目錄

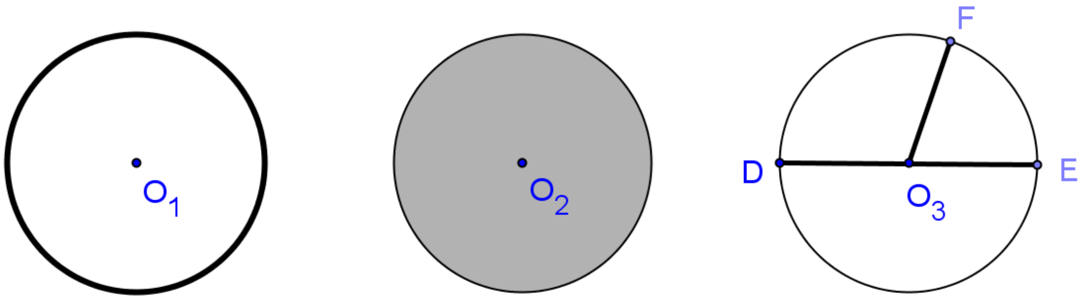
第七章 圓形

7.1 節　圓的基本性質

我們在第一章已經敘述過圓的定義了，本章我們要討論圓的一些性質，我們先複習一下圓的定義，再討論圓的基本性質。

定義 7.1-1 圓，圓周，圓心，半徑，直徑

圓周為一封閉曲線，線上各點都與其內一點等距離，此點稱為圓心；圓周內的部份為圓； 圓周上任一點與圓心的距離就是此圓的半徑；通過圓心而兩端點在圓周上的線段為此圓的直徑，如圖 7.1-1 所示。



(a) 圓周　　(b) 圓　　(c) 直徑$\overline{DE}$，半徑$\overline{O_3F}$

圖 7.1-1

例題 7.1-1：

有一圓的直徑是 10 公分。請在空格中填入外、內或上：
(1)有一點 P 與圓心相距 7 公分，則 P 點必在圓______。
(2)有一點 Q 與圓心相距 5 公分，則 Q 點必在圓______。
(3)有一點 R 與圓心相距 3 公分，則 R 點必在圓______。

想法：(1) 圓外一點到圓心的距離大於圓半徑

(2) 圓周上一點到圓心的距離等於圓半徑

(3) 圓內一點到圓心的距離小於圓半徑

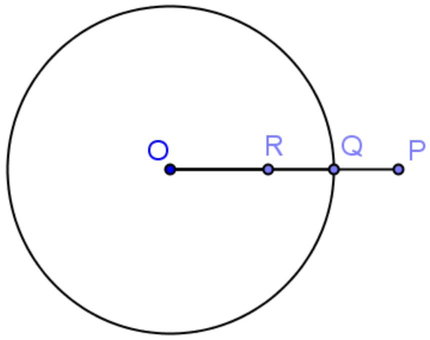


圖 7.1-2

解：

敘述	理由
(1) 依題意作圖，如圖 7.1-2。	作圖
(2) 圓半徑為 5 公分	圓的直徑是 10 公分
(3) P 點必在圓外	P 與圓心相距 7 公分，7 公分＞5 公分
(4) Q 點必在圓周上	Q 與圓心相距 5 公分，5 公分＝5 公分
(5) R 點必在圓內	R 與圓心相距 3 公分，3 公分＜5 公分

例題 7.1-2：

已知圓 O 的直徑為 12 公分，且 A、B、C 三點與此圓心 O 的距離分別為 9 公分、6 公分、5 公分，試判斷 A、B、C 三點與圓 O 的位置關係：（填入 A、B、C）

(1) 在圓內的是______點。

(2) 在圓上的是______點。

(3) 在圓外的是______點。

想法：(1) 圓外一點到圓心的距離大於圓半徑

(2) 圓周上一點到圓心的距離等於圓半徑

(3) 圓內一點到圓心的距離小於圓半徑

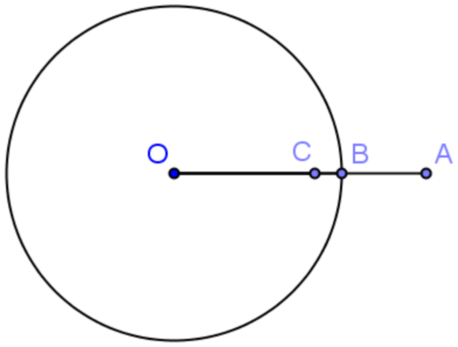


圖 7.1-3

解：

敘述	理由
(1) 依題意作圖，如圖 7.1-3。	作圖
(2) 圓 O 半徑為 6 公分	已知圓 O 直徑為 12 公分
(3) A 點必在圓外	已知$\overline{OA}$＝9 公分＞6 公分＝圓 O 半徑
(4) B 點必在圓周上	已知$\overline{OB}$＝6 公分＝圓 O 半徑
(5) C 點必在圓內	已知$\overline{OC}$＝4 公分＜6 公分＝圓 O 半徑

例題 7.1-3：

有一圓的圓心 O 與 A、B、C 三點的距離分別為$\overline{OA}$＝5 公分，$\overline{OB}$＝7 公分，$\overline{OC}$＝9 公分。已知 A、B、C 三點中，有兩點在圓內，有一點在圓外，則此圓的半徑 r 可能的範圍為______________。

想法：(1) 圓外一點到圓心的距離大於圓半徑

(2) 圓周上一點到圓心的距離等於圓半徑

(3) 圓內一點到圓心的距離小於圓半徑

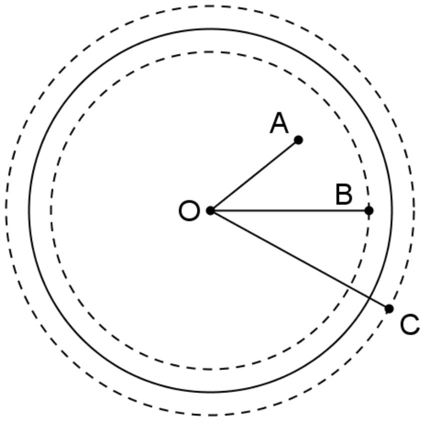


圖 7.1-4

解：

敘述	理由
(1) 依題意作圖，如圖 7.1-4。	作圖
(2) $\overline{OA}<\overline{OB}<\overline{OC}$	已知$\overline{OA}$＝5 公分、$\overline{OB}$＝7 公分、$\overline{OC}$＝9 公分
(3) A、B 兩點在圓內，C 點在圓外	已知 A、B、C 三點中，有兩點在圓內，有一點在圓外
(4) 7 公分＜r＜9 公分	A、B 兩點在圓內，半徑必大於 7 公分＝$\overline{OB}$ & C 點在圓外，半徑必小於$\overline{OC}$＝9 公分

例題 7.1-4：

已知圓 O 的半徑為 6 公分，且圓心 O 到三條直線 L_1、L_2、L_3 的距離分別為 4 公分、6 公分、8 公分，則：

(1) 直線________和圓 O 相交於兩點。

(2) 直線________和圓 O 相交於一點。

(3) 直線________和圓 O 不相交。

想法：(1) 直線外一點到直線的最短距離為垂直線段(詳見例題 4.1-1)

(2) 直線到圓心的距離大於圓半徑，則直線與圓不相交

(3) 直線到圓心的距離等於圓半徑，則直線與圓相交於一點

(4) 直線到圓心的距離小於圓半徑，則直線與圓相交兩點

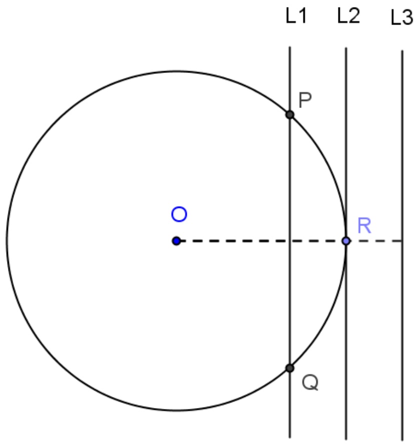


圖 7.1-5

解：

敘述	理由
(1) 如圖 7.1-5，直線 L_1 和圓 O 相交於 P、Q 兩點	圓心 O 到直線 L_1 的距離為 4 公分＜6 公分＝半徑
(2) 如圖 7.1-5，直線 L_2 和圓 O 相交於一點 R 點	圓心 O 到直線 L_2 的距離為 6 公分＝半徑
(3) 如圖 7.1-5，直線 L_3 和圓 O 不相交	圓心 O 到直線 L_3 的距離為 8 公分＞6 公分＝半徑

例題 7.1-5：

如圖 7.1-6，A 在圓 O 外，$\overline{AC}$通過圓心 O 且交圓 O 於 B、C 兩點。已知$\overline{OA}$＝6 公分，圓 O 的半徑為 3 公分，則：

(1) A 到圓 O 的最短距離為______公分。

(2) A 到圓 O 的最長距離為______公分。

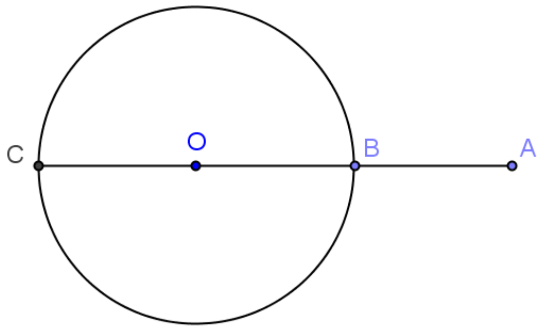


圖 7.1-6

想法：圓外一點與圓的距離為點到圓周的線段長

解：

敘述	理由
(1) A 到圓 O 的最短距離為$\overline{AB}$	如圖 7.1-6 所示
(2) $\overline{AB}=\overline{OA}-\overline{OB}$ ＝6 公分－3 公分＝3 公分	已知$\overline{OA}$＝6 公分 ＆ 半徑$\overline{OB}$＝3 公分
(3) A 到圓 O 的最長距離為$\overline{AC}$	如圖 7.1-6 所示
(4) $\overline{AC}=\overline{OA}+\overline{OC}$ ＝6 公分＋3 公分＝9 公分	已知$\overline{OA}$＝6 公分 ＆ 半徑$\overline{OC}$＝3 公分

定義 7.1-2 圓心角

兩半徑所夾的角，叫圓心角。

定義 7.1-3 圓周角

過圓周上同一點的兩弦所夾的角，叫圓周角。

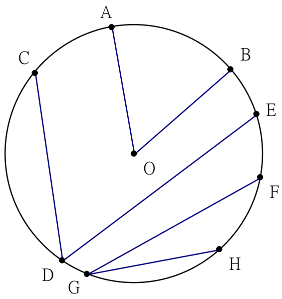


圖 7.1-7

圖 7.1-7 中，∠AOB 為圓心角，∠CDE 及∠FGH 都是圓周角。

例題 7.1-6：

當時鐘在六點五十分時，時針和分針的夾角為幾度？

圖 7.1-8

想法：兩半徑所夾的角，叫圓心角

解：

敘述	理由
(1) 分針一分鐘走 6 度	分針 60 分鐘走 360 度⇒一分鐘 6 度
(2) 分針從 6 點 30 分走到 6 點 50 分共走了 120 度，如圖 7.1-8(a)	分針 20 分鐘走 6 度×20 分＝120 度
(3) 時針一分鐘走 0.5 度	時針 60 分鐘走 30 度⇒一分鐘 0.5 度
(4) 時針從 6 點走到 6 點 50 分共走了 25 度，如圖 7.1-8(a)	時針 50 分鐘走 0.5 度×50 分＝25 度
(5) 所以六點五十分時，時針分針夾角 ＝120 度－25 度 ＝95 度	 **圖 7.1-8(a)**

定義 7.1-4 同心圓

半徑不同，圓心相同的諸圓，叫同心圓。

定義 7.1-5 扇形

兩半徑與所夾的弧圍成的圖形，叫做扇形。

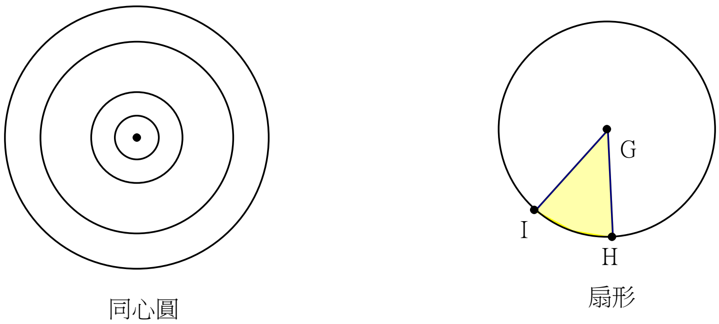


圖 7.1-9

定理 7.1-1 等半徑定理： 同圓或等圓的半徑相等。

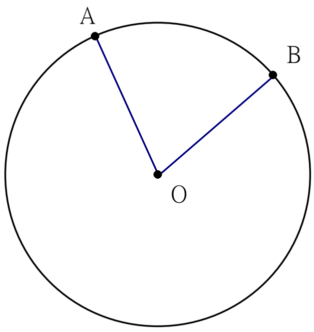


圖 7.1-10

已知：如圖 7.1-10，$\overline{OA}$與$\overline{OB}$都是圓 O 的半徑。
求證：$\overline{OA}=\overline{OB}$
想法：固定 O 點，旋轉$\overline{OA}$，使$\overline{OA}$與$\overline{OB}$重合。
證明：

敘述	理由
(1) 固定 O 點，旋轉$\overline{OA}$，使$\overline{OA}$與$\overline{OB}$重合。	不改變圖形的大小、形狀，可自一位置移至另一位置。
(2) A 點與 B 點重合。	圓周上每一點與圓心等距離。
(3) $\overline{OA}=\overline{OB}$	等線段相等。

Q. E. D.

定理 7.1-2 全等圓定理： 兩圓的半徑相等，則兩圓相等。

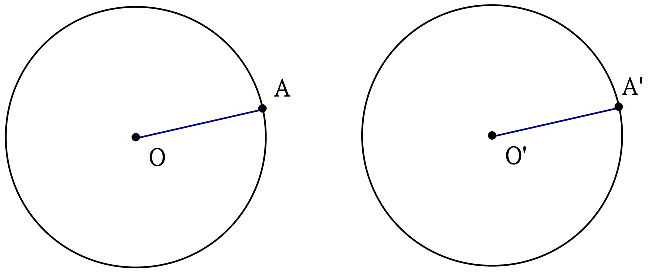


圖 7.1-11

已知：如圖 7.1-11，圓 O 及圓 O`兩圓，$\overline{OA}=\overline{O'A'}$。

求證： 圓 O 及圓 O`相等。

想法：應用移形公理，證明兩圓重合。

證明：

敘述	理由
(1) 將圓 O`放在圓 O 上，使圓心 O`與圓心 O 重合，$\overline{O'A'}$落在$\overline{OA}$上。	移形公理。
(2) 點 A`與點 A 重合。	已知$\overline{OA}=\overline{O'A'}$
(3) 圓 O`與圓 O 相等。	同圓相等。

Q. E. D.

習題 7.1

習題 7.1-1

圓與圓周如何區別？

習題 7.1-2

一個圓有多少條半徑？多少條直徑？

習題 7.1-3

若圓 O 的半徑為 8 公分，根據下列判斷 P 點、Q 點、R 點與圓 O 的位置關係：

(1) $\overline{OP}=10$ 公分　(2) $\overline{OQ}=8$ 公分　(3) $\overline{OR}=4$ 公分

習題 7.1-4

若圓 O 的半徑為 6 公分，P 為圓 O 內部一點，$\overline{OP}=t$，則 t 的範圍為________。

習題 7.1-5

已知圓 O 的半徑為 12 公分，且圓心 O 到三條直線 L_1、L_2、L_3 的距離分別為 8 公分、12 公分、16 公分，則：

(1) 直線________和圓 O 相交於兩點。

(2) 直線_______和圓 O 相交於一點。

(3) 直線_______和圓 O 不相交。

習題 7.1-6

若圓 O 的半徑為 6 公分，圓外一點 A 到圓心 O 的距離為 10 公分，則 A 點到圓 O 的最短距離是______，A 點到圓 O 的最長距離是______。

習題 7.1-7

當時鐘在五點五十五分時，時針和分針的夾角為幾度？

習題 7.1-8

作一圓心角為 90°的扇形。

習題 7.1-9

作一圓周角其角度為 90°。

習題 7.1-10

試作兩同心圓，其直徑分別為 3 公分與 5 公分。

習題 7.1-11

試證矩形的四頂點在同一圓周上。

7.2 節　弦與弧

定義 7.2-1 弧

圓周的一部份稱為弧，大於半圓周的為優弧，小於半圓周的為劣弧，通常劣弧簡稱弧。

定義 7.2-2 弦

圓周上任意兩點的連線叫做弦。

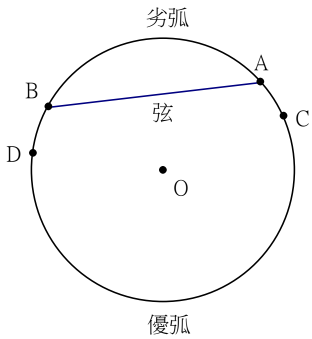


圖 7.2-1

圖 7.2-1 中，$\overline{AB}$是此圓的一弦；$\overset{\frown}{CD}$大於半圓周為優弧，$\overset{\frown}{AB}$小於半圓周為劣弧。

定義 7.2-3　弧的度數

將圓周分成 360 等分，每一等分的弧叫做 1 度；而圓心角等於所對弧的度數。

例題 7.2-1：

如圖 7.2-2，$\overset{\frown}{AB}$ 的度數是 45°，試求其所對應的圓心角 ∠AOB。

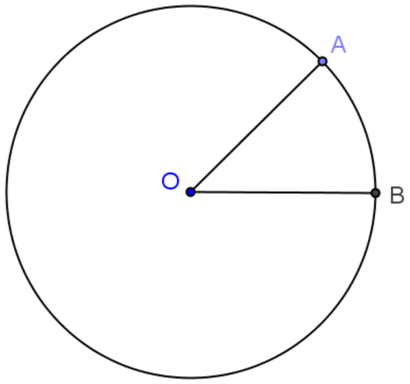


圖 7.2-2

想法：圓心角等於所對弧的度數

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{AB}=45°$	已知 $\overset{\frown}{AB}$ 的度數是 45°
(2) $\angle AOB=\overset{\frown}{AB}=45°$	由(1) $\overset{\frown}{AB}=45°$ & 圓心角 ∠AOB 等於所對弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的度數

例題 7.2-2：

如圖 7.2-3，有一正十二邊形的所有頂點均在圓 O 上，A、B 為其中兩個相鄰的頂點，試求 $\overset{\frown}{AB}$ 的度數。

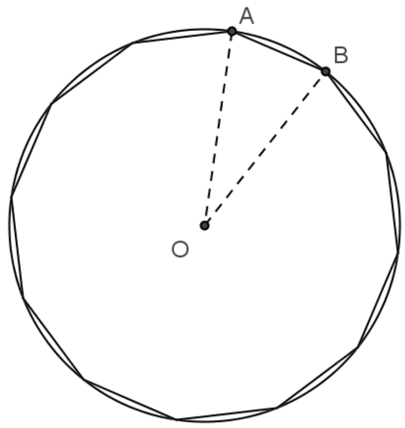


圖 7.2-3

想法：(1) 圓周為 360°

(2) 圓心角等於所對弧的度數

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{AB}=\frac{1}{12}\times$圓周	已知正十二邊形將圓周 12 等分，$\overset{\frown}{AB}$ 占 1 等分
(2) $\overset{\frown}{AB}=\frac{1}{12}\times360°=30°$	將圓周 360°代入(1)

例題 7.2-3：

如圖 7.2-4，已知圓心角$\angle AOB=56°$，則$\overset{\frown}{AB}=$_____度，$\overset{\frown}{ACB}=$____度。

