必大於 0

例題 8.3-4：

如圖 8.3-5，△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90°，若$\overline{AB}$＝8、$\overline{BC}$＝15，則$\overline{AC}$＝？

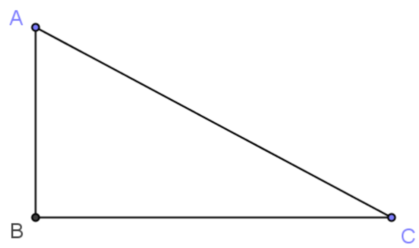


圖 8.3-5

想法：利用畢氏定理解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$	已知△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90° ＆ 畢氏定理
(2) $8^2+15^2=\overline{AC}^2$	由(1) ＆ 已知$\overline{AB}$＝8、$\overline{BC}$＝15
(3) $\overline{AC}$＝－17 或 $\overline{AC}$＝17	由(2) 求平方根
(4) 所以$\overline{AC}$＝17	由(3) ＆ $\overline{AC}$為線段長度必大於 0

例題 8.3-5：

如圖 8.3-6，△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90°，若$\overline{AB}$＝9、$\overline{BC}$＝40，則$\overline{AC}$＝？

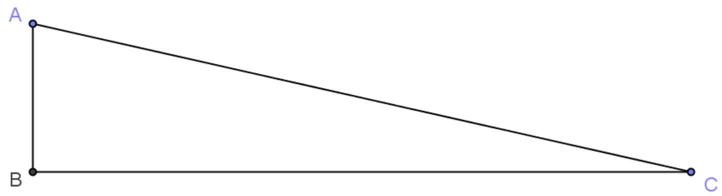


圖 8.3-6

想法：利用畢氏定理解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$	已知△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90° ＆ 畢氏定理
(2) $9^2+40^2=\overline{AC}^2$	由(1) ＆ 已知$\overline{AB}$＝9、$\overline{BC}$＝40
(3) $\overline{AC}=-41$ 或 $\overline{AC}=41$	由(2) 求平方根
(4) 所以$\overline{AC}=41$	由(3) ＆ $\overline{AC}$為線段長度必大於 0

例題 8.3-6：

如圖 8.3-7，△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90°，若$\overline{AB}$＝1、$\overline{BC}$＝1，則$\overline{AC}$＝？

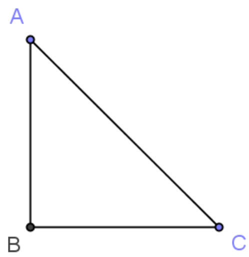


圖 8.3-7

想法：利用畢氏定理解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$	已知△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90° ＆ 畢氏定理
(2) $1^2+1^2=\overline{AC}^2$	由(1) ＆ 已知$\overline{AB}$＝1、$\overline{BC}$＝1
(3) $\overline{AC}=-\sqrt{2}$ 或 $\overline{AC}=\sqrt{2}$	由(2) 求平方根
(4) 所以$\overline{AC}=\sqrt{2}$	由(3) ＆ $\overline{AC}$為線段長度必大於 0

例題 8.3-7：

如圖 8.3-8，△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90°，若$\overline{AB}=1$、$\overline{AC}=2$，則$\overline{BC}=$？

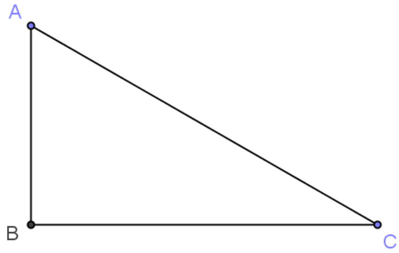


圖 8.3-8

想法：利用畢氏定理解題

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$	已知△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90° ＆ 畢氏定理
(2) $1^2+\overline{BC}^2=2^2$	由(1) ＆ 已知$\overline{AB}=1$、$\overline{AC}=2$
(3) $\overline{BC}=-\sqrt{3}$ 或 $\overline{BC}=\sqrt{3}$	由(2) 求平方根
(4) 所以$\overline{BC}=\sqrt{3}$	由(3) ＆ $\overline{BC}$為線段長度必大於 0

例題 8.3-1～例題 8.3-7 為常見的直角三角形，同學不妨將這些數字熟記。(3、4、5；5、12、13；8、15、17；7、24、25；9、40、41；1、$\sqrt{3}$、2；1、1、$\sqrt{2}$)

定理 8.3-2 畢氏定理的逆定理

在一個三角形的三邊中，若有兩邊的平方和等於第三邊的平方和，則此三角形為直角三角形。

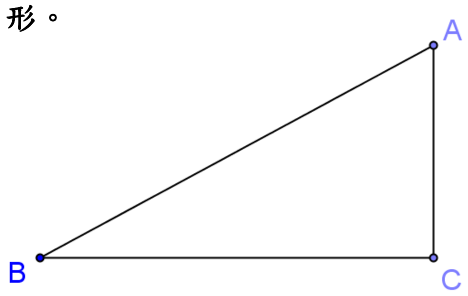


圖 8.3-9

已知：如圖 8.3-9，△ABC 中，$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$

求證：△ABC 為直角三角形

想法：利用畢氏定理和三角形全等定理來證明

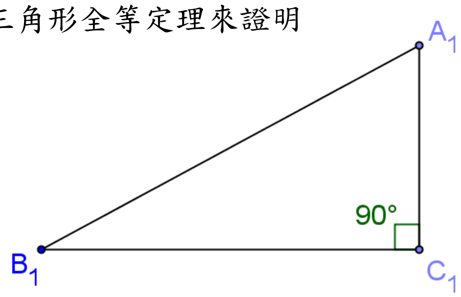


圖 8.3-9(a)

證明：

敘述	理由
(1) 作△$A_1B_1C_1$，如圖 8.3-9(a)所示，其中$\overline{A_1C_1}=\overline{AC}$、$\overline{B_1C_1}=\overline{BC}$ 且∠C_1＝90°	尺規作圖
(2) △$A_1B_1C_1$ 為直角三角形 $\overline{A_1C_1}^2+\overline{B_1C_1}^2=\overline{A_1B_1}^2$	由(1) 作圖 畢氏定理
(3) $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{A_1B_1}^2$	由(2) & (1) $\overline{A_1C_1}=\overline{AC}$、$\overline{B_1C_1}=\overline{BC}$
(4) ∴ $\overline{AB}^2=\overline{A_1B_1}^2$	由(3) & 已知$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$ 遞移律
(5) $\overline{AB}=\overline{A_1B_1}$	由(5) 等式兩邊同開根號
(6) 在△ABC 與△$A_1B_1C_1$ 中 $\overline{AC}=\overline{A_1C_1}$ $\overline{BC}=\overline{B_1C_1}$ $\overline{AB}=\overline{A_1B_1}$	如圖 8.3-9(a)所示 由(1) $\overline{A_1C_1}=\overline{AC}$ 由(1) $\overline{B_1C_1}=\overline{BC}$ 由(5) $\overline{AB}=\overline{A_1B_1}$

(7) ∴ $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$	由(6) ＆ 根據 S.S.S.三角形全等定理
(8) $\angle C = \angle C_1 = 90°$	由(7) 對應角相等 ＆ (1) $\angle C_1 = 90°$
(9) 所以 $\triangle ABC$ 為直角三角形	由(8) $\angle C = 90°$ ＆ 直角三角形定義

Q.E.D.

例題 8.3-8

如圖 8.3-10，△ABC 中，若$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{AC}=3:4:5$，判斷△ABC 為何種三角形？

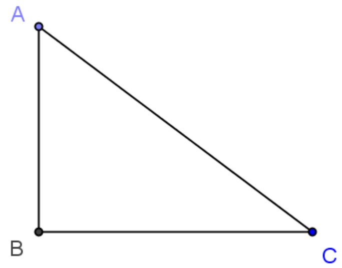


圖 8.3-10

想法：利用畢氏定理的逆定理來判斷

解：

敘述	理由
(1) 假設$\overline{AB}=3r$、$\overline{BC}=4r$、$\overline{AC}=5r$，($r>0$)	已知$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{AC}=3:4:5$ ＆ 假設 ＆ $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$為線段長度必大於 0
(2) $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=(3r)^2+(4r)^2=25r^2$	由(1) 假設$\overline{AB}=3r$、$\overline{BC}=4r$
(3) $\overline{AC}^2=(5r)^2=25r^2$	由(1) 假設$\overline{AC}=5r$
(4) 所以$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$	由(2) ＆ (3) 遞移律
(5) △ABC 為直角三角形， 且$\angle ABC=90°$	由(4) ＆ 根據畢氏定理的逆定理

在例題 8.3-8 中，當 $r=1$ 時，$\overline{AB}=3$、$\overline{BC}=4$、$\overline{AC}=5$；
當 $r=2$ 時，$\overline{AB}=6$、$\overline{BC}=8$、$\overline{AC}=10$；
當 $r=3$ 時，$\overline{AB}=9$、$\overline{BC}=12$、$\overline{AC}=15$。
因此三邊長比為 3：4：5 的直角三角形，其邊長可為 3、4、5；也可以為 6、8、10；也可以為 9、12、15。而且根據三角形(SSS)相似定理，邊長為 3、4、5；6、8、10；9、12、15 的直角三角形全都相似。

例題 8.3-9：　等腰直角三角形三邊長之比為 1：1：$\sqrt{2}$

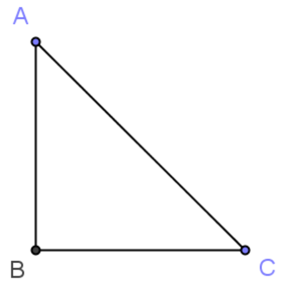


圖 8.3-11

已知：如圖 8.3-11，△ACB 為等腰直角三角形，$\overline{AB}=\overline{BC}$且∠ABC＝90°
求證：$\overline{AB}$：$\overline{BC}$：$\overline{AC}$＝1：1：$\sqrt{2}$ 。

想法：利用畢氏定理證明

證明：

敘述	理由
(1) 假設$\overline{AB}=\overline{BC}$＝r，(r＞0)	已知$\overline{AB}=\overline{BC}$ ＆ 假設 ＆ $\overline{AB}$、$\overline{BC}$為線段長度必大於 0
(2) $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$	已知△ACB 為等腰直角三角形， ∠ABC＝90° ＆ 畢氏定理
(3) $r^2+r^2=\overline{AC}^2$	由(2) ＆ (1) 假設$\overline{AB}=\overline{BC}$＝r
(4) $\overline{AC}=-\sqrt{2}\,r$ 或 $\overline{AC}=\sqrt{2}\,r$	由(3) 求平方根
(5) 所以$\overline{AC}=\sqrt{2}\,r$	由(4) ＆ $\overline{AC}$為線段長度必大於 0
(6) $\overline{AB}$：$\overline{BC}$：$\overline{AC}$ ＝r：r：$\sqrt{2}$ r ＝1：1：$\sqrt{2}$	由(1)假設$\overline{AB}=\overline{BC}$＝r ＆ (5) $\overline{AC}=\sqrt{2}\,r$ ＆ 倍比定理
(7) 所以$\overline{AB}$：$\overline{BC}$：$\overline{AC}$＝1：1：$\sqrt{2}$	由(6)

例題 8.3-10：　30°-90°-60°的直角三角形三邊長之比為 1：2：$\sqrt{3}$

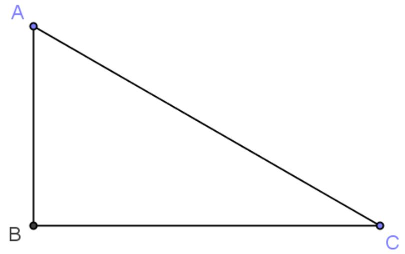


圖 8.3-12

已知：如圖 8.3-12，△CBA 為直角三角形，∠ACB＝30°、∠BAC＝60°、∠ABC＝90°，

求證：$\overline{AB}$：$\overline{AC}$：$\overline{BC}$＝1：2：$\sqrt{3}$ 。

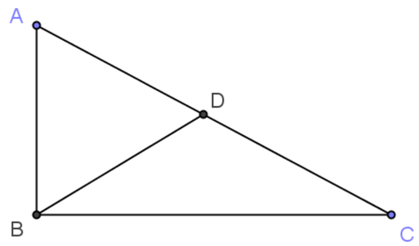


圖 8.3-12(a)

想法：利用畢氏定理證明

證明：

敘述	理由
(1) △CBA 中，$\overline{AC}$＞$\overline{AB}$	已知∠ABC＝90°＞∠ACB＝30° & 三角形之邊角關係，大角對大邊
(2) 在$\overline{AC}$上取$\overline{AD}$＝$\overline{AB}$，如圖 8.3-12(a)	由(1) $\overline{AC}$＞$\overline{AB}$ & 作圖
(3) △ABD 為等腰三角形	由(2) & 兩腰等長為等腰三角形
(4) △ABD 中， ∠ABD＝∠ADB＝(180°－∠BAC)÷2	如圖 8.3-12(a)所示 由(3) & 等腰三角形兩底角相等 & 等腰三角形底角與頂角的關係
(5) ∠ABD＝∠ADB＝(180°－60°)÷2＝60°	由(4) & 已知∠BAC＝60°
(6) ∠ABD＝∠ADB＝∠BAC＝60°	由(5) ∠ABD＝∠ADB＝60° & 已知∠BAC＝60° 遞移律
(7) △ABD 為正三角形	由(6) & 等角三角形為正三角形
(8) $\overline{AB}$＝$\overline{BD}$＝$\overline{AD}$	由(7) & 正三角形三邊等長

(9) $\angle DBC = \angle ABC - \angle ABD$ $= 90° - 60° = 30°$	如圖 8.3-12(a)，全量與分量之關係 已知$\angle ABC = 90°$ ＆ (5) $\angle ABD = 60°$
(10) $\angle DBC = \angle ACB = 30°$	由(9) $\angle DBC = 30°$ ＆ 已知$\angle ACB = 30°$ 遞移律
(11) $\triangle BDC$ 為等腰三角形	由(10) ＆ 兩底角相等為等腰三角形
(12) $\overline{BD} = \overline{CD}$	由(11) ＆ 等腰三角形兩腰等長
(13) 假設$\overline{AB} = \overline{BD} = \overline{AD} = \overline{CD} = r$，($r > 0$)	由(8) ＆ (12) 遞移律 ＆ 假設
(14) $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{CD} = r + r = 2r$	全量等於分量之和 ＆ (13) 假設
(15) $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$	已知$\triangle CBA$ 為直角三角形， $\angle ABC = 90°$ ＆ 畢氏定理
(16) $r^2 + \overline{BC}^2 = (2r)^2$	由(13)、(14) ＆ (15) 代換
(17) $\overline{BC} = -\sqrt{3}\,r$ 或 $\overline{BC} = \sqrt{3}\,r$	由(16) 求平方根
(18) 所以$\overline{BC} = \sqrt{3}\,r$	由(17) ＆ $\overline{BC}$為線段長度必大於 0
(19) $\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC}$ $= r : 2r : \sqrt{3}\,r$ $= 1 : 2 : \sqrt{3}$	由(13) 假設$\overline{AB} = r$ ＆ (14) $\overline{AC} = 2r$ ＆ (18) $\overline{BC} = \sqrt{3}\,r$ ＆ 倍比定律
(20) 所以$\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC} = 1 : 2 : \sqrt{3}$	由(19)

例題 8.3-11：

如圖 8.3-13，△ABC 為一直角三角形，∠A＝90°、∠ADB＝60°、∠C＝30°，若$\overline{AB}$＝4，則$\overline{BD}$＝____，$\overline{DC}$＝____。

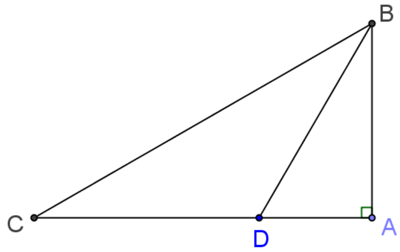


圖 8.3-13

想法：利用 30°-90°-60°的直角三角形邊長比為 1：2：$\sqrt{3}$ 來解題

解：

敘述	理由
(1) △BAD 中， ∠ABD＋∠A＋∠ADB＝180°	如圖 8.3-13 所示 三角形內角和 180°
(2) ∠ABD＝180°－∠A－∠ADB ＝180°－90°－60°＝30°	由(1) 等量減法公理 將已知∠A＝90°、∠ADB＝60° 代入
(3) △BAD 為 30°-90°-60°的直角三角形	由(2) ∠ABD＝30° & 已知∠A＝90°、∠ADB＝60°
(4) $\overline{AD}$：$\overline{BD}$：$\overline{AB}$＝1：2：$\sqrt{3}$	由(3) & 30°-90°-60°的直角三角形邊長比為 1：2：$\sqrt{3}$
(5) $\overline{BD}$：$\overline{AB}$＝2：$\sqrt{3}$	由(4)
(6) $\overline{BD}$：4＝2：$\sqrt{3}$	由(5) & 已知$\overline{AB}$＝4
(7) $\overline{BD}\times\sqrt{3}=4\times2$	由(6) & 外項乘積等於內項乘積
(8) $\overline{BD}=4\times2\div\sqrt{3}=\dfrac{8}{\sqrt{3}}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$	由(7) 等量除法公理 & 分母有理化
(9) △ABC 中， ∠ABC＋∠A＋∠C＝180°	如圖 8.3-13 所示 三角形內角和 180°
(10) ∠ABC＝180°－∠A－∠C ＝180°－90°－30°＝60°	由(9) 等量減法公理 將已知∠A＝90°、∠C＝30° 代入
(11) ∠ABC＝∠DBC＋∠ABD	全量等於分量之和
(12) ∠DBC＝∠ABC－∠ABD ＝60°－30°＝30°	由(11) 等量減法公理 & (10)∠ABC＝60° &(2) ∠ABD＝30°

(13) ∠C＝∠DBC＝30°	由(12) ＆ 已知∠C＝30° 遞移律
(14) △DBC 為等腰三角形	由(13) ＆ 兩底角相等為等腰三角形
(15) $\overline{DC}=\overline{BD}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$	由(14) 等腰三角形兩腰等長 ＆ (8) $\overline{BD}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

例題 8.3-12：

如圖 8.3-14，△ABC、△ACD 為直角三角形，∠B＝∠ACD＝90°且∠CAD＝30°，$\overline{AB}$＝$\overline{BC}$，若$\overline{DC}$＝5，則$\overline{AC}$＝____，$\overline{AB}$＝____。

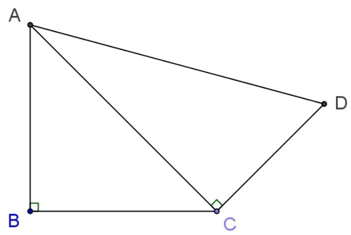


圖 8.3-14

想法：(1) 利用 30°-90°-60°的直角三角形邊長比為 1：2：$\sqrt{3}$

(2) 等腰直角三角形邊長比為 1：1：$\sqrt{2}$

解：

敘述	理由
(1) △ACD 中， ∠ACD＋∠CAD＋∠D＝180°	如圖 8.3-14 所示 三角形內角和 180°
(2) ∠D＝180°－∠ACD－∠CAD ＝180°－90°－30°＝60°	由(1) 等量減法公理 將已知∠ACD＝90°、∠CAD＝30°代入
(3) △ACD 為 30°-90°-60°的直角三角形	由(2) ∠D＝60° & 已知∠ACD＝90°、∠CAD＝30°
(4) $\overline{CD}$：$\overline{AD}$：$\overline{AC}$＝1：2：$\sqrt{3}$	由(3) & 30°-90°-60°的直角三角形邊長比為 1：2：$\sqrt{3}$
(5) $\overline{CD}$：$\overline{AC}$＝1：$\sqrt{3}$	由(4)
(6) 5：$\overline{AC}$＝1：$\sqrt{3}$	由(5) & 已知$\overline{DC}$＝5
(7) $\overline{AC}$＝$5\times\sqrt{3}=5\sqrt{3}$	由(6) & 內項乘積等於外項乘積
(8) △ABC 為等腰直角三角形	已知∠B＝90°，$\overline{AB}$＝$\overline{BC}$
(9) $\overline{AB}$：$\overline{BC}$：$\overline{AC}$＝1：1：$\sqrt{2}$	由(8) & 等腰直角三角形邊長比為 1：1：$\sqrt{2}$
(10) $\overline{AB}$：$\overline{AC}$＝1：$\sqrt{2}$	由(9)
(11) $\overline{AB}$：$5\sqrt{3}=1$：$\sqrt{2}$	由(10) & (7) $\overline{AC}$＝$5\sqrt{3}$ 已證
(12) $\overline{AB}\times\sqrt{2}=5\sqrt{3}\times 1$	由(11) & 外項乘積等於內項乘積
(13) $\overline{AB}=5\sqrt{3}\times 1\div\sqrt{2}=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$	由(12)等量除法公理 & 分母有理化

例題 8.3-13：

如圖 8.3-15，$\overline{AE}\perp\overline{BC}$，$\angle$B＝30°，$\angle$ADE＝60°，$\angle$C＝45°，
則$\overline{BD}$：$\overline{DE}$：$\overline{EC}$＝______________。

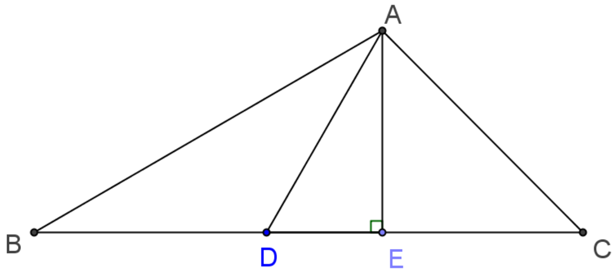


圖 8.3-15

想法：(1) 利用 30°-90°-60°的直角三角形邊長比為 1：2：$\sqrt{3}$

(2) 等腰直角三角形邊長比為 1：1：$\sqrt{2}$

解：

敘述	理由
(1) $\angle$AEB＝$\angle$AEC＝90°	已知$\overline{AE}\perp\overline{BC}$
(2) △BEA 中， $\angle$B＋$\angle$AEB＋$\angle$BAE＝180°	如圖 8.3-15 所示 三角形內角和 180°
(3) $\angle$BAE＝180°－$\angle$AEB－$\angle$B ＝180°－90°－30°＝60°	由(1) 等量減法公理 將已知$\angle$B＝30° ＆ (1)$\angle$AEB＝90° 代入
(4) △BEA 為 30°-90°-60°的直角三角形	由(1) $\angle$AEB＝90°、(3) $\angle$BAE＝60° ＆ 已知$\angle$B＝30°
(5) $\overline{AE}$：$\overline{AB}$：$\overline{BE}$＝1：2：$\sqrt{3}$	由(4) ＆ 30°-90°-60°的直角三角形 邊長比為 1：2：$\sqrt{3}$
(6) $\overline{AE}$：$\overline{BE}$＝1：$\sqrt{3}$	由(5)
(7) $\overline{BE}$＝$\overline{AE}\times\sqrt{3}=\sqrt{3}\,\overline{AE}$	由(6) ＆ 內項乘積等於外項乘積
(8) △AED 中， $\angle$DAE＋$\angle$ADE＋$\angle$AED＝180°	如圖 8.3-15 所示 三角形內角和 180°
(9) $\angle$DAE＝180°－$\angle$ADE－$\angle$AED ＝180°－60°－90° ＝30°	由(8) 等量減法公理 將已知$\angle$ADE＝60° ＆ (1) $\angle$AEB＝90° 代入
(10) △AED 為 30°-90°-60°的直角三角形	由(9) $\angle$DAE＝30° ＆ 已知$\angle$ADE＝60° ＆ (1)$\angle$AEB＝90°

(11) $\overline{DE}：\overline{AD}：\overline{AE}＝1：2：\sqrt{3}$	由(10) & 30°-90°-60°的直角三角形邊長比為 $1：2：\sqrt{3}$
(12) $\overline{DE}：\overline{AE}＝1：\sqrt{3}$	由(11)
(13) $\overline{DE}\times\sqrt{3}＝\overline{AE}\times 1$	由(12) & 外項乘積等於內項乘積
(14) $\overline{DE}＝\overline{AE}\times 1\div\sqrt{3}＝\dfrac{\sqrt{3}}{3}\overline{AE}$	由(13) 等量除法公理 & 分母有理化
(15) $\overline{BE}＝\overline{BD}＋\overline{DE}$	如圖 8.3-15，全量等於分量之和
(16) $\overline{BD}＝\overline{BE}－\overline{DE}＝\sqrt{3}\,\overline{AE}－\dfrac{\sqrt{3}}{3}\overline{AE}$	將(7) & (14) 代入(15)得
(17) 所以$\overline{BD}＝\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\overline{AE}$	由(16)
(18) △ACE 中， ∠C＋∠AEC＋∠CAE＝180°	如圖 8.3-15 所示 三角形內角和 180°
(19) ∠CAE＝180°－∠C－∠AEC ＝180°－45°－90° ＝45°	由(18) 等量減法公理 已知∠C＝45° & (1) ∠AEC＝90°
(20) △ACE 為等腰直角三角形	由(19) ∠CAE＝45°、(1) ∠AEC＝90° & 已知∠C＝45°
(21) $\overline{EC}＝\overline{AE}$	由(20) & 等腰直角三角形兩腰等長
(22) 所以$\overline{BD}：\overline{DE}：\overline{EC}$ $＝\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\overline{AE}：\dfrac{\sqrt{3}}{3}\overline{AE}：\overline{AE}$ $＝2：1：\sqrt{3}$	由(17) $\overline{BD}＝\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\overline{AE}$、(21) $\overline{EC}＝\overline{AE}$ & (14) $\overline{DE}＝\dfrac{\sqrt{3}}{3}\overline{AE}$ 倍比定理
(23) $\overline{BD}：\overline{DE}：\overline{EC}＝2：1：\sqrt{3}$	由(22)

接下來，讓我們利用等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊的性質與畢氏定理來解例題 8.3-14。

例題 8.3-14：

如圖 8.3-16，等腰三角形 ABC 中，$\overline{AC}=\overline{AB}$，若$\overline{BC}=10$，$\overline{AD}=12$，且$\overline{AD}$平分∠BAC，則$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=$？

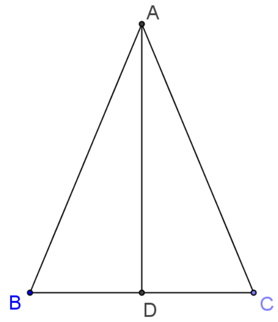


圖 8.3-16

想法：(1) 利用已知△ABC 為等腰三角形、$\overline{AD}$平分∠BAC ＆ 等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊，可得到$\overline{AD}\perp\overline{BC}$且$\overline{BD}=\overline{CD}$；

(2) 利用$\overline{AD}\perp\overline{BC}$可得知△ABD 為直角三角形；

(3) 利用△ABD 為直角三角形 ＆ 畢氏定理，可求得$\overline{AB}$之值；

(4) 利用$\overline{AB}$之值 ＆ 已知$\overline{AC}=\overline{AB}$、$\overline{BC}=10$，即可得到$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AD}\perp\overline{BC}$且$\overline{BD}=\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{BC}$	已知△ABC 為等腰三角形、$\overline{AD}$平分∠BAC ＆ 等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊
(2) ∠ADB＝90°， △ABD 為直角三角形	由(1) $\overline{AD}\perp\overline{BC}$ 直角三角形定義
(3) $\overline{BD}=\overline{CD}=\frac{1}{2}\times10=5$	由(1) $\overline{BD}=\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{BC}$ ＆ 已知$\overline{BC}=10$
(4) △ABD 中，$\overline{AB}^2=\overline{BD}^2+\overline{AD}^2$	由(2) △ABD 為直角三角形 ＆ 畢氏定理
(5) $\overline{AB}^2=5^2+12^2$	由(4) ＆ 已知$\overline{AD}=12$ ＆ (3) $\overline{BD}=5$
(6) $\overline{AB}=-13$ 或 $\overline{AB}=13$	由(5) 求平方根
(7) 所以$\overline{AB}=13$	由(6) ＆ $\overline{AB}$為線段長度必大於 0
(8) $\overline{AC}=\overline{AB}=13$	已知$\overline{AC}=\overline{AB}$ ＆ (7) $\overline{AB}=13$
(9) 所以$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$ $=13+10+13=36$	由(8) $\overline{AC}=\overline{AB}=13$ ＆ 已知$\overline{BC}=10$ 加法

接下來，讓我們運用第四章所提到的三角形的內心與外心的性質，結合畢氏定理，再搭配第七章中例題 7.3-11 的結論：直角三角形內切圓半徑＝(兩股和減去斜邊)÷2。來解以下例題 8.3-15~例題 8.3-17。