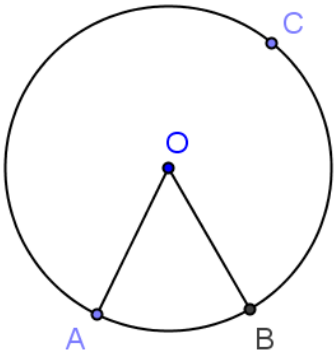


圖 7.2-4

想法：(1) 圓周為 360°

(2) 圓心角等於所對弧的度數

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{AB}=\angle AOB=56°$	圓心角$\angle AOB$等於所對弧$\overset{\frown}{AB}$的度數 & $\angle AOB=56°$
(2) $\overset{\frown}{ACB}=360°-\overset{\frown}{AB}$ $=360°-56°=304°$	$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{ACB}$為圓周$=360°$ & 由(1) $\overset{\frown}{AB}=56°$已證

例題 7.2-4：

如圖 7.2-5，若 $\overset{\frown}{AB}=70°$，$\overset{\frown}{BC}=155°$，則∠AOC 的度數＝？

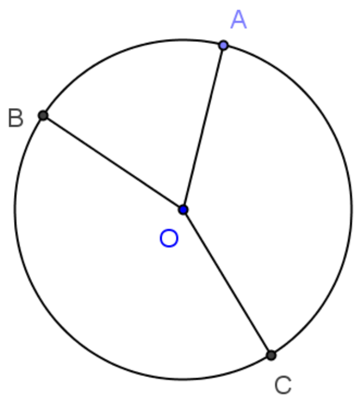


圖 7.2-5

想法：(1) 圓周為 360°

(2) 圓心角等於所對弧的度數

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CA}=360°$	$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CA}$為圓周＝360°
(2) $70°+155°+\overset{\frown}{CA}=360°$	將$\overset{\frown}{AB}=70°$，$\overset{\frown}{BC}=155°$ 代入 (1)
(3) $\overset{\frown}{CA}=360°-70°-155°=135°$	由(2) 等量減法公理
(4) $\angle AOC=\overset{\frown}{CA}=135°$	圓心角∠AOC 等於所對弧$\overset{\frown}{CA}$的度數 & (3) $\overset{\frown}{CA}=135°$

例題 7.2-5：

如圖 7.2-6，已知 A、B、C 是圓 O 上相異三點，若$\overset{\frown}{ACB}$的度數比$\overset{\frown}{AB}$度數的 3 倍多 60°，則∠AOB＝________度。

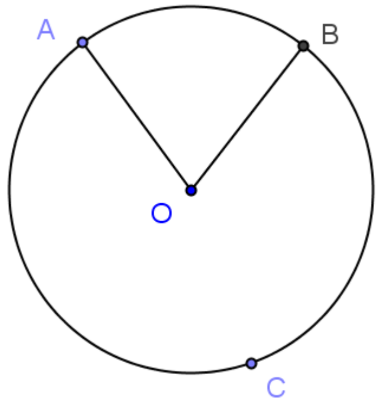


圖 7.2-6

想法：(1) 圓周為 360°

(2) 圓心角等於所對弧的度數

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{ACB}=360°$	$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{ACB}$為圓周＝360°
(2) $\overset{\frown}{ACB}=3\overset{\frown}{AB}+60°$	已知$\overset{\frown}{ACB}$的度數比 $\overset{\frown}{AB}$ 度數的 3 倍多 60°
(3) $\overset{\frown}{AB}+(3\overset{\frown}{AB}+60°)=360°$	將(2) $\overset{\frown}{ACB}=3\overset{\frown}{AB}+60°$ 代入(1)
(4) $\overset{\frown}{AB}=75°$	由(3) 解一元一次方程式
(5) $\angle AOB=\overset{\frown}{AB}=75°$	由(4) $\overset{\frown}{AB}=75°$ & 圓心角∠AOB 等於所對弧$\overset{\frown}{AB}$的度數

例題 7.2-6：

如圖 7.2-7，$\overline{AB}$是半圓的直徑，C 為$\overset{\frown}{AB}$上一點，M 為$\overset{\frown}{AC}$的中點，N 為$\overset{\frown}{BC}$的中點。則$\overset{\frown}{MCN}$的弧度為________度。

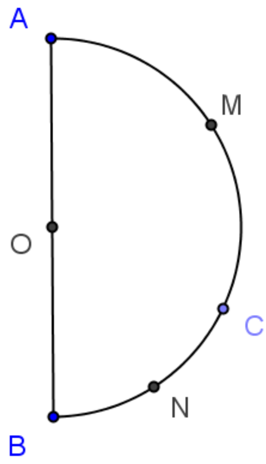


圖 7.2-7

想法：半圓周為 180°

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{ACB}=180°$	$\overset{\frown}{ACB}$為圓周的一半
(2) $\overset{\frown}{MC}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$	M 為 $\overset{\frown}{AC}$ 的中點
(3) $\overset{\frown}{CN}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$	N 為 $\overset{\frown}{BC}$ 的中點
(4) $\overset{\frown}{MCN}=\overset{\frown}{MC}+\overset{\frown}{CN}$	如圖 7.2-7 所示
(5) $\overset{\frown}{MCN}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ $=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC})$ $=\frac{1}{2}\overset{\frown}{ACB}=\frac{1}{2}\times180°$ $=90°$	將(2) $\overset{\frown}{MC}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ & (3) $\overset{\frown}{CN}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ 代入(4) & 由(1) $\overset{\frown}{ACB}=180°$

例題 7.2-7：

如圖 7.2-8，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$皆為直徑，$\overset{\frown}{AC}=2x°$，$\overset{\frown}{CE}=4x°$，$\overset{\frown}{EB}=3x°$，則：

(1) x＝________。

(2) ∠4＝_______度。

(3) ∠6＝_______度。

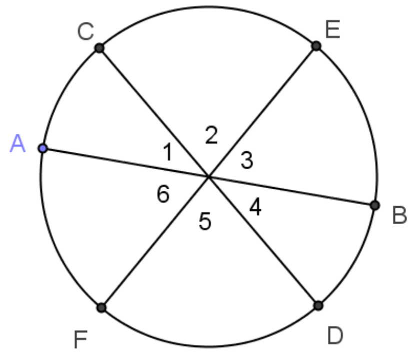


圖 7.2-8

想法：(1) 半圓周為 180°

(2) 圓心角等於所對弧的度數

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CE}+\overset{\frown}{EB}=180°$	$\overline{AB}$為直徑 & $\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CE}+\overset{\frown}{EB}$為半圓弧
(2) $2x°+4x°+3x°=180°$	將$\overset{\frown}{AC}=2x°$，$\overset{\frown}{CE}=4x°$，$\overset{\frown}{EB}=3x°$代入(1)
(3) $x=20$	由(2) & 解一元一次方程式
(4) $\angle 1=\overset{\frown}{AC}=2x°=2\times 20°=40°$	圓心角∠1 等於所對弧$\overset{\frown}{AC}$的度數 & $\overset{\frown}{AC}=2x°$
(5) $\angle 4=\angle 1=40°$	對頂角相等 & (4) $\angle 1=40°$
(6) $\angle 3=\overset{\frown}{EB}=3x°=3\times 20°=60°$	圓心角∠3 等於所對弧$\overset{\frown}{EB}$的度數 & $\overset{\frown}{EB}=3x°$
(7) $\angle 6=\angle 3=60°$	對頂角相等 & (6) $\angle 3=60°$

例題 7.2-8：

如圖 7.2-9，若$\overline{AB}$是圓 O 的直徑，C 在圓 O 上，且 $\overset{\frown}{AC}=2\overset{\frown}{BC}$，則∠BOC＝______度。

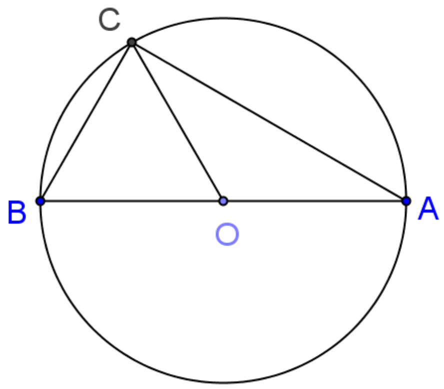


圖 7.2-9

想法：(1) 半圓周為 180°

(2) 圓心角為所對弧度數

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{ACB}=180°$	$\overset{\frown}{ACB}$為圓周的一半
(2) $\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{ACB}=180°$	全量等於分量之和 & 由(1) $\overset{\frown}{ACB}=180°$
(3) $2\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{BC}=180°$	將已知$\overset{\frown}{AC}=2\overset{\frown}{BC}$代入(2)
(4) $\overset{\frown}{BC}=180°\div 3=60°$	由(3) 解一元一次方程式
(5) $\angle BOC=\overset{\frown}{BC}=60°$	圓心角∠BOC 為所對弧$\overset{\frown}{BC}$的度數 & (4)$\overset{\frown}{BC}=60°$

例題 7.2-9：

如圖 7.2-10，在△ABC 中，∠ACB＝90°，∠B＝25°。以 C 為圓心，$\overline{AC}$ 為半徑的圓交 $\overline{AB}$ 於 D，交$\overline{BC}$ 於 E，則 $\overset{\frown}{DE}$ 的度數是多少？

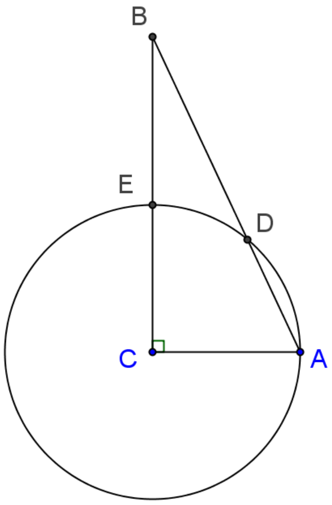


圖 7.2-10

想法：(1) 三角形內角合 180°

(2) 圓心角等於所對弧的度數

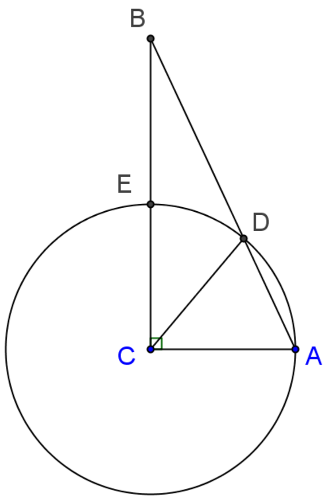


圖 7.2-10(a)

解：

敘述	理由
(1) 作$\overline{CD}$，如圖 7.2-10(a)所示	作圖
(2) △ABC 中， ∠A＋∠B＋∠ACB＝180°	如圖 7.2-10(a)所示 & 三角形內角和 180°

(3) $\angle A+25°+90°=180°$	將已知$\angle ACB=90°$，$\angle B=25°$ 代入(2)
(4) $\angle A=180°-25°-90°=65°$	由(3) 等量減法公理
(5) $\overline{AC}=\overline{CD}$為圓 C 半徑	同圓半徑皆相等 ＆ 已知$\overline{AC}$為圓 C 半徑
(6) △ACD 為等腰三角形	由(5) $\overline{AC}=\overline{CD}$ ＆ 等腰三角形定義
(7) $\angle ADC=\angle A=65°$	等腰三角形兩底角相等 ＆ (4) $\angle A=65°$
(8) △ACD 中， $\angle ADC+\angle A+\angle ACD=180°$	如圖 7.2-10(a)所示 ＆ 三角形內角和 180°
(9) $65°+65°+\angle ACD=180°$	將(7) $\angle ADC=\angle A=65°$ 代入(8)
(10) $\angle ACD=180°-65°-65°=50°$	由(9) 等量減法公理
(11) $\angle BCD=\angle BCA-\angle ACD$ $=90°-50°=40°$	如圖 7.2-10(a)所示 ＆ 已知$\angle ACB=90°$ ＆ (10)$\angle ACD=50°$
(12) $\overset{\frown}{DE}=\angle BCD=40°$	圓心角$\angle BCD$ 等於所對弧$\overset{\frown}{DE}$的度數 ＆ (11) $\angle BCD=40°$

例題 7.2-10：

如圖 7.2-11，圓 P 的半徑$\overline{PA}$為 15 公分，圓 Q 的半徑$\overline{QC}$為 9 公分，$\angle APB = \angle CQD$。已知$\overset{\frown}{CD} = 50°$，則：

(1) $\angle APB =$______度。　　　　(2) $\overset{\frown}{AB} =$______度。

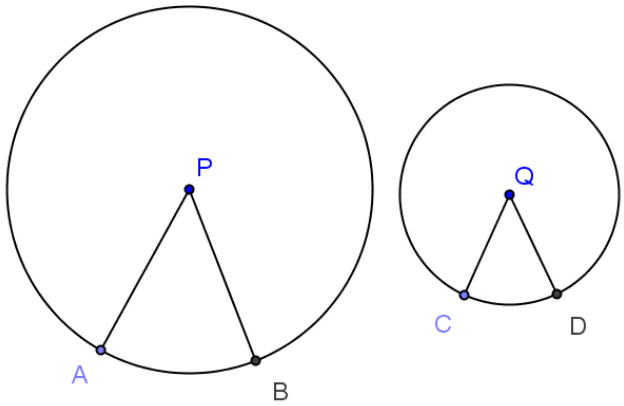


圖 7.2-11

想法：圓心角等於所對弧的度數

解：

敘述	理由
(1) 圓 Q 中，$\angle CQD = \overset{\frown}{CD} = 50°$	圓心角$\angle CQD$等於所對弧$\overset{\frown}{CD}$的度數 & 已知$\overset{\frown}{CD} = 50°$
(2) $\angle APB = \angle CQD = 50°$	已知$\angle APB = \angle CQD$ & (1) $\angle CQD = 50°$
(3) 圓 P 中，$\overset{\frown}{AB} = \angle APB = 50°$	圓心角$\angle APB$等於所對弧$\overset{\frown}{AB}$的度數 & (2) $\angle APB = 50°$

例題 7.2-11：

如圖 7.2-12，兩同心圓的圓心為 O，$\overline{OA}$、$\overline{OB}$為小圓的半徑，$\overline{OC}$、$\overline{OD}$為大圓的半徑。已知∠AOB＝120°，則：

(1) ∠COD＝______度。　　　　(2) $\overset{\frown}{AB}$＝______度，$\overset{\frown}{CD}$＝______度。

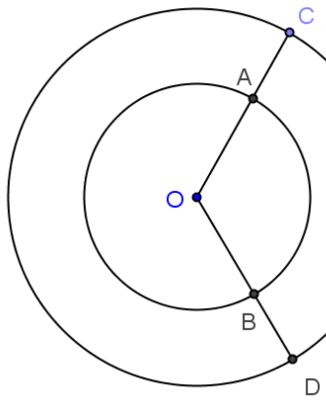


圖 7.2-12

想法：(1) 同心圓圓心角相等

(2) 圓心角等於所對弧的度數

解：

敘述	理由
(1) ∠COD＝∠AOB＝120°	同心圓圓心角∠COD 與∠AOB 相等
(2) $\overset{\frown}{AB}$＝∠AOB＝120°	圓心角∠AOB 等於所對弧$\overset{\frown}{AB}$的度數 & 已知∠AOB＝120°
(3) $\overset{\frown}{CD}$＝∠COD＝120°	圓心角∠COD 等於所對弧$\overset{\frown}{CD}$的度數 & (1) ∠COD＝120°

定理 7.2-1 等圓心角對等弧定理

在同圓或等圓中，若兩圓心角相等，則所對的兩弧相等。

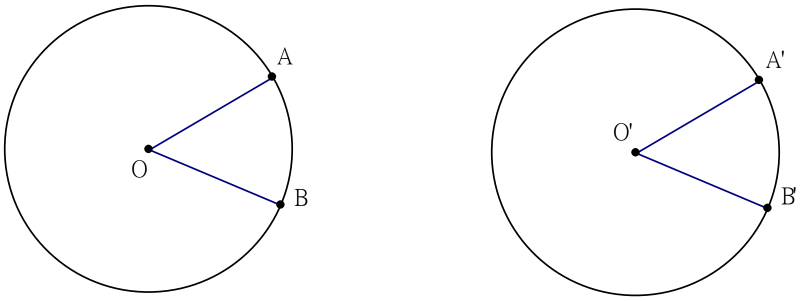


圖 7.2-13

已知：如圖 7.2-13，圓 O 及圓 O`為等圓，∠AOB＝∠A`O`B`。

求證：$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$

想法：應用移形公理，證明兩弧重合。

證明：

敘述	理由
(1) 將圓 O`放在圓 O 上，使∠A`O`B`與∠AOB 重合。	移形公理及已知∠AOB＝∠A`O`B`。
(2) 點 A`與點 A 重合，點 B`與點 B 重合。	等圓半徑相等。
(3) $\overset{\frown}{A'B'}$與$\overset{\frown}{AB}$重合。	等圓周上重合兩點之兩弧也重合。
(4) $\overset{\frown}{A'B'}=\overset{\frown}{AB}$	兩弧重合。

Q. E. D.

定理 7.2-2 等弧對等圓心角定理

在同圓或等圓中，若兩弧相等，則所對的兩圓心角也相等。

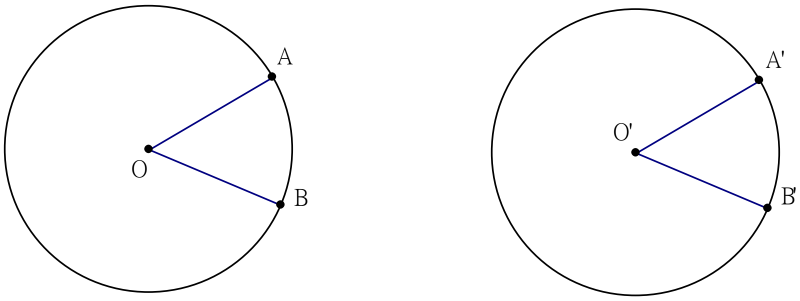


圖 7.2-14

已知：如圖 7.2-14，圓 O 及圓 O`為兩等圓，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$。

求證：∠AOB＝∠A`O`B`

想法：應用移形公理。

證明：

敘述	理由
(1) 將圓 O`放在圓 O 上，使$\overset{\frown}{A'B'}$與$\overset{\frown}{AB}$重合。	移形公理。
(2) 點 A`與點 A 重合，點 B`與點 B 重合。	已知$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$
(3) $\overline{A'O'}$與$\overline{AO}$重合，$\overline{B'O'}$與$\overline{BO}$重合。	過兩點可畫一直線且只有一直線。
(4) ∠A`O`B`=∠AOB	重合兩直線的夾角相等。

Q. E. D.

定理 7.2-3 等弧對等弦定理

在同圓或等圓中，若兩弧相等，則所對的弦也相等。

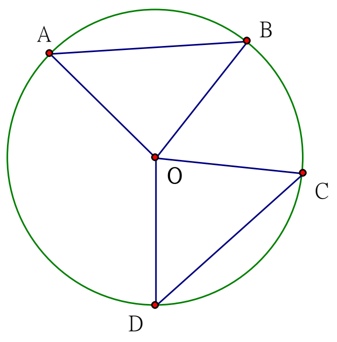


圖 7.2-15

已知： 如圖 7.2-15，圓 O 中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$。

求證： $\overline{AB}=\overline{CD}$

想法： 利用等弧對等圓心角定理及全等三角形的對應邊相等的性質。

證明：

敘述	理由
(1) $\angle AOB=\angle COD$。	已知$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，由等弧對等圓心角定理。
(2) 在$\triangle AOB$與$\triangle COD$中	如圖 7.2-15 所示
$\overline{OA}=\overline{OC}$	同圓半徑等長
$\angle AOB=\angle COD$	由(1)
$\overline{OB}=\overline{OD}$	同圓半徑等長
(3) $\triangle AOB \cong \triangle COD$	由(2) & 根據 S.A.S. 三角形全等定理。
(4) $\overline{AB}=\overline{CD}$	由(3) 兩全等三角形的對應邊相等。

Q. E. D.

例題 7.2-12：

如圖 7.2-16，已知在圓 O 中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，求證：(1) $\overline{AB}=\overline{CD}$ (2) $\overline{AC}=\overline{BD}$