例題 8.3-15：

如圖 8.3-17，圓 I 為直角三角形 ABC 的內切圓，D、E、F 為切點，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$。若 $\overline{AB}$＝8 公分，$\overline{BC}$＝6 公分，求圓 I 的半徑。

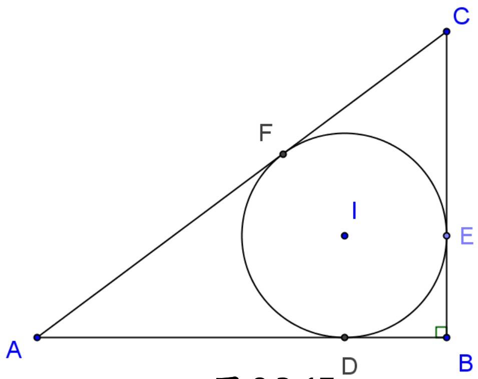


圖 8.3-17

想法：(1) 先利用畢氏定理求出直角三角形的斜邊長

(2) 再利用第七章例題 7.3-11 的結論：直角三角形內接圓半徑＝(兩股和減去斜邊)÷2，求出直角三角形內切圓半徑

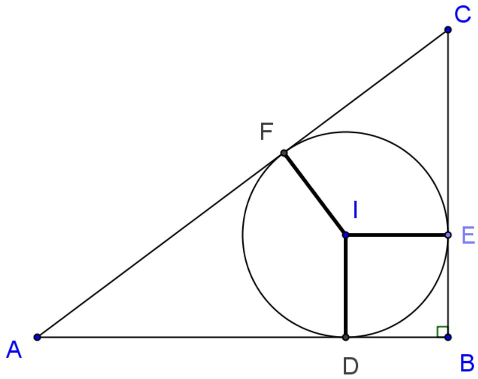


圖 8.3-17(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{ID}$、$\overline{IE}$、$\overline{IF}$，如圖 8.3-17(a) 則$\overline{ID}$＝$\overline{IE}$＝$\overline{IF}$為圓 I 半徑	作圖 & 已知圓 I 為直角三角形 ABC 的內切圓，D、E、F 為切點
(2) 直角三角形 ABC 中 $\overline{AC}^2$＝$\overline{AB}^2$＋$\overline{BC}^2$ ＝(8 公分)^2＋(6 公分)^2 ＝64 平方公分＋36 平方公分 ＝100 平方公分	畢氏定理 & 已知直角三角形 ABC 中，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$ & $\overline{AB}$＝8 公分，$\overline{BC}$＝6 公分

(3) $\overline{AC}$＝10 公分 或 $\overline{AC}$＝－10 公分	由(1) 求平方根
(4) $\overline{AC}$＝10 公分	由(3) & $\overline{AC}$為線段長度必大於 0
(5) 圓 I 半徑$\overline{ID}$＝$\overline{IE}$＝$\overline{IF}$ $=\dfrac{\overline{AB}+\overline{BC}-\overline{AC}}{2}$ $=\dfrac{8\text{公分}+6\text{公分}-10\text{公分}}{2}$ ＝2 公分	由(1) $\overline{ID}$＝$\overline{IE}$＝$\overline{IF}$為圓 I 半徑 & 利用第七章例題 7.3-11 的結論：直角三角形內接圓半徑＝(兩股和減去斜邊)÷2 & 已知圓 I 為直角三角形 ABC 的內切圓，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$ & $\overline{AB}$＝8 公分，$\overline{BC}$＝6 公分 & 由(4) $\overline{AC}$＝10 公分 已證

例題 8.3-16：

如圖 8.3-18，已知 I 為△ABC 的內心，若∠BIC＝135°，且$\overline{AB}$＝5 公分，$\overline{AC}$＝12 公分，試求△ABC 內切圓的半徑。

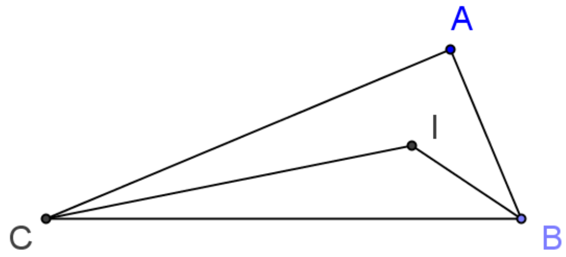


圖 8.3-18

想法： (1) 利用例題 4.3-2 結論：若 I 點為△ABC 的內心，則∠BIC＝90°＋$\frac{1}{2}$∠BAC

(2) 利用畢氏定理求出直角三角形的第三邊

(3) 利用第七章例題 7.3-11 的結論：直角三角形內接圓半徑＝(兩股和減去斜邊)÷2，求出直角三角形內切圓半徑

解：

敘述	理由
(1) ∠BIC＝90°＋$\frac{1}{2}$∠BAC	已知 I 點為△ABC 的內心 & 利用例題 4.3-2 結論
(2) 135°＝90°＋$\frac{1}{2}$∠BAC	由(1) & 已知∠BIC＝135°
(3) ∠BAC＝(135°－90°)x2＝90°	由(2) 求∠BAC 之值
(4) △ABC 為直角三角形 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$	由(3) & 直角三角形定義 & 畢氏定理
(5) $\overline{BC}^2$＝(5 公分)^2＋(12 公分)^2 ＝25 平方公分＋144 平方公分 ＝169 平方公分	由(4) & 已知$\overline{AB}$＝5 公分，$\overline{AC}$＝12 公分
(6) $\overline{BC}$＝13 公分 或 $\overline{BC}$＝－13 公分	由(5) 求平方根
(7) $\overline{BC}$＝13 公分	由(6) & $\overline{BC}$為線段長度必大於 0
(8) △ABC 內切圓半徑 ＝$\frac{\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC}}{2}$ ＝$\frac{5公分+12公分-13公分}{2}$ ＝2 公分	已知 I 為△ABC 的內心 & 利用第七章例題 7.3-11 的結論 & 已知$\overline{AB}$＝5 公分，$\overline{AC}$＝12 公分 & (7) $\overline{BC}$＝13 公分 已證

例題 8.3-17：

有一個直角三角形，其外心到三頂點的距離和為 39 公分，若有一股長為 10 公分，則：

(1) 此直角三角形外接圓半徑為何？

(2) 此三角形的另一股長為何？

(3) 此直角三角形內切圓半徑為何？

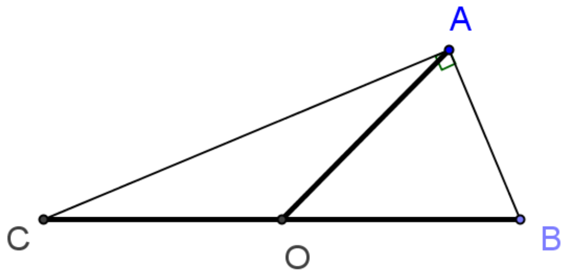


圖 8.3-19

想法：(1) 利用例題 4.3-3 結論：直角三角形斜邊中點為此三角形的外心。在圖形中找出直角三角形的外心

(2) 利用三角形的外心到三頂點等距離的性質，求出斜邊長

(3) 利用畢氏定理求出另一股長

(4) 利用第七章例題 7.3-11 的結論：直角三角形內接圓半徑＝(兩股和減去斜邊)÷2，，求出直角三角形內切圓半徑

解：

敘述	理由
(1) 依題目敘述畫出圖形，如圖 8.3-19，其中△ABC 為直角三角形，∠BAC＝90°，$\overline{AB}$＝10 公分，O 點為其外接圓圓心，$\overline{OA}$＝$\overline{OB}$＝$\overline{OC}$為此直角三角形 ABC 的外接圓半徑	作圖 & 已知有一股長為 10 公分 & 例題 4.3-3 結論：直角三角形斜邊中點為此三角形的外心 & 三角形的外心到三頂點等距離
(2) $\overline{OA}$＋$\overline{OB}$＋$\overline{OC}$＝39 公分	由(1) O 點為△ABC 外接圓圓心 & 已知外心到三頂點的距離和為 39 公分
(3) $\overline{OC}$＋$\overline{OC}$＋$\overline{OC}$＝39 公分	由(2) & (1) $\overline{OA}$＝$\overline{OB}$＝$\overline{OC}$
(4) 外接圓半徑$\overline{OC}$＝(39 公分)÷3＝13 公分	由(3) 求$\overline{OC}$之值
(5) $\overline{OA}$＝$\overline{OB}$＝$\overline{OC}$＝13 公分	由(1) $\overline{OA}$＝$\overline{OB}$＝$\overline{OC}$ & (4) $\overline{OC}$＝13 公分 遞移律
(6) $\overline{BC}$＝$\overline{OB}$＋$\overline{OC}$ ＝13 公分＋13 公分＝26 公分	全量等於分量之和 & (5) $\overline{OB}$＝$\overline{OC}$＝13 公分
(7) △ABC 中，$\overline{AB}^2$＋$\overline{AC}^2$＝$\overline{BC}^2$	已知△ABC 為直角三角形 & 畢氏定理

(8) $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2-\overline{AB}^2$ $=(26\text{ 公分})^2-(10\text{ 公分})^2$ $=576$ 平方公分	由(7) 等量減法公理 & (1) $\overline{AB}=10$ 公分 & (6) $\overline{BC}=26$ 公分
(9) $\overline{AC}=24$ 公分 或 $\overline{AC}=-24$ 公分	由(8) 求平方根
(10) 另一股長$\overline{AC}=24$ 公分	由(9) & $\overline{AC}$為線段長度必大於 0
(11) 直角三角形內切圓半徑 $=\dfrac{\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC}}{2}$ $=\dfrac{10\text{公分}+24\text{公分}-26\text{公分}}{2}$ $=4$ 公分	利用第七章例題7.3-11的結論求直角三角形內切圓半徑 & (1) $\overline{AB}=10$ 公分 & (6) $\overline{BC}=26$ 公分 & (10) $\overline{AC}=24$ 公分 已證

各位同學，在以上的例題當中，我們將畢氏定理應用在三角形上，接下來，讓我們將第六章所學的四邊形的一些性質，搭配上畢氏定理，來解決以下的例題 8.3-18~例題 8.3-25。

例題 8.3-18：

如圖 8.3-20，正方形 ABCD 的邊長為 10，求其對角線$\overline{AC}$之值。

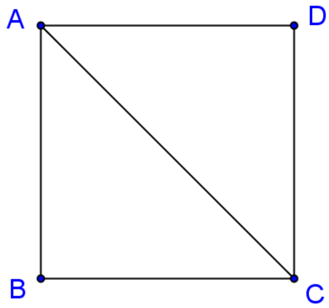


圖 8.3-20

想法：利用畢氏定理解題

解：

敘述	理由
(1) $\angle ABC = 90°$ & $\overline{AB} = \overline{BC} = 10$	已知 ABCD 為正方形 & 邊長為 10
(2) $\triangle ABC$ 為直角三角形	由(1) $\angle ABC = 90°$ & 直角三角形定義
(3) $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$	由(2) & 畢氏定理
(4) $10^2 + 10^2 = \overline{AC}^2$	由(3) & (1) $\overline{AB} = \overline{BC} = 10$
(5) $\overline{AC} = -10\sqrt{2}$ 或 $\overline{AC} = 10\sqrt{2}$	由(4) 求平方根
(6) 所以$\overline{AC} = 10\sqrt{2}$	由(5) & $\overline{AC}$為線段長度必大於 0

例題 8.3-19：

如圖 8.3-21，長方形 ABCD 中，對角線$\overline{AC}$、$\overline{BD}$相交於 O 點，且$\overline{AB}$＝5，$\overline{BC}$＝12，求$\overline{OA}$。

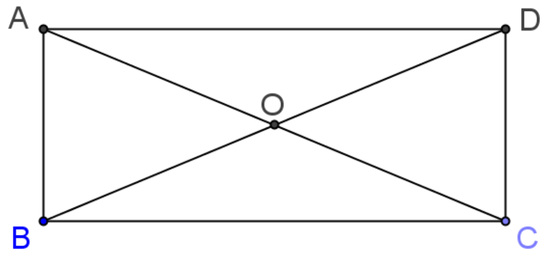


圖 8.3-21

想法：(1) 長方形對角線互相平分

(2) 畢氏定理

解：

敘述	理由
(1) $\angle ABC = 90°$	已知 ABCD 為長方形 & 長方形四個角皆為 90°
(2) $\triangle ABC$ 為直角三角形	由(1) & 直角三角形定義
(3) $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$	由(2) & 畢氏定理
(4) $5^2+12^2=\overline{AC}^2$	由(3) & 已知$\overline{AB}$＝5、$\overline{BC}$＝12
(5) $\overline{AC}=-13$ 或 $\overline{AC}=13$	由(4) 求平方根
(6) 所以$\overline{AC}=13$	由(5) & $\overline{AC}$為線段長度必大於 0
(7) $\overline{OA}=\overline{OC}=\frac{1}{2}\overline{AC}$	已知 ABCD 為長方形，對角線$\overline{AC}$、$\overline{BD}$相交於 O 點 & 長方形對角線互相平分
(8) 所以$\overline{OA}=\frac{1}{2}\times 13=6.5$	將(6) $\overline{AC}=13$ 代入(7) $\overline{OA}=\frac{1}{2}\overline{AC}$

例題 8.3-20：

如圖 8.3-22，長方形 ABCD 中，對角線$\overline{AC}$、$\overline{BD}$相交於 O 點，且$\overline{AB}=12$，$\overline{BC}=16$，求$\overline{BD}$。

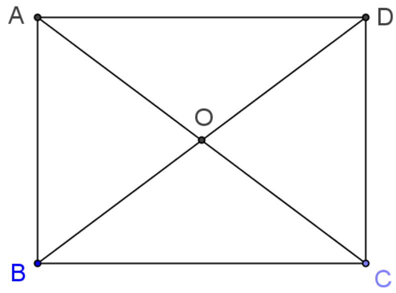


圖 8.3-22

想法：(1) 長方形對角線等長

(2) 畢氏定理

解：

敘述	理由
(1) $\angle ABC=90°$	已知 ABCD 為長方形 & 長方形四個角皆為 90°
(2) △ABC 為直角三角形	由(1) & 直角三角形定義
(3) $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$	由(2) & 畢氏定理
(4) $12^2+16^2=\overline{AC}^2$	由(3) & 已知$\overline{AB}=12$、$\overline{BC}=16$
(5) $\overline{AC}=-20$ 或 $\overline{AC}=20$	由(4) 求平方根
(6) 所以$\overline{AC}=20$	由(5) & $\overline{AC}$為線段長度必大於 0
(7) $\overline{BD}=\overline{AC}=20$	已知 ABCD 為長方形，$\overline{AC}$、$\overline{BD}$為對角線 & 長方形對角線等長 & 由(6) $\overline{AC}=20$ 已證

例題 8.3-21：

如圖 8.3-23，箏形 ABCD 中，對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$的交點為 O，且$\overline{AO}=3$，$\overline{BD}=8$，求$\overline{AB}$。

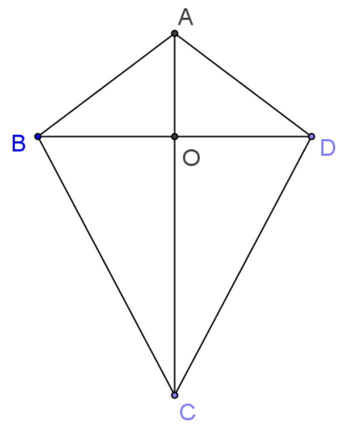


圖 8.3-23

想法：(1) 利用$\overline{AC}$垂直平分$\overline{BD}$，可得知△AOB 為直角三角形 & $\overline{OB}$之值

(2) 利用△AOB 為直角三角形 & 畢氏定理，可求得$\overline{AB}$之值

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AC}\perp\overline{BD}$ & $\overline{OB}=\overline{OD}=\frac{1}{2}\overline{BD}$	已知 ABCD 為箏形 & 對角線$\overline{AC}$垂直平分$\overline{BD}$
(2) $\overline{OB}=\overline{OD}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times 8=4$	由(1) $\overline{OB}=\overline{OD}=\frac{1}{2}\overline{BD}$ & 已知$\overline{BD}=8$
(3) △ABO 為直角三角形	由(1) $\overline{AC}\perp\overline{BD}$
(4) $\overline{AO}^2+\overline{BO}^2=\overline{AB}^2$	由(3) & 畢氏定理
(5) $3^2+4^2=\overline{AB}^2$	由(4) & 已知$\overline{AO}=3$ & (2) $\overline{OB}=4$
(6) $\overline{AB}=-5$ 或 $\overline{AB}=5$	由(5) 求平方根
(7) 所以$\overline{AB}=5$	由(6) & $\overline{AB}$為線段長度必大於 0

例題 8.3-22：

如圖 8.3-24，箏形 ABCD 中，對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$的交點為 O，且$\overline{AB}$＝13，$\overline{AO}$＝5，求$\overline{BD}$。

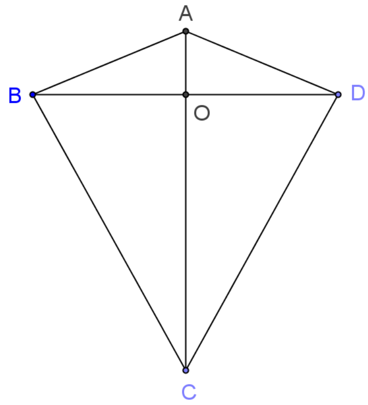


圖 8.3-24

想法：(1) 利用$\overline{AC}$垂直平分$\overline{BD}$，可得知△AOB 為直角三角形 ＆ $\overline{BD}$＝2$\overline{OB}$；

(2) 利用△AOB 為直角三角形 ＆ 畢氏定理，可求得$\overline{OB}$之值。

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ＆ $\overline{OB}=\overline{OD}=\frac{1}{2}\overline{BD}$	已知 ABCD 為箏形 ＆ 對角線$\overline{AC}$垂直平分$\overline{BD}$
(2) △ABO 為直角三角形	由(1) $\overline{AC} \perp \overline{BD}$
(3) $\overline{AO}^2+\overline{OB}^2=\overline{AB}^2$	由(2) ＆ 畢氏定理
(4) $5^2+\overline{OB}^2=13^2$	由(3) ＆ 已知$\overline{AB}$＝13，$\overline{AO}$＝5
(5) $\overline{OB}=-12$ 或 $\overline{OB}=12$	由(4) 求平方根
(6) 所以$\overline{OB}$＝12	由(5) ＆ $\overline{OB}$為線段長度必大於 0
(7) $12=\frac{1}{2}\overline{BD}$	由(1) $\overline{OB}=\frac{1}{2}\overline{BD}$ ＆ (6) $\overline{OB}$＝12
(8) $\overline{BD}=2\times12=24$	由(7) 等式兩邊同乘以 2

例題 8.3-23：

如圖 8.3-25，菱形 ABCD 中，已知$\overline{AC}$＝6，$\overline{BD}$＝8，求$\overline{AB}$之值。

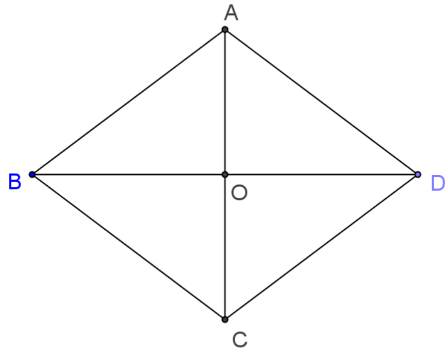


圖 8.3-25

想法：利用菱形之對角線互相垂直平分 ＆ 畢氏定理，可求得$\overline{AB}$之值。

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AC}\perp\overline{BD}$ ＆ $\overline{OB}=\overline{OD}=\frac{1}{2}\overline{BD}$、$\overline{OA}=\overline{OC}=\frac{1}{2}\overline{AC}$	已知 ABCD 為菱形 ＆ 菱形之對角線互相垂直平分
(2) $\overline{OB}=\frac{1}{2}\times 8=4$、$\overline{OA}=\frac{1}{2}\times 6=3$	由(1) $\overline{OB}=\frac{1}{2}\overline{BD}$、$\overline{OA}=\frac{1}{2}\overline{AC}$ ＆ 已知$\overline{AC}=6$，$\overline{BD}=8$
(3) △ABO 為直角三角形	由(1) $\overline{AC}\perp\overline{BD}$
(4) $\overline{AO}^2+\overline{BO}^2=\overline{AB}^2$	由(3) ＆ 畢氏定理
(5) $3^2+4^2=\overline{AB}^2$	由(4) ＆ (2) $\overline{OB}=4$、$\overline{OA}=3$
(6) $\overline{AB}=-5$ 或 $\overline{AB}=5$	由(5) 求平方根
(7) 所以$\overline{AB}=5$	由(6) ＆ $\overline{AB}$為線段長度必大於 0

例題 8.3-24：

如圖 8.3-26，已知四邊形 ABCD 為正方形，且∠AEB＝∠BFC，

(1) 求證：$\overline{AE}=\overline{BF}$

(2) 若正方形 ABCD 的邊長為 12，$\overline{BE}=5$，則$\overline{BF}=$_____。

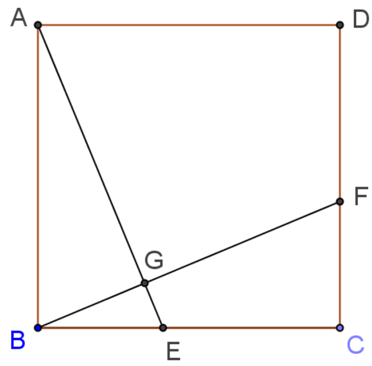


圖 8.3-26

想法：(1) 利用 A.A.S.三角形全等定理來證明△ABE ≅ △BCF，可得$\overline{AE}=\overline{BF}$；

(2) 利用畢氏定理來求$\overline{BF}$之值。

證明：

敘述	理由
(1) △ABE 與△BCF 中	如圖 8.3-26 所示
∠ABE＝∠BCF＝90°	已知四邊形 ABCD 為正方形
∠AEB＝∠BFC	已知
$\overline{AB}=\overline{BC}$	已知四邊形 ABCD 為正方形
(2) △ABE ≅ △BCF	由(1) & 根據 A.A.S.三角形全等定理
(3) $\overline{AE}=\overline{BF}$	由(2) & 對應邊相等
(4) △ABE 為直角三角形	已知四邊形 ABCD 為正方形，∠ABE＝90°
(5) $\overline{AB}^2+\overline{BE}^2=\overline{AE}^2$	由(4) & 畢氏定理
(6) $12^2+5^2=\overline{AE}^2$	由(5) & 已知$\overline{BE}=5$、正方形 ABCD 的邊長$\overline{AB}=12$
(7) $\overline{AE}=-13$ 或 $\overline{AE}=13$	由(6) 求平方根
(8) 所以$\overline{AE}=13$	由(7) & $\overline{AE}$為線段長度必大於 0
(9) $\overline{BF}=\overline{AE}=13$	由(3) $\overline{AE}=\overline{BF}$ & (8) $\overline{AE}=13$

例題 8.3-25：

如圖 8.3-27，四邊形 ABCD 中，$\overline{AD}\parallel\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{CD}$，$\overline{AH}\perp\overline{BC}$，且$\overline{AH}=8$，$\overline{BC}=20$，$\overline{AD}=10$，求$\overline{BD}$。

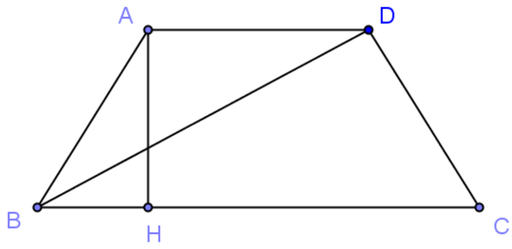


圖 8.3-27

想法：(1) 作一輔助線$\overline{DE}\perp\overline{BC}$，使得△ABH ≅ △DCE，得到$\overline{AH}=\overline{DE}$、$\overline{BH}=\overline{CE}$；

(2) 在△BDE 中，利用畢氏定理求得$\overline{BD}$之值。

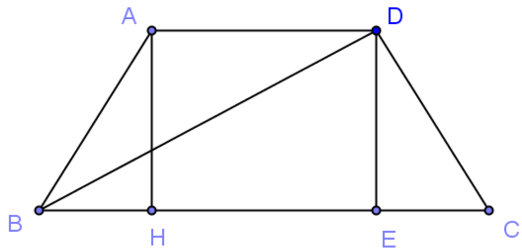


圖 8.3-27(a)

解：

敘述	理由
(1) 作$\overline{DE}\perp\overline{BC}$，則∠DEC＝90°，如圖 8.3-27(a)所示	作圖
(2) 四邊形 ABCD 為等腰梯形	已知四邊形 ABCD 中，$\overline{AD}\parallel\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{CD}$
(3) 在△ABH 與△DCE 中， ∠AHB＝∠DEC＝90° ∠ABH＝∠DCE $\overline{AB}=\overline{DC}$	如圖 8.3-27(a)所示 已知$\overline{AH}\perp\overline{BC}$ & 由(1) $\overline{DE}\perp\overline{BC}$ 作圖 由(2) 等腰梯形兩底角相等 已知$\overline{AB}=\overline{CD}$
(4) △ABH ≅ △DCE	由(3) & 根據 A.A.S.三角形全等定理
(5) $\overline{AH}=\overline{DE}=8$、$\overline{BH}=\overline{CE}$	由(4) 對應邊相等 & 已知$\overline{AH}=8$
(6) $\overline{AH}\parallel\overline{DE}$	已知$\overline{AH}\perp\overline{BC}$ & 由(1) $\overline{DE}\perp\overline{BC}$ & 垂直於同一線段的兩線段互相平行
(7) ADEH 為平行四邊形	已知$\overline{AD}\parallel\overline{BC}$ & (6) $\overline{AH}\parallel\overline{DE}$ & 平行四邊形定義

(8) $\overline{HE}=\overline{AD}=10$	由(7) 平行四邊形對邊相等 ＆ 已知$\overline{AD}=10$
(9) $\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{HE}+\overline{CE}$	全量等於分量之和
(10) $20=\overline{BH}+10+\overline{BH}$	由(9) ＆ 已知$\overline{BC}=20$ ＆ (5) $\overline{BH}=\overline{CE}$ ＆ (8) $\overline{HE}=10$
(11) $\overline{BH}=5$	由(10) 解一元一次方程式
(12) $\overline{BE}=\overline{BH}+\overline{HE}=5+10=15$	全量等於分量之和 ＆ (8) $\overline{HE}=10$ ＆ (11) $\overline{BH}=5$
(13) △BDE 為直角三角形， $\overline{DE}^2+\overline{BE}^2=\overline{BD}^2$	由(1) $\overline{DE}\perp\overline{BC}$ 作圖 畢氏定理
(14) $8^2+15^2=\overline{BD}^2$	由(13) ＆ (5) $\overline{DE}=8$ ＆ (12) $\overline{BE}=15$
(15) $\overline{BD}=-17$ 或 $\overline{BD}=17$	由(14)求平方根
(16) 所以$\overline{BD}=17$	由(15) ＆ $\overline{BD}$為線段長度必大於 0

接下來，我們將畢氏定理與第七章所學到的圓的一些性質，來解決以下的例題 8.3-26~例題 8.3-47。

例題 8.3-26：

如圖 8.3-28，四邊形 OABC 中，$\angle A = \angle CBO = 90°$，$\overline{AB}=\overline{BC}=8$，$\overline{AO}=6$，回答下列問題：

(1) 試求$\overline{CO}$。

(2) 若以 O 為圓心，10 為半徑畫圓，則 A、B、C 三點會分別落在圓內、圓上或圓外？

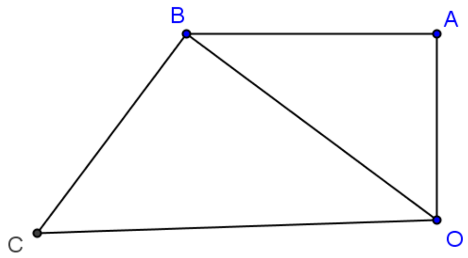


圖 8.3-28

想法：(1) 利用畢氏定理求出$\overline{CO}$之值；

(2) 再利用點與圓心的距離來判斷點與圓的關係：

1. 點與圓心的距離小於 r，則此點位於圓內；
2. 點與圓心的距離等於 r，則此點位於圓周上；
3. 點與圓心的距離大於 r，則此點位於圓外；

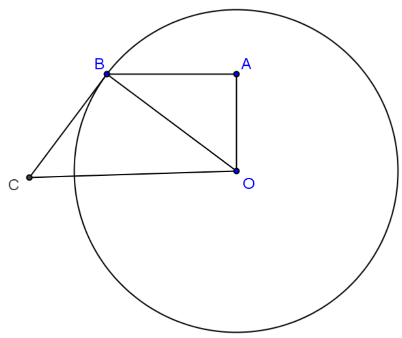


圖 8.3-28(a)