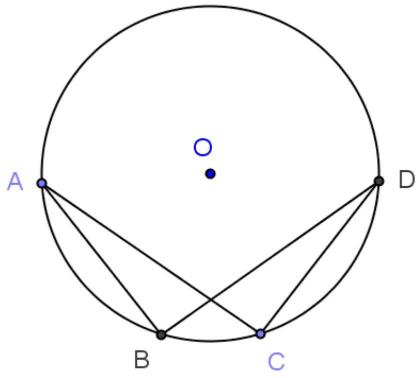


圖 7.2-16

想法：等弧對等弦定理

證明：

敘述	理由
(1) 圓 O 中，$\overline{AB}=\overline{CD}$	已知$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ & 等弧對等弦定理
(2) $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BC}$	已知$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ & 等量加法原理、同加$\overset{\frown}{BC}$
(3) $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$	由(2) & $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}$ 、 $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BC}$
(4) $\overline{AC}=\overline{BD}$	由(3) $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$ & 等弧對等弦定理

例題 7.2-13：

如圖 7.2-17，已知 ABCDEF 為正六邊形的六個頂點，且這六個頂點都落在圓 O 上，則：

(1) ∠AOE＝____度，∠DOB＝____度。

(2) $\overline{AE}$＝$\overline{DB}$嗎？為什麼？

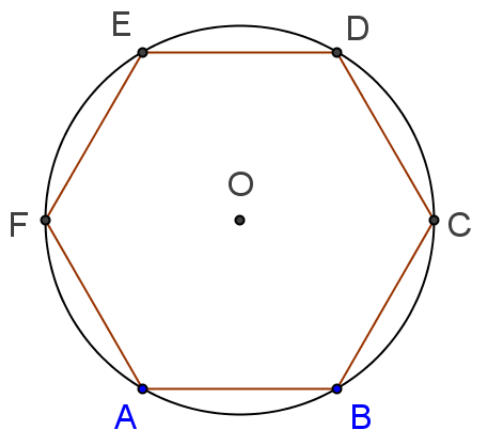


圖 7.2-17

想法：(1) 正六邊形的六個頂點將圓周 6 等分

(2) 圓心角等於所對的弧度

(3) 等弧對等弦定理

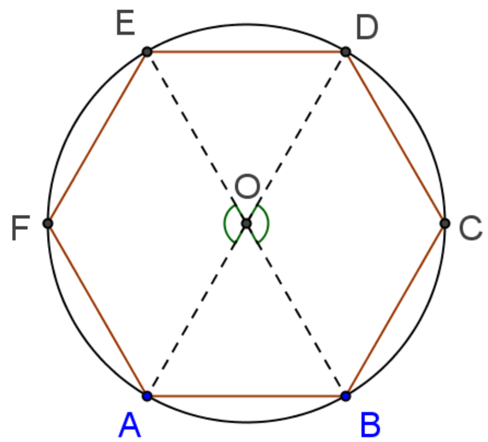


圖 7.2-17(a)

解：

敘述	理由
(1) ABCDEF 將圓周平分成 6 等分	已知 ABCDEF 為正六邊形的六個頂點
(2) $\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{FE}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BC}=360°\div 6=60°$	由(1) ＆ 圓周為 360°

(3) 作$\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OD}$、$\overline{OE}$，如圖 7.2-17(a)	作圖
(4) $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{AF} + \overset{\frown}{FE} = 60° + 60° = 120°$	全量等於分量之和 & (2) $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{FE} = 60°$
(5) $\angle AOE = \overset{\frown}{AE} = 120°$	由(4) $\overset{\frown}{AE} = 120°$ & 圓心角$\angle AOE$ 等於所對弧$\overset{\frown}{AE}$的度數
(6) $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{BC} = 60° + 60° = 120°$	全量等於分量之和 & (2) $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BC} = 60°$
(7) $\angle DOB = \overset{\frown}{BD} = 120°$	由(6) $\overset{\frown}{BD} = 120°$ & 圓心角$\angle DOB$ 等於所對弧$\overset{\frown}{BD}$的度數
(8) $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BD} = 120°$	由(4)$\overset{\frown}{AE} = 120°$ &(6)$\overset{\frown}{BD} = 120°$ 遞移律
(9) $\overline{AE} = \overline{DB}$	由(8) & 等弧對等弦定理

定理 7.2-4 等弦對等弧定理：

在同圓或等圓中，若兩弦相等，則所對的弧也相等。

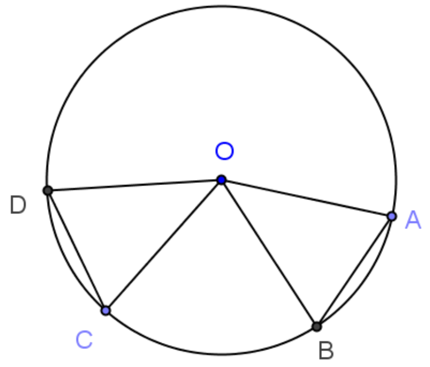


圖 7.2-18

已知：如圖 7.2-18，圓 O 中，$\overline{AB}=\overline{CD}$。

求證：$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$

想法：利用全等三角形的對應角相等的性質及等圓心角對等弧定理。

證明：

敘述	理由
(1) 在△AOB 與△COD 中 $\overline{AB}=\overline{CD}$ $\overline{OA}=\overline{OB}$ $\overline{OC}=\overline{OD}$	如圖 7.2-18 所示 已知$\overline{AB}=\overline{CD}$ 同圓的半徑相等 同圓的半徑相等
(2) △AOB ≅ △COD	由(1) & 根據 S.S.S. 三角形全等定理
(3) ∠AOB=∠COD	由(2) & 全等三角形的對應角相等
(4) $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$	由(3) & 等圓心角對等弧定理

Q. E. D.

例題 7.2-14：

如圖 7.2-19，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為圓 O 的兩弦，且$\overline{AB}=\overline{CD}$。若$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=45°$，則$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}=$___度。

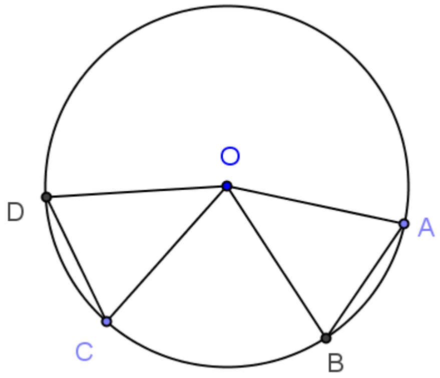


圖 7.2-19

想法：等弦對等弧定理

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}=\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$	已知$\overline{AB}=\overline{CD}$ ＆ 等弦對等弧定理
(2) $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}=\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=45°$	由(1) ＆ 已知$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=45°$

定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理

垂直於弦的直徑必平分這弦與這弦所對的弧。

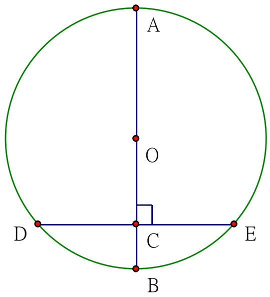


圖 7.2-20

已知：圖 7.2-20 圓 O 中，$\overline{DE}$為圓上之一弦，$\overline{AB}$為過圓心 O 且垂直$\overline{DE}$的直徑。

求證：(1) $\overline{CD}=\overline{CE}$　　(2) $\overset{\frown}{DB}=\overset{\frown}{BE}$

想法：利用全等三角形的對應邊及對應角相等性質及等圓心角對等弧定理。

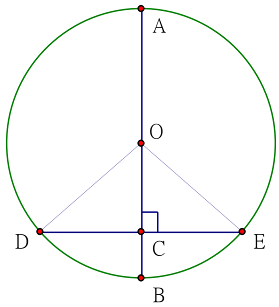


圖 7.2-20(a)

證明：

敘述	理由
(1) 作$\overline{OD}$及$\overline{OE}$，如圖 7.2-20(a)	兩點可作一直線
(2) 在△OCD 與△OCE 中	如圖 7.2-20(a)所示
∠OCD＝∠OCE = 90°	已知$\overline{AB}\perp\overline{DE}$
$\overline{OD}=\overline{OE}$	同圓的半徑相等
$\overline{OC}=\overline{OC}$	同線段相等
(3) △OCD ≅ △OCE	由(2) & 根據 R.H.S. 三角形全等定理
(4) $\overline{CD}=\overline{CE}$	由(3) & 全等三角形的對應邊相等
(5) ∠COD = ∠COE	由(3) & 全等三角形的對應角相等
(6) $\overset{\frown}{DB}=\overset{\frown}{BE}$	由(5) & 等圓心角對等弧定理

Q. E. D.

由定理 7.2-5 (垂直於弦的直徑定理)，我們可以得知，通過圓心(O 點)對弦($\overline{DE}$)作垂直線($\overline{OC}$)，則此線段($\overline{OC}$)必平分此弦($\overline{DE}$)。此一性質在本章及第八章會常用到, 請同學牢記。

例題 7.2-15：

如圖 7.2-21，$\overline{AB}$為圓 O 直徑，$\overline{DE}$為圓 O 之一弦，若$\overline{AB}\perp\overline{DE}$，且$\overline{DE}=20$公分、$\overset{\frown}{\mathrm{DE}}=106°$，試求：(1) $\overline{CD}=$？　　(2) $\overset{\frown}{\mathrm{AE}}=$？

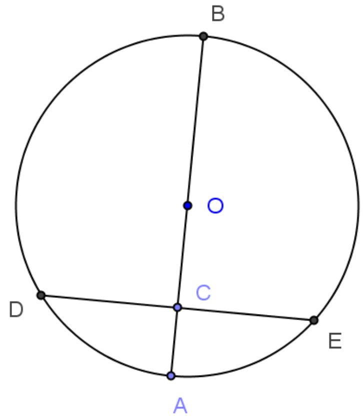


圖 7.2-21

想法：垂直於弦的直徑必平分這弦與這弦所對的弧

解：

敘述	理由
(1) $\overline{CD}=\overline{CE}$ & $\overset{\frown}{\mathrm{AD}}=\overset{\frown}{\mathrm{AE}}$	已知$\overline{AB}$為圓 O 直徑，$\overline{DE}$為圓 O 之一弦，且$\overline{AB}\perp\overline{DE}$ & 垂直於弦的直徑必平分這弦與這弦所對的弧
(2) $\overline{CD}=\overline{CE}=\frac{1}{2}\overline{DE}=\frac{1}{2}\times 20$ 公分 $=10$ 公分	由(1) & 已知$\overline{DE}=20$ 公分
(3) $\overset{\frown}{\mathrm{AE}}=\overset{\frown}{\mathrm{AD}}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{\mathrm{DE}}=\frac{1}{2}\times 106°=53°$	由(1) & 已知$\overset{\frown}{\mathrm{DE}}=106°$

例題 7.2-16：

如圖 7.2-22，已知 A、B、C 三點為同一圓上的三點，試找出這個圓的圓心並完成此圖。

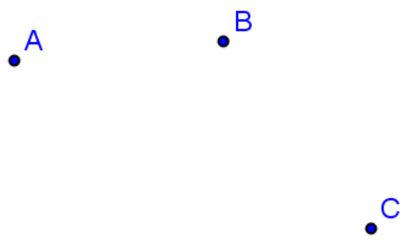


圖 7.2-22

想法：(1) 若 A、B、C 三點為同一圓上的三點，則$\overline{AB}$與$\overline{BC}$為圓上之弦；

(2) 根據垂直於弦的直徑必平分這弦與這弦所對的弧，則圓心必在$\overline{AB}$的中垂線上；

(3) 根據垂直於弦的直徑必平分這弦與這弦所對的弧，則圓心必在$\overline{BC}$的中垂線上；

(4) 根據上述條件，此圓的圓心為$\overline{AB}$與$\overline{BC}$的中垂線交點。

作法： 如圖 7.2-22 (a)

(1) 連接 A、B 兩點，B、C 兩點。

(2) 分別作$\overline{AB}$與$\overline{BC}$的中垂線，兩中垂線相交於 O 點。

(3) 連接 A、O 兩點，B、O 兩點，C、O 兩點。

(4) 以 O 點為圓心，$\overline{OA}$為半徑畫圓，圓 O 即為所求。

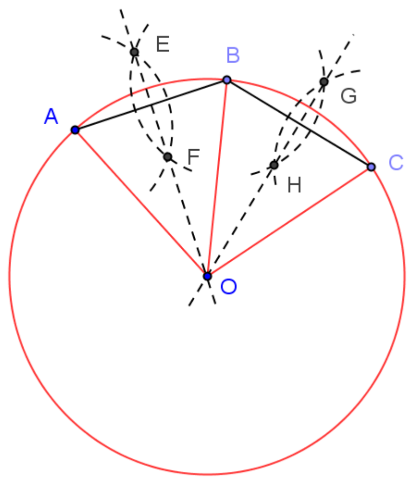


圖 7.2-22(a)

接下來我們要證明上述作法所作得的圓 O 通過 A、B、C 三點。

證明：

敘述	理由
(1) $\overline{EO}$為$\overline{AB}$的中垂線	作圖(如作法(1)~(2))
(2) $\overline{OA}=\overline{OB}$	由(1) & 中垂線上任一點到線段兩端等距離
(3) $\overline{GO}$為$\overline{BC}$的中垂線	作圖(如作法(1)~(2))
(4) $\overline{OB}=\overline{OC}$	由(3) & 中垂線上任一點到線段兩端等距離
(5) $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$	由(2) & (4) 遞移律
(6) 所以圓 O 通過 A、B、C 三點	由(5) $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ & 同圓半徑皆相等

定理 7.2-6 弦與圓心距離定理

在同圓或等圓中，若兩弦相等，則與圓心的距離也相等。

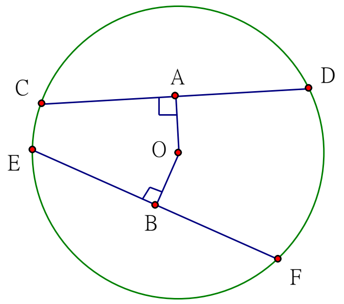


圖 7.2-23

已知：如圖 7.2-23，$\overline{CD}$及$\overline{EF}$為圓 O 中的二弦，且$\overline{CD}=\overline{EF}$，$\overline{OA}\perp\overline{CD}$，$\overline{OB}\perp\overline{EF}$。

求證：$\overline{OA}=\overline{OB}$

想法：利用全等三角形的對應邊相等的性質。

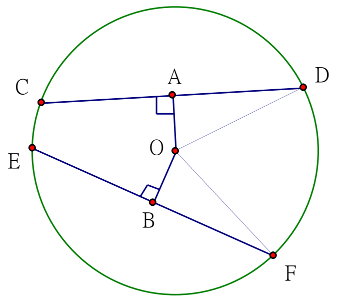


圖 7.2-23(a)

證明：

敘述	理由
(1) 作$\overline{OD}$及$\overline{OF}$，如圖 7.2-23(a)	兩點可作一直線
(2) $\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{CD}$ & $\overline{BF}=\frac{1}{2}\overline{EF}$	已知$\overline{OA}\perp\overline{CD}$，$\overline{OB}\perp\overline{EF}$ & 垂直於弦的直徑定理
(3) $\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{EF}=\overline{BF}$	由(2) & 已知$\overline{CD}=\overline{EF}$
(4) 在△OAD 與△OBF 中 $\overline{OD}=\overline{OF}$ $\overline{AD}=\overline{BF}$ ∠OAD = ∠OBF	如圖 7.2-23(a)所示 同圓的半徑相等 由(3) 已證 已知$\overline{OA}\perp\overline{CD}$，$\overline{OB}\perp\overline{EF}$
(5) △OAD ≅ △OBF	由(4) & 根據 R.H.S. 三角形全等定理
(6) $\overline{OA}=\overline{OB}$	由(5) & 全等三角形的對應邊相等

Q. E. D.

例題 7.2-17：

如圖 7.2-24，$\overline{CD}$與$\overline{EF}$為圓 O 之兩弦，已知$\overline{CD}=\overline{EF}$、$\overline{OA}\perp\overline{CD}$、$\overline{OB}\perp\overline{EF}$且$\overline{OA}=4$ 公分，則$\overline{OB}=$？

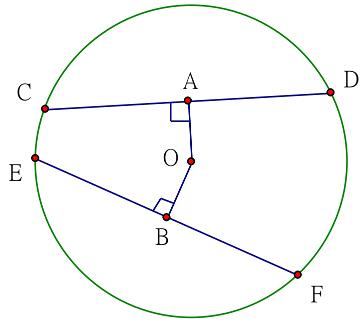


圖 7.2-24

想法：在同圓中，若兩弦相等，則與圓心的距離也相等

解：

敘述	理由
(1) $\overline{OB}=\overline{OA}$	已知$\overline{CD}$與$\overline{EF}$為圓 O 之兩弦，且$\overline{CD}=\overline{EF}$、$\overline{OA}\perp\overline{CD}$、$\overline{OB}\perp\overline{EF}$ & 在同圓中，若兩弦相等，則與圓心的距離也相等
(2) $\overline{OB}=\overline{OA}$ $=4$ 公分	由(1) & 已知$\overline{OA}=4$ 公分

定理 7.2-7 圓周角定理

在同圓或等圓中，圓周角等於同弧或等弧的圓心角的一半。

同弧的圓心角與圓周角的情形有如圖 7-2.25 三種：
(a)圓心在圓周角的一邊上 (b)圓心在圓周角內 (c)圓心在圓周角外。

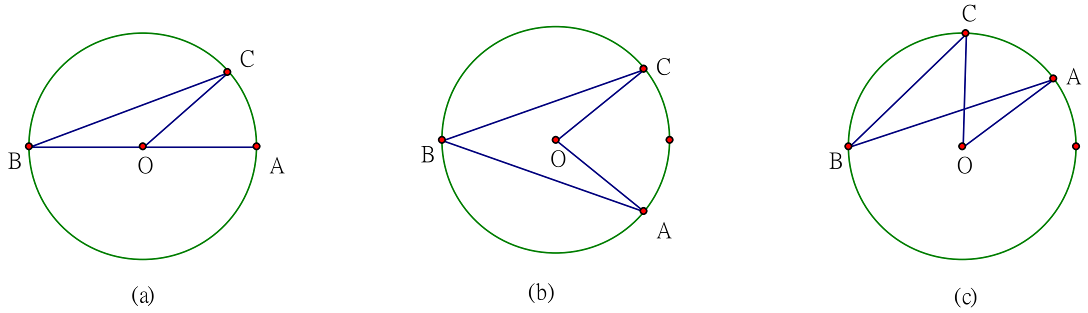


圖 7.2-25

已知：如圖 7.2-25，圓 O 中，$\overset{\frown}{AC}$所對的圓心角為∠AOC，圓周角為∠ABC。

求證：$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$

想法：利用等腰三角形及三角形的外角等於兩內對角和定理。

(a) **圓心 O 在∠ABC 的一邊上，如圖 7.2-25(a)。**

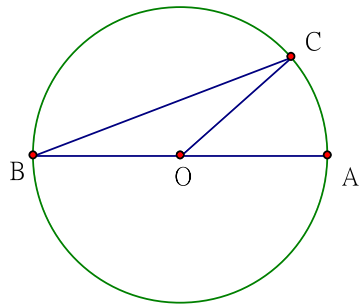


圖 7.2-25(a)

證明：

敘述	理由
(1) $\overline{OB} = \overline{OC}$	同圓的半徑相等
(2) △OBC 為等腰三角形 & ∠B＝∠C	由(1) & 等腰三角形兩底角相等
(3) △OBC 中，∠AOC＝∠B＋∠C	三角形的外角等於不相鄰兩內角和

(4) $\angle AOC = \angle B + \angle C = \angle B + \angle B$ $= 2\angle ABC$	將(2)式代入(3)式得
(5) $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$	由(4) 等式兩邊同除以 2 & 圓心角等於所對弧的度數

Q. E. D.

(b) **圓心 O 在∠ABC 內，如圖 7.2-25(b)。**

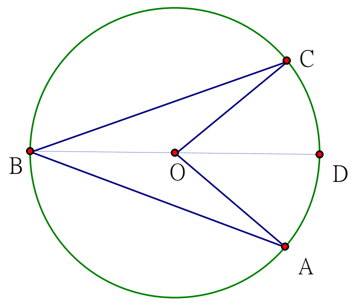


圖 7.2-25(b)

證明：

敘述	理由
(1) 作直徑$\overline{BD}$(連接 O、B 兩點，延長$\overline{OB}$與圓周交於 D 點)，如圖 7.2-25(b)	過兩點可作一直線
(2) $\angle ABD = \frac{1}{2}\angle AOD$，$\angle DBC = \frac{1}{2}\angle DOC$	由(a)己證
(3) $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$	全量等於分量的總和
$= \frac{1}{2}(\angle AOD + \angle DOC)$	將(2)式代入(3)式得
$= \frac{1}{2}\angle AOC$	全量等於分量的總合
(4) $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$	由(3) & 圓心角等於所對弧的度數

Q. E. D.

(c) **圓心 O 不在∠ABC 內，如圖 7.2-25(c)。**

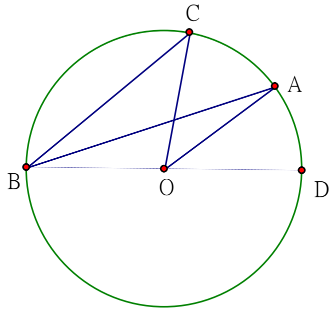


圖 7.2-25(c)

證明：

敘述	理由
(1) 作直徑$\overline{BD}$，如圖 7.2-25(c)	過兩點可作一直線
(2) $\angle DBC=\frac{1}{2}\angle DOC$，$\angle DBA=\frac{1}{2}\angle DOA$	由(a)已證
(3) $\angle ABC=\angle DBC-\angle DBA$	全量等於分量的總和
$=\frac{1}{2}(\angle DOC-\angle DOA)$	將(2)式代入(3)式得
$=\frac{1}{2}\angle AOC$	全量等於分量的總和
(4) $\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$	由(3) & 圓心角等於所對弧的度數

Q. E. D.

透過以上三種情形的證明，我們都可以得知$\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$，所以可以確定圓周角定理：**在同圓或等圓中，圓周角等於同弧或等弧的圓心角的一半。**若將等號兩邊同乘以 2，我們可以得到 $2\angle ABC=\angle AOC=\overset{\frown}{AC}$，所以本定理也可改成：**弧的度數為所對圓周角的 2 倍；或是：同弧所對之圓心角為圓周角的 2 倍。**

例題 7.2-18：

如圖 7.2-26 所示，△ABC 三頂點皆在圓周上。若∠A＝30°，∠B＝45°，則∠C 所對的 $\overset{\frown}{AB}$弧度為多少？

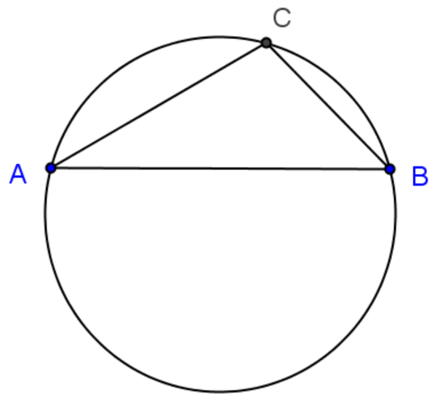


圖 7.2-26

想法：1. 三角形內角和 180°

2. 目前已知圓周角的性質有：
   (1) 圓周角為所對弧度的一半

解：

敘述	理由
(1) △ABC 中，∠A＋∠B＋∠C＝180°	如圖 7.2-26 & 三角形內角和 180°
(2) 30°＋45°＋∠C＝180°	將已知∠A＝30°，∠B＝45°代入(1)式
(3) ∠C＝180°－30°－45°＝105°	由(2) 等量減法公理
(4) $\angle C=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$	圓周角∠C 等於所對弧$\overset{\frown}{AB}$度數的一半
(5) $105°=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$	將(3) ∠C＝105°代入(4)
(6) $\overset{\frown}{AB}=2\times105°=210°$	由(5) 等式兩邊同乘以 2

例題 7.2-19：

如圖 7.2-27 所示，D 為扇形 ABC 的$\overset{\frown}{BDC}$上的一點。若∠BAC＝70°，則∠BDC＝？

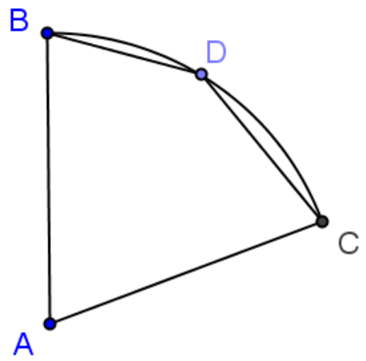


圖 7.2-27

想法：1. 目前已知圓周角的性質有：

(1) 圓周角為所對弧度的一半

2. 圓心角等於所對弧度

3. 圓周為 360°

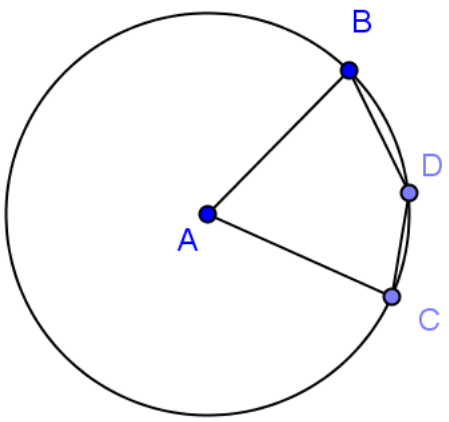


圖 7.2-27(a)

解：

敘述	理由
(1) 將圓 A 完成，如圖 7.2-27(a)	作圖
(2) 劣弧$\overset{\frown}{BDC}$＝∠BAC＝70°	圓心角∠BAC 等於所對的弧度$\overset{\frown}{BDC}$ & 已知∠BAC＝70°

(3) 劣弧$\overset{\frown}{BDC}$＋優弧$\overset{\frown}{BC}$＝360°	圓周為 360°，且圓周分為劣弧$\overset{\frown}{BDC}$、劣弧$\overset{\frown}{BC}$
(4) 70°＋優弧$\overset{\frown}{BC}$＝360°	將(2) 劣弧$\overset{\frown}{BDC}$＝70°代入(3)式得
(5) 優弧$\overset{\frown}{BC}$＝360°－70° ＝290°	由(5) 等量減法公理
(6) $\angle BDC=\frac{1}{2}\times$優弧$\overset{\frown}{BC}$ $=\frac{1}{2}\times290°=145°$	圓周角$\angle BDC$ 等於所對弧度$\overset{\frown}{BC}$的一半 & (5) 優弧$\overset{\frown}{BC}$＝290°

例題 7.2-20：

如圖 7.2-28，A、B、C、D 四點都在圓 O 上，∠AOC＝150°，則$\overset{\frown}{ABC}$＝____度，$\overset{\frown}{ADC}$＝____度，∠B＝____度。

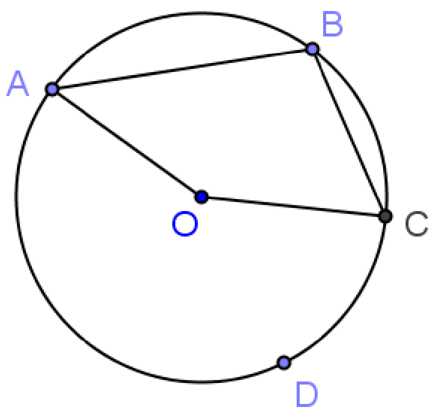


圖 7.2-28

想法：1. 目前已知圓周角的性質有：
(1) 圓周角為所對弧度的一半
2. 圓周 360°

解：

敘述	理由
(1) ∠AOC 為$\overset{\frown}{ABC}$所對的圓心角	如圖 7.2-28 所示，∠AOC 對$\overset{\frown}{ABC}$
(2) $\overset{\frown}{ABC}$＝∠AOC＝150°	由(1)圓心角∠AOC 等於所對弧$\overset{\frown}{ABC}$的度數 & 已知∠AOC＝150°
(3) $\overset{\frown}{ABC}$＋$\overset{\frown}{ADC}$＝360°	如圖 7.2-28 所示，$\overset{\frown}{ABC}$＋$\overset{\frown}{ADC}$為圓周 360°
(4) 150°＋$\overset{\frown}{ADC}$＝360°	將(2) $\overset{\frown}{ABC}$＝150° 代入(3)
(5) $\overset{\frown}{ADC}$＝360°－150°＝210°	由(4) 等量減法公理
(6) ∠B 為$\overset{\frown}{ADC}$所對的圓周角	如圖 7.2-28 所示，∠B 對$\overset{\frown}{ADC}$
(7) $\angle B=\frac{1}{2}\overset{\frown}{ADC}=\frac{1}{2}\times 210°=105°$	由(6) 圓周角∠B 為所對弧$\overset{\frown}{ADC}$度數的一半 & (5) $\overset{\frown}{ADC}$＝210°

例題 7.2-21：

如圖 7.2-29，△ABC 三頂點皆在圓周上，且 $\overline{AB}=\overline{AC}$。已知∠A＝50°，則 $\overset{\frown}{AC}$ 的度數＝？

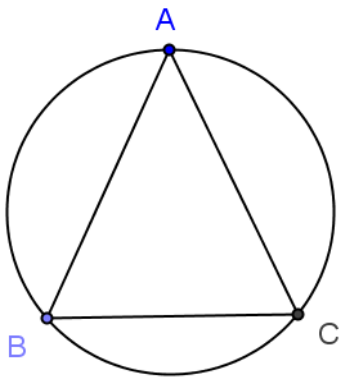


圖 7.2-29

想法：1. 三角形內角和 180°

2. 目前已知圓周角的性質有：

(1) 圓周角為所對弧度的一半

解：

敘述	理由
(1) △ABC 為等腰三角形	已知 $\overline{AB}=\overline{AC}$
(2) ∠C＝∠B	等腰三角形兩底角相等
(3) △ABC 中，∠A＋∠B＋∠C＝180°	三角形內角和 180°
(4) 50°＋∠B＋∠B＝180°	將已知∠A＝50° & (2) ∠C＝∠B 代入(3)式得
(5) ∠B＝(180°－50°)÷2＝65°	由(4) 解一元一次方程式
(6) $\angle B=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}=65°$	圓周角∠B 等於所對弧 $\overset{\frown}{AC}$ 度數的一半
(7) $\overset{\frown}{AC}=2\times65°=130°$	由(6) 等式兩邊同乘以 2
(8) 所以弧 $\overset{\frown}{AC}$ 的度數為所對圓周角∠B 的 2 倍	由(7) $\overset{\frown}{AC}$＝130° & (6) ∠B＝65°

例題 7.2-22：

如圖 7.2-30，A、B、C、D 四點在圓周上，∠A＝90°，∠B＝65°，$\overline{CD}=\overline{BC}$，求 $\overset{\frown}{AB}$ 的度數。

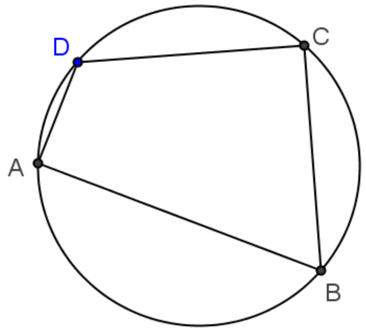


圖 7.2-30

想法： 1. 目前已知圓周角的性質有：

(1) 圓周角為所對弧度的一半

(2) 弧度為所對圓周角的 2 倍

2. 同圓中等弦對等弧

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{BCD}=2\angle A=2\times 90°=180°$	弧度為所對圓周角的 2 倍 & 已知∠A＝90°
(2) $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DC}$	已知$\overline{CD}=\overline{BC}$ & 同圓中等弦對等弧
(3) $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DC}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD}=90°$	由(1) & (2)
(4) $\overset{\frown}{ADC}=2\angle B=2\times 65°=130°$	弧度為所對圓周角的 2 倍 & 已知∠B＝65°
(5) $\overset{\frown}{ADC}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AB}=360°$	全量等於分量之和 & 圓周為 360°
(6) $\overset{\frown}{AB}=360°-\overset{\frown}{ADC}-\overset{\frown}{BC}$ $=360°-130°-90°$ $=140°$	由(5) 等量減法公理 由(4) $\overset{\frown}{ADC}=130°$ & (3) $\overset{\frown}{BC}=90°$ 已證

例題 7.2-23：

如圖 7.2-31，△ABC 三頂點皆在圓周上。若∠C＝65°，則∠AOB＝____度。

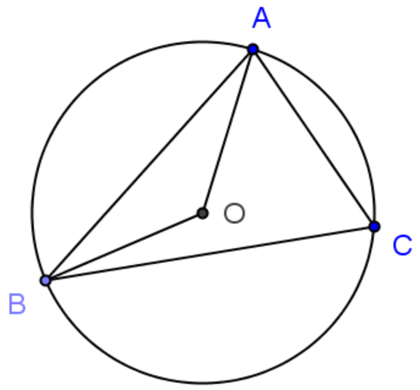


圖 7.2-31

想法：1. 目前已知圓周角的性質有：
(1) 圓周角為所對弧度的一半
(2) 弧為所對圓周角的 2 倍

2. 圓心角等於所對弧度

解：

敘述	理由
(1) $\angle C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = 65°$	圓周角∠C 等於所對弧$\overset{\frown}{AB}$度數的一半
(2) $\overset{\frown}{AB} = 2 \times 65° = 130°$	由(1) 等號兩邊同乘以 2
(3) $\angle AOB = \overset{\frown}{AB} = 130°$	圓心角∠AOB 等於所對弧$\overset{\frown}{AB}$的度數
(4) 所以同弧$\overset{\frown}{AB}$之圓心角∠AOB 為圓周角∠C 的 2 倍 **(也可以說，同弧$\overset{\frown}{AB}$之圓周角∠C 為圓心角∠AOB 的一半)**	由(3) ∠AOB＝130° & (1) ∠C＝65°

例題 7.2-24：

如圖 7.2-32，圓 O 中，若$\overline{AB}$是直徑，且∠ACD＝30°，則∠AOD＝？

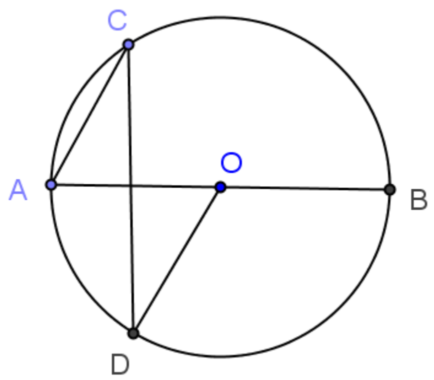


圖 7.2-32

想法： 1. 目前已知圓周角的性質有：

(1) 圓周角為所對弧度的一半

(2) 弧度為所對圓周角的 2 倍

(3) 同弧之圓心角為圓周角的 2 倍

(4) 同弧之圓周角為圓心角的一半

解：

敘述	理由
(1) ∠AOD 為$\overset{\frown}{AD}$所對的圓心角	如圖 7.2-32 所示
(2) ∠ACD 為$\overset{\frown}{AD}$所對的圓周角	如圖 7.2-32 所示
(3) ∠AOD＝2∠ACD ＝2x30°＝60°	由(1) & (2) 同弧$\overset{\frown}{AD}$之圓心角∠AOD 為圓周角∠ACD 的 2 倍 & 已知∠ACD＝30°

例題 7.2-25：

如圖 7.2-33，A、B、C 三點都在圓周上，∠BOC＝120°，且$\overline{OC}$為∠ACB 的角平分線，則∠A＝______度，∠ABC＝______度。

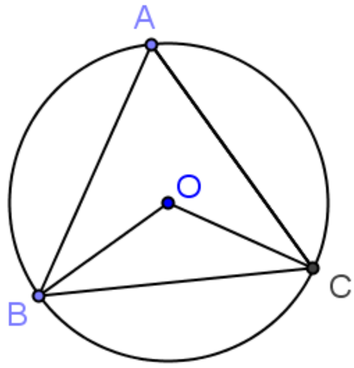


圖 7.2-33

想法： 1. 目前已知圓周角的性質有：

(1) 圓周角為所對弧度的一半
(2) 弧度為所對圓周角的 2 倍
(3) 同弧之圓心角為圓周角的 2 倍
(4) 同弧之圓周角為圓心角的一半

2. 圓的半徑等長

3. 三角形內角和 180°

解：

敘述	理由
(1) ∠A 為$\overset{\frown}{BC}$所對的圓周角	如圖 7.2-33 所示，∠A 對$\overset{\frown}{BC}$
(2) ∠BOC 為$\overset{\frown}{BC}$所對的圓心角	如圖 7.2-33 所示，∠BOC 對$\overset{\frown}{BC}$
(3) $\angle A=\dfrac{1}{2}\angle BOC=\dfrac{1}{2}\times120°=60°$	由(1)(2)同弧$\overset{\frown}{BC}$之圓周角∠A 等於圓心角∠BOC 的一半 & 已知∠BOC＝120°
(4) △OBC 為等腰三角形	已知$\overline{OB}=\overline{OC}$為半徑
(5) ∠OBC＝∠OCB	由(4) 等腰三角形兩底角相等
(6) △OBC 中， ∠BOC＋∠OBC＋∠OCB＝180°	如圖 7.2-33 所示， 三角形內角和 180°
(7) 120°＋∠OCB＋∠OCB＝180°	將已知∠BOC＝120° & (5) ∠OBC＝∠OCB 代入(6)

(8) $\angle OCB=(180°-120°)\div 2=30°$	由(7) 解一元一次方程式
(9) $\angle ACB=2\angle OCB=2\times 30°=60°$	已知$\overline{OC}$為$\angle ACB$ 的角平分線 & (8) $\angle OCB=30°$
(10) $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC+\angle ACB+\angle A=180°$	如圖 7.2-33 所示 三角形內角和 180°
(11) $\angle ABC=180°-(\angle ACB+\angle A)$ $=180°-(60°+60°)$ $=60°$	由(10) 等量減法公理 & (9) $\angle ACB=60°$ & (3)$\angle A=60°$ 已證

例題 7.2-26：

如圖 7.2-34，$\overline{AB}$和$\overline{CD}$是圓的兩弦，且相交於 E 點。若∠B＝60°，∠A＝50°，則：(1) ∠1＝________度。(2) ∠2＝________度。

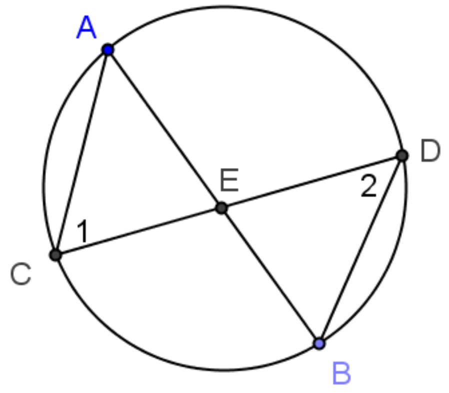


圖 7.2-34

想法：目前已知圓周角的性質有：

(1) 圓周角為所對弧度的一半
(2) 弧度為所對圓周角的 2 倍
(3) 同弧之圓心角為圓周角的 2 倍
(4) 同弧之圓周角為圓心角的一半

解：

敘述	理由
(1) $\angle B=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}=60°$	圓周角∠B 等於所對弧$\overset{\frown}{AD}$度數的一半
(2) $\angle 1=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}=\angle B=60°$	圓周角∠1 等於所對弧$\overset{\frown}{AD}$度數的一半 & (1)
(3) $\angle A=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}=50°$	圓周角∠A 等於所對弧$\overset{\frown}{BC}$度數的一半
(4) $\angle 2=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}=\angle A=50°$	圓周角∠2 等於所對弧$\overset{\frown}{BC}$度數的一半 & (3)
(5) 所以同弧$\overset{\frown}{AD}$之圓周角∠B 與∠1 相等	由(2) ∠B＝∠1＝60°
(6) 所以同弧$\overset{\frown}{BC}$之圓周角∠A 與∠2 相等	由(4) ∠A＝∠2＝50°