解：

敘述	理由
(1) △ABO 為直角三角形， $\overline{AB}^2+\overline{AO}^2=\overline{BO}^2$	已知$\angle A=90°$ 畢氏定理
(2) $8^2+6^2=\overline{BO}^2$	由(1) & 已知$\overline{AB}=8$，$\overline{AO}=6$

(3) $\overline{BO}=-10$ 或 $\overline{BO}=10$	由(2) 求平方根
(4) 所以$\overline{BO}=10$	由(3) & $\overline{BO}$為線段長度必大於 0
(5) △BCO 為直角三角形， $\overline{BC}^2+\overline{BO}^2=\overline{CO}^2$	已知∠CBO＝90° 畢氏定理
(6) $8^2+10^2=\overline{CO}^2$	由(5) & 已知$\overline{BC}=8$ & 由(4) $\overline{BO}=10$
(7) $\overline{CO}=-2\sqrt{41}$ 或 $\overline{CO}=2\sqrt{41}$	由(6) 求平方根
(8) 所以$\overline{CO}=2\sqrt{41}$	由(7) & $\overline{CO}$為線段長度必大於 0
(9) 以 O 為圓心，10 為半徑畫圓， 如圖 8.3-28(a)所示， 因$\overline{AO}=6<10$，故 A 點在圓內； 因$\overline{BO}=10$，故 B 點在圓周上； 因$\overline{CO}=2\sqrt{41}>10$，故 C 點在圓外。	作圖 點與圓心的距離小於 r，則此點位於圓內 點與圓心的距離等於 r，則此點位於圓周上 點與圓心的距離大於 r，則此點位於圓外

例題 8.3-27：

如圖 8.3-29，矩形 ABCD 中，$\overline{AB}=3$，$\overline{AD}=4$。以 A 為圓心，r 為半徑畫圓，使得 B、C、D 中的一點在圓外，兩點在圓內，求 r 的範圍。

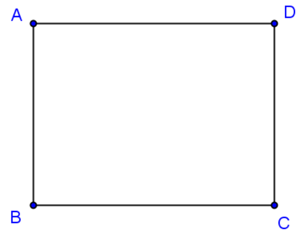


圖 8.3-29

想法：(1) 利用畢氏定理求出$\overline{AC}$之值；

(2) 再利用點與圓心的距離來判斷點與圓的關係：

1. 點與圓心的距離小於 r，則此點位於圓內；
2. 點與圓心的距離等於 r，則此點位於圓周上；
3. 點與圓心的距離大於 r，則此點位於圓外；

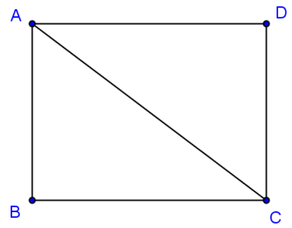


圖 8.3-29(a)

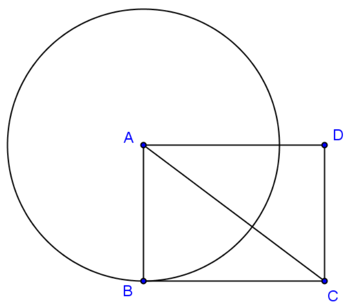


圖 8.3-29(b)

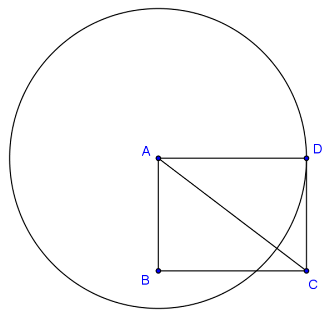


圖 8.3-29(c)

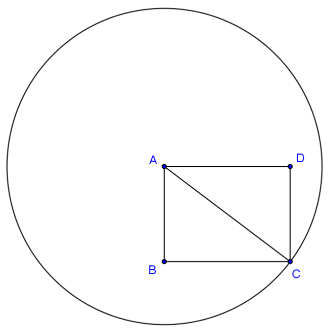


圖 8.3-29(d)

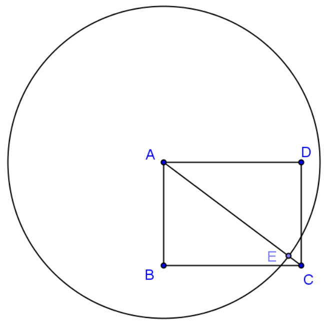


圖 8.3-29(e)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{AC}$，如圖 8.3-29(a)所示	作圖
(2) $\overline{BC}=\overline{AD}=4$	已知 ABCD 為矩形 ＆ 矩形對邊相等 ＆ 已知$\overline{AD}=4$
(3) △ABC 為直角三角形， $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$	已知 ABCD 為矩形 ＆ ∠B＝90° 畢氏定理
(4) $3^2+4^2=\overline{AC}^2$	由(3) ＆ 已知$\overline{AB}=3$ ＆ (2) $\overline{BC}=4$
(5) $\overline{AC}=-5$ 或 $\overline{AC}=5$	由(4) 求平方根
(6) 所以$\overline{AC}=5$	由(5)＆ $\overline{AC}$為線段長度必大於 0
(7) 以 A 為圓心，$\overline{AB}=3$ 為半徑畫圓， 如圖 8.3-29(b)所示， 因$\overline{AB}=3=r$，故 B 點在圓周上； 因$\overline{AC}=5>r$，故 C 點在圓外； 因$\overline{AD}=4>r$，故 D 點在圓外；	作圖 點與圓心的距離等於 r，則此點位於圓周上 點與圓心的距離大於 r，則此點位於圓外 點與圓心的距離大於 r，則此點位於圓外
(8) 以 A 為圓心，$\overline{AD}=4$ 為半徑畫圓， 如圖 8.3-29(c)所示， 因$\overline{AB}=3<r$，故 B 點在圓內； 因$\overline{AC}=5>r$，故 C 點在圓外； 因$\overline{AD}=4=r$，故 D 點在圓周上；	作圖 點與圓心的距離小於 r，則此點位於圓內 點與圓心的距離大於 r，則此點位於圓外 點與圓心的距離等於 r，則此點位於圓周上
(9) 以 A 為圓心，$\overline{AC}=5$ 為半徑畫圓， 如圖 8.3-29(d)所示， 因$\overline{AB}=3<r$，故 B 點在圓內； 因$\overline{AC}=5=r$，故 C 點在圓周上； 因$\overline{AD}=4<r$，故 D 點在圓內；	作圖 點與圓心的距離小於 r，則此點位於圓內 點與圓心的距離等於 r，則此點位於圓周上 點與圓心的距離小於 r，則此點位於圓內
(10) 以 A 為圓心，$4<\overline{AE}<5$ 為半徑畫圓，如圖 8.3-29(e)所示， 因$\overline{AB}=3<r$，故 B 點在圓內； 因$\overline{AC}=5>r$，故 C 點在圓外； 因$\overline{AD}=4<r$，故 D 點在圓內；	作圖 點與圓心的距離小於 r，則此點位於圓內 點與圓心的距離大於 r，則此點位於圓外 點與圓心的距離小於 r，則此點位於圓內
(11) 所以當 $4<r<5$ 時， B、D 兩點在圓內；C 點在圓外	由(10) 已證

例題 8.3-28：

如圖 8.3-30，將半徑為 5 的半圓分成六等分，設等分點依次為 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5，則$\overline{AP_1}^2+\overline{AP_2}^2+\overline{AP_3}^2+\overline{AP_4}^2+\overline{AP_5}^2=$______。

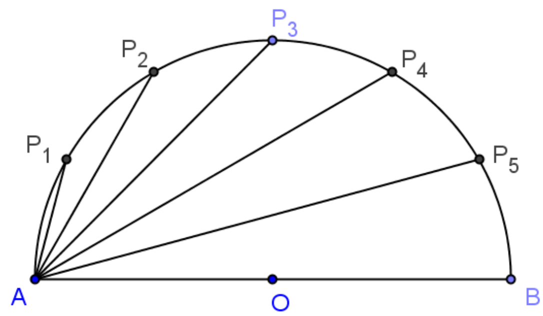


圖 8.3-30

想法：(1) 同圓中等弧對等弦

(2) 利用直徑所對的圓周角為直角

(3) 畢氏定理

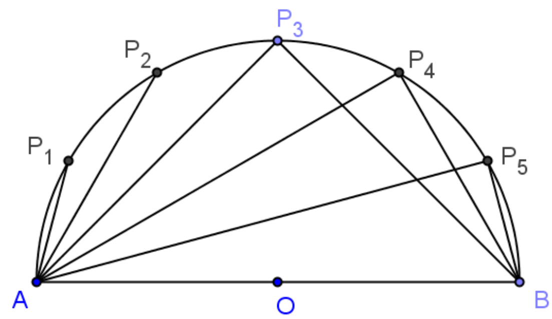


圖 8.3-30(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{BP_5}$、$\overline{BP_4}$ & $\overline{BP_3}$ 如圖 8.3-30(a)所示	作圖
(2) $\overset{\frown}{BP_5}=\overset{\frown}{AP_1}$、$\overset{\frown}{BP_4}=\overset{\frown}{AP_2}$、$\overset{\frown}{BP_3}=\overset{\frown}{AP_3}$	已知 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5 將半圓分成六等分
(3) $\overline{BP_5}=\overline{AP_1}$、$\overline{BP_4}=\overline{AP_2}$、$\overline{BP_3}=\overline{AP_3}$	由(2) & 同圓中等弧對等弦
(4) $\triangle ABP_5$ 為直角三角形， $\overline{AP_5}^2+\overline{BP_5}^2=\overline{AB}^2$	$\overline{AB}$為直徑 & 直徑所對的圓周角$\angle P_5$為直角 & 畢氏定理
(5) $\overline{AP_5}^2+\overline{AP_1}^2=10^2=100$	由(4) & (3) $\overline{BP_5}=\overline{AP_1}$ & 已知圓半徑為 5，圓直徑$\overline{AB}=10$

(6) △ABP$_4$ 為直角三角形， $\overline{AP_4}^2+\overline{BP_4}^2=\overline{AB}^2$	$\overline{AB}$為直徑 & 直徑所對的圓周角∠P$_4$為直角 & 畢氏定理
(7) $\overline{AP_4}^2+\overline{AP_2}^2=10^2=100$	由(6) & (3) $\overline{BP_4}=\overline{AP_2}$ & 已知圓半徑為 5，圓直徑$\overline{AB}=10$
(8) △ABP$_3$ 為直角三角形， $\overline{AP_3}^2+\overline{BP_3}^2=\overline{AB}^2$	$\overline{AB}$為直徑 & 直徑所對的圓周角∠P$_3$為直角 & 畢氏定理
(9) $\overline{AP_3}^2+\overline{AP_3}^2=10^2=100$	由(8) & (3) $\overline{BP_3}=\overline{AP_3}$ & 已知圓半徑為 5，圓直徑$\overline{AB}=10$
(10) $\overline{AP_3}^2=50$	由(9)
(11) $\overline{AP_1}^2+\overline{AP_2}^2+\overline{AP_3}^2+\overline{AP_4}^2+\overline{AP_5}^2$ $=100+100+50=250$	由(5)式＋(7)式＋(10)式 等量加法公理

例題 8.3-29：

如圖 8.3-31，已知半圓 O 的半徑為 2，且 C、D、E 三點將半圓弧分成四等分，則$\overline{AC}^2-\overline{AD}^2+\overline{AE}^2=$________。

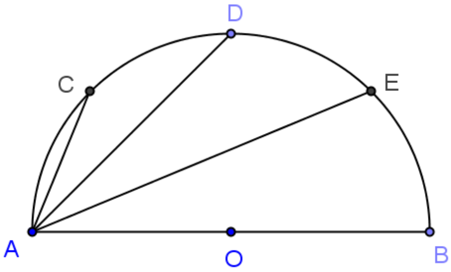


圖 8.3-31

想法：(1) 同圓中等弧對等弦

(2) 利用直徑所對的圓周角為直角

(3) 畢氏定理

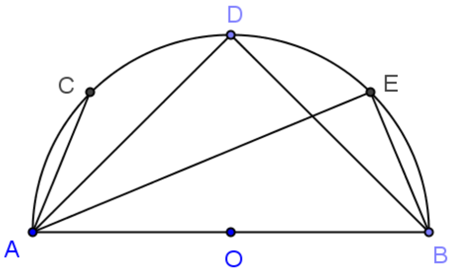


圖 8.3-31(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{BE}$、$\overline{BD}$，如圖 8.3-31(a)所示	作圖
(2) $\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{AC}$、$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AD}$	已知 C、D、E 三點將半圓弧分成四等分
(3) $\overline{BE}=\overline{AC}$、$\overline{BD}=\overline{AD}$	由(2) & 同圓中等弧對等弦
(4) $\triangle$ABE 為直角三角形， $\overline{AE}^2+\overline{BE}^2=\overline{AB}^2$	$\overline{AB}$為直徑 & 直徑所對的圓周角$\angle$E 為直角 & 畢氏定理
(5) $\overline{AE}^2+\overline{AC}^2=4^2=16$	由(4) & (3) $\overline{BE}=\overline{AC}$ & 已知圓半徑為 2，圓直徑$\overline{AB}=4$
(6) $\triangle$ABD 為直角三角形， $\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2$	$\overline{AB}$為直徑 & 直徑所對的圓周角$\angle$D 為直角 & 畢氏定理
(7) $\overline{AD}^2+\overline{AD}^2=4^2=16$	由(6) & (3) $\overline{BD}=\overline{AD}$ & 已知圓半徑為 2，圓直徑$\overline{AB}=4$

(8) $\overline{AD}^2=8$	由(7)
(9) 所以$\overline{AC}^2-\overline{AD}^2+\overline{AE}^2$ $=(\overline{AC}^2+\overline{AE}^2)-\overline{AD}^2$ $=16-8=8$	題目所求 加法交換律 & 結合律 由(5) $\overline{AE}^2+\overline{AC}^2=16$ & (8) $\overline{AD}^2=8$

例題 8.3-30：

已知有一圓 O，$\overline{AB}$為其一弦，且$\overline{AB}=24$，此弦到圓心的距離是 5，則此圓 O 的直徑為何？

想法：(1) 利用定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理：垂直於弦的直徑必平分這弦與這弦所對的弧。

(2) 畢氏定理

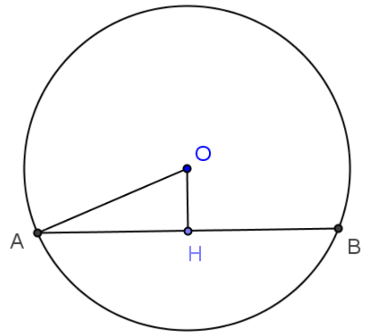


圖 8.3-32

解：

敘述	理由
(1) 根據已知作圖，如圖 8.3-32 所示 $\overline{OA}$為圓 O 之半徑；$\overline{OH}$為弦心距	已知有一圓 O，$\overline{AB}$為其一弦，且$\overline{AB}=24$，此弦到圓心的距離是 5
(2) $\overline{OH}\perp\overline{AB}$，$\angle OHA=90°$	由(1) $\overline{OH}$為弦心距
(3) $\overline{AH}=\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times24=12$	根據定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理 & $\overline{OH}$垂直平分$\overline{AB}$ & 已知$\overline{AB}=24$
(4) $\triangle OHA$ 為直角三角形， $\overline{OH}^2+\overline{AH}^2=\overline{OA}^2$	由(2) $\angle OHA=90°$ 畢氏定理
(5) $5^2+12^2=\overline{OA}^2$	由(4) & 已知弦到圓心的距離$\overline{OH}=5$ & (3) $\overline{AH}=12$
(6) $\overline{OA}=-13$ 或 $\overline{OA}=13$	由(5) 求平方根
(7) 所以$\overline{OA}=13$	由(6) & $\overline{OA}$為線段長度必大於 0
(8) 所以圓 O 的直徑為 $2\overline{OA}=26$	由(7) 圓半徑$\overline{OA}=13$ & 直徑為半徑的 2 倍

例題 8.3-31：

已知一圓的直徑是 10 公分，且有一弦$\overline{AB}$的長為 8 公分，則此弦到圓心的距離為________公分。

想法：(1) 利用定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理：垂直於弦的直徑必平分這弦與這弦所對的弧。

(2) 畢氏定理

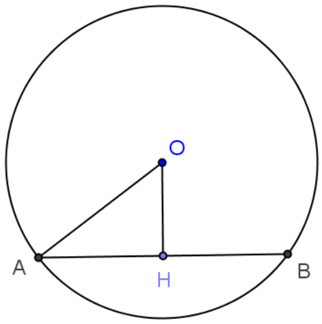


圖 8.3-33

解：

敘述	理由
(1) 根據已知作圖，如圖 8.3-33： $\overline{OA}$為圓 O 之半徑，因直徑為 10 公分，所以半徑$\overline{OA}$＝5 公分； $\overline{OH}$為弦心距	已知一圓的直徑是 10 公分，且有一弦$\overline{AB}$的長為 8 公分
(2) $\overline{OH}\perp\overline{AB}$，$\angle$OHA＝90°	由(1) $\overline{OH}$為弦心距
(3) $\overline{AH}=\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ $=\frac{1}{2}\times$(8 公分)＝4 公分	根據定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理＆ $\overline{OH}$垂直平分$\overline{AB}$ ＆ 已知$\overline{AB}$＝8 公分
(4) △OHA 為直角三角形， $\overline{OH}^2+\overline{AH}^2=\overline{OA}^2$	由(2) $\angle$OHA＝90° 畢氏定理
(5) $\overline{OH}^2$＋(4 公分)^2＝(5 公分)^2	由(4) ＆ (1) $\overline{OA}$＝5 公分 ＆ (3) $\overline{AH}$＝4 公分
(6) $\overline{OH}$＝－3 公分 或 $\overline{OH}$＝3 公分	由(5) 求平方根
(7) 所以弦心距$\overline{OH}$＝3 公分	由(6) ＆ $\overline{OH}$為線段長度必大於 0

例題 8.3-32：

如圖 8.3-34，圓 O 是半徑為 5 的圓，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為圓 O 的兩弦，$\overline{OM}\perp\overline{AB}$，$\overline{ON}\perp\overline{CD}$。

(1) 若 $\overline{OM}=3$，則 $\overline{AB}=$？

(2) 若 $\overline{CD}=6$，則 $\overline{ON}=$？

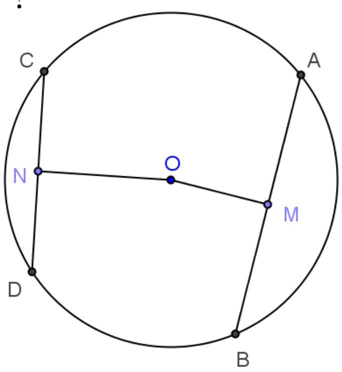


圖 8.3-34

想法：(1) 利用定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理：垂直於弦的直徑必平分這弦與這弦所對的弧。

(2) 畢氏定理

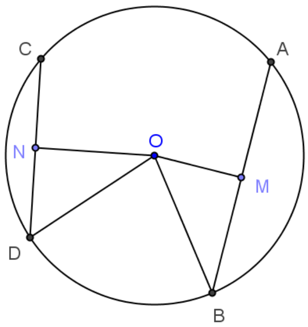


圖 8.3-34(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{OB}$、$\overline{OD}$，如圖 8.3-34(a)，$\overline{OB}=\overline{OD}=5$ 為圓 O 之半徑，	作圖 已知圓之半徑為 5
(2) $\angle OMB=90°$	已知$\overline{OM}\perp\overline{AB}$
(3) $\overline{AM}=\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{AB}$	根據定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理 & $\overline{OM}$垂直平分$\overline{AB}$
(4) △OBM 為直角三角形，$\overline{OM}^2+\overline{BM}^2=\overline{OB}^2$	由(2) $\angle OMB=90°$ 畢氏定理
(5) $3^2+\overline{BM}^2=5^2$	由(4) & 已知$\overline{OM}=3$ & (1) $\overline{OB}=5$

(6) $\overline{BM}=-4$ 或 $\overline{BM}=4$	由(5) 求平方根
(7) 所以$\overline{BM}=4$	由(6) & $\overline{BM}$為線段長度必大於 0
(8) $4=\frac{1}{2}\overline{AB}$	由(3) $\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ & (7) $\overline{BM}=4$
(9) $\overline{AB}=2\times4=8$	由(8) 等式兩邊同乘以 2
(10) $\angle$OND＝90°	已知$\overline{ON}\perp\overline{CD}$
(11) $\overline{CN}=\overline{DN}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\frac{1}{2}\times6=3$	根據定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理 & $\overline{ON}$垂直平分$\overline{CD}$ & 已知$\overline{CD}=6$
(12) △OND 為直角三角形， $\overline{ON}^2+\overline{DN}^2=\overline{OD}^2$	由(10) ∠OND＝90° 畢氏定理
(13) $\overline{ON}^2+3^2=5^2$	由(12) & (11) $\overline{DN}=3$ & (1) $\overline{OD}=5$
(14) $\overline{ON}=-4$ 或 $\overline{ON}=4$	由(13) 求平方根
(15) 所以$\overline{ON}=4$	由(14) & $\overline{ON}$為線段長度必大於 0

例題 8.3-33：

圓中有一弦長為 24 公分，此弦的弦心距是 5 公分。若此圓的另一弦長是 10 公分，則此弦的弦心距是_____公分。

想法：(1) 利用定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理：垂直於弦的直徑必平分這弦與這弦所對的弧。

(2) 畢氏定理

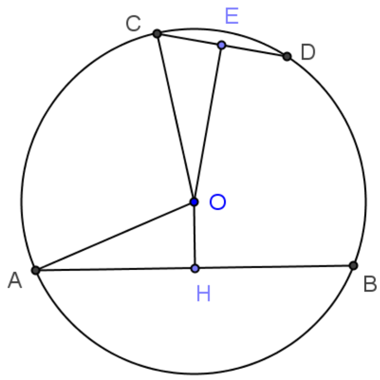


圖 8.3-35

解：

敘述	理由
(1) 根據已知作圖，如圖 8.3-35 所示： $\overline{OA}=\overline{OC}$為圓 O 之半徑； $\overline{AB}=24$ 公分， $\overline{OH}$為$\overline{AB}$到 O 的弦心距， $\overline{OH}=5$ 公分； $\overline{CD}=10$ 公分， $\overline{OE}$為$\overline{CD}$到 O 的弦心距；	已知圓中有一弦長為 24 公分，此弦的弦心距是 5 公分。若此圓的另一弦長是 10 公分
(2) $\overline{OH}\perp\overline{AB}$，$\angle OHA=90°$	由(1) $\overline{OH}$為圓心到$\overline{AB}$的弦心距
(3) $\overline{AH}=\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ $=\frac{1}{2}\times(24$ 公分$)=12$ 公分	根據定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理 & $\overline{OH}$垂直平分$\overline{AB}$ & 已知$\overline{AB}=24$ 公分
(4) $\triangle OHA$ 為直角三角形， $\overline{OH}^2+\overline{AH}^2=\overline{OA}^2$	由(2) $\angle OHA=90°$ 畢氏定理
(5) $(5$ 公分$)^2+(12$ 公分$)^2=\overline{OA}^2$	由(4) & (1) $\overline{OH}=5$ 公分 & (3) $\overline{AH}=12$ 公分
(6) $\overline{OA}=-13$ 公分 或 $\overline{OA}=13$ 公分	由(5) 求平方根

(7) 所以圓半徑$\overline{OA}$＝13 公分	由(6) ＆ $\overline{OA}$為線段長度必大於 0
(8) $\overline{OE}\perp\overline{CD}$，∠OEC＝90°	由(1) $\overline{OE}$為圓心到$\overline{CD}$的弦心距
(9) $\overline{CE}=\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{CD}$ $=\frac{1}{2}\times$(10 公分)＝5 公分	根據定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理 ＆ $\overline{OE}$垂直平分$\overline{CD}$ ＆ 已知$\overline{CD}$＝10 公分
(10) △OCE 為直角三角形， $\overline{OE}^2+\overline{CE}^2=\overline{OC}^2$	由(8)∠OEC＝90° 畢氏定理
(11) $\overline{OE}^2$＋(5 公分)^2＝(13 公分)^2	由(10) ＆ (9) $\overline{CE}$＝5 公分 ＆ (1) $\overline{OA}=\overline{OC}$ ＆ (7) $\overline{OA}$＝13 公分
(12) $\overline{OE}$＝－12 公分 或 $\overline{OE}$＝12 公分	由(11) 求平方根
(13) 所以圓心到$\overline{CD}$的弦心距 $\overline{OE}$＝12 公分	由(12) ＆ $\overline{OE}$為線段長度必大於 0

例題 8.3-34：

如圖 8.3-36，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$與$\overline{EF}$皆為圓 O 的弦，其弦心距分別為$\overline{OX}$、$\overline{OY}$與$\overline{OZ}$。已知$\overline{AB}=20$，$\overline{OX}=24$，$\overline{OZ}=16$，$\overline{CD}=48$，則：

(1) 圓 O 的半徑＝______。

(2) $\overline{OY}$＝______。

(3) 弦$\overline{EF}$＝_______。

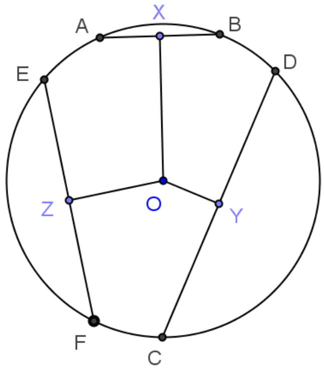


圖 8.3-36

想法：(1) 利用定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理：垂直於弦的直徑必平分這弦與這弦所對的弧。

(2) 畢氏定理

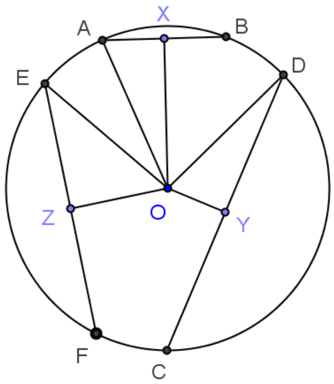


圖 8.3-36(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{OD}$、$\overline{OA}$與$\overline{OE}$，如圖 8.3-36(a) $\overline{OD}=\overline{OA}=\overline{OE}$為圓 O 之半徑；	作圖
(2) $\overline{OX}\perp\overline{AB}$，$\angle OXA=90°$	已知$\overline{OX}$為弦心距
(3) $\overline{AX}=\overline{BX}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\times 20=10$	根據定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理 & $\overline{OX}$垂直平分$\overline{AB}$ & 已知$\overline{AB}=20$
(4) △OXA 為直角三角形， $\overline{OX}^2+\overline{AX}^2=\overline{OA}^2$	由(2)∠OXA＝90° 畢氏定理

(5) $24^2+10^2=\overline{OA}^2$	由(4) & 已知$\overline{OX}=24$ & (3) $\overline{AX}=10$
(6) $\overline{OA}=-26$ 或 $\overline{OA}=26$	由(5) 求平方根
(7) 所以圓半徑$\overline{OA}=26$	由(6) & $\overline{OA}$為線段長度必大於 0
--- 以下求 $\overline{OY}$ ---	
(8) $\overline{OD}=\overline{OA}=\overline{OE}=26$	由(7) & (1) $\overline{OD}=\overline{OA}=\overline{OE}$ 遞移律
(9) $\overline{OY}\perp\overline{CD}$，$\angle OYD=90°$	已知$\overline{OY}$為弦心距
(10) $\overline{CY}=\overline{DY}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\frac{1}{2}\times 48=24$	根據定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理 & $\overline{OY}$垂直平分$\overline{CD}$ & 已知$\overline{CD}=48$
(11) △OYD 為直角三角形， $\overline{OY}^2+\overline{DY}^2=\overline{OD}^2$	由(9) ∠OYD＝90° 畢氏定理
(12) $\overline{OY}^2+24^2=26^2$	由(11) & (10) $\overline{DY}=24$ & (8) $\overline{OD}=26$
(13) $\overline{OY}=-10$ 或 $\overline{OY}=10$	由(12) 求平方根
(14) 所以$\overline{OY}=10$	由(13) & $\overline{OY}$為線段長度必大於 0
--- 以下求 $\overline{EF}$ ---	
(15) $\overline{OZ}\perp\overline{EF}$，$\angle OZE=90°$	已知$\overline{OZ}$為弦心距
(16) $\overline{EZ}=\overline{FZ}=\frac{1}{2}\overline{EF}$	根據定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理 & $\overline{OZ}$垂直平分$\overline{EF}$
(17) △OEZ 為直角三角形， $\overline{OZ}^2+\overline{EZ}^2=\overline{OE}^2$	由(15) ∠OZE＝90° 畢氏定理
(18) $16^2+\overline{EZ}^2=26^2$	由(17) & 已知$\overline{OZ}=16$ & (8) $\overline{OE}=26$
(19) $\overline{EZ}=-2\sqrt{105}$ 或 $\overline{EZ}=2\sqrt{105}$	由(18) 求平方根
(20) 所以$\overline{EZ}=2\sqrt{105}$	由(19) & $\overline{EZ}$為線段長度必大於 0
(21) $2\sqrt{105}=\frac{1}{2}\overline{EF}$	將(20)$\overline{EZ}=2\sqrt{105}$ 代入(16) $\overline{EZ}=\frac{1}{2}\overline{EF}$
(22) 所以$\overline{EF}=2\times 2\sqrt{105}=4\sqrt{105}$	由(21) 等式兩邊同乘以 2

例題 8.3-35：

如圖 8.3-37 ，已知$\overline{AB}$是圓 O 的直徑，且$\overline{AB}\perp\overline{CD}$，$\overline{AE}=\overline{CD}=8$，則$\overline{CD}$的弦心距$\overline{OE}=$______ 。

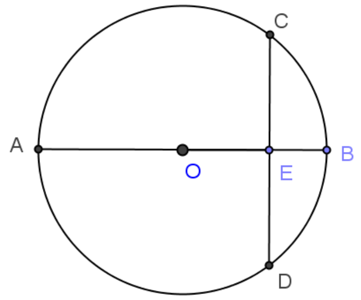


圖 8.3-37

想法：(1) 利用定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理：垂直於弦的直徑必平分這弦與這弦所對的弧。

(2) 畢氏定理

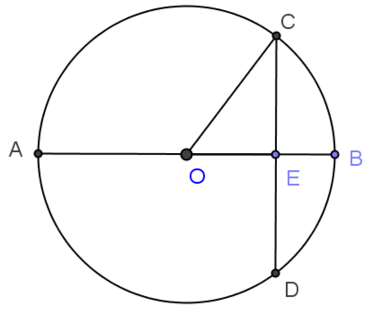


圖 8.3-37(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{OC}$，如圖 8.3-37(a)所示 則$\overline{OC}=\overline{OA}$為圓 O 之半徑，	作圖
(2) $\angle$OEC＝90°	已知$\overline{AB}\perp\overline{CD}$
(3) $\overline{CE}=\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\frac{1}{2}\times 8=4$	根據定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理 ＆ $\overline{AB}$垂直平分$\overline{CD}$ ＆ 已知$\overline{CD}=8$
(4) $\overline{AE}=\overline{OA}+\overline{OE}$	如圖 8.3-37(a)所示，全量等於分量之和
(5) $\overline{OA}=\overline{AE}-\overline{OE}=8-\overline{OE}$	由(4) 等量減法公理 ＆ 已知$\overline{AE}=8$
(6) $\overline{OC}=\overline{OA}=8-\overline{OE}$	由(5) ＆ (1) $\overline{OC}=\overline{OA}$ 遞移律
(7) △OEC 為直角三角形， $\overline{OE}^2+\overline{CE}^2=\overline{OC}^2$	由(2) $\angle$OEC＝90° 畢氏定理
(8) $\overline{OE}^2+4^2=(8-\overline{OE})^2$	由(7) ＆ (3) $\overline{CE}=4$ ＆ (6) $\overline{OC}=8-\overline{OE}$
(9) $\overline{OE}=3$	由(8) 解一元二次方程式

例題 8.3-36：

如圖 8.3-38，直線 L 與圓 O 相切於 P 點，A 為直線 L 上一點。已知圓 O 的半徑為 6，$\overline{AP}=8$，則$\overline{OA}=$______。

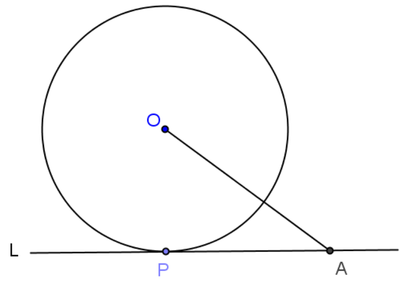


圖 8.3-38

想法：(1) 連接$\overline{OP}$，因直線 L 與圓 O 相切於 P 點，故$\overline{OP}\perp$L，△OPA 為直角三角形；

(2) 再利用畢氏定理求$\overline{OA}$之值

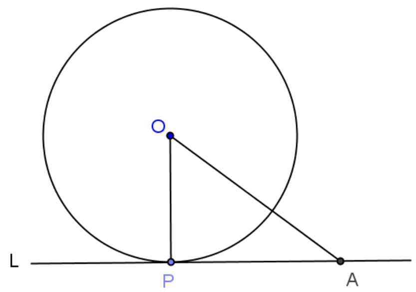


圖 8.3-38(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{OP}$，如圖 8.3-38(a)所示， 則$\overline{OP}=6$ 為圓 O 之半徑； $\overline{OP}\perp$L，∠OPA＝90°	作圖 已知圓 O 的半徑為 6 已知直線 L 與圓 O 相切於 P 點
(2) △OPA 為直角三角形， $\overline{OP}^2+\overline{AP}^2=\overline{OA}^2$	由(1) ∠OPA＝90° 畢氏定理
(3) $6^2+8^2=\overline{OA}^2$	由(2) & (1) $\overline{OP}=6$ & 已知$\overline{AP}=8$
(4) $\overline{OA}=-10$ 或 $\overline{OA}=10$	由(3) 求平方根
(5) 所以$\overline{OA}=10$	由(4) & $\overline{OA}$為線段長度必大於 0

例題 8.3-37：

如圖 8.3-39，$\overline{AB}$切圓 O 於 B，$\overline{AO}$交圓 O 於 C。若$\overline{AB}=15$，$\overline{OC}=8$，則$\overline{AC}=$_____。

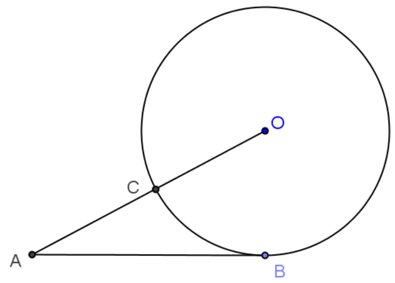


圖 8.3-39

想法：(1) 連接$\overline{OB}$，$\overline{AB}$切圓 O 於 B，故$\overline{OB}\perp\overline{AB}$，△OAB 為直角三角形；

(2) 利用畢氏定理求解

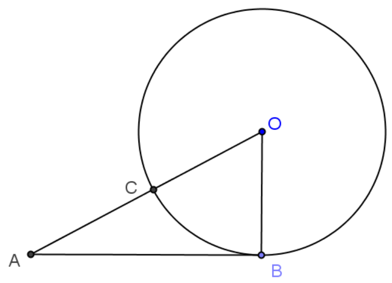


圖 8.3-39(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{OB}$，如圖 8.3-39(a)所示 則$\overline{OB}=\overline{OC}=8$ 為圓 O 之半徑， 故$\overline{OB}\perp\overline{AB}$，$\angle OBA=90°$	作圖 已知$\overline{OC}=8$ 已知$\overline{AB}$切圓 O 於 B
(2) △OBA 為直角三角形， $\overline{OB}^2+\overline{AB}^2=\overline{OA}^2$	由(1) $\angle OBA=90°$ 畢氏定理
(3) $8^2+15^2=\overline{OA}^2$	由(2) & (1) $\overline{OB}=8$ & 已知$\overline{AB}=15$
(4) $\overline{OA}=-17$ 或 $\overline{OA}=17$	由(3) 求平方根
(5) 所以$\overline{OA}=17$	由(4) & $\overline{OA}$為線段長度必大於 0
(6) $\overline{OA}=\overline{OC}+\overline{AC}$	如圖 8.3-39(a)所示，全量等於分量之和
(7) $\overline{AC}=\overline{OA}-\overline{OC}$ $=17-8=9$	由(6) 等量減法公理 & (5) $\overline{OA}=17$ & 已知$\overline{OC}=8$

例題 8.3-38：

如圖 8.3-40，直線 L 與圓 O 相切於 P 點，A 為直線 L 上一點，$\overline{OA}$與圓 O 相交於 B 點。已知$\overline{PA}=15$，$\overline{AB}=9$，則圓 O 的半徑為______。

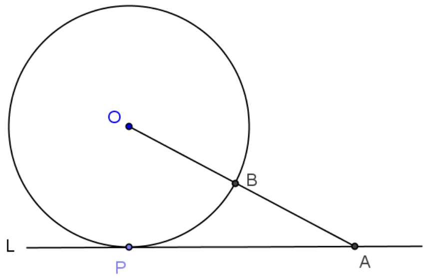


圖 8.3-40

想法：(1) 連接$\overline{OP}$，直線 L 與圓 O 相切於 P 點，故$\overline{OP}\perp L$，$\triangle OPA$ 為直角三角形；

(2) 利用畢氏定理求解

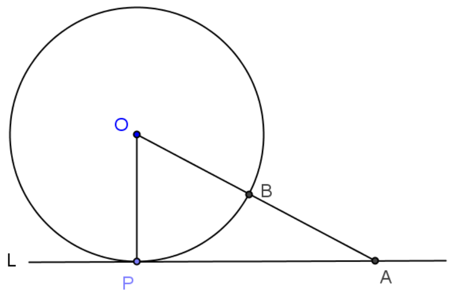


圖 8.3-40(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{OP}$，如圖 8.3-40(a)所示 則$\overline{OB}=\overline{OP}$為圓 O 之半徑， $\overline{OP}\perp L$，$\angle OPA=90°$	作圖 已知直線 L 與圓 O 相切於 P 點
(2) $\triangle OPA$ 為直角三角形， $\overline{OP}^2+\overline{AP}^2=\overline{OA}^2$	由(1) $\angle OPA=90°$ 畢氏定理
(3) $\overline{OP}^2+\overline{AP}^2=(\overline{OB}+\overline{AB})^2$	由(2) & $\overline{OA}=\overline{OB}+\overline{AB}$
(4) $\overline{OP}^2+15^2=(\overline{OP}+9)^2$	由(3) & 已知$\overline{PA}=15$，$\overline{AB}=9$ & (1) $\overline{OB}=\overline{OP}$
(5) $\overline{OP}=8$	由(4) 解一元二次方程式
(6) 所以圓 O 的半徑為 8	由(5) $\overline{OP}=8$ & (1) $\overline{OP}$為圓 O 之半徑

例題 8.3-39：

如圖 8.3-41，$\overleftrightarrow{PA}$與$\overleftrightarrow{PB}$分別與圓 O 相切於 A、B 兩點。已知圓 O 的半徑為 6，$\overline{OP}=12$。則：

(1) $\overline{PA}=$______，$\overline{PB}=$______。

(2) $\angle$APB＝______度。

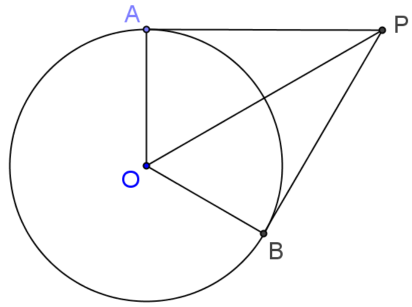


圖 8.3-41

想法：(1) 利用已知$\overleftrightarrow{PA}$與$\overleftrightarrow{PB}$分別與圓 O 相切於 A、B 兩點，得知△AOP 與△BOP 皆為直角三角形；

(2) 利用△AOP 為直角三角形 & 畢氏定理，可求得$\overline{PA}$；

(3) 利用定理 7.3-2 切線長定理(自圓外一點到圓的兩切點連線段等長)，得知$\overline{PB}=\overline{PA}$；

(4) 最後利用直角三角形三邊比為 1：2：$\sqrt{3}$，則三內角為 30°-90°-60°，求得$\angle$APB 之度數

解：

敘述	理由
(1) $\overline{OA}\perp\overleftrightarrow{PA}$ & $\overline{OB}\perp\overleftrightarrow{PB}$ 且 圓 O 的半徑$\overline{OA}=\overline{OB}=6$	已知$\overleftrightarrow{PA}$與$\overleftrightarrow{PB}$分別與圓 O 相切於 A、B 兩點 & 已知圓 O 的半徑為 6
(2) △AOP 為直角三角形 $\overline{OA}^2+\overline{PA}^2=\overline{OP}^2$	由(1) $\overline{OA}\perp\overleftrightarrow{PA}$ 畢氏定理
(3) $6^2+\overline{PA}^2=12^2$	由(2) & (1) $\overline{OA}=6$ & 已知$\overline{OP}=12$
(4) $\overline{PA}=-6\sqrt{3}$ 或 $\overline{PA}=6\sqrt{3}$	由(3) 求平方根
(5) 所以$\overline{PA}=6\sqrt{3}$	由(4) & $\overline{AP}$為線段長度必大於 0
(6) $\overline{PB}=\overline{PA}=6\sqrt{3}$	已知$\overleftrightarrow{PA}$與$\overleftrightarrow{PB}$分別與圓 O 相切於 A、B 兩點 & 定理 7.3-2 切線長定理(自圓外一點到圓的兩切點連線段等長) & (5) $\overline{PA}=6\sqrt{3}$
(7) △AOP 為直角三角形，且 $\overline{OA}:\overline{OP}:\overline{PA}=6:12:6\sqrt{3}$ $=1:2:\sqrt{3}$	由(1) $\overline{OA}\perp\overleftrightarrow{PA}$ & (1) $\overline{OA}=6$、已知$\overline{OP}=12$、(5) $\overline{PA}=6\sqrt{3}$ & 倍比定理

(8) 所以∠APO＝30°	由(7) ＆ 直角三角形三邊比為 1：2：$\sqrt{3}$，則三內角為 30°-90°-60°
(9) △BOP 為直角三角形，且 $\overline{OB}$：$\overline{OP}$：$\overline{PB}$＝6：12：6$\sqrt{3}$ ＝1：2：$\sqrt{3}$	由(1) $\overline{OB}\perp\overleftrightarrow{PB}$ ＆ (1) $\overline{OB}$＝6、已知$\overline{OP}$＝12、(6) $\overline{PB}$＝6$\sqrt{3}$ ＆ 倍比定理
(10) 所以∠BPO＝30°	由(9) ＆ 直角三角形三邊比為 1：2：$\sqrt{3}$，則三內角為 30°-90°-60°
(11) ∠APB＝∠APO＋∠BPO ＝30°＋30°＝60°	全量等於分量之和 ＆ (8) ∠APO＝30° ＆ (10) ∠BPO＝30°

例題 8.3-40：

如圖 8.3-42，△ABC 為直角三角形，$\angle ABC=90°$，半圓和$\overline{AC}$相切於 D 點，和$\overline{BC}$相交於 B、E 兩點。已知$\overline{AC}=13$，$\overline{BC}=5$，則圓 O 的半徑為______。

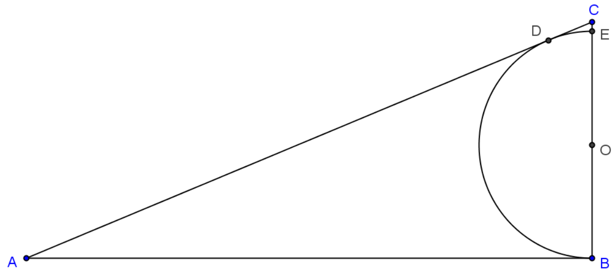


圖 8.3-42

想法：(1) 利用定理 7.3-2 切線長定理(自圓外一點到圓的兩切點連線段等長)

(2) 畢氏定理來解題

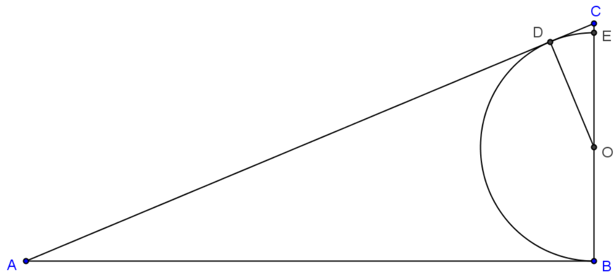


圖 8.3-42(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{OD}$，如圖 8.3-42(a)所示 則$\overline{OB}=\overline{OD}$為圓 O 之半徑， $\overline{OD}\perp\overline{AC}$，$\angle ODC=90°$	作圖 已知半圓和$\overline{AC}$相切於 D 點
(2) △ABC 為直角三角形， $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$	已知$\angle ABC=90°$ 畢氏定理
(3) $\overline{AB}^2+5^2=13^2$	由(2) & 已知$\overline{AC}=13$，$\overline{BC}=5$
(4) $\overline{AB}=-12$ 或 $\overline{AB}=12$	由(3) 求平方根
(5) 所以$\overline{AB}=12$	由(4) & $\overline{AB}$為線段長度必大於 0
(6) $\overline{AD}=\overline{AB}=12$	已知$\angle ABC=90°$，$\overline{AB}$為圓 O 之切線 & 已知半圓和$\overline{AC}$相切於 D 點 & 定理 7.3-2 切線長定理(自圓外一點到圓的兩切點連線段等長) & (5) $\overline{AB}=12$

(7) $\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{CD}$	如圖 8.3-42(a)所示，全量等於分量之和
(8) $\overline{CD}=\overline{AC}-\overline{AD}$ $=13-12=1$	由(7) 等量減法公理 & 已知$\overline{AC}=13$ & (6) $\overline{AD}=12$
(9) $\overline{BC}=\overline{OB}+\overline{OC}$	如圖 8.3-42(a)所示，全量等於分量之和
(10) $\overline{OC}=\overline{BC}-\overline{OB}=5-\overline{OB}$	由(9) 等量減法公理 & 已知$\overline{BC}=5$
(11) △COD 為直角三角形， $\overline{CD}^2+\overline{OD}^2=\overline{OC}^2$	由(1) ∠ODC＝90° 畢氏定理
(12) $1^2+\overline{OB}^2=(5-\overline{OB})^2$	由(11) & (8) $\overline{CD}=1$ & (1) $\overline{OB}=\overline{OD}$ & (10) $\overline{OC}=5-\overline{OB}$
(13) $\overline{OB}=2.4$	由(12) 解一元二次方程式
(14) 所以圓 O 的半徑為 2.4	由(13) & (1) $\overline{OB}=\overline{OD}$為圓 O 之半徑

例題 8.3-41：

如圖 8.3-43，圓 O_1 與圓 O_2 外切，且直線 L 分別切圓 O_1 與圓 O_2 於 A、B 兩點。已知圓 O_1 與圓 O_2 的半徑分別為 12 和 5，則外公切線段 $\overline{AB}$＝____。

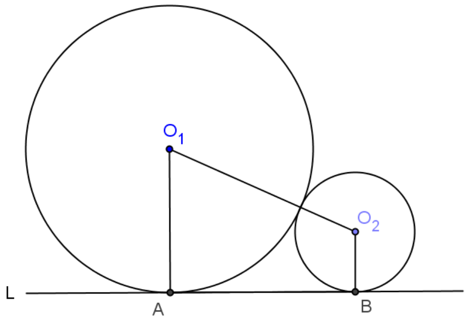


圖 8.3-43

想法：(1) 過 O_2 作 $\overline{O_2C} \parallel \overline{AB}$，則 $\overline{O_2C}=\overline{AB}$，如圖 8.3-43(a)；

(2) 利用畢氏定理求出 $\overline{O_2C}$，則外公切線 $\overline{AB}=\overline{O_2C}$

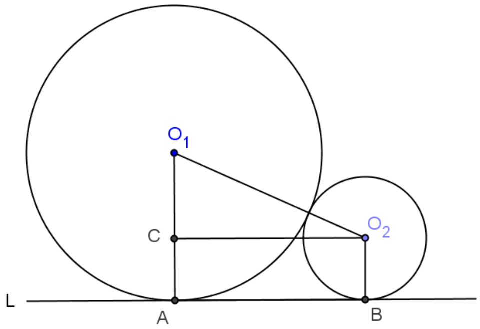


圖 8.3-43(a)

解：

敘述	理由
(1) 過 O_2 作 $\overline{O_2C} \parallel \overline{AB}$，如圖 8.3-43(a) 所示；所以 $\overline{O_1A}\perp\overline{AB}$、$\overline{O_2B}\perp\overline{AB}$，$\angle O_1AB=90°$；$\overline{O_1A}$ 為圓 O_1 的半徑，$\overline{O_1A}=12$；$\overline{O_2B}$ 為圓 O_2 的半徑，$\overline{O_2B}=5$	作圖 已知直線 L 分別切圓 O_1 與圓 O_2 於 A、B 兩點 已知圓 O_1 與圓 O_2 的半徑分別為 12 和 5
(2) $\overline{O_1A} \parallel \overline{O_2B}$	由(1) $\overline{O_1A}\perp\overline{AB}$、$\overline{O_2B}\perp\overline{AB}$ & 定理 3.2-1 兩條直線如都與一直線垂直，則此二直線互相平行
(3) 四邊形 ACO_2B 為平行四邊形	由(1) $\overline{O_2C} \parallel \overline{AB}$ & (2) $\overline{O_1A} \parallel \overline{O_2B}$ & 兩組對邊平行為平行四邊形
(4) $\overline{O_2C}=\overline{AB}$、$\overline{O_2B}=\overline{AC}=5$	由(3) & 平行四邊形兩組對邊相等 & 由(1) $\overline{O_2B}=5$

(5) $\overline{O_1A}=\overline{O_1C}+\overline{AC}$	如圖 8.3-43(a)所示，全量等於分量之和
(6) $\overline{O_1C}=\overline{O_1A}-\overline{AC}$ $=12-5=7$	由(5) 等量減法公理 & (1) $\overline{O_1A}=12$ & (4) $\overline{AC}=5$
(7) $\overline{O_1O_2}=12+5=17$	已知圓 O_1 與圓 O_2 外切 & 兩圓外切，連心線長等於兩半徑之和 & 已知圓 O_1 與圓 O_2 的半徑分別為 12 和 5
(8) $\angle O_1CO_2=\angle O_1AB=90°$	由(1) $\overline{O_2C} \parallel \overline{AB}$ & 同位角相等 & (1) $\angle O_1AB=90°$
(9) $\triangle O_1CO_2$ 為直角三角形， $\overline{O_1C}^2+\overline{O_2C}^2=\overline{O_1O_2}^2$	由(8) $\angle O_1CO_2=90°$ 畢氏定理
(10) $7^2+\overline{AB}^2=17^2$	由(9) & (6) $\overline{O_1C}=7$ & (4) $\overline{O_2C}=\overline{AB}$ & (7) $\overline{O_1O_2}=17$
(11) $\overline{AB}=-4\sqrt{15}$ 或 $\overline{AB}=4\sqrt{15}$	由(10) 求平方根
(12) 所以外公切線段$\overline{AB}=4\sqrt{15}$	由(11) & $\overline{AB}$為線段長度必大於 0

例題 8.3-42：

如圖 8.3-44，直線 L 分別切圓 O_1 與圓 O_2 於 A、B 兩點，圓 O_1 與圓 O_2 的半徑分別為 10 和 2，$\overline{O_1O_2}$＝17，則$\overline{AB}$＝_______ 。

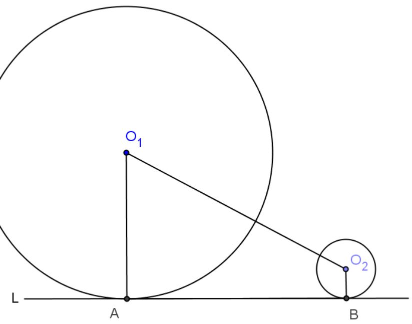


圖 8.3-44

想法：(1) 過 O_2 作$\overline{O_2C} \parallel \overline{AB}$，則$\overline{O_2C}$＝$\overline{AB}$，如圖 8.3-44(a)；

(2) 利用畢氏定理求出$\overline{O_2C}$，則外公切線$\overline{AB}$＝$\overline{O_2C}$

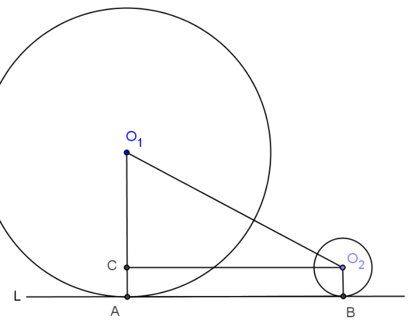


圖 8.3-44(a)

解：

敘述	理由
(1) 過 O_2 作$\overline{O_2C} \parallel \overline{AB}$，如圖 8.3-44(a)所示；所以$\overline{O_1A} \perp \overline{AB}$、$\overline{O_2B} \perp \overline{AB}$，$\angle O_1AB$＝90°；$\overline{O_1A}$為圓 O_1 的半徑，$\overline{O_1A}$＝10；$\overline{O_2B}$為圓 O_2 的半徑，$\overline{O_2B}$＝2	作圖 已知直線 L 分別切圓 O_1 與圓 O_2 於 A、B 兩點 已知圓 O_1 與圓 O_2 的半徑分別為 10 和 2
(2) $\overline{O_1A} \parallel \overline{O_2B}$	由(1) $\overline{O_1A} \perp \overline{AB}$、$\overline{O_2B} \perp \overline{AB}$ & 定理 3.2-1 兩條直線如都與一直線垂直，則此二直線互相平行
(3) 四邊形 ACO_2B 為平行四邊形	由(1) $\overline{O_2C} \parallel \overline{AB}$ & (2) $\overline{O_1A} \parallel \overline{O_2B}$ & 兩組對邊平行為平行四邊形
(4) $\overline{O_2C}$＝$\overline{AB}$、$\overline{O_2B}$＝$\overline{AC}$＝2	由(3) & 平行四邊形兩組對邊相等 & 由(1) $\overline{O_2B}$＝2
(5) $\overline{O_1A}$＝$\overline{O_1C}$＋$\overline{AC}$	如圖 8.3-44(a)所示，全量等於分量之和

(6) $\overline{O_1C}=\overline{O_1A}-\overline{AC}$ $=10-2=8$	由(5) 等量減法公理 & (1) $\overline{O_1A}=10$ & (4) $\overline{AC}=2$
(7) $\angle O_1CO_2=\angle O_1AB=90°$	由(1) $\overline{O_2C} \parallel \overline{AB}$ & 同位角相等 & (1) $\angle O_1AB=90°$
(8) $\triangle O_1CO_2$ 為直角三角形， $\overline{O_1C}^2+\overline{O_2C}^2=\overline{O_1O_2}^2$	由(7) $\angle O_1CO_2=90°$ 畢氏定理
(9) $8^2+\overline{AB}^2=17^2$	由(8) & (6) $\overline{O_1C}=8$ & (4) $\overline{O_2C}=\overline{AB}$ & 已知$\overline{O_1O_2}=17$
(10) $\overline{AB}=-15$ 或 $\overline{AB}=15$	由(9) 求平方根
(11) 所以外公切線段$\overline{AB}=15$	由(10) & $\overline{AB}$為線段長度必大於 0

例題 8.3-43：

若圓 O_1 半徑 10 公分，圓 O_2 半徑 5 公分，且連心線段長為 13 公分，則這兩圓的外公切線段$\overline{AB}$為何？

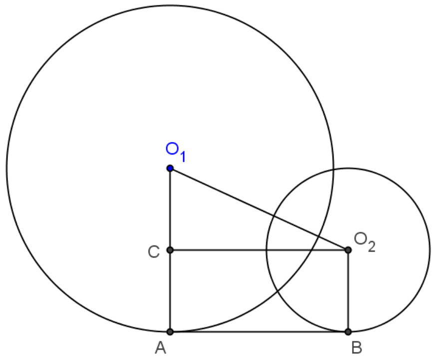


圖 8.3-45

想法：(1) 根據已知圓 O_1 半徑 10 公分，圓 O_2 半徑 5 公分，且連心線段長為 13 公分，判斷出兩圓相交於兩點，並畫出圖形，如圖 8.3-45；