例題 7.2-27：

如圖 7.2-35，∠ACB＝47°，則∠ADB＝______度。

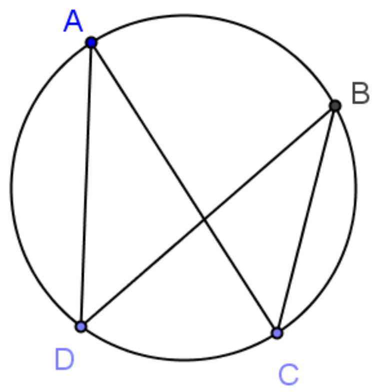


圖 7.2-35

想法：目前已知圓周角的性質有：

(1) 圓周角為所對弧度的一半
(2) 弧度為所對圓周角的 2 倍
(3) 同弧之圓心角為圓周角的 2 倍
(4) 同弧之圓周角為圓心角的一半
(5) 同弧之圓周角相等

解：

敘述	理由
(1) ∠ACB 為$\overset{\frown}{AB}$所對之圓周角	如圖 7.2-35 所示，∠ACB 對$\overset{\frown}{AB}$
(2) ∠ADB 為$\overset{\frown}{AB}$所對之圓周角	如圖 7.2-35 所示，∠ADB 對$\overset{\frown}{AB}$
(3) ∠ADB＝∠ACB＝47°	同弧$\overset{\frown}{AB}$所對之圓周角∠ADB 與∠ACB 相等 & 已知∠ACB＝47°

定理 7.2-8　直徑所對的圓周角為直角

△ABC 三頂點皆在圓周上，且$\overline{BC}$為圓的直徑，則∠BAC＝90°

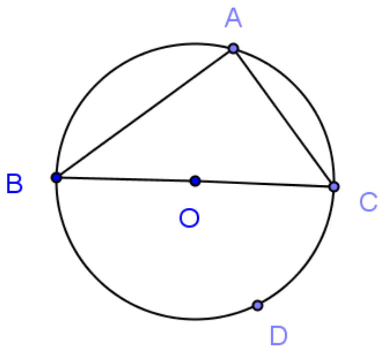


圖 7.2-36

已知：如圖 7.2-36，△ABC 三頂點皆在圓周上，且$\overline{BC}$為圓 O 的直徑

求證：∠A＝90°

想法：1. 目前已知圓周角的性質有：

(1) 圓周角為所對弧度的一半　(2) 弧度為所對圓周角的 2 倍

(3) 同弧之圓心角為圓周角的 2 倍　(4) 同弧之圓周角為圓心角的一半

(5) 同弧之圓周角相等

2. 直徑將圓周分為一半

3. 圓周 360°

證明：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{BAC}=\overset{\frown}{BDC}$	已知$\overline{BC}$為圓 O 的直徑，直徑將圓周分為一半
(2) $\overset{\frown}{BAC}+\overset{\frown}{BDC}=360°$	如圖 7.2-36 所示，$\overset{\frown}{BAC}+\overset{\frown}{BDC}$為圓周 360°
(3) $\overset{\frown}{BDC}+\overset{\frown}{BDC}=360°$	將(1) $\overset{\frown}{BAC}=\overset{\frown}{BDC}$ 代入(2)式得
(4) $\overset{\frown}{BDC}=360°\div 2=180°$	由(3) 解一元一次方程式
(5) ∠A 為$\overset{\frown}{BDC}$之圓周角	如圖 7.2-36 所示，∠A 對$\overset{\frown}{BDC}$
(6) $\angle A=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BDC}=\frac{1}{2}\times 180°=90°$	由(5) 圓周角∠A 為所對弧$\overset{\frown}{BDC}$度數的一半 & (4) $\overset{\frown}{BDC}=180°$
(7) 所以直徑$\overline{BC}$所對的圓周角 ∠A＝90°	由(6) ∠A＝90°

Q.E.D.

例題 7.2-28：

如圖 7.2-37，$\overline{AB}$ 為直徑，求∠C＋∠D＋∠E＝？

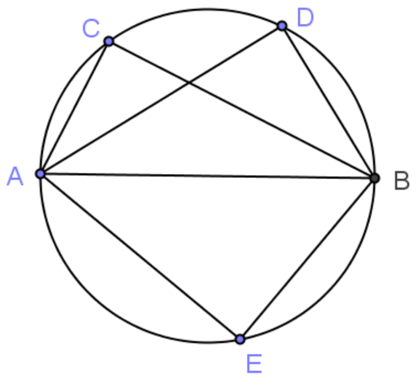


圖 7.2-37

想法：圓周角的性質有：

(1) 圓周角為所對弧度的一半
(2) 弧度為所對圓周角的 2 倍
(3) 同弧之圓心角為圓周角的 2 倍
(4) 同弧之圓周角為圓心角的一半
(5) 同弧之圓周角相等
(6) 直徑所對的圓周角為直角

解：

敘述	理由
(1) ∠C 為直徑$\overline{AB}$所對的圓周角	如圖 7.2-37 ＆ 已知$\overline{AB}$為圓 O 的直徑
(2) ∠C＝90°	由(1) 直徑$\overline{AB}$所對的圓周角∠C 為直角
(3) ∠D 為直徑$\overline{AB}$所對的圓周角	如圖 7.2-37 ＆ 已知$\overline{AB}$為圓 O 的直徑
(4) ∠D＝90°	由(3) 直徑$\overline{AB}$所對的圓周角∠D 為直角
(5) ∠E 為直徑$\overline{AB}$所對的圓周角	如圖 7.2-37 ＆ 已知$\overline{AB}$為圓 O 的直徑
(6) ∠E＝90°	由(5) 直徑$\overline{AB}$所對的圓周角∠E 為直角
(7) 所以∠C＋∠D＋∠E ＝90°＋90°＋90°＝270°	由(2)式＋(4)式＋(6)式

例題 7.2-29：

如圖 7.2-38，△ABC 三頂點皆在圓周上，且$\overline{BC}$為圓 O 的直徑。已知∠B＝30°，則∠C＝______度。

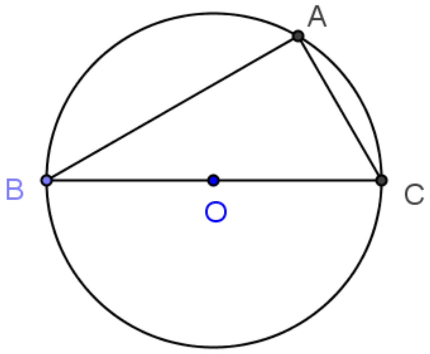


圖 7.2-38

想法： 1. 圓周角的性質有：

(1) 圓周角為所對弧度的一半
(2) 弧度為所對圓周角的 2 倍
(3) 同弧之圓心角為圓周角的 2 倍
(4) 同弧之圓周角為圓心角的一半
(5) 同弧之圓周角相等
(6) 直徑所對的圓周角為直角

2. 三角形內角和 180°

解：

敘述	理由
(1) ∠A 為直徑$\overline{BC}$所對的圓周角	如圖 7.2-38 所示 ＆ 已知$\overline{BC}$為圓 O 的直徑
(2) ∠A＝90°	由(1) ＆ 直徑所對的圓周角為直角
(3) 三角形 ABC 中， ∠A＋∠B＋∠C＝180°	如圖 7.2-38 所示 三角形內角和 180°
(4) 90°＋30°＋∠C＝180°	將(2) ∠A＝90° ＆ 已知 ∠B＝30°代入(3)
(5) ∠C＝180°－90°－30°＝60°	由(4) 等量減法公理

例題 7.2-30：

圖 7.2-39 是一個半圓，A 點在半圓上，$\overline{BC}$為直徑。已知∠B＝55°，則$\overset{\frown}{AB}$＝___度。

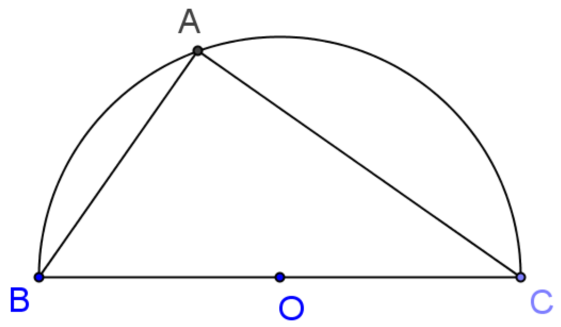


圖 7.2-39

想法：1. 圓周角的性質有：

(1) 圓周角為所對弧度的一半
(2) 弧度為所對圓周角的 2 倍
(3) 同弧之圓心角為圓周角的 2 倍
(4) 同弧之圓周角為圓心角的一半
(5) 同弧之圓周角相等
(6) 直徑所對的圓周角為直角

2. 三角形內角和 180°

解：

敘述	理由
(1) ∠A 為直徑$\overline{BC}$所對的圓周角	如圖 7.2-39 所示 & 已知$\overline{BC}$為圓 O 的直徑
(2) ∠A＝90°	由(1) & 直徑所對的圓周角為直角
(3) 三角形 ABC 中， ∠A＋∠B＋∠C＝180°	如圖 7.2-39 所示 三角形內角和 180°
(4) 90°＋55°＋∠C＝180°	將(2) ∠A＝90° & 已知 ∠B＝55°代入(3)
(5) ∠C＝180°－90°－55°＝35°	由(4) 等量減法公理
(6) ∠C 為$\overset{\frown}{AB}$所對的圓周角	如圖 7.2-39 所示，∠C 對$\overset{\frown}{AB}$
(7) $\overset{\frown}{AB}$＝2∠C＝2×35°＝70°	由(6) 弧$\overset{\frown}{AB}$為所對圓周角∠C 的 2 倍 & (5) ∠C＝35°

例題 7.2-31：

如圖 7.2-40，$\overline{AB}$是圓 O 的直徑，且$\overline{AB}=\overline{AC}$，∠BAC＝50°，則$\overset{\frown}{AE}$＝_____度，$\overset{\frown}{DE}$＝______度，$\overset{\frown}{BD}$＝______度。

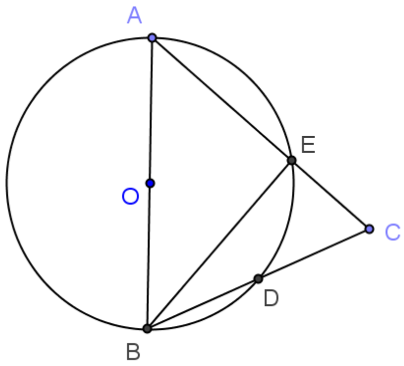


圖 7.2-40

想法： 1. 圓周角的性質有：

(1) 圓周角為所對弧度的一半
(2) 弧度為所對圓周角的 2 倍
(3) 同弧之圓心角為圓周角的 2 倍
(4) 同弧之圓周角為圓心角的一半
(5) 同弧之圓周角相等
(6) 直徑所對的圓周角為直角

2. 等腰三角形的性質：

(1) 兩腰等長　(2) 兩底角相等

解：

敘述	理由
(1) ∠AEB 為直徑$\overline{AB}$所對的圓周角	如圖 7.2-40 & 已知$\overline{AB}$為圓 O 的直徑
(2) ∠AEB＝90°	由(1) 直徑$\overline{AB}$所對的圓周角∠C 為直角
(3) 三角形 AEB 中， ∠BAC＋∠AEB＋∠ABE＝180°	如圖 7.2-40 所示 三角形內角和 180°
(4) 50°＋90°＋∠ABE＝180°	將已知∠BAC＝50° & (2) ∠AEB＝90° 代入(3)
(5) ∠ABE＝180°－50°－90°＝40°	由(4) 等量減法公理
(6) $\overset{\frown}{AE}$為∠ABE 所對的弧	如圖 7.2-40 所示，$\overset{\frown}{AE}$對∠ABE
(7) $\overset{\frown}{AE}$＝2∠ABE＝2×40°＝80°	由(6) 弧$\overset{\frown}{AE}$的度數為所對圓周角∠ABE 的 2 倍 & (5) ∠ABE＝40°

--- 以下求$\overset{\frown}{DE}$ ---	
(8) 三角形 ABC 為等腰三角形	已知$\overline{AB}=\overline{AC}$，兩腰等長為等腰三角形
(9) $\angle C=\angle ABC$	由(8) 等腰三角形兩底角相等
(10) $\angle ABC+\angle C+\angle BAC=180°$	由(8) 三角形內角和 180°
(11) $\angle ABC+\angle ABC+50°=180°$	將(9) $\angle ABC=\angle C$ & 已知$\angle BAC=50°$代入(10)
(12) $\angle ABC=(180°-50°)\div 2=65°$	由(11) 解一元一次方程式
(13) $\angle EBC=\angle ABC-\angle ABE$	如圖 7.2-40，$\angle EBC+\angle ABE=\angle ABC$
(14) $\angle EBC=65°-40°=25°$	將(12) $\angle ABC=65°$ & (5) $\angle ABE=40°$ 代入(13)
(15) $\overset{\frown}{DE}$為$\angle EBC$ 所對的弧度	如圖 7.2-40 所示，$\overset{\frown}{DE}$對$\angle EBC$
(16) $\overset{\frown}{DE}=2\angle EBC=2\times 25°=50°$	由(15) 弧$\overset{\frown}{DE}$的度數為所對圓周角$\angle EBC$的 2 倍 & (14) $\angle EBC=25°$
--- 以下求$\overset{\frown}{BD}$ ---	
(17) $\overset{\frown}{BDE}$為$\angle BAC$ 所對的弧	如圖 7.2-40 所示，$\overset{\frown}{BDE}$對$\angle BAC$
(18) $\overset{\frown}{BDE}=2\angle BAC=2\times 50°=100°$	由(17) 弧$\overset{\frown}{BDE}$的度數為所對圓周角$\angle BAC$ 的 2 倍 & 已知$\angle BAC=50°$
(19) $\overset{\frown}{BDE}=\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{DE}$	如圖 7.2-40 所示，$\overset{\frown}{BDE}=\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{DE}$
(20) $100°=\overset{\frown}{BD}+50°$	將(18) $\overset{\frown}{BDE}=100°$ & (16) $\overset{\frown}{DE}=50°$ 代入(19)
(21) $\overset{\frown}{BD}=100°-50°=50°$	由(20) 等量減法公理

例題 7.2-32：

如圖 7.2-41，$\overline{AB}$為圓 O 的直徑，且∠C＝60°，求：

(1) ∠EBC＝______度。　(2) $\overparen{DE}$＝______度。

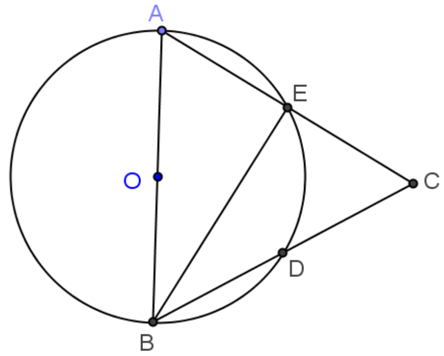


圖 7.2-41

想法：1. 圓周角的性質有：

(1) 圓周角為所對弧度的一半
(2) 弧度為所對圓周角的 2 倍
(3) 同弧之圓心角為圓周角的 2 倍
(4) 同弧之圓周角為圓心角的一半
(5) 同弧之圓周角相等
(6) 直徑所對的圓周角為直角

2. 三角形外角定理：外角等於內對角的和

解：

敘述	理由
(1) ∠AEB 為直徑$\overline{AB}$所對的圓周角	如圖 7.2-41 所示 & 已知$\overline{AB}$為圓 O 的直徑
(2) ∠AEB＝90°	由(1) 直徑$\overline{AB}$所對的圓周角∠C 為直角
(3) 三角形 CEB 中， ∠AEB 為∠BEC 的外角	如圖 7.2-41 所示
(4) ∠AEB＝∠C＋∠EBC	外角∠AEB 等於內對角∠C 與∠EBC 的和
(5) 90°＝60°＋∠EBC	將(2) ∠AEB＝90° & 已知∠C＝60° 代入(4)
(6) ∠EBC＝90°－60°＝30°	由(5) 等量減法公理
(7) $\overparen{DE}$為∠EBC 所對的弧	如圖 7.2-41 所示，$\overparen{DE}$對∠EBC
(8) $\overparen{DE}$＝2∠EBC＝2×30°＝60°	由(7) 弧$\overparen{DE}$的度數為所對圓周角∠EBC 的 2 倍 & (6) ∠EBC＝30°

接著，我們將第七章中所提到圓的弧、圓心角與圓周角之間的關係，應用到第四章中所提到的三角形的外心，來作以下的例題 7.2-33~例題 7.2-36。

例題 7.2-33：

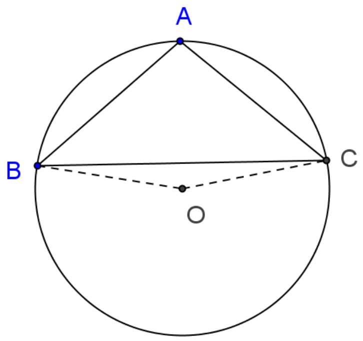


圖 7.2-42

已知：如圖 7.2-42，O 點為△ABC 的外心，且 O 點在△ABC 的外部。

求證：$\angle BOC = 360° - 2\angle A$

想法：(1) 弧的度數為所對圓周角的 2 倍

(2) 圓心角的度數等於所對弧的度數

(3) 圓周為 360°

證明：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{BC} = 2\angle A$	如圖 7.2-42，弧的度數為所對圓周角的 2 倍
(2) $\overset{\frown}{BAC} + \overset{\frown}{BC} = 360°$	如圖 7.2-42，$\overset{\frown}{BAC} + \overset{\frown}{BC}$＝圓周＝360°
(3) $\overset{\frown}{BAC} = 360° - \overset{\frown}{BC}$ $= 360° - 2\angle A$	由(2) 等量減法公理 & (1) $\overset{\frown}{BC} = 2\angle A$ 已證
(4) $\angle BOC = \overset{\frown}{BAC}$	如圖 7.2-42，圓心角的度數等於所對弧的度數
(5) 所以$\angle BOC = 360° - 2\angle A$	由(3) & (4) 遞移律

例題 7.2-34：

圖 7.2-43 中，已知 O 點為△ABC 的外心，且∠A＝100°，則∠BOC＝？

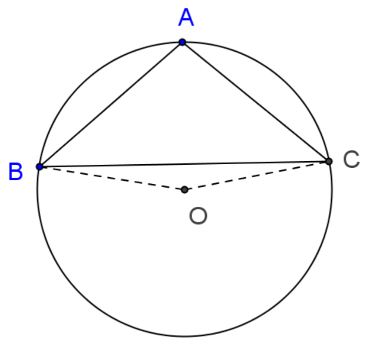


圖 7.2-43

想法：若 O 點為△ABC 的外心，且 O 點在△ABC 的外部，則∠BOC＝360°－2∠A

解：

敘述	理由
(1) ∠BOC＝360°－2∠A ＝360°－2×100° ＝160°	已知 O 點為△ABC 的外心，且 O 點在△ABC 的外部，則∠BOC＝360°－2∠A ＆ 已知∠A＝100°

例題 7.2-35：

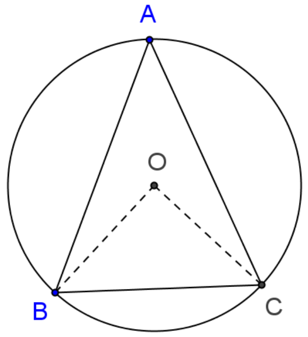


圖 7.2-44

已知：如圖 7.2-44，O 點為△ABC 的外心，且 O 點在△ABC 的內部，

求證：∠BOC＝2∠A

想法：同弧所對之圓心角為圓周角的 2 倍

證明：

敘述	理由
(1) ∠BOC＝2∠A	同弧($\overset{\frown}{BC}$)所對之圓心角(∠BOC)為圓周角(∠A)的 2 倍

例題 7.2-36：

圖 7.2-45 中，已知 O 點為△ABC 的外心，且∠A＝45°，則∠BOC＝？

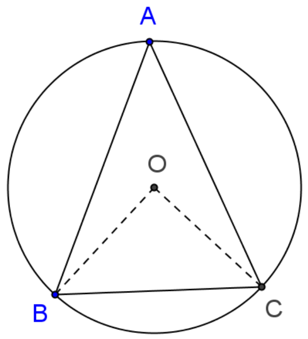


圖 7.2-45

想法：若 O 點為△ABC 的外心，且 O 點在△ABC 的內部，則∠BOC＝2∠A

解：

敘述	理由
(1) ∠BOC＝2∠A ＝2x45°＝90°	若 O 點為△ABC 的外心，且 O 點在△ABC 的內部， 則∠BOC＝2∠A ＆ 已知∠A＝45°