(2) 利用畢氏定理求出外公切線長

解：

敘述	理由
(1) 根據已知作圖，如圖 8.3-45 所示 $\overline{AB}$為兩圓外公切線，故$\overline{O_1A}\perp\overline{AB}$、$\overline{O_2B}\perp\overline{AB}$，$\angle O_1AB=90°$； $\overline{O_1A}$為圓 O_1 的半徑，$\overline{O_1A}=10$； $\overline{O_2B}$為圓 O_2 的半徑，$\overline{O_2B}=5$； 再作$\overline{O_2C}\parallel\overline{AB}$	作圖 根據已知圓 O_1 半徑 10 公分，圓 O_2 半徑 5 公分，且連心線段長為 13 公分，判斷兩圓相交於兩點
(2) $\overline{O_1A}\parallel\overline{O_2B}$	由(1) $\overline{O_1A}\perp\overline{AB}$、$\overline{O_2B}\perp\overline{AB}$ & 定理 3.2-1 兩條直線如都與一直線垂直，則此二直線互相平行
(3) 四邊形 ACO_2B 為平行四邊形	由(1) $\overline{O_2C}\parallel\overline{AB}$ & (2) $\overline{O_1A}\parallel\overline{O_2B}$ & 兩組對邊平行為平行四邊形
(4) $\overline{O_2C}=\overline{AB}$、$\overline{AC}=\overline{O_2B}=5$	由(3) & 平行四邊形兩組對邊相等 & 由(1) $\overline{O_2B}=5$
(5) $\overline{O_1A}=\overline{O_1C}+\overline{AC}$	如圖 8.3-45 所示，全量等於分量之和
(6) $\overline{O_1C}=\overline{O_1A}-\overline{AC}$ $=10-5=5$	由(5) 等量減法公理 & (1) $\overline{O_1A}=10$ & (4) $\overline{AC}=5$
(7) $\angle O_1CO_2=\angle O_1AB=90°$	由(1) $\overline{O_2C}\parallel\overline{AB}$ & 同位角相等 & (1) $\angle O_1AB=90°$

(8) $\triangle O_1CO_2$ 為直角三角形， $\overline{O_1C}^2+\overline{O_2C}^2=\overline{O_1O_2}^2$	由(7) $\angle O_1CO_2=90°$ 畢氏定理
(9) $5^2+\overline{AB}^2=13^2$	由(8) & (6) $\overline{O_1C}=5$ & (4) $\overline{O_2C}=\overline{AB}$ & 已知$\overline{O_1O_2}=13$
(10) $\overline{AB}=-12$ 或 $\overline{AB}=12$	由(9) 求平方根
(11) 所以外公切線段$\overline{AB}=12$	由(10) & $\overline{AB}$為線段長度必大於 0

例題 8.3-44：

如圖 8.3-46，直線 L 切圓 O_1 於 A 點，切圓 O_2 於 B 點。若圓 O_1 的半徑為 4，圓 O_2 的半徑為 2，$\overline{O_1O_2}=10$，則$\overline{AB}=$________。

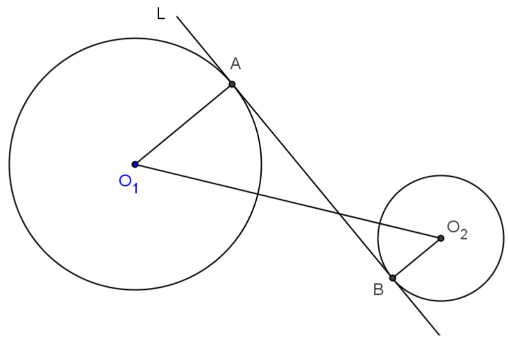


圖 8.3-46

想法：(1) 過 O_2 作$\overline{O_2C}\parallel\overline{AB}$交$\overline{O_1A}$的延長線於 C 點，則$\overline{O_2C}=\overline{AB}$，如圖 8.3-46(a)；

(2) 利用畢氏定理求出$\overline{O_2C}$，則內公切線段$\overline{AB}=\overline{O_2C}$

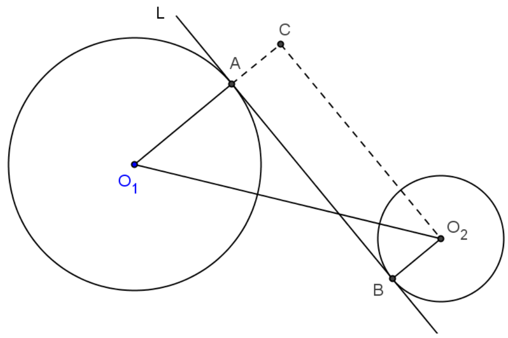


圖 8.3-46(a)

解：

敘述	理由
(1) 過 O_2 作$\overline{O_2C}\parallel\overline{AB}$交$\overline{O_1A}$的延長線於 C 點，如圖 8.3-46(a)所示； 所以$\overline{O_1A}\perp\overline{AB}$、 $\overline{O_2B}\perp\overline{AB}$，$\angle O_1AB=90°$； $\overline{O_1A}$為圓 O_1 的半徑，$\overline{O_1A}=4$； $\overline{O_2B}$為圓 O_2 的半徑，$\overline{O_2B}=2$	作圖 已知直線 L 切圓 O_1 於 A 點，切圓 O_2 於 B 點 已知圓 O_1 的半徑為 4 已知圓 O_2 的半徑為 2
(2) $\overline{O_1A}\parallel\overline{O_2B}$ (即$\overline{O_1C}\parallel\overline{O_2B}$)	由(1) $\overline{O_1A}\perp\overline{AB}$、$\overline{O_2B}\perp\overline{AB}$ & 定理 3.2-1 兩條直線如都與一直線垂直，則此二直線互相平行
(3) 四邊形 ACO_2B 為平行四邊形	由(1) $\overline{O_2C}\parallel\overline{AB}$ & (2) $\overline{O_1C}\parallel\overline{O_2B}$ & 兩組對邊平行為平行四邊形

(4) $\overline{O_2C}=\overline{AB}$、$\overline{AC}=\overline{O_2B}=2$	由(3) & 平行四邊形兩組對邊相等 & 由(1) $\overline{O_2B}=2$
(5) $\overline{O_1C}=\overline{O_1A}+\overline{AC}$ $=4+2=6$	如圖 8.3-46(a)所示，全量等於分量之和 & (1) $\overline{O_1A}=4$ & (4) $\overline{AC}=2$
(6) $\angle O_1CO_2=\angle O_1AB=90°$	由(1) $\overline{O_2C}\parallel\overline{AB}$ & 同位角相等 & (1) $\angle O_1AB=90°$
(7) $\triangle O_1CO_2$ 為直角三角形，$\overline{O_1C}^2+\overline{O_2C}^2=\overline{O_1O_2}^2$	由(6) $\angle O_1CO_2=90°$ 畢氏定理
(8) $6^2+\overline{AB}^2=10^2$	由(7) & (5) $\overline{O_1C}=6$ & (4) $\overline{O_2C}=\overline{AB}$ & 已知$\overline{O_1O_2}=10$
(9) $\overline{AB}=-8$ 或 $\overline{AB}=8$	由(8) 求平方根
(10) 所以內公切線段$\overline{AB}=8$	由(9) & $\overline{AB}$為線段長度必大於 0

例題 8.3-45：

如圖 8.3-47，直線 L 分別切圓 O_1 與圓 O_2 於 A、B 兩點。已知圓 O_1 與圓 O_2 的半徑分別為 3 和 4，且內公切線段$\overline{AB}$＝24，則連心線段$\overline{O_1O_2}$＝_______。

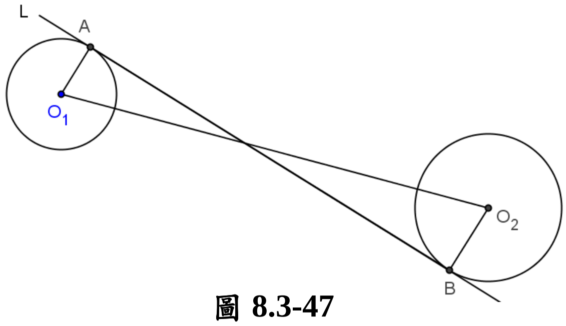


圖 8.3-47

想法：(1) 過 O_2 作$\overline{O_2C} \parallel \overline{AB}$交$\overline{O_1A}$的延長線於 C 點，則$\overline{O_2C}$＝$\overline{AB}$，如圖 8.3-47(a)；

(2) 利用畢氏定理求出連心線段$\overline{O_1O_2}$

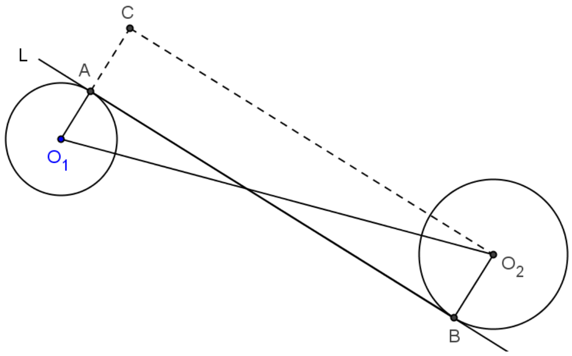


圖 8.3-47(a)

解：

敘述	理由
(1) 過 O_2 作$\overline{O_2C} \parallel \overline{AB}$交$\overline{O_1A}$的延長線於 C 點，如圖 8.3-47(a)所示； 所以$\overline{O_1A} \perp \overline{AB}$、$\overline{O_2B} \perp \overline{AB}$， $\angle O_1AB$＝90°； $\overline{O_1A}$為圓 O_1 的半徑，$\overline{O_1A}$＝3； $\overline{O_2B}$為圓 O_2 的半徑，$\overline{O_2B}$＝4	作圖 已知直線 L 切圓 O_1 於 A 點，切圓 O_2 於 B 點 已知圓 O_1 的半徑為 3 已知圓 O_2 的半徑為 4
(2) $\overline{O_1A} \parallel \overline{O_2B}$ (即$\overline{O_1C} \parallel \overline{O_2B}$)	由(1) $\overline{O_1A} \perp \overline{AB}$、$\overline{O_2B} \perp \overline{AB}$ & 定理 3.2-1 兩條直線如都與一直線垂直，則此二直線互相平行
(3) 四邊形 ACO_2B 為平行四邊形	由(1) $\overline{O_2C} \parallel \overline{AB}$ & (2) $\overline{O_1C} \parallel \overline{O_2B}$ & 兩組對邊平行為平行四邊形
(4) $\overline{O_2C}$＝$\overline{AB}$＝24、$\overline{AC}$＝$\overline{O_2B}$＝4	由(3) & 平行四邊形兩組對邊相等 & 已知$\overline{AB}$＝24 & 由(1) $\overline{O_2B}$＝4

(5) $\overline{O_1C}=\overline{O_1A}+\overline{AC}$ $=3+4=7$	如圖 8.3-47(a)所示，全量等於分量之和 & (1) $\overline{O_1A}=3$ & (4) $\overline{AC}=4$
(6) $\angle O_1CO_2=\angle O_1AB=90°$	由(1) $\overline{O_2C} \parallel \overline{AB}$ & 同位角相等 & (1) $\angle O_1AB=90°$
(7) $\triangle O_1CO_2$ 為直角三角形， $\overline{O_1C}^2+\overline{O_2C}^2=\overline{O_1O_2}^2$	由(6) $\angle O_1CO_2=90°$ 畢氏定理
(8) $7^2+24^2=\overline{O_1O_2}^2$	由(7) & (5) $\overline{O_1C}=7$ & (4) $\overline{O_2C}=24$
(9) $\overline{O_1O_2}=-25$ 或 $\overline{O_1O_2}=25$	由(8) 求平方根
(10) 所以連心線段$\overline{O_1O_2}=25$	由(9) & $\overline{O_1O_2}$為線段長度必大於 0

例題 8.3-46：

已知圓 O_1、圓 O_2 的半徑分別為 4 公分、2 公分。若$\overline{O_1O_2}$＝10 公分，則：

(1) 外公切線段長為________公分。

(2) 內公切線段長為________公分。

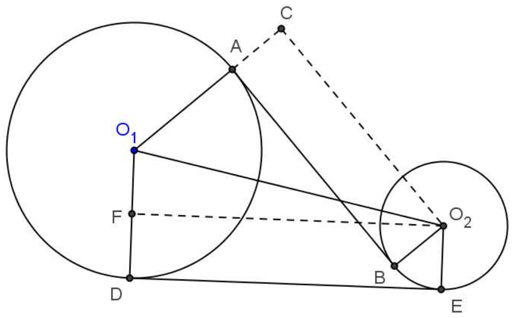


圖 8.3-48

想法：(1) 根據已知圓 O_1、圓 O_2 的半徑分別為 4 公分、2 公分，$\overline{O_1O_2}$＝10 公分，判斷兩圓的關係為外離，如圖 8.3-48；

(2) 利用畢氏定理求出外公切線段長與內公切線段長

解：

敘述	理由
(1) 根據已知作圖，畫出內公切線段$\overline{AB}$與外公切線段$\overline{DE}$，並作$\overline{O_2C} \parallel \overline{AB}$交$\overline{O_1A}$的延長線於 C 點、作$\overline{O_2F} \parallel \overline{DE}$交$\overline{O_1D}$於 F 點，如圖 8.3-48 所示； 所以$\overline{O_1A} \perp \overline{AB}$、$\overline{O_2B} \perp \overline{AB}$， $\angle O_1AB$＝90°； 所以$\overline{O_1D} \perp \overline{DE}$、$\overline{O_2E} \perp \overline{DE}$， $\angle O_1DE$＝90°； $\overline{O_1A}$＝$\overline{O_1D}$為圓 O_1 的半徑， $\overline{O_1A}$＝$\overline{O_1D}$＝4； $\overline{O_2B}$＝$\overline{O_2E}$為圓 O_2 的半徑， $\overline{O_2B}$＝$\overline{O_2E}$＝2	作圖 已知圓 O_1、圓 O_2 的半徑分別為 4 公分、2 公分，$\overline{O_1O_2}$＝10 公分，
(2) $\overline{O_1A} \parallel \overline{O_2B}$ (即$\overline{O_1C} \parallel \overline{O_2B}$)	由(1) $\overline{O_1A} \perp \overline{AB}$、$\overline{O_2B} \perp \overline{AB}$ & 定理 3.2-1 兩條直線如都與一直線垂直，則此二直線互相平行
(3) 四邊形 ACO_2B 為平行四邊形	由(1) $\overline{O_2C} \parallel \overline{AB}$ & (2) $\overline{O_1C} \parallel \overline{O_2B}$ & 兩組對邊平行為平行四邊形
(4) $\overline{O_2C}$＝$\overline{AB}$、$\overline{AC}$＝$\overline{O_2B}$＝2	由(3) & 平行四邊形兩組對邊相等 & 由(1) $\overline{O_2B}$＝2

(5) $\overline{O_1C}=\overline{O_1A}+\overline{AC}=4+2=6$	如圖 8.3-48 所示，全量等於分量之和 & (1) $\overline{O_1A}=4$ & (4) $\overline{AC}=2$
(6) $\angle O_1CO_2=\angle O_1AB=90°$	由(1) $\overline{O_2C} \parallel \overline{AB}$ & 同位角相等 & (1) $\angle O_1AB=90°$
(7) $\triangle O_1CO_2$ 為直角三角形，$\overline{O_1C}^2+\overline{O_2C}^2=\overline{O_1O_2}^2$	由(6) $\angle O_1CO_2=90°$ 畢氏定理
(8) $6^2+\overline{AB}^2=10^2$	由(7) & (5) $\overline{O_1C}=6$ & (4) $\overline{O_2C}=\overline{AB}$ & 已知$\overline{O_1O_2}=10$
(9) $\overline{AB}=-8$ 或 $\overline{AB}=8$	由(8) 求平方根
(10) 所以內公切線段$\overline{AB}=8$	由(9) & $\overline{AB}$為線段長度必大於 0
(11) $\overline{O_1D} \parallel \overline{O_2E}$	由(1) $\overline{O_1D}\perp\overline{DE}$、$\overline{O_2E}\perp\overline{DE}$ & 定理 3.2-1 兩條直線如都與一直線垂直，則此二直線互相平行
(12) 四邊形 DEO_2F 為平行四邊形	由(1) $\overline{O_2F} \parallel \overline{DE}$ & (11) $\overline{O_1D} \parallel \overline{O_2E}$ & 兩組對邊平行為平行四邊形
(13) $\overline{DF}=\overline{O_2E}=2$、$\overline{O_2F}=\overline{DE}$	由(12) & 平行四邊形兩組對邊相等 & 由(1) $\overline{O_2E}=2$
(14) $\overline{O_1D}=\overline{O_1F}+\overline{DF}$	如圖 8.3-48 所示，全量等於分量之和
(15) $\overline{O_1F}=\overline{O_1D}-\overline{DF}$ $=4-2=2$	由(14) 等量減法公理 & (1) $\overline{O_1D}=4$ & (13) $\overline{DF}=2$
(16) $\angle O_1FO_2=\angle O_1DE=90°$	由(1) $\overline{O_2F} \parallel \overline{DE}$ & 同位角相等 & (1) $\angle O_1DE=90°$
(17) $\triangle O_1FO_2$ 為直角三角形，$\overline{O_1F}^2+\overline{O_2F}^2=\overline{O_1O_2}^2$	由(16) $\angle O_1FO_2=90°$ 畢氏定理
(18) $2^2+\overline{DE}^2=10^2$	由(17) & (15) $\overline{O_1F}=2$ & (13) $\overline{O_2F}=\overline{DE}$ & 已知$\overline{O_1O_2}=10$
(19) $\overline{DE}=-4\sqrt{6}$ 或 $\overline{DE}=4\sqrt{6}$	由(18) 求平方根
(20) 所以外公切線段$\overline{DE}=4\sqrt{6}$	由(19) & $\overline{DE}$為線段長度必大於 0

例題 8.3-47：

如圖 8.3-49，若圓 O_1、圓 O_2 外切於 P 點，且半徑各為 4 cm、16 cm，外公切線$\overline{AB}$交內公切線$\overline{PQ}$於 Q 點，A、B 為切點，則：

(1) $\overline{AB}=$________cm。

(2) $\overline{PQ}=$________cm。

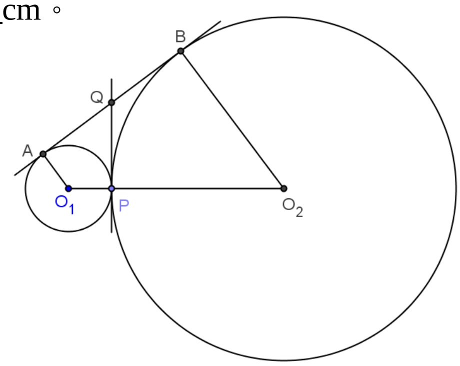


圖 8.3-49

想法：(1) 過 O_1 作$\overline{O_1C} \parallel \overline{AB}$，則$\overline{O_1C}=\overline{AB}$，如圖 8.3-49(a)；

(2) 利用畢氏定理求出$\overline{O_1C}$，則外公切線$\overline{AB}=\overline{O_1C}$；

(3) 再利用定理 7.3-2 切線長定理(自圓外一點到圓的兩切點連線段等長)，$\overline{PQ}=\overline{AQ}=\overline{BQ}$來求出$\overline{PQ}$之值

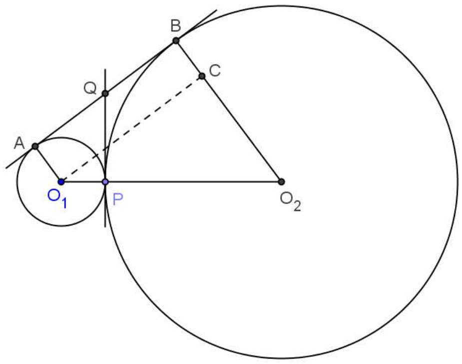


圖 8.3-49(a)

解：

敘述	理由
(1) 過 O_1 作$\overline{O_1C} \parallel \overline{AB}$，如圖 8.3-49(a) 所以$\overline{O_1A}\perp\overline{AB}$、$\overline{O_2B}\perp\overline{AB}$， $\angle O_2BA=90°$； $\overline{O_1A}$為圓 O_1 的半徑，$\overline{O_1A}=4$； $\overline{O_2B}$為圓 O_2 的半徑，$\overline{O_2B}=16$	作圖 已知$\overline{AB}$為外公切線 已知圓 O_1 半徑為 4 cm 已知圓 O_2 半徑為 16 cm
(2) $\overline{O_1A} \parallel \overline{O_2B}$	由(1) $\overline{O_1A}\perp\overline{AB}$、$\overline{O_2B}\perp\overline{AB}$ & 定理 3.2-1 兩條直線如都與一直線垂直，則此二直線互相平行

(3) 四邊形 $ABCO_1$ 為平行四邊形	由(1) $\overline{O_1C} \parallel \overline{AB}$ ＆ (2) $\overline{O_1A} \parallel \overline{O_2B}$ ＆ 兩組對邊平行為平行四邊形
(4) $\overline{O_1C}=\overline{AB}$、$\overline{BC}=\overline{O_1A}=4$	由(3) ＆ 平行四邊形兩組對邊相等 ＆ 由(1) $\overline{O_1A}=4$
(5) $\overline{O_2B}=\overline{O_2C}+\overline{BC}$	如圖 8.3-49(a)所示，全量等於分量之和
(6) $\overline{O_2C}=\overline{O_2B}-\overline{BC}$ $=16-4=12$	由(5) 等量減法公理 ＆ (1) $\overline{O_2B}=16$ ＆ (4) $\overline{BC}=4$
(7) $\overline{O_1O_2}=4+16=20$	已知若圓 O_1、圓 O_2 外切於 P 點，且半徑各為 4 cm、16 cm ＆ 兩圓外切，連心線長等於兩半徑之和
(8) $\angle O_2CO_1=\angle O_2BA=90°$	由(1) $\overline{O_1C} \parallel \overline{AB}$ ＆ 同位角相等 ＆ (1) $\angle O_2BA=90°$
(9) $\triangle O_1CO_2$ 為直角三角形， $\overline{O_1C}^2+\overline{O_2C}^2=\overline{O_1O_2}^2$	由(8) $\angle O_2CO_1=90°$ 畢氏定理
(10) $\overline{AB}^2+12^2=20^2$	由(9) ＆ (4) $\overline{O_1C}=\overline{AB}$ ＆ (6) $\overline{O_2C}=12$ ＆ (7) $\overline{O_1O_2}=20$
(11) $\overline{AB}=-16$ 或 $\overline{AB}=16$	由(10) 求平方根
(12) 所以外公切線段$\overline{AB}=16$	由(11) ＆ $\overline{AB}$為線段長度必大於 0
(13) $\overline{PQ}=\overline{AQ}=\overline{BQ}$	已知外公切線$\overline{AB}$交內公切線$\overline{PQ}$於 Q 點 ＆ 定理 7.3-2 切線長定理(自圓外一點到圓的兩切點連線段等長)
(14) $\overline{AB}=\overline{AQ}+\overline{BQ}$	如圖 8.3-49(a)所示，全量等於分量之和
(15) $16=\overline{PQ}+\overline{PQ}$	由(14) ＆ (13) $\overline{PQ}=\overline{AQ}=\overline{BQ}$ ＆ (12) $\overline{AB}=16$
(16) $\overline{PQ}=16÷2=8$	由(15) 解一元一次方程式

定理 8.3-3 同圓中大弦對小弦心距、小弦對大弦心距定理

同一圓中不等長之兩弦，大弦的弦心距小於小弦的弦心距。

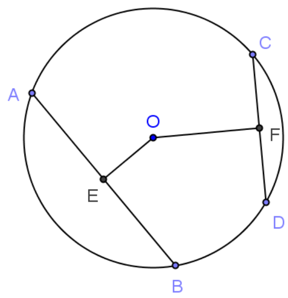


圖 8.3-50

已知：如圖 8.3-50，$\overline{AB}$與$\overline{CD}$為圓 O 之兩弦，$\overline{AB} > \overline{CD}$，且$\overline{OE}\perp\overline{AB}$、$\overline{OF}\perp\overline{CD}$。

求證： $\overline{OE} < \overline{OF}$

想法：利用畢氏定理 & 等量減不等量公理。

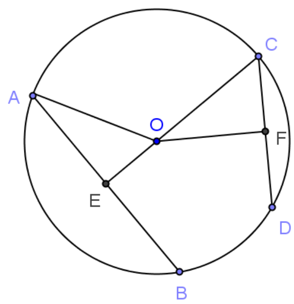


圖 8.3-50(a)

證明：

敘述	理由
(1) 作$\overline{OA}$及$\overline{OC}$，如圖 8.3-50(a)， $\overline{OA}=\overline{OC}$	幾何作圖 同圓中半徑等長
(2) $\overline{AE}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ & $\overline{CF}=\frac{1}{2}\overline{CD}$	已知$\overline{OE}\perp\overline{AB}$、$\overline{OF}\perp\overline{CD}$ & 通過圓心對弦作垂直線必平分此弦
(3) $\overline{AE}=\frac{1}{2}\overline{AB} > \frac{1}{2}\overline{CD}=\overline{CF}$	由(2) & 已知$\overline{AB} > \overline{CD}$
(4) △AOE 為直角三角形 $\overline{OE}^2=\overline{OA}^2-\overline{AE}^2$	已知$\overline{OE}\perp\overline{AB}$ 畢氏定理
(5) △COF 為直角三角形 $\overline{OF}^2=\overline{OC}^2-\overline{CF}^2$	已知$\overline{OF}\perp\overline{CD}$ 畢氏定理
(6) $\overline{OA}^2=\overline{OC}^2$ & $\overline{AE}^2>\overline{CF}^2$	由(1) $\overline{OA}=\overline{OC}$ & (3) $\overline{AE} > \overline{CF}$

(7) 所以$\overline{OA}^2-\overline{AE}^2<\overline{OC}^2-\overline{CF}^2$	由(6) & 等量減不等量公理(詳見第一章)
(8) 所以$\overline{OE}^2<\overline{OF}^2$	由(7) & (4) & (5) 代換
(9) 所以$\overline{OE}<\overline{OF}$	由(8)

Q.E.D.