在證明下一個定理 7.2-9 之前，我們先練習以下的這一個例題 7.2-37。

例題 7.2-37：

如圖 7.2-46，若∠A＝45°，∠D＝60°，求∠AEC 的度數。

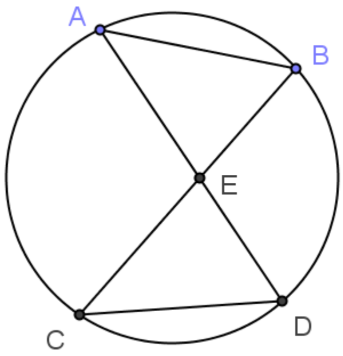


圖 7.2-46

想法：1. 圓周角的性質有：

(1) 圓周角為所對弧度的一半
(2) 弧度為所對圓周角的 2 倍
(3) 同弧之圓心角為圓周角的 2 倍
(4) 同弧之圓周角為圓心角的一半
(5) 同弧之圓周角相等
(6) 直徑所對的圓周角為直角

2. 三角形外角定理：外角等於內對角的和

解：

敘述	理由
(1) ∠A 與∠C 皆為 $\overset{\frown}{BD}$所對之圓周角	如圖 7.2-46 所示，∠A 與∠C 皆對 $\overset{\frown}{BD}$
(2) $\overset{\frown}{BD}$＝2∠A＝2×45°＝90°	由(1) 弧$\overset{\frown}{BD}$的度數為所對圓周角∠A 的 2 倍 & 已知∠A＝45°
(3) $\angle C=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$	由(1) 圓周角∠C 為所對弧$\overset{\frown}{BD}$度數的一半
(4) $\overset{\frown}{AC}$為∠D 所對之弧	如圖 7.2-46 所示，$\overset{\frown}{AC}$對∠D
(5) $\overset{\frown}{AC}$＝2∠D＝2×60°＝120°	由(4) 弧$\overset{\frown}{AC}$的度數為所對圓周角∠D 的 2 倍 & 已知∠D＝60°

(6) $\angle D = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$	由(4) 圓周角$\angle D$為所對弧$\overset{\frown}{AC}$度數的一半
(7) $\triangle ECD$ 中，$\angle AEC = \angle C + \angle D$	如圖 7.2-46 所示 & 外角$\angle AEC$等於內對角$\angle C$與$\angle D$的和
(8) $\angle AEC = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BD} + \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ $= \dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{AC})$	將(3) $\angle C = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$ & (6) $\angle D = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ 代入(7)式得
(9) $\angle AEC = \dfrac{1}{2}(90° + 120°) = 105°$	將(2) $\overset{\frown}{BD} = 90°$ & (5) $\overset{\frown}{AC} = 120°$ 代入(8)式得

定理 7.2-9 兩弦相交定理 (圓內角定理)：

圓內相交二弦所成交角的度數，等於這角與它的對頂角所對兩弧度數和的一半。

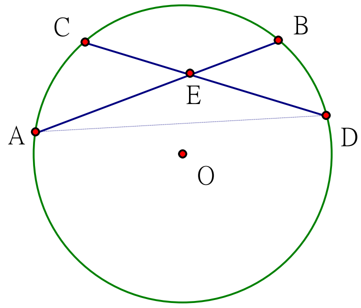


圖 7.2-47

已知：如圖 7.2-47，$\overline{AB}$與$\overline{CD}$為圓 O 的兩弦，此兩弦相交於 E 點。

求證：$\angle AEC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD})$。

想法：利用圓周角的度數等於所對弧的一半。

證明：

敘述	理由
(1) 連接 A 點與 D 點，如圖 7.2-47	過兩點可作一直線
(2) $\triangle EAD$ 中， $\angle AEC = \angle EAD + \angle EDA$	如圖 7.2-47 所示 三角形的外角等於內對角的和
(3) $\angle EAD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$ $\angle EDA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$	如圖 7.2-47 所示 圓周角的度數等於所對弧的一半
(4) $\angle AEC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ $= \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD})$	將(3)式代入(2)式得
(5) $\angle AEC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD})$	由(4) 已證

Q. E. D.

接著，我們將定理 7.2-9：兩弦相交定理(圓內角定理)，應用在例題 7.2-38~例題 7.2-40 之中。

例題 7.2-38：

如圖 7.2-48，兩弦$\overline{AB}$與$\overline{CD}$相交於圓內一點 P。已知$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}=124°$，$\overset{\frown}{\mathrm{BD}}=48°$，則∠BPD＝______度。

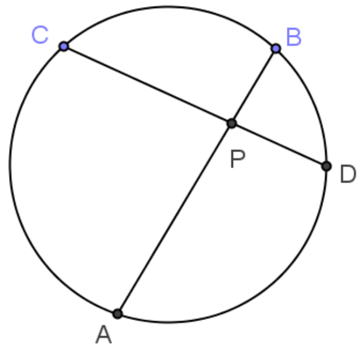


圖 7.2-48

想法：圓內角的度數，等於這角與它的對頂角所對兩弧度數和的一半

解：

敘述	理由
(1) ∠BPD 為圓內角	已知 P 點為兩弦$\overline{AB}$與$\overline{CD}$在圓內的交點
(2) $\angle \mathrm{BPD}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{\mathrm{BD}}+\overset{\frown}{\mathrm{AC}})$	由(1) 圓內角∠BPD 的度數，等於這角∠BPD 與它的對頂角∠CPA 所對兩弧$\overset{\frown}{\mathrm{BD}}$與$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$度數和的一半
(3) $\angle \mathrm{BPD}=\frac{1}{2}(48°+124°)$ $=86°$	將已知$\overset{\frown}{\mathrm{BD}}=48°$ & $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}=124°$代入(2)式得

例題 7.2-39：

如圖 7.2-49，兩弦$\overline{AB}$、$\overline{CD}$相交於圓內一點 P。已知 $\overset{\frown}{AD}=92°$，$\angle APD=80°$，則$\overset{\frown}{BC}=$______度。

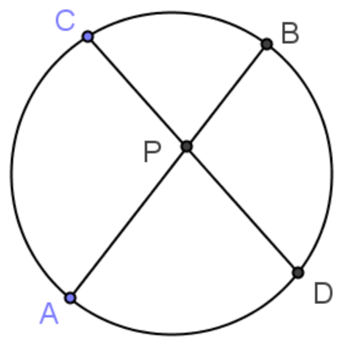


圖 7.2-49

想法：圓內角的度數，等於這角與它的對頂角所對兩弧度數和的一半

解：

敘述	理由
(1) $\angle APD$ 為圓內角	已知 P 點為兩弦$\overline{AB}$與$\overline{CD}$在圓內的交點
(2) $\angle APD=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AD})$	由(1) 圓內角$\angle APD$ 的度數，等於這角$\angle APD$ 與它的對頂角$\angle CPB$ 所對兩弧$\overset{\frown}{AD}$與$\overset{\frown}{BC}$度數和的一半
(3) $80°=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}+92°)$	將已知$\angle APD=80°$ & $\overset{\frown}{AD}=92°$代入(2)式得
(4) $\overset{\frown}{BC}=2\times80°-92°=68°$	由(3) 解一元一次方程式

例題 7.2-40：

如圖 7.2-50，若∠DEC＝76°，且$\overset{\frown}{CD}$－$\overset{\frown}{AB}$＝20°，則∠DAC＝________度。

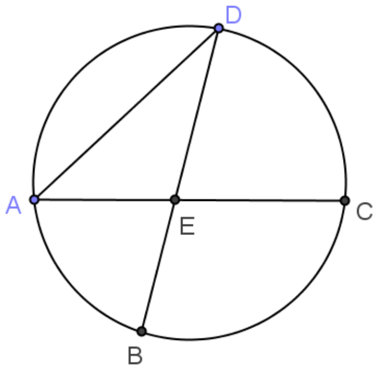


圖 7.2-50

想法：1. 圓周角的性質有：

(1) 圓周角為所對弧度的一半
(2) 弧度為所對圓周角的 2 倍
(3) 同弧之圓心角為圓周角的 2 倍
(4) 同弧之圓周角為圓心角的一半
(5) 同弧之圓周角相等
(6) 直徑所對的圓周角為直角

2. 圓內角的度數，等於這角與它的對頂角所對兩弧度數和的一半

解：

敘述	理由
(1) ∠DEC 為圓內角	已知 E 點為兩弦$\overline{AC}$與$\overline{BD}$在圓內的交點
(2) ∠DEC＝$\frac{1}{2}$($\overset{\frown}{CD}$＋$\overset{\frown}{AB}$)	由(1) 圓內角∠DEC 的度數，等於這角∠DEC 與它的對頂角∠AEB 所對兩弧$\overset{\frown}{CD}$與$\overset{\frown}{AB}$度數和的一半
(3) 76°＝$\frac{1}{2}$($\overset{\frown}{CD}$＋$\overset{\frown}{AB}$)	將已知∠DEC＝76°代入(2)式得
(4) $\overset{\frown}{CD}$＋$\overset{\frown}{AB}$＝152°	由(3) 等號兩邊同乘以 2
(5) $\overset{\frown}{CD}$－$\overset{\frown}{AB}$＝20°	已知
(6) $\overset{\frown}{CD}$＝(152°＋20°)÷2＝86°	由(4) & (5) 解二元一次聯立方程式
(7) ∠DAC 為$\overset{\frown}{CD}$所對的圓周角	如圖 7.2-50 所示，∠DAC 對$\overset{\frown}{CD}$
(8) ∠DAC＝$\frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$ ＝$\frac{1}{2}$×86°＝43°	由(7) 圓周角∠DAC 為所對弧$\overset{\frown}{CD}$度數的一半 & (6) $\overset{\frown}{CD}$＝86°

定義 7.2-4 定義 公弦

若兩圓相交於相異兩點，則連接相交兩圓交點的線段就叫此兩圓的公弦。

如圖 7.2-51 所示，$\overline{CD}$為圓 A 與圓 B 的公弦。

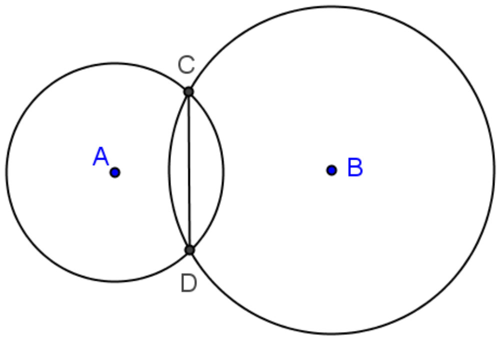


圖 7.2-51

定理 7.2-10 兩圓相交定理：

相交兩圓的兩圓心連線(連心線)，必垂直平分這兩圓的公弦。

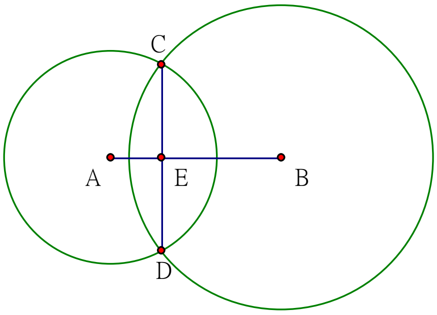


圖 7.2-52

已知：如圖 7.2-52，圓 A 及圓 B 兩圓相交於 C、D 兩點。

求證：(1) $\overline{AB}\perp\overline{CD}$

(2) $\overline{CE}=\overline{DE}$

想法：利用垂直平分線定理：到線段兩端點等距離的兩點連線必垂直平分此一線段。

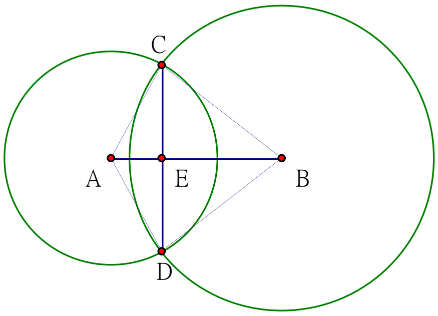


圖 7.2-52(a)

證明：

敘述	理由
(1) 作$\overline{AC}$、$\overline{AD}$、$\overline{BC}$、$\overline{BD}$，如圖 7.2-52(a)	過兩點可作一直線
(2) $\overline{AC}=\overline{AD}$ 且 $\overline{BC}=\overline{BD}$	同圓半徑相等
(3) $\overline{AB}\perp\overline{CD}$ 且 $\overline{CE}=\overline{DE}$	由(2) 到線段兩端點等距離的兩點連線必垂直平分此一線段(定理 3.1-1)

Q. E. D.

例題 7.2-41：

如圖 7.2-53，圓 A 與圓 B 相交於 C、D 兩點，若$\overline{CD}$＝10 公分，則：

(1) $\overline{CE}$＝？　　(2) ∠CEB＝？

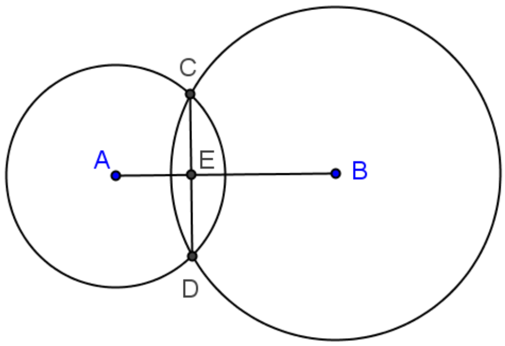


圖 7.2-53

想法：相交兩圓的兩圓心連線(連心線)，必垂直平分這兩圓的公弦

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}$為連心線 & $\overline{CD}$為公弦	已知圓 A 與圓 B 相交於 C、D 兩點
(2) $\overline{AB}\perp\overline{CD}$ & $\overline{CE}=\overline{DE}$	由(1) 連心線必垂直平分這兩圓的公弦
(3) ∠CEB＝90° & $\overline{CE}$＝5 公分	由(2) $\overline{AB}\perp\overline{CD}$ & $\overline{CE}=\overline{DE}$ & 已知$\overline{CD}$＝10 公分

習題 7.2

習題 7.2-1：

如圖 7.2-54，$\overset{\frown}{AB}$ 的度數是 60°，試求其所對應的圓心角 ∠AOB。

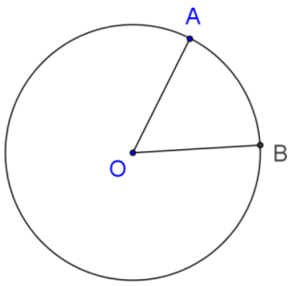


圖 7.2-54

習題 7.2-2：

如圖 7.2-55，圓 P 的半徑$\overline{PA}$為 8 公分，圓 Q 的半徑$\overline{QC}$為 4 公分，

∠APB＝∠CQD，$\overset{\frown}{AB}$＝60°。則：

(1) ∠CQD＝______度。　　(2) $\overset{\frown}{CD}$＝______度。

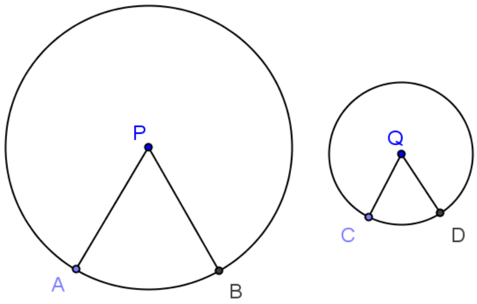


圖 7.2-55

習題 7.2-3：

如圖 7.2-56，將一圓平分成八等分，試求優弧$\overset{\frown}{ACB}$所對應的圓心角。

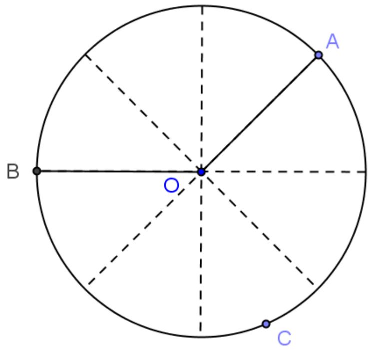


圖 7.2-56

習題 7.2-4：

如圖 7.2-57，已知圓心角∠AOB＝60°，則$\overset{\frown}{AB}$＝_____度，$\overset{\frown}{ACB}$＝____度。

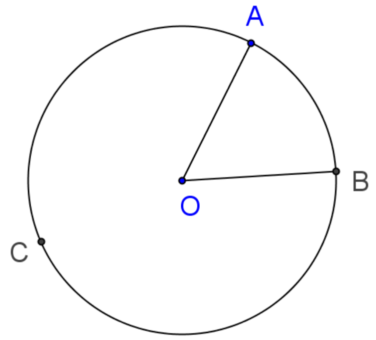


圖 7.2-57

習題 7.2-5：

如圖 7.2-58，若 $\overset{\frown}{AB}$＝60°，$\overset{\frown}{BC}$＝140°，則∠AOC 的度數＝？

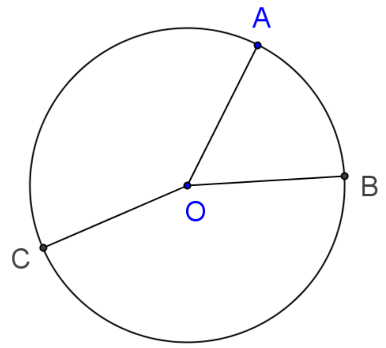


圖 7.2-58

習題 7.2-6：

如圖 7.2-59，已知 A、B、C 是圓 O 上相異三點，若$\overset{\frown}{ACB}$的度數比$\overset{\frown}{AB}$度數的 3 倍少 60°，則∠AOB＝_______度。

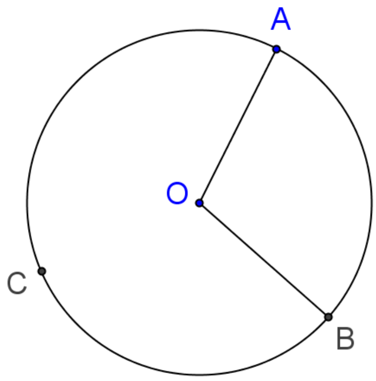


圖 7.2-59

習題 7.2-7：

如圖 7.2-60，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$皆為直徑，$\overset{\frown}{AC}$＝3x°，$\overset{\frown}{CE}$＝4x°，$\overset{\frown}{EB}$＝5x°，則：

(1)　x＝_______。

(2) ∠4＝______度。

(3) ∠6＝______度。

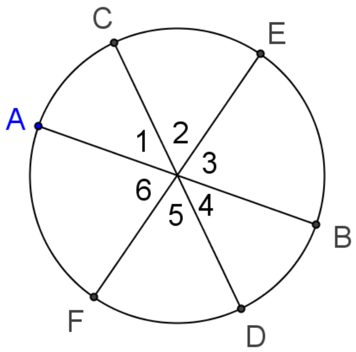


圖 7.2-60

習題 7.2-8：

如圖 7.2-61，若$\overline{AB}$是圓 O 的直徑，C 在圓 O 上，且 $\overset{\frown}{AC}$＝4$\overset{\frown}{BC}$，

則∠BOC＝______度。

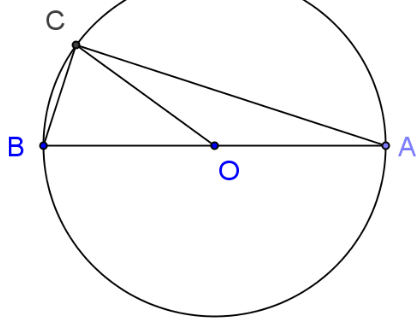


圖 7.2-61

習題 7.2-9：

如圖 7.2-62，兩同心圓的圓心為 O，$\overline{OA}$、$\overline{OB}$為小圓的半徑，$\overline{OC}$、$\overline{OD}$為大圓的半徑。已知∠AOB＝60°，則：

(1) ∠COD＝______度。　　　(2) $\overset{\frown}{AB}$＝______度，$\overset{\frown}{CD}$＝______度。