例題 8.3-48：

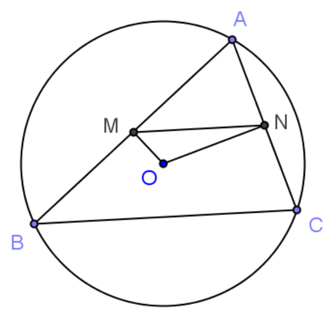


圖 8.3-51

已知：如圖 8.3-51，$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 是圓 O 的三條弦，∠C＞∠B，$\overline{OM}\perp\overline{AB}$，$\overline{ON}\perp\overline{AC}$，

求證：∠OMN ＞∠ONM。

想法：(1) 在△ABC 中，利用三角形大角對大邊的性質，可得知$\overline{AB}>\overline{AC}$；

(2) 在圓 O 中，利用同圓中大弦對小弦心距、小弦對大弦心距定理，可得$\overline{ON}>\overline{OM}$；

(3) 在△OMN 中，利用三角形大邊對大角的性質，可得∠OMN＞∠ONM

證明：

敘述	理由
(1) △ABC 中，$\overline{AB}>\overline{AC}$	已知∠C＞∠B & 三角形大邊對大角定理
(2) 圓 O 中，$\overline{ON}>\overline{OM}$	由(1) $\overline{AB}>\overline{AC}$ & 已知$\overline{OM}\perp\overline{AB}$，$\overline{ON}\perp\overline{AC}$ & 同圓中大弦對小弦心距、小弦對大弦心距定理
(3) △OMN 中，∠OMN＞∠ONM	由(2) $\overline{ON}>\overline{OM}$ & 三角形大邊對大角定理

例題 8.3-49：

如圖 8.3-52，在圓 O 中，$\overline{OP}$、$\overline{OQ}$、$\overline{OR}$、$\overline{OS}$分別為弦$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$、$\overline{GH}$的弦心距。已知$\overline{AB}=5$，$\overline{CD}=4$，$\overline{EF}=6$，$\overline{GH}=8$。試判斷$\overline{OP}$、$\overline{OQ}$、$\overline{OR}$與$\overline{OS}$的大小。

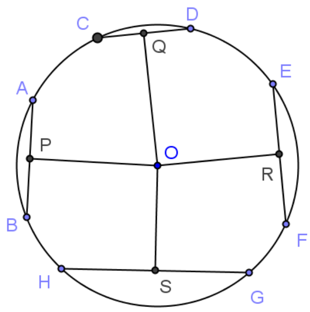


圖 8.3-52

想法：在圓 O 中，利用同圓中大弦對小弦心距、小弦對大弦心距定理，判斷$\overline{OP}$、$\overline{OQ}$、$\overline{OR}$與$\overline{OS}$的大小。

解：

敘述	理由
(1) 在圓 O 中，$\overline{OQ}>\overline{OP}>\overline{OR}>\overline{OS}$	已知$\overline{OP}$、$\overline{OQ}$、$\overline{OR}$、$\overline{OS}$分別為弦$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$、$\overline{GH}$的弦心距 & 已知$\overline{AB}=5$，$\overline{CD}=4$，$\overline{EF}=6$，$\overline{GH}=8$ & 同圓中大弦對小弦心距、小弦對大弦心距定理

定理 8.3-4 畢氏定理推廣

三角形中，銳角對邊的平方，等於其他兩邊的平方和減去這兩邊中一邊與另一邊在這邊上射影乘積的兩倍。

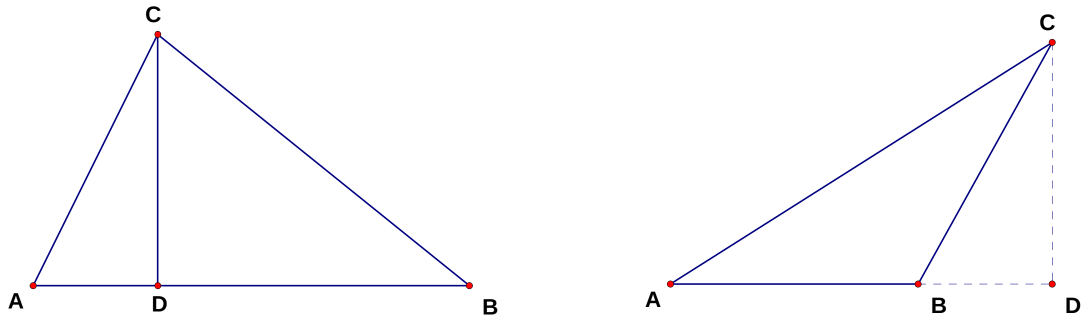


圖 8.3-53

已知：如圖 8.3-53，△ABC 中，∠A 為銳角。

求證：$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AD}$

想法：利用畢氏定理。

證明：

敘述	理由
(1) 過 C 點作$\overline{CD}\perp\overline{AB}$交$\overline{AB}$於 D 點	垂直線作圖
(2) △CDB 為直角三角形 $\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2$	由(1) $\overline{CD}\perp\overline{AB}$ & ∠CDB＝90° 畢氏定理
(3) △CDA 為直角三角形 $\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2$	由(1) $\overline{CD}\perp\overline{AB}$ & ∠CDA＝90° 畢氏定理
(4) $\overline{CD}^2=\overline{AC}^2-\overline{AD}^2$	由(3) 等量減法公理
(5) $\overline{BC}^2=(\overline{AB}-\overline{AD})^2+\overline{AC}^2-\overline{AD}^2$ $=\overline{AB}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AD}+\overline{AD}^2+\overline{AC}^2-\overline{AD}^2$ $=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AD}$	由(2) & $\overline{BD}=\left\|\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{AD}}\right\|$ & (4) $\overline{CD}^2=\overline{AC}^2-\overline{AD}^2$ & 展開化簡
(6) 所以$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AD}$	由(5)

Q. E. D.

習題 8.3

習題 8.3-1

已知：如圖 8.3-54，$\overline{AD}$為△ABC 中$\overline{BC}$上的高

求證：$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=\overline{BD}^2-\overline{CD}^2$

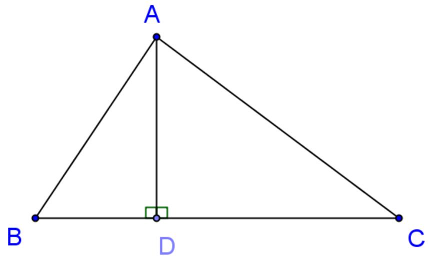


圖 8.3-54

習題 8.3-2

如圖 8.3-55，已知△ABC、△ACD、△ADE 為直角三角形，其中 ∠B＝∠ACD＝∠ADE＝90°，且$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=1$，求$\overline{AE}$＝？

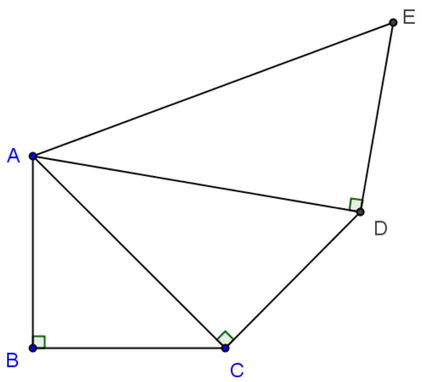


圖 8.3-55

習題 8.3-3

如圖 8.3-56，$\overline{AE}\perp\overline{BC}$，∠B＝30°，∠ADE＝60°，∠C＝45°，若$\overline{AD}=2$，求$\overline{BD}$與$\overline{AC}$之值。

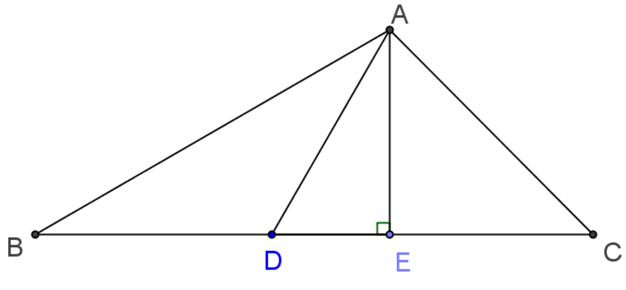


圖 8.3-56

習題 8.3-4

如圖 8.3-57，圓 I 為直角三角形 ABC 的內切圓，D、E、F 為切點，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$。若 $\overline{AB}=4$ 公分，$\overline{BC}=3$ 公分，求圓 I 的半徑。

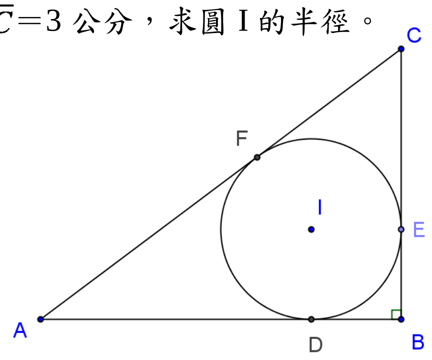


圖 8.3-57

習題 8.3-5

如圖 8.3-58，已知 I 為△ABC 的內心，若∠BIC＝135°，且$\overline{AB}=7$ 公分，$\overline{AC}=24$ 公分，試求△ABC 內切圓的半徑。

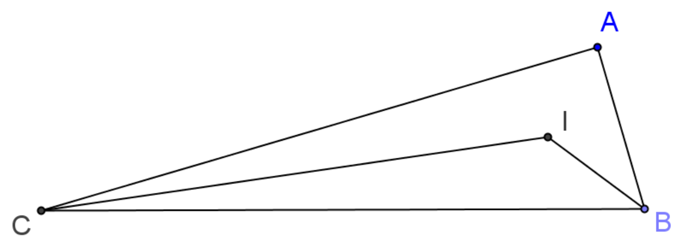


圖 8.3-58

習題 8.3-6

有一個直角三角形，其外心到三頂點的距離和為 75 公分，若有一股長為 14 公分，則：

(1) 此直角三角形外接圓半徑為何？

(2) 此三角形的另一股長為何？

(3) 此直角三角形內切圓半徑為何？

習題 8.3-7

如圖 8.3-59，長方形 ABCD 中，對角線$\overline{AC}$、$\overline{BD}$相交於 O 點，且$\overline{AD}=24$，$\overline{AB}=7$，求$\overline{OD}$之值。

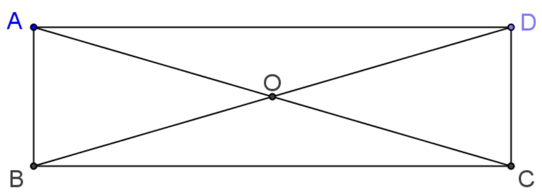


圖 8.3-59

習題 8.3-8

如圖 8.3-60，長方形 ABCD 中，對角線$\overline{AC}$、$\overline{BD}$相交於 O 點，且$\overline{OA}$＝13，$\overline{BC}$＝10，求$\overline{OC}$＋$\overline{OD}$＋$\overline{CD}$之值。

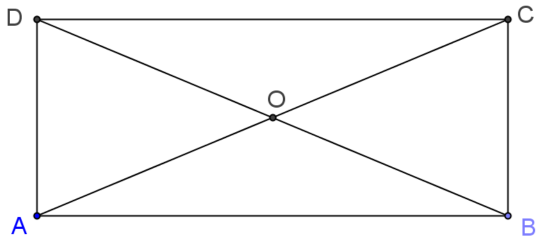


圖 8.3-60

習題 8.3-9

如圖 8.3-61，矩形 ABCD 中，$\overline{AB}$=5，$\overline{AD}$=12。以 A 為圓心，r 為半徑畫圓，使得 B、 C、D 中的一點在圓外，兩點在圓內，求 r 的範圍。

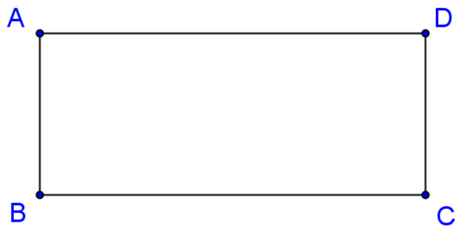


圖 8.3-61

習題 8.3-10

如圖 8.3-62，已知半圓 O 的半徑為 2，且 C、D、E 三點將半圓弧分成四等分，則$\overline{AC}^2$＋$\overline{AD}^2$＋$\overline{AE}^2$＝？

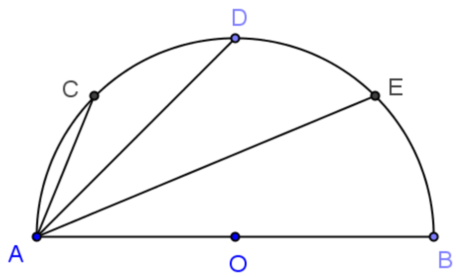


圖 8.3-62

習題 8.3-11

已知有一圓 O，$\overline{AB}$為其一弦，且$\overline{AB}$＝16 公分，此弦到圓心的距離是 15 公分，則此圓 O 的直徑為______公分。

習題 8.3-12

如圖 8.3-63，圓 O 是半徑為 5 的圓，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為圓 O 的兩弦，$\overline{OM}\perp\overline{AB}$，$\overline{ON}\perp\overline{CD}$。則：

(1) 若 $\overline{OM}=4$，則 $\overline{AB}=$？

(2) 若 $\overline{CD}=8$，則 $\overline{ON}=$？

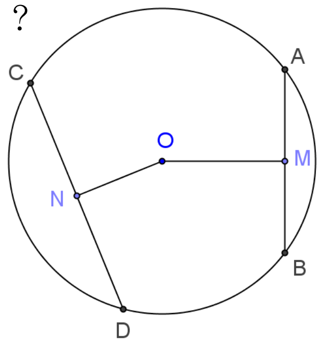


圖 8.3-63

習題 8.3-13

如圖 8.3-64，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$與$\overline{EF}$皆為圓 O 的弦，其弦心距分別為$\overline{OX}$、$\overline{OY}$與$\overline{OZ}$。已知$\overline{AB}=16$，$\overline{OX}=6$，$\overline{OZ}=8$，$\overline{CD}=14$，則：

(1) 圓 O 的半徑＝______。

(2) $\overline{OY}=$______。

(3) 弦$\overline{EF}=$______。

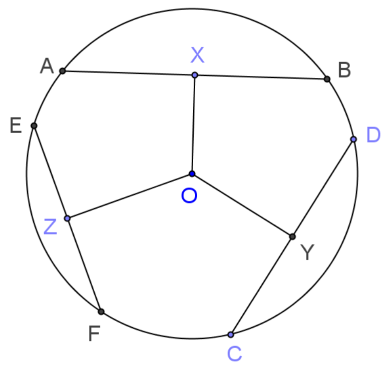


圖 8.3-64

習題 8.3-14

如圖 8.3-65，$\overline{AB}$ 是圓 O 的直徑，$\overline{AB}\perp\overline{CD}$ 於 E 點，且 $\overline{AE}=\overline{CD}=20$，則 $\overline{OE}=$？

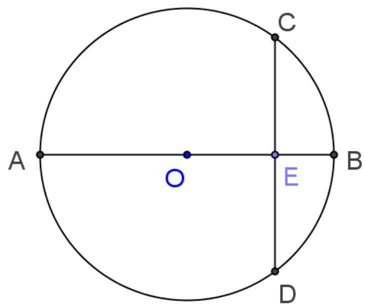


圖 8.3-65

習題 8.3-15

如圖 8.3-66，直線 L 與圓 O 相切於 P 點，A 為直線 L 上一點，$\overline{AO}$與圓 O 交於 B 點。若$\overline{PA}=12$，$\overline{AB}=8$，則圓 O 的半徑為________。

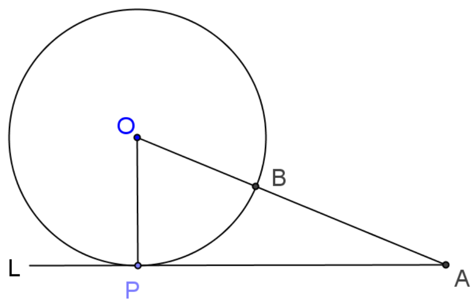


圖 8.3-66

習題 8.3-16

如圖 8.3-67，$\overline{PA}$與$\overline{PB}$分別與圓 O 相切於 A、B 兩點。已知圓 O 的半徑為 8，$\overline{OP}=16$。則$\overline{PA}=$_____，$\overline{PB}=$______，∠APB＝_____度。

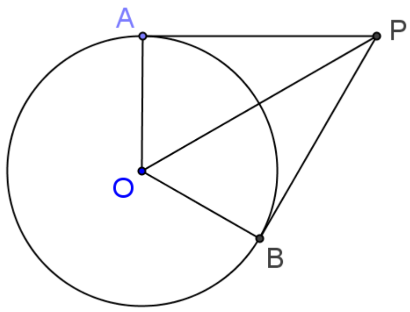


圖 8.3-67

習題 8.3-17

如圖 8.3-68，△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90°，半圓和$\overline{AC}$相切於 D 點，和$\overline{BC}$相交於 B、E 兩點。已知$\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=6$，則圓 O 的半徑為______。

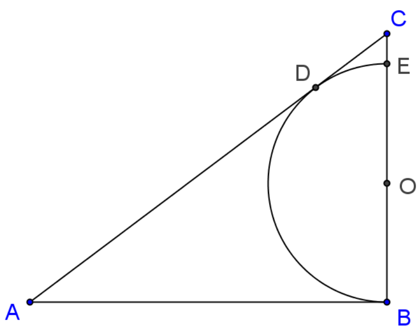


圖 8.3-68

習題 8.3-18

如圖 8.3-69，圓 O_1 與圓 O_2 外切，且直線 L 分別切圓 O_1 與圓 O_2 於 A、B 兩點。已知圓 O_1 與圓 O_2 的半徑分別為 9 和 4，則外公切線段 $\overline{AB}$＝______。

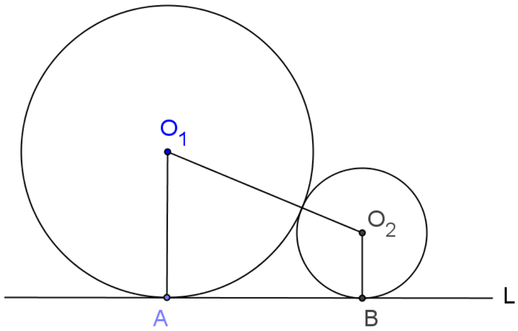


圖 8.3-69

習題 8.3-19

如圖 8.3-70，直線 L 分別切圓 O_1 與圓 O_2 於 A、B 兩點。已知圓 O_1 與圓 O_2 的半徑分別為 3 和 5，且內公切線段 $\overline{AB}$＝15，則連心線段 $\overline{O_1O_2}$＝_____。

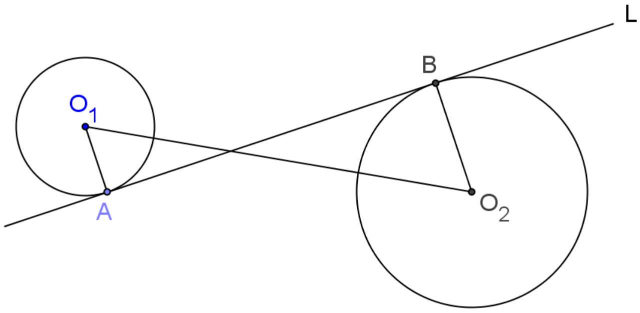


圖 8.3-70

習題 8.3-20

如圖 8.3-71，已知圓 O_1、圓 O_2 的半徑分別為 5 公分、2 公分。

若 $\overline{O_1O_2}$＝10 公分，則：

(1) 外公切線段長為________公分。

(2) 內公切線段長為________公分。

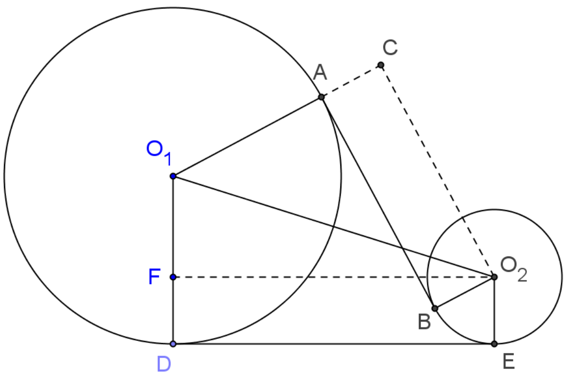


圖 8.3-71

習題 8.3-21

如圖 8.3-72，在圓 O 中，$\overline{OP}$、$\overline{OQ}$、$\overline{OR}$、$\overline{OS}$分別為弦$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$、$\overline{GH}$的弦心距。已知$\overline{AB}$＝5，$\overline{CD}$＝6，$\overline{EF}$＝7，$\overline{GH}$＝8。試判斷$\overline{OP}$、$\overline{OQ}$、$\overline{OR}$與$\overline{OS}$的大小。

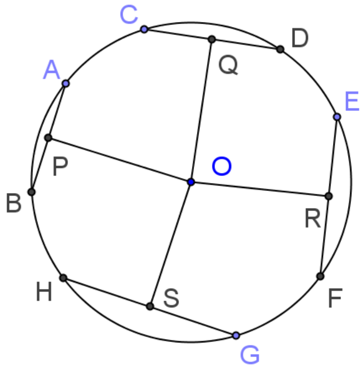


圖 8.3-72

本章重點

一 、 本章有關比例的介紹：

1. 在一比例式中，**內項乘積等於外項乘積**。
2. **比例中項定理：**在比例式 $a:b=b:c$ 中，b 為 a、c 的比例中項，且 $b^2=a\times c$。
3. **更比定理：**若 $a:b=c:d$，則 $a:c=b:d$ 且 $d:b=c:a$。
4. **反比定理：**若 $a:b=c:d$，則 $b:a=d:c$。
5. **合比定理：**若 $a:b=c:d$，則 $(a+b):b=(c+d):d$。
6. **分比定理：**若 $a:b=c:d$，則 $(a-b):b=(c-d):d$。
7. **合分比定理：**若 $a:b=c:d$，則 $(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$。
8. **比例乘法定理：**若 $a:b=c:d$ 且 $p:q=m:n$，
   則 $(a\times p):(b\times q)=(c\times m):(d\times n)$。
9. **和比定理：**若 $a:b=c:d=e:f=r$，則 $(a+c+e):(b+d+f)=r$。
10. **倍比定理：**若 a，b，m 為任意三數，則 $a:b=(m\times a):(m\times b)$。
11. **若 $a:b=c:d$，則我們可以假設 $a=c\times r$、$b=d\times r$，(r 為常數)。**
12. **三角形之平行線截比例線段定理：**
    三角形一邊的平行線，必分另兩邊成比例線段。
13. **三角形一邊的平行判別定理：**
    若一直線截三角形的兩邊成比例線段，則這直線必平行這三角形的第三邊。
14. **平行線截比例線段定理:**
    任意兩直線被一組平行線所截，則截於平行線間的對應線段成比例。
15. **三角形內角平分線定理：**
    三角形任一內角的角平分線，內分對邊所成兩線段的比，等於夾這內角的兩邊的比。
16. **三角形外角平分線定理：**
    三角形任一外角的角平分線，外分對邊延長線所成兩線段的比，等於夾這外角的鄰角兩邊的比。

二、 本章有關相似形的介紹：

1. **相似多邊形邊長和之比值定理：**
   兩相似多邊形邊長和的比值等於它們的任意兩對應邊的比值。

2. **三角形(AAA)相似定理：**
   若一個三角形的三個內角與另一個三角形的三個內角對應相等，則這兩個三角形相似。

3. **直角三角形斜邊上的高分成相似形定理：(直角三角形子母相似定理)**
   直角三角形斜邊上的高分原直角三角形成兩相似三角形，並各與原直角三角形相似。

4. **直角三角形中比例中項定理：**
   直角三角形斜邊上的高分斜邊成兩線段，斜邊上的高為這兩線段的比例中項。

5. **直角三角形中直角邊比例中項定理：**
   直角三角形斜邊上的高分斜邊成兩線段，任一直角邊為斜邊與這直角邊相鄰斜邊上的線段的比例中項。

6. **三角形(SAS)相似定理：**
   若兩三角形中有一相同角度的角，又夾這角的兩邊成比例，則這兩個三角形相似。

7. **三角形(SSS)相似定理：**若兩三角形對應邊的比相等，則這兩個三角形相似。

8. **相似多邊形分成定理：**
   兩相似多邊形，可分成個數相同的相似三角形，且其關係位置相同。

9. **相似多邊形組成定理：**
   兩多邊形，若由個數相等，關係位置相同的相似三角形所組成，則這兩多邊形相似。

10. **兩弦內分定理(圓內冪性質)：**
    若兩弦相交於圓內，則一弦上兩線段的積等於另一弦上兩線段的積。

11. **兩割線外分定理(圓外冪性質)：**
    若兩割線相交於圓外一點，則一割線的全長與其圓外線段的積，等於另一割線的全長與其圓外線段的積。

12. **切線與割線外分定理(圓切冪性質)：**
    若切線與割線相交，則切線長是割線全長與圓外線段的比例中項。

三、本章有關畢氏定理的介紹：

1. **畢氏定理：**直角三角形中，兩直角邊的平方和等於斜邊的平方和。

2. 常見的直角三角形三邊長之比為：
   1：$\sqrt{3}$：2 ； 1：1：$\sqrt{2}$ ； 3：4：5 ； 5：12：13 ； 8：15：17 ； 7：24：25 ； 9：40：41 。

3. 30°-90°-60°的直角三角形邊長比為 1：2：$\sqrt{3}$ 。

4. 等腰直角三角形邊長比為 1：1：$\sqrt{2}$

5. **畢氏定理的逆定理：**
   三角形的三邊中，若其中兩邊的平方和等於第三邊的平方和，則此三角形為直角三角形。

6. **同圓中大弦對小弦心距、小弦對大弦心距定理：**
   同一圓中不等長之兩弦，大弦的弦心距小於小弦的弦心距。

7. **畢氏定理推廣：**
   三角形中，銳角對邊的平方，等於其他兩邊的平方和減去這兩邊中一邊與另一邊在這邊上射影乘積的兩倍。

歷年基測題目

1. 如圖 8.1，過 P 點的兩直線將矩形 ABCD 分成甲、乙、丙、丁四個矩形，其中 P 在$\overline{AC}$上，且$\overline{AP}$：$\overline{PC}$＝$\overline{AD}$：$\overline{AB}$＝4：3。下列對於矩形是否相似的判斷，何者正確？ **(98-1)**

(A) 甲、乙不相似 (B) 甲、丁不相似 (C) 丙、乙相似 (D) 丙、丁相似

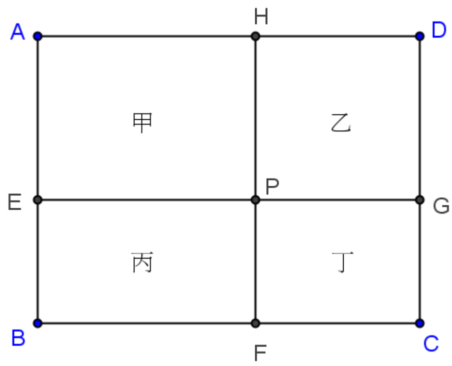


圖 8.1

解答：(A) 甲、乙不相似

想法： 若兩多邊形對應角相等且對應邊成比例，則此兩多邊形相似

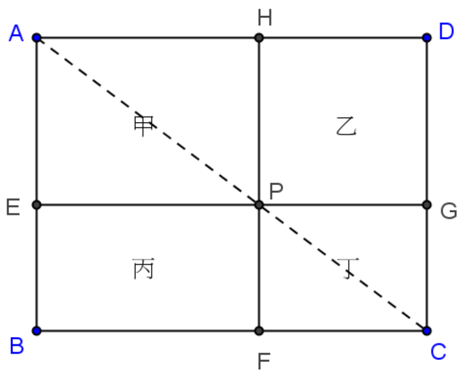


圖 8.1(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{AC}$，如圖 8.1(a)所示； 假設$\overline{AD}$＝4t、$\overline{AB}$＝3t	作圖 已知$\overline{AP}$：$\overline{PC}$＝$\overline{AD}$：$\overline{AB}$＝4：3；
(2) ∠AEP＝∠HPG＝∠ABC＝∠PFC＝90° $\overline{AE}$＝$\overline{HP}$＝$\overline{DG}$、$\overline{EB}$＝$\overline{PF}$＝$\overline{GC}$ $\overline{AH}$＝$\overline{EP}$＝$\overline{BF}$、$\overline{HD}$＝$\overline{PG}$＝$\overline{FC}$	已知甲、乙、丙、丁皆為矩形 & 矩形四個內角皆為直角 & 矩形兩組對邊相等
(3) $\overline{AB}$ ∥ $\overline{HF}$	由(2) ∠ABC＝∠PFC＝90° & 同位角相等則兩線互相平行

(4) $\overline{EG} \parallel \overline{BC}$	由(2) ∠ABC＝∠AEP＝90° & 同位角相等則兩線互相平行
(5) 在△AEP 與△PFC 中 ∠EAP＝∠FPC ∠APE＝∠PCF ∠AEP＝∠PFC	如圖 8.1(a) 由(3) $\overline{AB} \parallel \overline{HF}$ & 同位角相等 由(4) $\overline{EG} \parallel \overline{BC}$ & 同位角相等 由(2) ∠AEP＝∠PFC＝90°
(6) 所以△AEP～△PFC	由(5) & 根據(A.A.A.)三角形相似定理
(7) $\overline{AE}:\overline{PF}=\overline{EP}:\overline{FC}=\overline{AP}:\overline{PC}=4:3$	由(6) & 相似多邊形對應邊成比例 & 已知$\overline{AP}:\overline{PC}=4:3$
(8) $\overline{AE}:\overline{PF}=\overline{AE}:\overline{EB}=4:3$	由(7) $\overline{AE}:\overline{PF}=4:3$ & (2) $\overline{EB}=\overline{PF}$
(9) $3\overline{AE}=4\overline{EB}$（即$\overline{AE}=\frac{4}{3}\overline{EB}$）	由(8) $\overline{AE}:\overline{EB}=4:3$ & 外項乘積等於內項乘積
(10) $\overline{AB}=\overline{AE}+\overline{EB}$	如圖 8.1(a)，全量等於分量之和
(11) $3t=\frac{4}{3}\overline{EB}+\overline{EB}$	由(10)＆(1)$\overline{AB}=3t$ & (9)$\overline{AE}=\frac{4}{3}\overline{EB}$
(12) $\overline{EB}=\frac{9}{7}t$	由(11) & 解一元一次方程式
(13) $\overline{EB}=\overline{PF}=\overline{GC}=\frac{9}{7}t$	由(2)$\overline{EB}=\overline{PF}=\overline{GC}$ & (12)$\overline{EB}=\frac{9}{7}t$
(14) $\overline{AE}=\frac{4}{3}\overline{EB}=\frac{4}{3}\times\frac{9}{7}t=\frac{12}{7}t$	由(9) $\overline{AE}=\frac{4}{3}\overline{EB}$ & (12) $\overline{EB}=\frac{9}{7}t$
(15) $\overline{AE}=\overline{HP}=\overline{DG}=\frac{12}{7}t$	由(2)$\overline{AE}=\overline{HP}=\overline{DG}$ ＆(14)$\overline{AE}=\frac{12}{7}t$
(16) $\overline{EP}:\overline{FC}=\overline{AH}:\overline{HD}=4:3$	由(7)$\overline{EP}:\overline{FC}=4:3$ & (2) $\overline{EP}=\overline{AH}$、$\overline{FC}=\overline{HD}$
(17) $3\overline{AH}=4\overline{HD}$（即$\overline{AH}=\frac{4}{3}\overline{HD}$）	由(16) $\overline{AH}:\overline{HD}=4:3$ & 外項乘積等於內項乘積
(18) $\overline{AD}=\overline{AH}+\overline{HD}$	如圖 8.1(a)，全量等於分量之和
(19) $4t=\frac{4}{3}\overline{HD}+\overline{HD}$	由(18)＆(1)$\overline{AD}=4t$、(17)$\overline{AH}=\frac{4}{3}\overline{HD}$