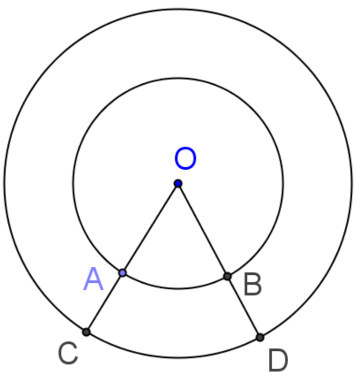


圖 7.2-62

習題 7.2-10：

如圖 7.2-63，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為圓 O 的兩弦，且$\overline{AB}=\overline{CD}$。若$\overset{\frown}{AB}=60°$，則$\overset{\frown}{CD}=$___度。

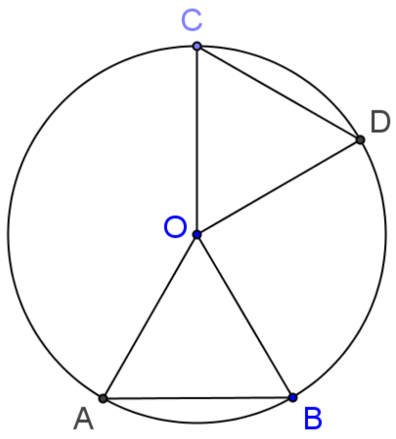


圖 7.2-63

習題 7.2-11：(試證同圓或等圓中，等圓心角必對等弦。)

已知：如圖 7.2-64，圓 O 與圓 O`兩圓之半徑相等，∠AOB=∠A`O`B`。

求證： $\overline{AB}=\overline{A'B'}$

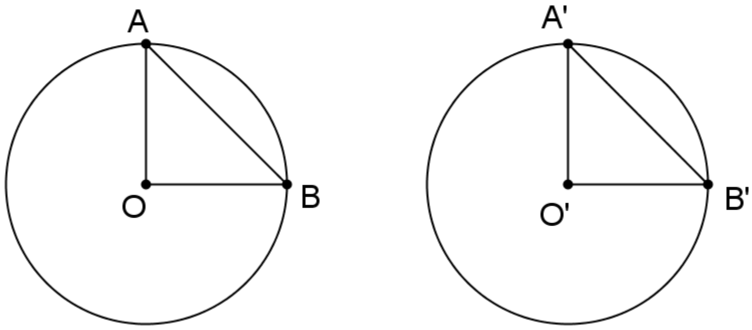


圖 7.2-64

習題 7.2-12：

如圖 7.2-65，$\overline{AB}$為圓 O 直徑，$\overline{DE}$為圓 O 之一弦，若$\overline{AB}\perp\overline{DE}$，且$\overline{DE}=10$公分、$\overset{\frown}{DE}=120°$，試求：(1) $\overline{CD}=$？ (2) $\overset{\frown}{AE}=$？

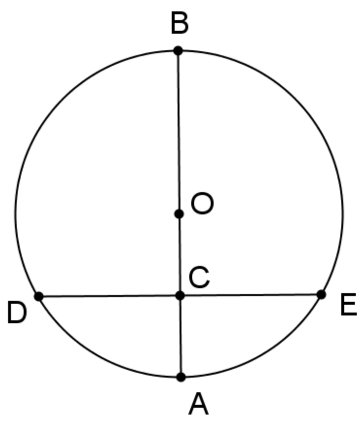


圖 7.2-65

習題 7.2-13：

如圖 7.2-66，$\overline{CD}$與$\overline{EF}$為圓 O 之兩弦，已知$\overline{CD}=\overline{EF}$、$\overline{OA}\perp\overline{CD}$、$\overline{OB}\perp\overline{EF}$且$\overline{OA}=10$ 公分，則$\overline{OB}=$？

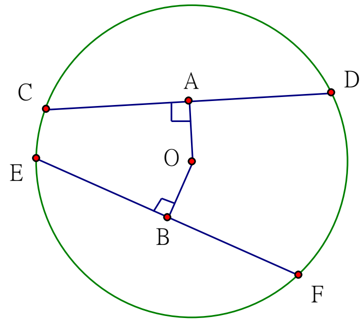


圖 7.2-66

習題 7.2-14：

如圖 7.2-67，A、B、C、D 四點都在圓 O 上，∠AOC＝160°，則$\overset{\frown}{ABC}$＝____度，$\overset{\frown}{ADC}$＝____度，∠B＝____度。

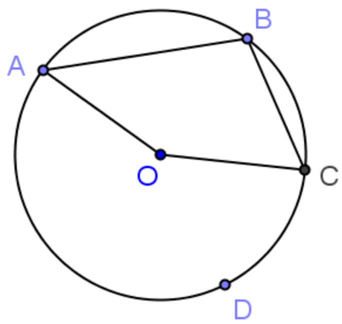


圖 7.2-67

習題 7.2-15：

如圖 7.2-68，△ABC 三頂點皆在圓周上，且$\overline{AB}=\overline{AC}$。已知∠B＝65°，則$\overset{\frown}{BC}$的度數＝？

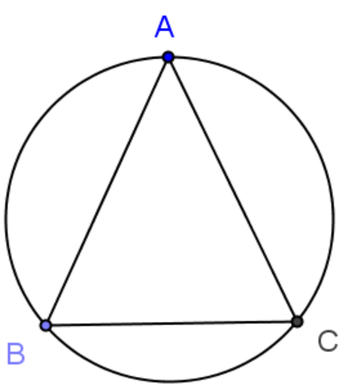


圖 7.2-68

習題 7.2-16：

如圖 7.2-69，△ABC 三頂點皆在圓周上。若∠C＝65°，則∠AOB＝____度。

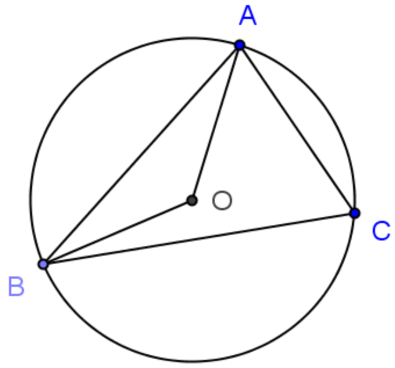


圖 7.2-69

習題 7.2-17：

如圖 7.2-70，A、B、C 三點都在圓周上，∠BOC＝110°，則∠A＝______度。

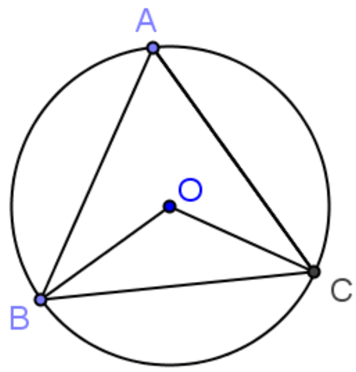


圖 7.2-70

習題 7.2-18：

如圖 7.2-71，$\overline{AB}$和$\overline{CD}$是圓的兩弦，且相交於 E 點。若∠B＝65°，∠A＝45°，則：(1) ∠1＝________度。(2) ∠2＝________度。

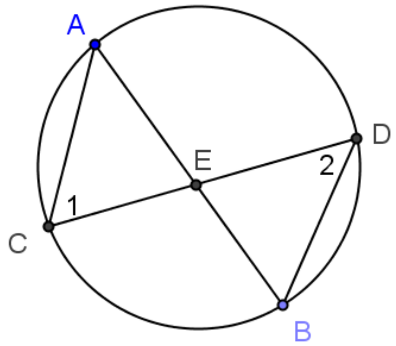


圖 7.2-71

習題 7.2-19：

如圖 7.2-72，$\overline{AB}$ 為直徑，求∠C、∠D、∠E 各為幾度？

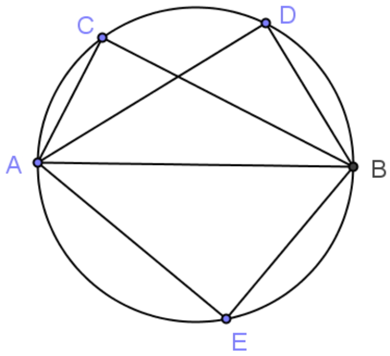


圖 7.2-72

習題 7.2-20：

如圖 7.2-73，△ABC 三頂點皆在圓周上，且$\overline{BC}$為圓 O 的直徑。已知∠B＝20°，則∠C＝______度。

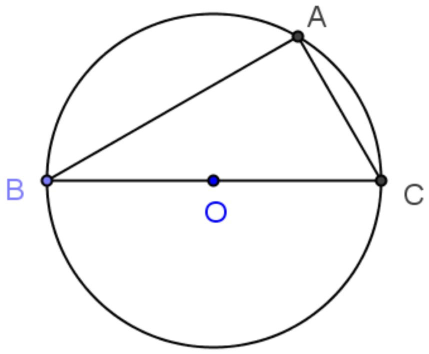


圖 7.2-73

習題 7.2-21：

如圖 7.2-74，兩弦$\overline{AB}$、$\overline{CD}$相交於圓內一點 P。若 $\overset{\frown}{AC}$＝20°，$\overset{\frown}{BD}$＝50°，則∠BPD＝________度。

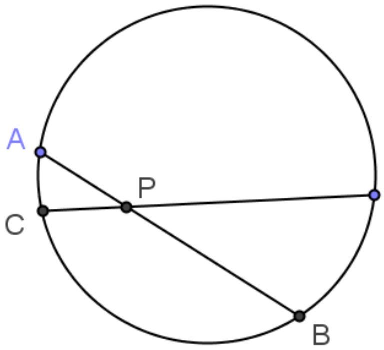


圖 7.2-74

習題 7.2-22：

如圖 7.2-75，圓 A 與圓 B 相交於 C、D 兩點，若$\overline{CD}$＝8 公分，則：

(1) $\overline{CE}$＝？　　(2) ∠CEB＝？

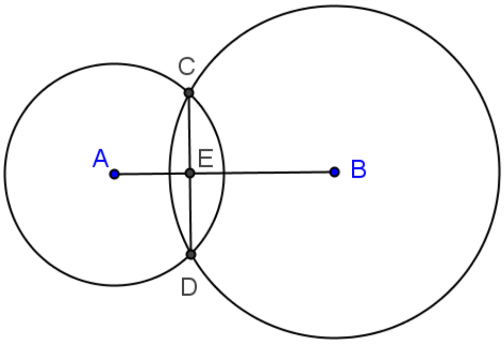


圖 7.2-75

習題 7.2-23： 過直徑兩端的弦，若與這直徑所成的角相等，則這兩弦相等。

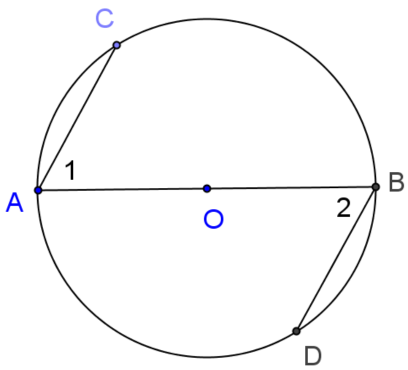


圖 7.2-76

已知：如圖 7.2-76 中，$\overline{AB}$為圓 O 的直徑，∠1＝∠2。

求證：$\overline{AC}$＝$\overline{BD}$。

7.3 節　割線與切線

定義 7.3-1 割線

一直線與圓相交於兩點稱為此圓的割線。

定義 7.3-2 切線

一直線與圓僅相交於一點稱為此圓的切線。

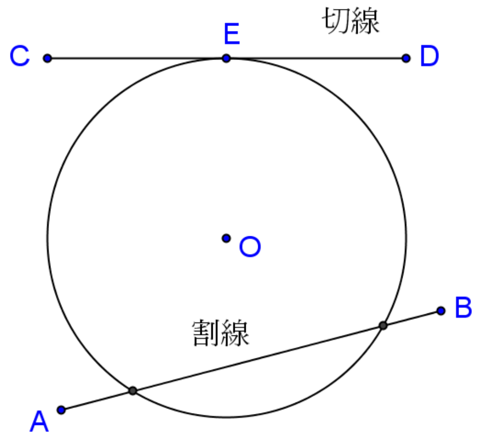


圖 7.3-1

圖 7.3-1 中，$\overline{AB}$與圓有兩個交點，稱$\overline{AB}$為此圓的割線；$\overline{CD}$與圓只交於 E 點，稱$\overline{CD}$為此圓的切線，E 點為切點。

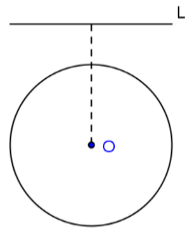
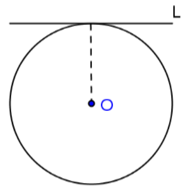
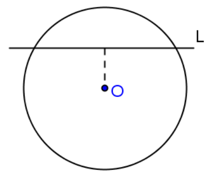
例題 7.3-1：

有一個圓 O，其半徑為 10 單位，判斷直線 L 與圓的相交情形及交點個數。

圓心 O 到直線 *L* 距離	15 單位	10 單位	5 單位
交點個數			

想法：利用圓心到直線的距離判斷直線與圓的關係

解：

敘述	理由
(1) 如圖 7.3-2(a)所示，圓 O 半徑為 10 單位，直線 L 到圓心 O 的距離為 15 單位，則此直線 L 與圓 O 沒有交點	15 單位＞10 單位  **圖 7.3-2(a)**
(2) 如圖 7.3-2(b)所示，圓 O 半徑為 10 單位，直線 L 到圓心 O 的距離為 10 單位，則此直線 L 與圓 O 交於一點	10 單位＝10 單位  **圖 7.3-2(b)**
(3) 如圖 7.3-2(c)所示，圓 O 半徑為 10 單位，直線 L 到圓心 O 的距離為 5 單位，則此直線 L 與圓 O 相交於 2 點	5 單位＜10 單位  **圖 7.3-2(c)**

由**例題 7.3-1**，我們可以得到以下的結論：(**直線與圓的關係**)

1. 若直線到圓心的距離**大於半徑長**，則直線與圓**不相交**；
2. 若直線到圓心的距離**等於半徑長**，則直線與圓**相交於一點**，且此直線稱為此圓的**切線**；
3. 若直線到圓心的距離**小於半徑長**，則直線與圓**相交於兩個點**，且此直線稱為此圓的**割線**。

例題 7.3-2：

已知圓 O 的直徑為 40 公分，圓心 O 到四條直線 L_1、L_2、L_3、L_4 的距離分別為 5 公分、10 公分、20 公分、30 公分，其中哪幾條直線是圓 O 的割線？

想法：直線與圓的關係

(1) 若直線到圓心的距離**大於半徑長**，則直線與圓**不相交**；

(2) 若直線到圓心的距離**等於半徑長**，則直線與圓**相交於一點**，且此直線稱為此圓的**切線**；

(3) 若直線到圓心的距離**小於半徑長**，則直線與圓**相交於兩個點**，且此直線稱為此圓的**割線**。

解：

敘述	理由
(1) 圓 O 的半徑為 20 公分	已知圓 O 的直徑為 40 公分
(2) L_1 為圓 O 的割線	由(1) 半徑＝20 公分 & 已知圓心 O 到 L_1 的距離為 5 公分＜半徑＝20 公分
(3) L_2 為圓 O 的割線	由(1) 半徑＝20 公分 & 已知圓心 O 到 L_2 的距離為 10 公分＜半徑＝20 公分
(4) L_3 為圓 O 的切線	由(1) 半徑＝20 公分 & 已知圓心 O 到 L_3 的距離為 20 公分＝半徑＝20 公分
(5) L_4 與圓 O 不相交	由(1) 半徑＝20 公分 & 已知圓心 O 到 L_4 的距離為 30 公分＞半徑＝20 公分
(6) 所以 L_1、L_2 為圓 O 的割線	由(2) & (3)

例題 7.3-3：

如圖 7.3-3，哪一條直線為圓 O 的切線？

(A) $\overleftrightarrow{AB}$　　(B) $\overleftrightarrow{BC}$　　(C) $\overleftrightarrow{AC}$　　(D) $\overleftrightarrow{AO}$

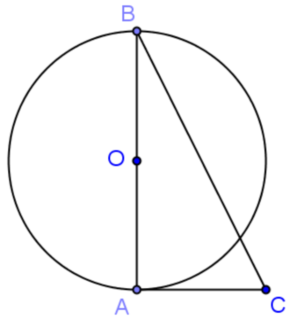


圖 7.3-3

想法：直線與圓的關係

(1) 若直線到圓心的距離**大於半徑長**，則直線與圓**不相交**；

(2) 若直線到圓心的距離**等於半徑長**，則直線與圓**相交於一點**，且此直線稱為此圓的**切線**；

(3) 若直線到圓心的距離**小於半徑長**，則直線與圓**相交於兩個點**，且此直線稱為此圓的**割線**。

解：

敘述	理由
(1) $\overleftrightarrow{AC}$為圓 O 的切線	如圖 7.3-3 所示，$\overleftrightarrow{AC}$交圓 O 於一點 & 切線定義

定理 7.3-1 切線定理

切線與過切點的半徑互相垂直。

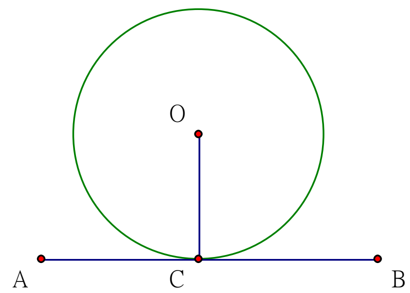


圖 7.3-4

已知：如圖 7.3-4，$\overline{OC}$為圓 O 的半徑，$\overline{AB}$為此圓的切線，C 為切點。

求證：$\overline{AB}\perp\overline{OC}$

想法：應用一點到一直線的最短距離為垂直距離。

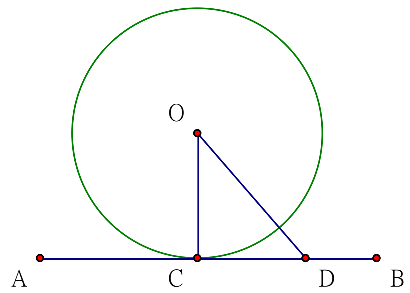


圖 7.3-4(a)

證明：

敘述	理由
(1) 在$\overline{AB}$上任選異於 C 的一點 D，作$\overline{OD}$，如圖 7.3-4(a)	過兩點可作一直線
(2) D 點一定在圓外	已知$\overline{AB}$為切線，切線恰與圓相交於一點。若 D 會在圓內，則 AB 就不是切線
(3) $\overline{OD}$ > $\overline{OC}$ ，($\overline{OC}$為 O 點到$\overline{AB}$的最短距離)	圓外一點與圓心的距離必大於半徑
(4) 所以 $\overline{AB}\perp\overline{OC}$	由(3) 一點到一直線的最短距離為垂直距離

Q. E. D.

圓切線作圖

例題 7.3-4：切點在圓上之切線作圖

已知 P 點在圓 O 上，試利用尺規作圖，過 P 點作圓 O 的切線。

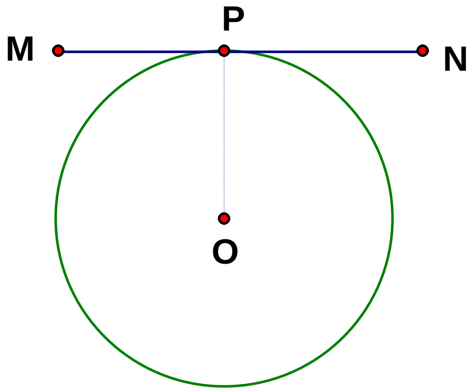


圖 7.3-5

作法：如圖 7.3-5

1. 連接 O、P 兩點，作$\overline{OP}$。
2. 過 P 點，作$\overline{OP}$的垂直線$\overline{MN}$，由切線定理得知$\overline{MN}$為圓 O 過 P 點的切線。