(20) $\overline{HD}=\frac{12}{7}t$	由(19) & 解一元一次方程式
(21) $\overline{HD}=\overline{PG}=\overline{FC}=\frac{12}{7}t$	由(2)$\overline{HD}=\overline{PG}=\overline{FC}$ &(20)$\overline{HD}=\frac{12}{7}t$
(22) $\overline{AH}=\frac{4}{3}\overline{HD}=\frac{4}{3}\times\frac{12}{7}t=\frac{16}{7}t$	由(17)$\overline{AH}=\frac{4}{3}\overline{HD}$ & (20)$\overline{HD}=\frac{12}{7}t$
(23) $\overline{AH}=\overline{EP}=\overline{BF}=\frac{16}{7}t$	由(2)$\overline{AH}=\overline{EP}=\overline{BF}$&(22) $\overline{AH}=\frac{16}{7}t$
(24) 在甲(AEPH)與乙(HPGD)中	如圖 8.1(a)
$\overline{AE}：\overline{HP}=\frac{12}{7}t：\frac{12}{7}t=1：1$	由(14)$\overline{AE}=\frac{12}{7}t$ & (15) $\overline{HP}=\frac{12}{7}t$
$\overline{AH}：\overline{HD}=\frac{16}{7}t：\frac{12}{7}t=4：3$	由(22) $\overline{AH}=\frac{16}{7}t$ & (20) $\overline{HD}=\frac{12}{7}t$
(25) 所以甲(AEPH)與乙(DHPG)不相似	由(24) $\overline{AE}：\overline{HP}\neq\overline{AH}：\overline{HD}$
(26) 在甲(AEPH)與丁(PFCG)中	如圖 8.1(a)
$\overline{AE}：\overline{PF}=\frac{12}{7}t：\frac{9}{7}t=4：3$	由(14)$\overline{AE}=\frac{12}{7}t$ & (13) $\overline{PF}=\frac{9}{7}t$
$\overline{AH}：\overline{PG}=\frac{16}{7}t：\frac{12}{7}t=4：3$	由(22) $\overline{AH}=\frac{16}{7}t$ & (21) $\overline{PG}=\frac{12}{7}t$
$\overline{HP}：\overline{GC}=\frac{12}{7}t：\frac{9}{7}t=4：3$	由(15) $\overline{HP}=\frac{12}{7}t$ & (13) $\overline{GC}=\frac{9}{7}t$
$\overline{EP}：\overline{FC}=\frac{16}{7}t：\frac{12}{7}t=4：3$	由(23) $\overline{EP}=\frac{16}{7}t$ & (21) $\overline{FC}=\frac{12}{7}t$
∠EAH＝∠FPG、∠AHP＝∠PGC、∠EPH＝∠FCG、∠AEP＝∠PFC	已知甲(AEPH)與丁(PFCG)皆為矩形 & 矩形四個內角皆為直角
(27) 所以甲(AEPH)與丁(PFCG)相似	由(26)&對應角相等且對應邊成比例
(28) 在丙(EBFP)與乙(HPGD)中	如圖 8.1(a)
$\overline{EB}：\overline{HP}=\frac{9}{7}t：\frac{12}{7}t=3：4$	由(12) $\overline{EB}=\frac{9}{7}t$ & (15) $\overline{HP}=\frac{12}{7}t$
$\overline{EP}：\overline{HD}=\frac{16}{7}t：\frac{12}{7}t=4：3$	由(23) $\overline{EP}=\frac{16}{7}t$ & (20) $\overline{HD}=\frac{12}{7}t$
(29) 所以丙(EBFP)與乙(HPGD)不相似	由(28) $\overline{EB}：\overline{HP}\neq\overline{EP}：\overline{HD}$

(30) 在丙(EBFP)與丁(PFCG)中	如圖 8.1(a)
$\overline{EB}：\overline{PF}=\frac{9}{7}t：\frac{9}{7}t=1：1$	由(12) $\overline{EB}=\frac{9}{7}t$ & (13) $\overline{PF}=\frac{9}{7}t$
$\overline{EP}：\overline{PG}=\frac{16}{7}t：\frac{12}{7}t=4：3$	由(23) $\overline{EP}=\frac{16}{7}t$ & (21) $\overline{PG}=\frac{12}{7}t$
(31) 所以丙(EBFP)與丁(PFCG)不相似	由(30) $\overline{EB}：\overline{PF}\neq\overline{EP}：\overline{PG}$
(32) 所以本題選(A) 甲、乙不相似	由(25) & (27) & (29) & (31)

2. 如圖 8.2，$\overline{AD}$為圓 O 的直徑。

甲、乙兩人想在圓上找 B、C 兩點，作一個正三角形 ABC，其作法如下：

甲：1.作$\overline{OD}$中垂線，交圓 O 於 B、C 兩點。

2.連接$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{BC}$，△ABC 即為所求。

乙：1.以 D 為圓心，$\overline{OD}$為半徑畫弧，交圓 O 於 B、C 兩點。

2.連$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$，△ABC 即為所求。

對於甲、乙兩人的作法，判斷下列何者正確？ **(97-1)**

(A) 甲、乙皆正確　(B) 甲、乙皆錯誤

(C) 甲正確、乙錯誤　(D) 甲錯誤、乙正確

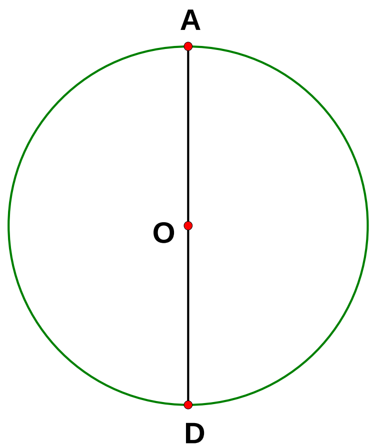


圖 8.2

解答：(A) 甲、乙皆正確

想法： (1) 依兩甲、乙兩人之作法作圖，並證明結果正確。

(2) 等邊三角形為正三角形

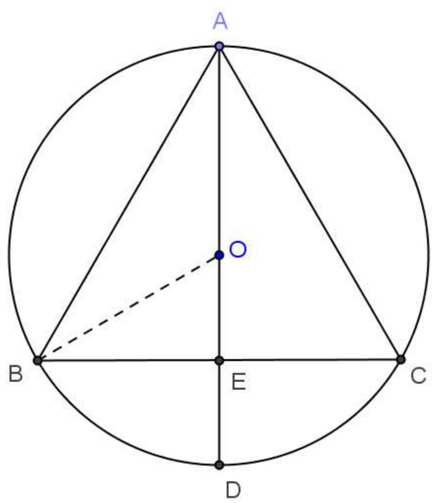


圖 8.2(a)

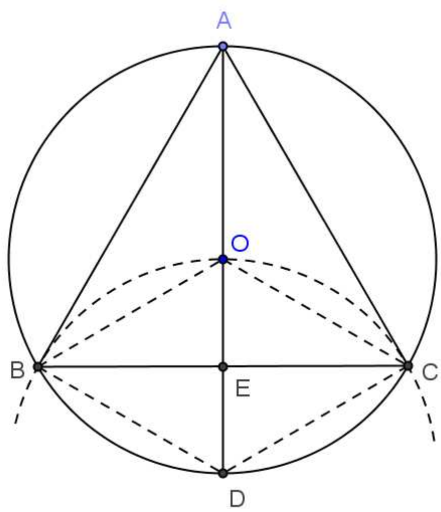


圖 8.2(b)

解：甲正確

敘述	理由
(1) 假設圓 O 的半徑$\overline{OA}=\overline{OD}=1$	假設 & 圓半徑皆相等
(2) 作$\overline{OD}$中垂線，交圓 O 於 B、C 兩點 連接$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{BC}$， 連接$\overline{OB}$，$\overline{OB}$為半徑，則$\overline{OB}=1$， 如圖 8.2(a)所示	依題意甲的作法作圖
(3) $\overline{OE}=\overline{ED}=\frac{1}{2}\overline{OD}=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$	由(2) $\overline{BC}$為$\overline{OD}$的中垂線，$\overline{OE}=\overline{ED}$ & (1) 假設$\overline{OD}=1$
(4) △OBE 為直角三角形 $\overline{BE}^2+\overline{OE}^2=\overline{OB}^2$	由(2) $\overline{BC}$為$\overline{OD}$的中垂線，$\overline{OD}\perp\overline{BC}$ & 畢氏定理
(5) $\overline{BE}^2+\frac{1}{2}^{2}=1^2$	由(4) & (3) $\overline{OE}=\frac{1}{2}$ & (2) $\overline{OB}=1$
(6) $\overline{BE}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\overline{BE}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	由(5) 求平方根
(7) 所以$\overline{BE}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	由(6) & $\overline{BE}$為線段長度必大於 0
(8) $\overline{CE}=\overline{BE}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	由(2) $\overline{BC}$為$\overline{OD}$的中垂線，$\overline{OD}\perp\overline{BC}$ & 根據定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理 & $\overline{OD}$垂直平分$\overline{BC}$ & (7)
(9) $\overline{BC}=\overline{CE}+\overline{BE}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$	全量等於分量之和&(8) $\overline{CE}=\overline{BE}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
(10) 同理可證：$\overline{AB}=\overline{AC}=\sqrt{3}$	由(2)~(9)
(11) $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}=\sqrt{3}$	由(9) & (10) 遞移律
(12) 所以△ABC 為正三角形	由(11) & 等邊三角形為正三角形
(13) 甲正確	由(12)

解：乙正確

敘述	理由
(1) 假設圓 O 的半徑$\overline{OA}=\overline{OD}=1$ 直徑$\overline{AD}=2\overline{OA}=2\times1=2$	假設 & 圓半徑皆相等 直徑為半徑的 2 倍
(2) 以 D 為圓心，$\overline{OD}$為半徑畫弧，交圓 O 於 B、C 兩點，連接$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$，如圖 8.2(b)所示 連接$\overline{OB}$與$\overline{OC}$，$\overline{OB}=\overline{OC}$為圓 O 半徑，則$\overline{OB}=\overline{OC}=1$， 連接$\overline{DB}$與$\overline{DC}$，$\overline{DB}=\overline{OD}=\overline{DC}$為圓 D 半徑，由(1) $\overline{OD}=1$， 因此$\overline{DB}=\overline{OD}=\overline{DC}=1$	依題意乙的作法作圖
(3) $\angle ABD=90°$	已知$\overline{AD}$為圓 O 的直徑 & 直徑所對的圓周角為直角
(4) $\triangle ABD$ 為直角三角形 $\overline{DB}^2+\overline{AB}^2=\overline{AD}^2$	由(3) $\angle ABD=90°$ 畢氏定理
(5) $1^2+\overline{AB}^2=2^2$	由(4) & (2) $\overline{DB}=1$ & (1) $\overline{AD}=2$
(6) $\overline{AB}=-\sqrt{3}$ 或 $\overline{AB}=\sqrt{3}$	由(5) 求平方根
(7) 所以$\overline{AB}=\sqrt{3}$	由(6) & $\overline{AB}$為線段長度必大於 0
(8) 同理可證：$\overline{AC}=\sqrt{3}$	同理：$\triangle ACD$ 為直角三角形
(9) 四邊形 BOCD 為菱形	由(2) $\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{DB}=\overline{DC}=1$ & 四邊等長的四邊形為菱形
(10) $\overline{BC}\perp\overline{OD}$ 且 $\overline{OE}=\overline{ED}$、$\overline{BE}=\overline{EC}$	由(9) & 菱形對角線互相垂直且平分
(11) $\overline{OE}=\overline{ED}=\frac{1}{2}\overline{OD}=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$	由(10) $\overline{OE}=\overline{ED}$ & (1) $\overline{OD}=1$
(12) $\triangle BOE$ 為直角三角形 $\overline{OE}^2+\overline{BE}^2=\overline{OB}^2$	由(11) $\overline{BC}\perp\overline{OD}$ 畢氏定理
(13) $\frac{1}{2}^2+\overline{BE}^2=1^2$	由(12)& (11) $\overline{OE}=\frac{1}{2}$ & (2) $\overline{OB}=1$
(14) $\overline{BE}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\overline{BE}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	由(13) 求平方根

(15) 所以$\overline{BE}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	由(14) & $\overline{BE}$為線段長度必大於或等於 0
(16) $\overline{CE}=\overline{BE}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	由(15) & (9) $\overline{BE}=\overline{EC}$
(14) $\overline{BC}=\overline{CE}+\overline{BE}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$	全量等於分量之和
(17) 所以$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}=\sqrt{3}$	由(7) & (8) & (15)
(18) 所以△ABC 為正三角形	由(17) & 等邊三角形位正三角形
(15) 乙正確	由(18)

所以本題選(A) 甲、乙皆正確

3. 如圖 8.3，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$分別為兩圓的弦，$\overline{AC}$、$\overline{BD}$為兩圓的內公切線且相交於 P 點。若$\overline{PC}=2$，$\overline{CD}=3$，$\overline{DB}=6$，則$\overline{PA}+\overline{AB}+\overline{PB}$之值為何？ **(97-1)**

(A) 6　(B) 9　(C) 12　(D) 14

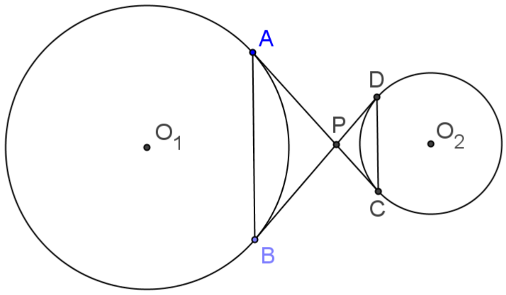


圖 8.3

解答：(D) 14

想法：(1)　定理 7.3-2 切線長定理(自圓外一點到圓的兩切點連線段等長)；

(2)　根據(S.A.S.) 三角形相似定理；

(3)　相似三角形對應邊成比例

解：

敘述	理由
(1) $\overline{PD}$與$\overline{PC}$為圓 O_1 之切線	已知$\overline{AC}$、$\overline{BD}$為兩圓的內公切線且相交於 P 點
(2) $\overline{PD}=\overline{PC}=2$	由(1) & 定理 7.3-2 切線長定理(自圓外一點到圓的兩切點連線段等長) & 已知$\overline{PC}=2$
(3) $\overline{DB}=\overline{PB}+\overline{PD}$	全量等於分量之和
(4) $\overline{PB}=\overline{DB}-\overline{PD}$ $=6-2=4$	由(3) 等量減法公理 & 已知$\overline{DB}=6$ & (2) $\overline{PD}=2$
(5) $\overline{PA}$與$\overline{PB}$為圓 O_2 之切線	已知$\overline{AC}$、$\overline{BD}$為兩圓的內公切線且相交於 P 點
(6) $\overline{PA}=\overline{PB}=4$	由(5) & 定理 7.3-2 切線長定理(自圓外一點到圓的兩切點連線段等長) & (4) $\overline{PB}=4$
(7) $\overline{PA}:\overline{PD}=4:2=2:1$	由(6) $\overline{PA}=4$、(2) $\overline{PD}=2$ & 倍比定理
(8) $\overline{PB}:\overline{PC}=4:2=2:1$	由(6) $\overline{PB}=4$、(2) $\overline{PC}=2$ & 倍比定理
(9) 在△PAB 與△PDC 中 ∠APB＝∠DPC $\overline{PA}:\overline{PD}=\overline{PB}:\overline{PC}=2:1$	如圖 8.3 所示 對頂角相等 由(7) & (8) 遞移律

(10) 所以△PAB～△PDC	由(9) & 根據(S.A.S.) 三角形相似定理
(11) $\overline{PA}$：$\overline{PD}$＝$\overline{AB}$：$\overline{DC}$	由(10) & 相似三角形對應邊成比例
(12) 4：2＝$\overline{AB}$：3	由(11) & (6) $\overline{PA}$＝4、(2) $\overline{PD}$＝2 & 已知$\overline{CD}$＝3
(13) 2×$\overline{AB}$＝4×3	由(12) & 內項乘積等於外項乘積
(14) $\overline{AB}$＝(4×3)÷2＝6	由(13) 等量除法公理
(15) 所以$\overline{PA}$＋$\overline{AB}$＋$\overline{PB}$ ＝4＋6＋4＝14	由(6) $\overline{PA}$＝$\overline{PB}$＝4 & (14) $\overline{AB}$＝6 加法
(16) 所以此題選(D) 14	由(15)

4. 如圖 8.4 所示，已知圓 A、圓 B、圓 C 兩兩互相外切，且圓 A、圓 B、圓 C 分別與圓 O 內切，圓 O 直徑$\overline{IJ}$分別切圓 A、圓 B 於 K 點、H 點，若圓 A 與圓 B 的半徑皆為 1 公分，則圓 C 的半徑為何？ (97-1)

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\sqrt{2}-1$ (D) $\sqrt{2}+1$

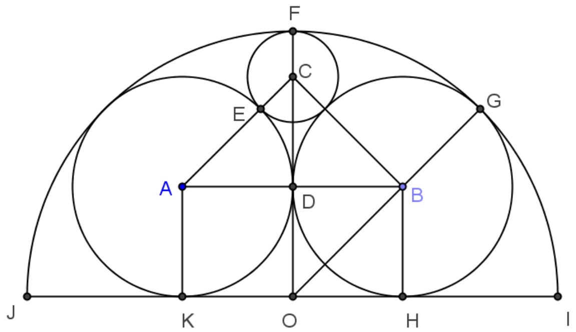


圖 8.4

解答：(C) $\sqrt{2}-1$

想法：利用畢氏定理求解

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AK}\perp\overline{IJ}$ 且 $\overline{BH}\perp\overline{IJ}$ ($\angle$AKO＝$\angle$BHO＝90°)	已知圓 O 直徑$\overline{IJ}$分別切圓 A、圓 B 於 K 點、H 點 & 切線與過切點的半徑互相垂直
(2) $\overline{AK}\parallel\overline{BH}$	由(1) $\overline{AK}\perp\overline{IJ}$、$\overline{BH}\perp\overline{IJ}$ & 定理 3.2-1 兩直線同時與另一直線垂直，則此兩直線互相平行
(3) $\overline{AE}=\overline{AK}=\overline{AD}$ $=\overline{BH}=\overline{BD}=\overline{BG}=1$	已知圓 A 與圓 B 的半徑皆為 1
(4) 四邊形 ABHK 為平行四邊形	由(2) $\overline{AK}\parallel\overline{BH}$ & (3) $\overline{AK}=\overline{BH}$ 一組對邊平行且相等為平行四邊形定理
(5) $\overline{AB}\parallel\overline{KH}$	由(4) & 平行四邊形兩組對邊平行
(6) $\angle$DBH＝180°－$\angle$BHO ＝180°－90°＝90°	由(5) $\overline{AB}\parallel\overline{KH}$ 同側內角互補 & 由(1) $\angle$BHO＝90° 已證
(7) $\angle$BDO＝$\angle$ADC＝90°	已知圓 A、圓 B 外切 & 切線與過切點的半徑互相垂直
(8) $\angle$DOH＝180°－$\angle$BDO ＝180°－90°＝90°	由(5) $\overline{AB}\parallel\overline{KH}$ 同側內角互補 & 由(7) $\angle$BDO＝90° 已證

(9) 四邊形 BDOH 為矩形(長方形)	由 (1) $\angle BHO = 90°$ & (6) $\angle DBH = 90°$ & (7) $\angle BDO = 90°$ & (8) $\angle DOH = 90°$ & 矩形(長方形)定義
(10) $\overline{DO} = \overline{BH} = 1$	由(9) 矩形對邊相等 & (3) $\overline{BH} = 1$
(11) $\overline{HO} = \overline{BD} = 1$	由(9) 矩形對邊相等 & (3) $\overline{BD} = 1$
(12) △BHO 為直角三角形	由(1) $\angle BHO = 90°$
(13) $\overline{OB}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{HO}^2$	由(12) &畢氏(勾股)定理
(14) $\overline{OB}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$	將(10) $\overline{BH} = 1$ & (11) $\overline{HO} = 1$ 代入(13)得
(15) 所以$\overline{OB} = \sqrt{2}$	由(14) 等式兩邊同開根號
(16) O、B、G 三點共線	已知圓 B 與圓 O 內切於 G 點 & 兩圓相切定理：相切兩圓的兩圓心連線，必過切點
(17) $\overline{OG} = \overline{OB} + \overline{BG}$	由(16) & 全量等於分量和
(18) 所以$\overline{OG} = \sqrt{2} + 1$	將(15) $\overline{OB} = \sqrt{2}$ & (3) $\overline{BG} = 1$ 代入(17)得
(19) $\overline{OF} = \overline{OG} = \sqrt{2} + 1$	同圓半徑相等 & 由(18) $\overline{OG} = \sqrt{2} + 1$
(20) 假設圓 C 的半徑$\overline{CE} = \overline{CF} = r$	同圓半徑相等 & 假設
(21) $\overline{OF} = \overline{OD} + \overline{DC} + \overline{CF}$	全量等於分量之和
(22) $\sqrt{2} + 1 = 1 + \overline{DC} + r$	將(19) $\overline{OF} = \sqrt{2} + 1$ & (10) $\overline{DO} = 1$ & (20) $\overline{CF} = r$ 代入(20)式得
(23) $\overline{DC} = \sqrt{2} + 1 - 1 - r = \sqrt{2} - r$	由(22) 等量減法公理
(24) $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC}$	全量等於分量之和
(25) $\overline{AC} = 1 + r$	將(3) $\overline{AE} = 1$ & (20) $\overline{CE} = r$ 代入(24)式得
(26) △ADC 為直角三角形	由(7) $\angle ADC = 90°$
(27) $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$	由(26) & 畢氏(勾股)定理
(28) $(1 + r)^2 = 1^2 + (\sqrt{2} - r)^2$	將(25) $\overline{AC} = 1 + r$ & (3) $\overline{AD} = 1$ & (23) $\overline{DC} = \sqrt{2} - r$ 代入(27)式得
(29) $r = \sqrt{2} - 1$	由(28)解一元二次方程式
(30) 所以圓 C 的半徑為$\sqrt{2} - 1$	由(20) & (29)

5. 如圖 8.5，將一個大三角形剪成一個小三角形及一個梯形。若梯形上、下底的長分別為 6、14，兩腰長為 12、16，則下列哪一選項中的數據表示此小三角形的三邊長？ **(96-1)**

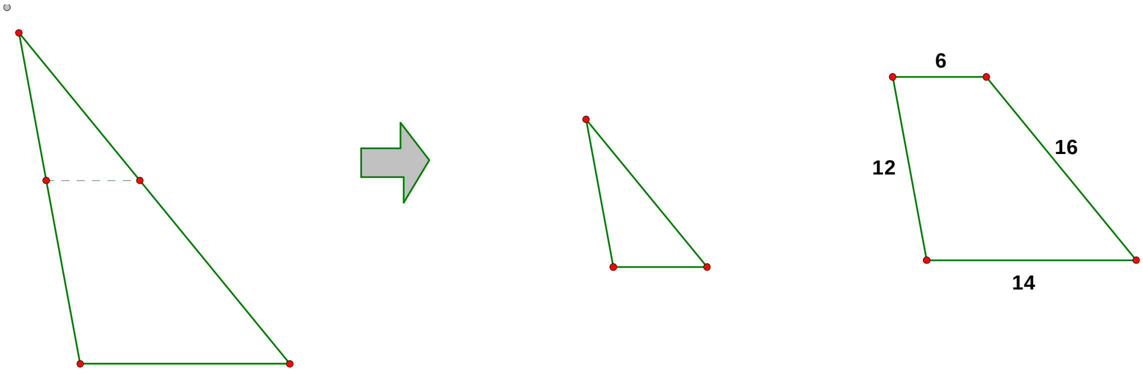
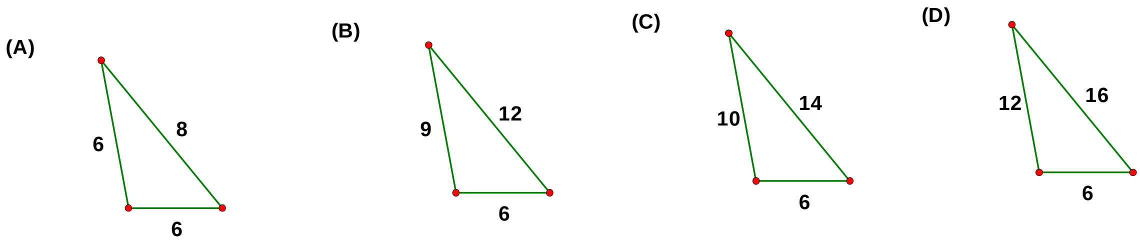


圖 8.5



解答： (B)

想法： (1) 相似三角形 (2)相似形之對應邊成比例

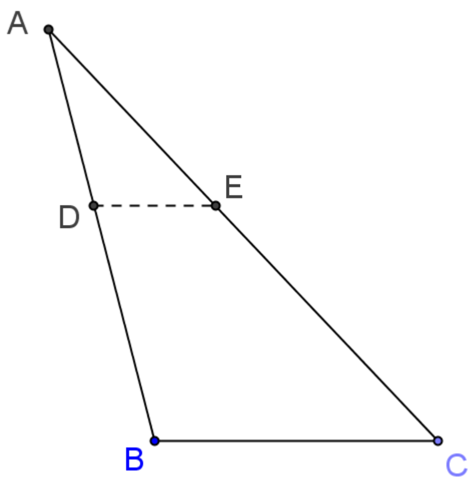


圖 8.5(a)

解：

敘述	理由
(1) 在△ADE 與△ABC 中	如圖 8.5(a)所示
∠ADE＝∠ABC	已知 DECB 為梯形，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ & 同位角相等
∠AED＝∠ACB	已知 DECB 為梯形，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ & 同位角相等
∠A＝∠A	共同角

(2) 所以△ADE～△ABC	由(1) ＆ 根據三角形(A.A.A.)相似定理
(3) $\overline{AD}$：$\overline{AB}$＝$\overline{DE}$：$\overline{BC}$	由(2) ＆ 相似三角形對應邊成比例
(4) $\overline{AD}$：($\overline{AD}$＋$\overline{DB}$)＝$\overline{DE}$：$\overline{BC}$	由(3) ＆ $\overline{AB}$＝$\overline{AD}$＋$\overline{DB}$
(5) $\overline{AD}$：($\overline{AD}$＋12)＝6：14	由(4) ＆ 已知$\overline{DB}$＝12、$\overline{DE}$＝6、$\overline{BC}$＝14
(6) 14×$\overline{AD}$＝($\overline{AD}$＋12)×6	由(5) ＆ 外項乘積等於內項乘積
(7) $\overline{AD}$＝9	由(6) ＆ 解一元一次方程式
(8) $\overline{AE}$：$\overline{AC}$＝$\overline{DE}$：$\overline{BC}$	由(2) ＆ 相似三角形對應邊成比例
(9) $\overline{AE}$：($\overline{AE}$＋$\overline{EC}$)＝$\overline{DE}$：$\overline{BC}$	由(8) ＆ $\overline{AC}$＝$\overline{AE}$＋$\overline{EC}$
(10) $\overline{AE}$：($\overline{AE}$＋16)＝6：14	由(9) ＆ 已知$\overline{EC}$＝16、$\overline{DE}$＝6、$\overline{BC}$＝14
(11) 14×$\overline{AE}$＝($\overline{AE}$＋16)×6	由(10) ＆ 外項乘積等於內項乘積
(12) $\overline{AE}$＝12	由(11) ＆ 解一元一次方程式
(13) 所以△ADE 三邊長分別為 9-6-12，如圖(B)所示	由(7) $\overline{AD}$＝9 、(12) $\overline{AE}$＝12 ＆ 已知$\overline{DE}$＝6

6. 如圖 8.6，四邊形 ABCD 中，不等長的兩對角線$\overline{AC}$、$\overline{BD}$相交於 O 點，將四邊形 ABCD 分成甲、乙、丙、丁四個三角形。若$\overline{OA}$：$\overline{OC}$＝$\overline{OB}$：$\overline{OD}$＝1：2，則此四個三角形的關係，下列敘述何者正確？ (96-1)

(A) 甲丙相似，乙丁相似　　(B) 甲丙相似，乙丁不相似

(C) 甲丙不相似，乙丁相似　　(D) 甲丙不相似，乙丁不相似

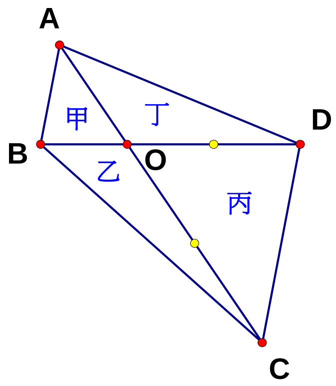


圖 8.6

解答：(B) 甲丙相似，乙丁不相似

想法：判斷三角形相似的方法有：

(1) 三角形(AAA)相似定理

(2) 三角形(SAS)相似定理

(3) 三角形(SSS)相似定理

解：

敘述	理由
(1) 假設$\overline{OA}$＝r、$\overline{OC}$＝2r (其中 r≠0)	已知$\overline{OA}$：$\overline{OC}$＝1：2
(2) 假設$\overline{OB}$＝s、$\overline{OD}$＝2s (其中 s≠0)	已知$\overline{OB}$：$\overline{OD}$＝1：2
(3) 在△OAB 與△OCD 中 ∠AOB＝∠COD $\overline{OA}$：$\overline{OC}$＝$\overline{OB}$：$\overline{OD}$	如圖 8.6 所示 對頂角相等 已知$\overline{OA}$：$\overline{OC}$＝$\overline{OB}$：$\overline{OD}$＝1：2
(4) 所以△OAB～△OCD (即甲丙相似)	由(3) & 根據三角形(S.A.S.)相似定理
(5) 在△OBC 與△OAD 中 $\overline{OB}$：$\overline{OA}$＝s：r $\overline{OC}$：$\overline{OD}$＝2 r：2s＝r：s	如圖 8.6 所示 由(1) $\overline{OA}$＝r & (2) $\overline{OB}$＝s 由(1) $\overline{OC}$＝2r & (2) $\overline{OD}$＝2s
(6) 所以△OBC 與△OAD 不相似 (即乙丁不相似)	由(5) $\overline{OB}$：$\overline{OA}$≠$\overline{OC}$：$\overline{OD}$ & 三角形對應邊不成比例則不相似
(7) 所以本題選 (B) 甲丙相似，乙丁不相似	由(4) & (6)

7. 以下是甲、乙兩人證明$\sqrt{15}+\sqrt{8}\neq\sqrt{15+8}$的過程：

(甲) 因為$\sqrt{15}>\sqrt{9}=3$，$\sqrt{8}>\sqrt{4}=2$
所以$\sqrt{15}+\sqrt{8}>3+2=5$
且$\sqrt{15+8}=\sqrt{23}<\sqrt{25}=5$
所以$\sqrt{15}+\sqrt{8}>5>\sqrt{15+8}$
故$\sqrt{15}+\sqrt{8}\neq\sqrt{15+8}$

(乙) 作一個直角三角形，兩股長分別為$\sqrt{15}$、$\sqrt{8}$
利用商高定理$(\sqrt{15})^2+(\sqrt{8})^2=15+8$
得斜邊長為$\sqrt{15+8}$
因為$\sqrt{15+8}$、$\sqrt{15}$、$\sqrt{8}$為此三角形的三邊長，所以$\sqrt{15}+\sqrt{8}>\sqrt{15+8}$
故$\sqrt{15}+\sqrt{8}\neq\sqrt{15+8}$

對於兩人的證法，下列哪一個判所是正確的？(96-1)

(A) 兩人都正確 (B) 兩人都錯誤 (C) 甲正確、乙錯誤 (D) 甲錯誤、乙正確

解答：(A) 兩人都正確

想法： 檢查每一步驟的正確性，是否都有依據。

解：

敘述	理由
(1) 甲正確	甲的步驟都正確
因為$\sqrt{15}>\sqrt{9}=3$，$\sqrt{8}>\sqrt{4}=2$	已知
所以$\sqrt{15}+\sqrt{8}>3+2=5$	不等式相加
且$\sqrt{15+8}=\sqrt{23}<\sqrt{25}=5$	已知
所以$\sqrt{15}+\sqrt{8}>5>\sqrt{15+8}$	由$\sqrt{15}+\sqrt{8}>5$ & $\sqrt{15+8}<5$
故$\sqrt{15}+\sqrt{8}\neq\sqrt{15+8}$	由$\sqrt{15}+\sqrt{8}>\sqrt{15+8}$
(2) 乙正確	乙的步驟都正確
作一個直角三角形,兩股長分別為$\sqrt{15}$、$\sqrt{8}$	作圖
利用商高定理$(\sqrt{15})^2+(\sqrt{8})^2=15+8$	商高定理
得斜邊長為$\sqrt{15+8}$	求(15＋8)的正平方根
因為$\sqrt{15+8}$、$\sqrt{15}$、$\sqrt{8}$為此三角形的三邊長，所以$\sqrt{15}+\sqrt{8}>\sqrt{15+8}$	三角形邊角關係，兩邊之和大於第三邊
故$\sqrt{15}+\sqrt{8}\neq\sqrt{15+8}$	由$\sqrt{15}+\sqrt{8}>\sqrt{15+8}$
(3) 所以本題選(A) 兩人都正確	由(1) & (2)

8. 有甲、乙、丙、丁、戊五塊三角形紙板，已知各紙板其中的兩內角分別為甲：55°、80°，乙：55°、45°，丙：45°、80°，丁：55°、65°，戊：45°、55°。在甲、乙、丙、丁四塊紙板中，哪一塊與戊不相似？ (95-1)

解答：丁

想法： (1)三角形內角和定理

(2)相似三角形對應角相等定理

解：

敘述	理由
(1) 三角形的各內角分別為： 甲：55°、80°、45° 乙：55°、45°、80° 丙：45°、80°、55° 丁：55°、65°、70° 戊：45°、55°、80°	三角形的三內角和為 180° 已知甲的兩內角分別為 55°、80° 已知乙的兩內角分別為 55°、45° 已知丙的兩內角分別為 45°、80° 已知丁的兩內角分別為 55°、65° 已知戊的兩內角分別為 45°、55°
(2) 丁三角形紙板與戊不相似	因為相似三角形的對應角相等，只有丁三角形與其他各三角形沒有相等的對應角

9. 如圖 8.7，△ABC 中，$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=4$，$\overline{BC}=5$。若三直線$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{BC}$分別與圓 O 切於 D、E、F 三點，則$\overline{BE}=$？ **(95-1)**

(A) 6　(B) $\dfrac{25}{3}$　(C) $\sqrt{45}$　(D) $\sqrt{72}$

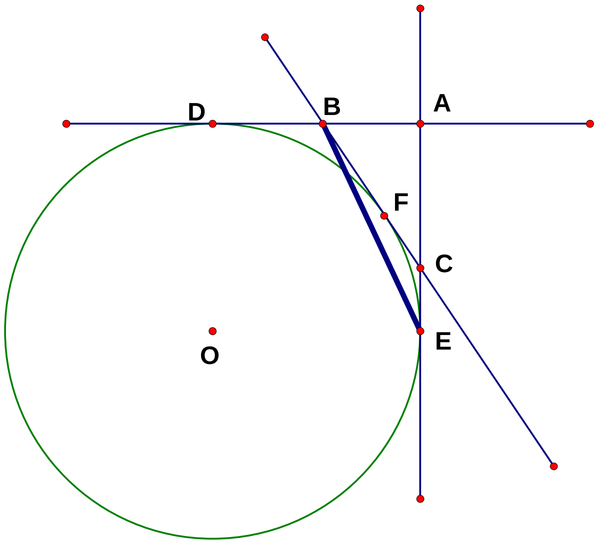


圖 8.7

解答：(C) $\sqrt{45}$

想法：(1) 畢氏定理

(2) 定理 7.3-2 切線長定理(自圓外一點到圓的兩切點連線段等長)

解：

敘述	理由
(1) △ABC 為直角三角形， ∴ $\angle BAC=90^\circ$	已知△ABC 中，$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=4$，$\overline{BC}=5$， 由畢氏定理得知△ABC 為直角三角形
(2) △BAE 為直角三角形， $\overline{BE}^2=\overline{AB}^2+\overline{AE}^2$	由(1) $\angle BAC=90^\circ$ 畢氏定理
(3) $\overline{CF}=\overline{CE}$	已知$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{BC}$分別與圓 O 切於 E、F 兩點 & 定理 7.3-2 切線長定理(自圓外一點到圓的兩切點連線段等長)
(4) $\overline{BC}=\overline{BF}+\overline{CF}=\overline{BF}+\overline{CE}$	全量等於分量之和 & (3) $\overline{CF}=\overline{CE}$
(5) $\overline{BF}=\overline{BC}-\overline{CE}=5-\overline{CE}$	由(4) 等量減法公理 & 已知$\overline{BC}=5$
(6) $\overline{BD}=\overline{BF}=5-\overline{CE}$	已知$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$分別與圓 O 切於 D、F 兩點 & 定理 7.3-2 切線長定理(自圓外一點到圓的兩切點連線段等長) & (5) $\overline{BF}=5-\overline{CE}$

(7) $\overline{AD}=\overline{AE}$	已知$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{AC}$分別與圓 O 切於 D、E 兩點 & 定理 7.3-2 切線長定理(自圓外一點到圓的兩切點連線段等長)
(8) $\overline{AB}+\overline{BD}=\overline{AC}+\overline{CE}$	由(7) & $\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BD}$、$\overline{AE}=\overline{AC}+\overline{CE}$
(9) $3+5-\overline{CE}=4+\overline{CE}$	由(8) &已知$\overline{AB}=3$、$\overline{AC}=4$ &(6) $\overline{BD}=5-\overline{CE}$
(10) $\overline{CE}=2$	由(9) & 解一元一次方程式
(11) $\overline{AE}=\overline{AC}+\overline{CE}=4+2=6$	全量等於分量之和&已知$\overline{AC}=4$ &(10) $\overline{CE}=2$
(12) $\overline{BE}^2=3^2+6^2$	由(2) & 已知$\overline{AB}=3$ & (11) $\overline{AE}=6$
(13) $\overline{BE}=-\sqrt{45}$ 或$\overline{BE}=\sqrt{45}$	由(12) 求平方根
(14) 所以$\overline{BE}=\sqrt{45}$	由(13) & $\overline{BE}$為線段長度必大於 0
(15) 所以本題選(C) $\sqrt{45}$	由(14)

10. 若將 2700 個大小相同的小正方形緊密地排出一個長邊有 60 個小正方形、短邊有 45 個小正方形的長方形後，在此長方形中畫一條對角線，則此線通過幾個小正方形？ **(95-1)**

(A) 60 (B) 75 (C) 90 (D) 105

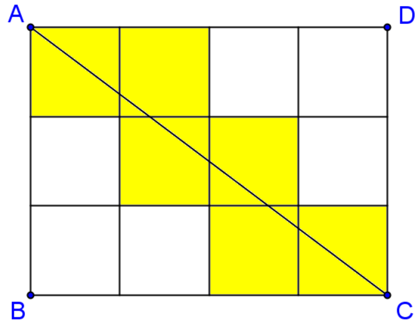


圖 8.8

解答： (C) 90

想法：利用相似形與比例

解：

敘述	理由
(1) 長邊 60、短邊 45 的長方形與長邊 4、短邊 3 的長方形為相似形，其比值為 15。(60：4＝45：3＝15)	相似形定義
(2) 長邊 4、短邊 3 長方形的對角線通過 6 個小正方形，(如圖 8.8 中的灰色區域)所以通過長邊 60、短邊 45 長方形的對角線會通過 6x15＝90 個小正方形	比例

11. 如圖 8.9，某車由甲地等速前往丁地，過程是：自甲向東直行 8 分鐘至乙後，朝東偏南直行 8 分鐘至丙，左轉 90 度直行 15 分鐘至丁。若此車由甲地以原來的速率向東直行可到達丁地，則此車程需多少分鐘？ **(94-1)**

(A) 19.5　(B) 24　(C) 25　(D) 28

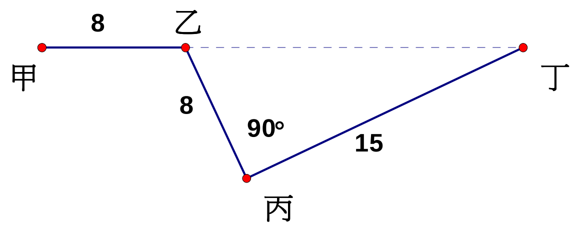


圖 8.9

解答：(C) 25

想法：畢氏定理

解：

敘述	理由
(1) 乙丁兩地車程為 $\sqrt{8^2+15^2}=\sqrt{64+225}=17$ 分鐘	畢氏定理
(2) 甲丁兩地車程＝甲乙兩地車程＋乙丁兩地車程 ＝8 分鐘＋17 分鐘＝25 分鐘	已知甲乙兩地車程 8 分鐘 &(1)乙丁兩地車程 17 分鐘

12. 如圖 8.10，$\overline{AQ}$為∠BAC 的角平分線，P 在$\overline{AQ}$上，且$\overline{PB}\perp\overline{AB}$、$\overline{QC}\perp\overline{AC}$。若$\overline{PB}$＝3、$\overline{QC}$＝9、$\overline{AP}$＝5，則$\overline{PQ}$＝？ **(94-1)**

(A) 7　(B) 10　(C) 12　(D) 15

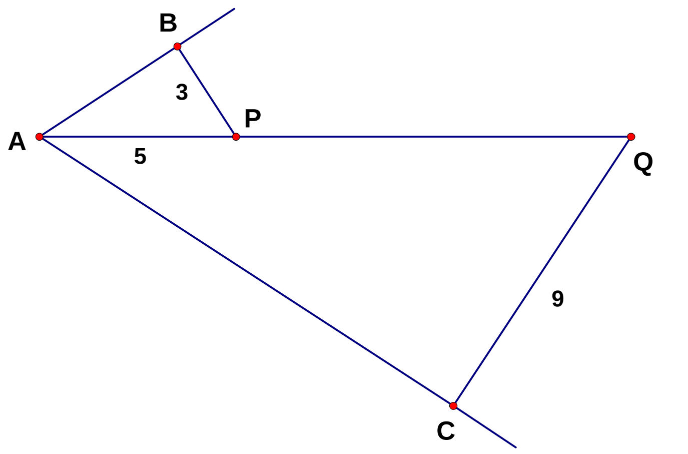


圖 8.10

解答：(B) 10

想法： (1)三角形相似定理　(2)相似形之對應邊成比例

解：

敘述	理由
(1) ∠ABP＝∠ACQ＝90°	已知$\overline{PB}\perp\overline{AB}$、$\overline{QC}\perp\overline{AC}$
(2) ∠PAB＝∠QAC	已知$\overline{AQ}$為∠BAC 的角平分線
(3) △ABP 中， ∠ABP＋∠PAB＋∠APB＝180°	如圖 8.10 所示 三角形內角和為 180°
(4) ∠APB＝180°－∠ABP－∠PAB ＝180°－90°－∠PAB ＝90°－∠PAB＝90°－∠QAC	由(3) 等量減法公理 & (1) ∠ABP＝90° & (2) ∠PAB＝∠QAC
(5) △ACQ 中， ∠ACQ＋∠QAC＋∠AQC＝180°	如圖 8.10 所示 三角形內角和為 180°
(6) ∠AQC＝180°－∠ACQ－∠QAC ＝180°－90°－∠QAC ＝90°－∠QAC	由(5) 等量減法公理 & (1) ∠ACQ＝90°
(7) 在△ABP 與△ACQ 中， ∠ABP＝∠ACQ＝90° ∠PAB＝∠QAC	如圖 8.10 所示 由(1) ∠ABP＝∠ACQ＝90° 由(2) ∠PAB＝∠QAC

∠APB＝∠AQC	由(4) ＆ (6) 遞移律
(8) 所以△ABP～△ACQ	由(7) ＆ 根據 (A.A.A.) 三角形相似定理
(9) $\overline{PB}$：$\overline{QC}$＝$\overline{AP}$：$\overline{AQ}$	由(8)＆ 相似三角形對應邊成比例
(10) 3：9＝5：$\overline{AQ}$	由(9) ＆ 已知$\overline{PB}$＝3、$\overline{QC}$＝9、$\overline{AP}$＝5
(11) 3×$\overline{AQ}$＝9×5	由(10) ＆ 外項乘積等於內項乘積
(12) $\overline{AQ}$＝9×5÷3＝15	由(11) 等量除法公理
(13) $\overline{AQ}$＝$\overline{AP}$＋$\overline{PQ}$	全量等於分量之和
(14) $\overline{PQ}$＝$\overline{AQ}$－$\overline{AP}$ ＝15－5＝10	由(13) 等量減法公理 ＆ (12) $\overline{AQ}$＝15 ＆ 已知$\overline{AP}$＝5
(15) 所以本題選(B) 10	由(14) $\overline{PQ}$＝10

13. 已知有長 3 公分、6 公分之兩線段，下列敘述何者錯？ (94-1)

(A) 若另有一長為 3 公分的線段，則此三線段可以構成等腰三角形。

(B) 若另有一長為 6 公分的線段，則此三線段可以構成等腰三角形。

(C) 若另有一長為$3\sqrt{3}$ 公分的線段，則此三線段可以構成直角三角形。

(D) 若另有一長為$3\sqrt{5}$ 公分的線段，則此三線段可以構成直角三角形。

解答： (A)

想法： (1) 三角形的兩邊和大於第三邊　　(2) 畢氏定理

解：

敘述	理由
(1) (A) 錯誤 3＋3＝6 不大於 6	三角形的兩邊和沒有大於第三邊，不能構成三角形
(2) (B) 正確	三角形的兩邊和大於第三邊，且有兩邊相等，可以構成等腰三角形。
(3) (C) 正確 $3^2+(3\sqrt{3})^2=6^2$	三角形的兩邊和大於第三邊，且滿足畢氏定理，可以構成直角三角形
(4) (D) 正確 $3^2+6^2=(3\sqrt{5})^2$	三角形的兩邊和大於第三邊，且滿足畢氏定理，可以構成直角三角形

14. 如圖 8.11，有 A 村與一直線型的公路，今以 A 村為基準點，向北走 4 公里可到達公路。若由 A 村向東走 6 公里，再向北走 6 公里也可到達公路，則由 A 村向西走多少公里可到達公路？ **(93-1)**

(A) 4　　(B) 6　　(C) 9　　(D) 12

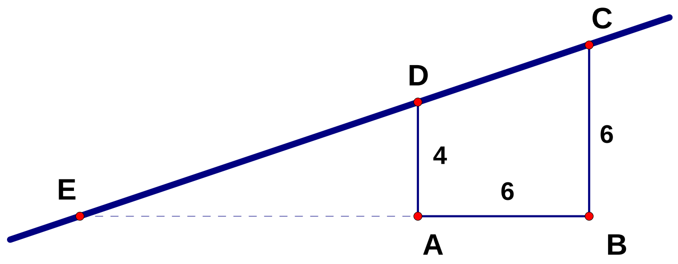


圖 8.11

解答：(D) 12

想法： 相似三角形

解：

敘述	理由
(1) ∠DAE＝∠CBE＝90°	南北向與東西向互相垂直
(2) △DAE 中， ∠DAE＋∠DEA＋∠EDA＝180°	如圖 8.11 所示 三角形內角和為 180°
(3) ∠EDA＝180°－∠DAE－∠DEA ＝180°－90°－∠DEA ＝90°－∠DEA＝90°－∠CEB	由(2) 等量減法公理 & (1) ∠DAE＝90° ∠DEA＝∠CEB(共同角)
(4) △CBE 中， ∠CBE＋∠CEB＋∠ECB＝180°	如圖 8.11 所示 三角形內角和為 180°
(5) ∠ECB＝180°－∠CBE－∠CEB ＝180°－90°－∠CEB ＝90°－∠CEB	由(4) 等量減法公理 & （1）∠CBE＝90°
(6) 在△DAE 與△CBE 中， ∠DAE＝∠CBE＝90° ∠DEA＝∠CEB ∠EDA＝∠ECB	如圖 8.11 所示 由(1) ∠ABP＝∠ACQ＝90° 共同角 由(3) & (5) 遞移律
(7) 所以△DAE～△CBE	由(6) & 根據 (A.A.A.) 三角形相似定理
(8) $\overline{EA}:\overline{EB}=\overline{AD}:\overline{BC}$	由(7)& 相似三角形對應邊成比例

(9) $\overline{EA}$：($\overline{EA}$＋$\overline{AB}$)＝$\overline{AD}$：$\overline{BC}$	由(8) ＆ $\overline{EB}$＝$\overline{EA}$＋$\overline{AB}$
(10) $\overline{EA}$：($\overline{EA}$＋6)＝4：6	由(9)＆ 已知$\overline{AB}$＝6、$\overline{AD}$＝4、$\overline{BC}$＝6
(11) 6×$\overline{EA}$＝($\overline{EA}$＋6)×4	由(10) ＆ 外項乘積等於內項乘積
(12) $\overline{EA}$＝12	由(11) ＆ 解一元一次方程式
(13) 所以本題選(D) 12	由(12)

15. 如圖 8.12，S、R、Q 在$\overline{AP}$上，B、C、D、E 在$\overline{AF}$上，其中$\overline{BS}$、$\overline{CR}$、$\overline{DQ}$、$\overline{PE}$皆垂直於$\overline{AF}$，且$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}$。若$\overline{PE}=2$ 公尺，則$\overline{SB}+\overline{RC}+\overline{QD}$的長度是多少公尺？ **(92-1)**

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 2 (C) $\frac{5}{2}$ (D) 3

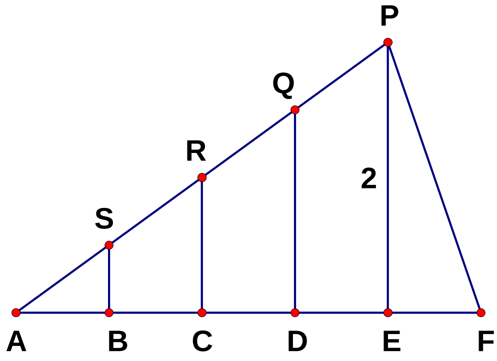


圖 8.12

解答： (D) 3

想法： 相似三角形對應邊成比例

解：

敘述	理由
(1) $\overline{BS} \parallel \overline{CR} \parallel \overline{DQ} \parallel \overline{PE}$	已知$\overline{BS}$、$\overline{CR}$、$\overline{DQ}$、$\overline{PE}$皆垂直於$\overline{AF}$ & 同時垂直於一線段的線段皆互相平行
(2) 在△APE、△AQD、△ARC 與△ASB 中 ∠APE＝∠AQD＝∠ARC＝∠ASB ∠AEP＝∠ADQ＝∠ACR＝∠ABS ∠PAE＝∠QAD＝∠RAC＝∠SAB	如圖 8.12 所示 由(1) & 同位角相等 由(1) & 同位角相等 共同角
(3) 所以△APE～△AQD～△ARC～△ASB	由(2) & 根據 (A.A.A.) 三角形相似定理
(4) 假設$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=r$	已知$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}$ & 假設
(5) $\overline{AE}$：$\overline{AD}$＝$\overline{PE}$：$\overline{QD}$	由(3) △APE～△AQD & 相似三角形對應邊成比例
(6) 4r：3r＝2：$\overline{QD}$	由(5) & $\overline{AE}$＝4r、$\overline{AD}$＝3r & 已知$\overline{PE}$＝2
(7) $4r \times \overline{QD}=3r \times 2$	由(6) & 外項乘積等於內項乘積

(8) $\overline{QD}$＝3r×2÷4r＝1.5	由(7) 等量除法公理
(9) $\overline{AE}$：$\overline{AC}$＝$\overline{PE}$：$\overline{RC}$	由(3) △APE～△ARC & 相似三角形對應邊成比例
(10) 4r：2r＝2：$\overline{RC}$	由(9) & $\overline{AE}$＝4r、$\overline{AC}$＝2r & 已知$\overline{PE}$＝2
(11) 4r×$\overline{RC}$＝2r×2	由(10) & 外項乘積等於內項乘積
(12) $\overline{RC}$＝2r×2÷4r＝1	由(11) 等量除法公理
(13) $\overline{AE}$：$\overline{AB}$＝$\overline{PE}$：$\overline{SB}$	由(3) △APE～△ASB & 相似三角形對應邊成比例
(14) 4r：r＝2：$\overline{SB}$	由(13) & $\overline{AE}$＝4r、$\overline{AB}$＝r & 已知$\overline{PE}$＝2
(15) 4r×$\overline{SB}$＝r×2	由(14) & 外項乘積等於內項乘積
(16) $\overline{SB}$＝r×2÷4r＝0.5	由(15) 等量除法公理
(17) $\overline{SB}$＋$\overline{RC}$＋$\overline{QD}$＝0.5＋1＋1.5＝3	由(16)、(12) & (8)
(18) 所以本題選(D) 3	由(17)

16. 圖 8.13 為一拱橋的側面圖，其拱橋下緣呈一弧形，若洞頂為橋洞的最高點，且知當洞頂至水面距離 90 公分時，量得洞內水面寬 240 公分。後因久旱不雨，水面位置下降，使得拱橋下緣呈現半圓，這時，橋洞內的水面寬度變為多少公分？ **(91-1)**

(A) 240　　(B) 250　　(C) 260　　(D) 270

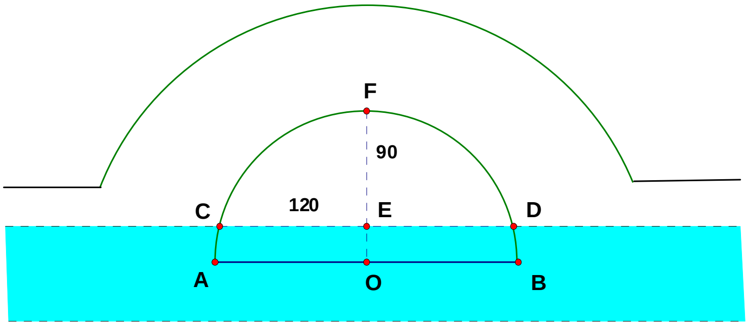


圖 8.13

解答：(B) 250

想法： (1) 利用定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理：垂直於弦的直徑必平分這弦與這弦所對的弧。

(2) 畢氏定理

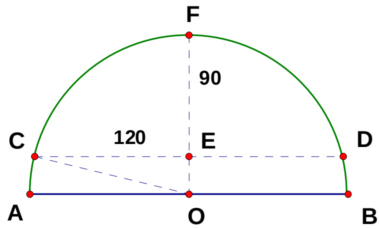


圖 8.13(a)

解：

敘述	理由
(1) △CEO 直角三角形 $\overline{OC}^2=\overline{OE}^2+\overline{CE}^2$	如圖 8.13(a)，$\overline{OE}$與水面垂直 畢氏定理
(2) $\overline{OC}=\overline{OF}=\overline{OE}+\overline{EF}=\overline{OE}+90$	$\overline{OC}$、$\overline{OF}$為圓 O 半徑 & 同圓的半徑相等 & 全量等於分量之和 & 已知$\overline{EF}=90$
(3) $(\overline{OE}+90)^2=\overline{OE}^2+120^2$	由(1) & (2) $\overline{OC}=\overline{OE}+90$ & 已知$\overline{CE}=120$
(4) $\overline{OE}=35$	由(3) & 解一元二次方程式
(5) $\overline{OC}=35+90=125$	由(2) $\overline{OC}=\overline{OE}+90$ & (4) $\overline{OE}=35$
(6) 直徑$\overline{AB}=2\overline{OC}=2\times125=250$	直徑為半徑之 2 倍 & (5) $\overline{OC}=125$
(7) 所以本題選(B)　250	由(6)