例題 7.3-5：切點不在圓上之切線作圖

過圓 O 外一點 P，作此圓的切線。

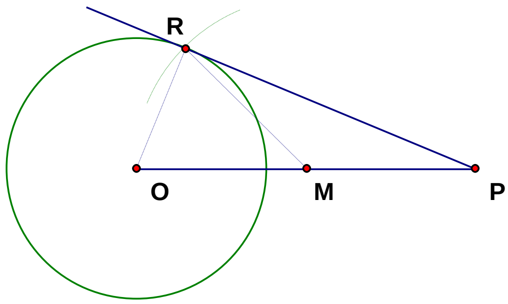


圖 7.3-6

作法：如圖 7.3-6

1. 連接 O、P 兩點。
2. 作$\overline{OP}$線段的中點 M。
3. 以 M 為圓心，以$\overline{OM}$為半徑作弧與圓 O 相交於點 R。
4. 作$\overline{PR}$，則$\overline{PR}$即為圓 O 過 P 點的切線。

求證：圖 7.3-6 中，$\overline{PR}$為圓 O 過 P 點的切線

證明：

敘述	理由
(1) $\overline{OM}=\overline{PM}$	由作法 2.　M 為$\overline{OM}$的中點
(2) $\overline{RM}=\overline{OM}=\overline{PM}$	由作法 3.　&　同圓的半徑等長
(3) △MOR 為等腰三角形 ∠MOR＝∠MRO	由(2)　$\overline{RM}=\overline{OM}$ 等腰三角形之兩底角相等
(4) △MRP 為等腰三角形 ∠MRP＝∠MPR	由(2)　$\overline{RM}=\overline{PM}$ 等腰三角形之兩底角相等
(5) △OPR 中， ∠MOR＋∠MRO＋∠MRP＋∠MPR＝180°	如圖 7.3-6 所示 三角形內角和等於 180°
(6) 2(∠MRO＋∠MRP）＝180° ∠MRO＋∠MRP＝90° ∠ORP＝90°	將(3)式　& (4)式代入(5)式得 等號兩邊同除以 2 ∠MRO＋∠MRP＝∠ORP
(7) $\overline{OR}\perp\overline{PR}$， 所以$\overline{PR}$為圓 O 過 P 點的切線	由(6)　∠ORP＝90°　已證 切線定理

Q. E. D.

例題 7.3-6：

如圖 7.3-7，P 點在圓 O 的外部，$\overline{PA}$與$\overline{PB}$分別與圓 O 相切於 A 與 B 兩點。若∠P＝40°，則∠AOB＝________度。

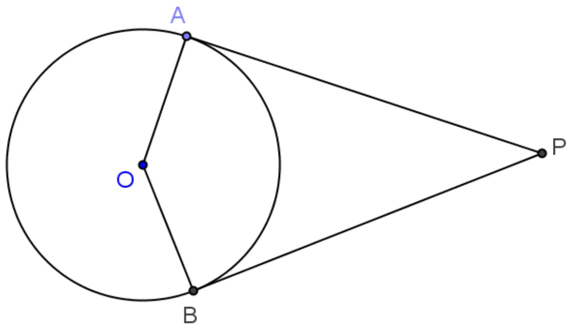


圖 7.3-7

想法：利用切線與過切點的半徑互相垂直

解：

敘述	理由
(1) $\overline{PA}\perp\overline{OA}$，∠OAP＝90°	已知$\overline{PA}$與圓 O 相切於 A 點 & 切線與過切點的半徑互相垂直
(2) $\overline{PB}\perp\overline{OB}$，∠OBP＝90°	已知$\overline{PB}$與圓 O 相切於 B 點 & 切線與過切點的半徑互相垂直
(3) 四邊形 OAPB 中， ∠OAP＋∠OBP＋∠P＋∠AOB＝360°	如圖 7.3-7 所示， 四邊形內角和為 360°
(4) 90°＋90°＋40°＋∠AOB＝360°	將(1) ∠OAP＝90°、(2) ∠OBP＝90° & 已知∠P＝40° 代入(3)式得
(5) ∠AOB＝360°－90°－90°－40°＝140°	由(4) 等量減法公理

例題 7.3-7：

如圖 7.3-8，自圓外一點 A 作圓的兩切線，切點分別為 B、C，D 為圓上一點。若∠BAC＝50°，則∠BDC＝________度。

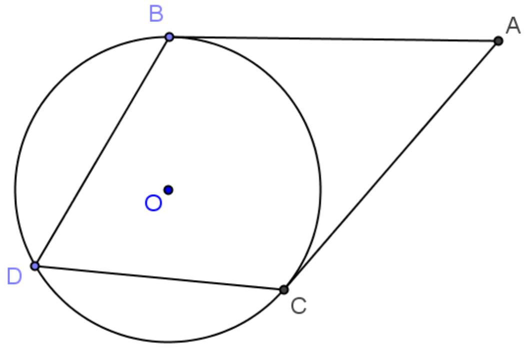
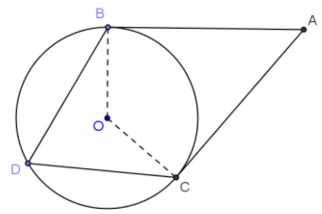


圖 7.3-8

想法：(1) 切線與過切點的半徑互相垂直

(2) 同弧所對之圓周角為圓心角的一半

解：

敘述	理由
(1) 作$\overline{OB}$與$\overline{OC}$，如圖 7.3-8(a)所示	作圖  **圖 7.3-8(a)**
(2) 四邊形 OCAB 中，∠OBA＝∠OCA＝90°	由(1) & 已知自圓外一點 A 作圓的兩切線$\overline{AB}$與$\overline{AC}$，切點分別為 B 點、C 點，根據切線與過切點的半徑互相垂直，所以$\overline{OB}\perp\overline{AB}$、$\overline{OC}\perp\overline{AB}$
(3) ∠OBA＋∠OCA＋∠BAC＋∠BOC＝360°	四邊形內角和 360°
(4) 90°＋90°＋50°＋∠BOC＝360°	將(2) ∠OBA＝∠OCA＝90° & 已知∠BAC＝50° 代入(3)式得
(5) ∠BOC＝360°－90°－90°－50°＝130°	由(4) 等量減法公理
(6) ∠BDC＝$\frac{1}{2}$∠BOC＝$\frac{1}{2}$×130°＝65°	同弧所對之圓周角為圓心角的一半 & (5) ∠BOC＝130°

例題 7.3-8：

如圖 7.3-9，已知△OAB 為等腰直角三角形，∠AOB 為直角，$\overline{AB}$與圓 O 相切於 P 點，若圓 O 半徑為 2 公分，則：

(1) 請說明△OPB 為等腰直角三角形。

(2) $\overline{BP}$＝_________。

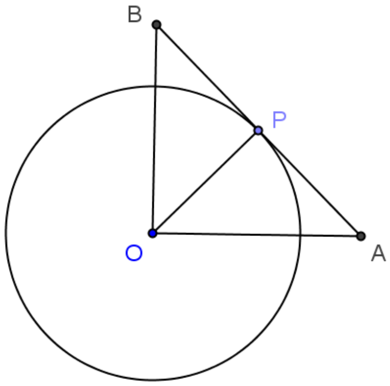


圖 7.3-9

想法：(1) 利用切線與過切點的半徑互相垂直

(2) 等腰直角三角形的性質

解：

敘述	理由
(1) △OAB 中， ∠A 與∠B 為兩底角，∠A＝∠B $\overline{OA}$與$\overline{OB}$為兩腰，$\overline{OA}$＝$\overline{OB}$	已知△OAB 為等腰直角三角形，∠AOB 為直角 ＆ 等腰三角形兩底角相等 ＆ 等腰三角形兩腰等長
(2) ∠A＝∠B＝(180°－90°)÷2＝45°	由(1) ∠A＝∠B ＆ 三角形內角和 180° ＆ 已知∠AOB 為直角＝90°
(3) △OBP 中，∠OPB＝90°	已知$\overline{AB}$與圓 O 相切於 P 點
(4) ∠BOP＝180°－∠OPB－∠B ＝180°－90°－45° ＝45°	三角形內角和 180° ＆ (3) ∠OPB＝90° ＆ (2) ∠B＝45°
(5) △OPB 為等腰直角三角形	由(3) ∠OPB＝90° ＆ (2) ∠B＝45° ＆ (4) ∠BOP＝45°
(6) $\overline{BP}$＝$\overline{OP}$	由(5) 等腰角形兩腰等長
(7) $\overline{BP}$＝$\overline{OP}$＝2 公分	由(6) ＆ 已知圓 O 半徑$\overline{OP}$＝2 公分

定理 7.3-2 切線長定理

自圓外一點到圓的兩切點連線段等長。

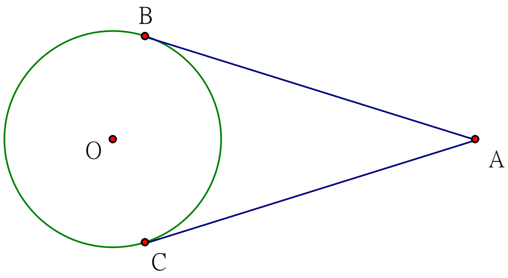


圖 7.3-10

已知： 如圖 7.3-10，A 為圓外一點，$\overline{AB}$及$\overline{AC}$為圓的兩切線，分別與圓相交於 B 點及 C 點。

求證： $\overline{AB}=\overline{AC}$

想法： 利用全等三角形的對應邊相等性質。

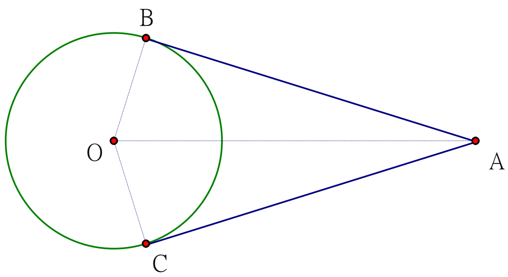


圖 7.3-10(a)

證明：

敘述	理由
(1) 作$\overline{AO}$、$\overline{BO}$及$\overline{CO}$，如圖 7.3-10(a)	過兩點可作一直線
(2) ∠ABO＝∠ACO＝90°	已知$\overline{AB}$及$\overline{AC}$為圓的兩切線 & 切線與過切點的半徑互相垂直
(3) 在△OAB 與 △OAC 中 $\overline{BO}=\overline{CO}$ ∠ABO＝∠ACO＝90° $\overline{AO}=\overline{AO}$	如圖 7.3-10(a)所示 同圓半徑相等 由(2) 已證 同線段相等
(4) △OAB ≅ △OAC	由(3) & 根據 R.H.S. 三角形全等定理
(5) $\overline{AB}=\overline{AC}$	由(4) & 全等三角形的對應邊相等

Q. E. D.

例題 7.3-9：

如圖 7.3-11，$\overline{AC}$、$\overline{BC}$為圓 O 之切線，B、C 為切點。若$\overline{BC}$＝12 公分，則$\overline{AC}$＝？

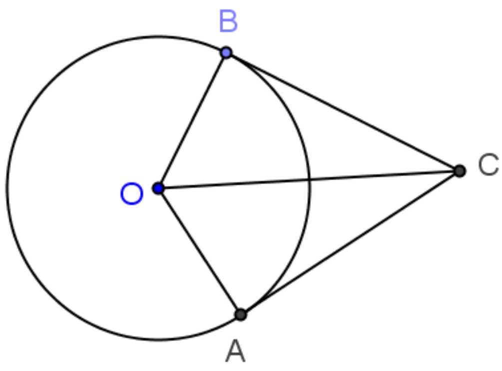


圖 7.3-11

想法：利用圓外一點到圓的兩切線等長

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AC}=\overline{BC}$	已知 $\overline{AC}$、$\overline{BC}$為圓 O 之切線，B、C 為切點。 & 圓外一點到圓的兩切線等長
(2) $\overline{AC}=\overline{BC}$＝12 公分	由(1) & 已知$\overline{BC}$＝12 公分

例題 7.3-10：

如圖 7.3-12，已知 $\overline{AD}$、$\overline{AE}$、$\overline{BC}$ 分別與圓相切於 D、E、F 三點。
若 $\overline{AD}$＝12 公分，求$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$之值。

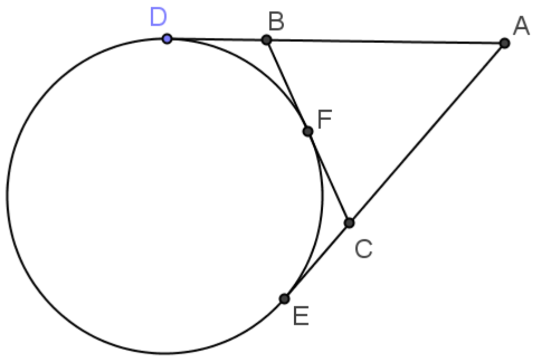


圖 7.3-12

想法：利用圓外一點到圓的兩切線等長

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AE}=\overline{AD}=12$ 公分	已知 $\overline{AD}$、$\overline{AE}$分別與圓相切於 D、E 兩點 & 圓外一點到圓的兩切線等長 & 已知$\overline{AD}=12$ 公分
(2) $\overline{BD}$、$\overline{BF}$、$\overline{CF}$、$\overline{CE}$皆為切線	已知 $\overline{AD}$、$\overline{AE}$、$\overline{BC}$皆為切線
(3) $\overline{BF}=\overline{BD}$	由(2) $\overline{BD}$、$\overline{BF}$為切線 & 圓外一點到圓的兩切線等長
(4) $\overline{CF}=\overline{CE}$	由(2) $\overline{CF}$、$\overline{CE}$為切線 & 圓外一點到圓的兩切線等長
(5) $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$ $=\overline{AB}+(\overline{BF}+\overline{CF})+\overline{AC}$ $=(\overline{AB}+\overline{BF})+(\overline{CF}+\overline{AC})$ $=(\overline{AB}+\overline{BD})+(\overline{CE}+\overline{AC})$ $=\overline{AD}+\overline{AE}$ ＝12 公分＋12 公分 ＝24 公分	題目所求 如圖 7.3-12，$\overline{BC}=\overline{BF}+\overline{CF}$ 加法結合律 將(3) $\overline{BF}=\overline{BD}$ & (4) $\overline{CF}=\overline{CE}$ 代入 如圖 7.3-12，$\overline{AB}+\overline{BD}=\overline{AD}$ & $\overline{CE}+\overline{AC}=\overline{AE}$ 將(1) $\overline{AE}=\overline{AD}=12$ 公分 代入
(6) $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=24$ 公分	由(5)

接著，我們將第七章中所提到圓外一點到圓的兩切線等長的性質，應用到第四章中所提到的三角形的內心，來作以下的例題 7.3-11~例題 7.3-12。

例題 7.3-11：

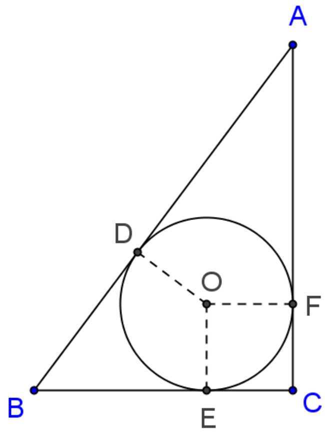


圖 7.3-13

已知：△ABC 為直角三角形，$\overline{AC}\perp\overline{BC}$，且 O 點為△ABC 的內心，
($\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$分別切圓 O 於 D、E、F 三點)

求證：△ABC 內切圓半徑＝$\dfrac{\overline{AC}+\overline{BC}-\overline{AB}}{2}$

想法：(1) 過切點的半徑與切線垂直

(2) 圓外一點對圓所作的兩切線等長

證明：

敘述	理由
(1) 假設△ABC 內切圓半徑為 r (即 r＝$\overline{OD}$＝$\overline{OE}$＝$\overline{OF}$)	已知 O 點為△ABC 的內心，$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$分別切圓 O 於 D、E、F 三點 & 同圓半徑相等
(2) $\overline{OE}\perp\overline{BC}$、$\overline{OF}\perp\overline{AC}$	已知$\overline{BC}$、$\overline{AC}$分別切圓 O 於 E、F 兩點 & 過切點的半徑與切線垂直
(3) $\overline{OE}\parallel\overline{AC}$ (即$\overline{OE}\parallel\overline{FC}$)	由(2) $\overline{OE}\perp\overline{BC}$ & 已知$\overline{AC}\perp\overline{BC}$ 垂直同一直線的兩線平行定理

(4) $\overline{OF} \parallel \overline{BC}$ (即$\overline{OF} \parallel \overline{EC}$)	由(2) $\overline{OF} \perp \overline{AC}$ & 已知$\overline{BC} \perp \overline{AC}$ 垂直同一直線的兩線平行定理
(5) 四邊形 OECF 為平行四邊形	由(3) & (4) 兩組對邊平行為平行四邊形
(6) $\overline{OF}=\overline{EC}$ & $\overline{OE}=\overline{FC}$	由(5) & 平行四邊形兩組對邊相等
(7) 所以$\overline{OF}=\overline{FC}=\overline{EC}=\overline{OE}=\mathrm{r}$	由(1) $\mathrm{r}=\overline{OE}=\overline{OF}$ & (6) 遞移律
(8) $\overline{BD}=\overline{BE}$	已知$\overline{AB}$、$\overline{BC}$分別切圓 O 於 D、E 兩點 & 圓外一點對圓所作的兩切線等長
(9) $\overline{AD}=\overline{AF}$	已知$\overline{AB}$、$\overline{AC}$分別切圓 O 於 D、F 兩點 & 圓外一點對圓所作的兩切線等長
(10) $\overline{AC}=\overline{AF}+\overline{FC}$	如圖 7.3-13 所示，全量等於分量之和
(11) $\overline{AF}=\overline{AC}-\overline{FC}=\overline{AC}-\mathrm{r}$	由(10) 等量減法公理 & (7) $\overline{FC}=\mathrm{r}$
(12) $\overline{AD}=\overline{AF}=\overline{AC}-\mathrm{r}$	由(9) & (11) 遞移律
(13) $\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}$	如圖 7.3-13 所示，全量等於分量之和
(14) $\overline{BD}=\overline{AB}-\overline{AD}$ $=\overline{AB}-(\overline{AC}-\mathrm{r})$ $=\overline{AB}-\overline{AC}+\mathrm{r}$	由(13) 等量減法公理 & (12) $\overline{AD}=\overline{AC}-\mathrm{r}$ 展開
(15) $\overline{BE}=\overline{BD}=\overline{AB}-\overline{AC}+\mathrm{r}$	由(8) & (14) 遞移律
(16) $\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{EC}$	如圖 7.3-13 所示，全量等於分量之和
(17) $\overline{EC}=\overline{BC}-\overline{BE}$ $=\overline{BC}-(\overline{AB}-\overline{AC}+\mathrm{r})$ $=\overline{BC}-\overline{AB}+\overline{AC}-\mathrm{r}$	由(16) 等量減法公理 & (15) $\overline{BE}=\overline{AB}-\overline{AC}+\mathrm{r}$ 展開
(18) $\mathrm{r}=\overline{BC}-\overline{AB}+\overline{AC}-\mathrm{r}$	由(7) $\overline{EC}=\mathrm{r}$ & (17) 遞移律
(19) $\mathrm{r}=\dfrac{\overline{AC}+\overline{BC}-\overline{AB}}{2}$	由(18) 解 r 的一元一次方程式
(20) 所以△ABC 內切圓半徑 $=\dfrac{\overline{AC}+\overline{BC}-\overline{AB}}{2}$	由(1) 假設 & (19)

例題 7.3-12：

圖 7.3-14 中，已知△ABC 為直角三角形，∠C＝90°，且 O 點為△ABC 的內心，若$\overline{BC}$＝3 公分、$\overline{AC}$＝4 公分、$\overline{AB}$＝5 公分，則△ABC 內切圓半徑為何？

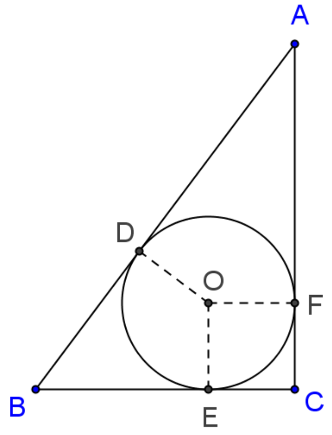


圖 7.3-14

想法：若△ABC 為直角三角形，∠C＝90°，則△ABC 內切圓半徑＝$\frac{\overline{AC}+\overline{BC}-\overline{AB}}{2}$

解：

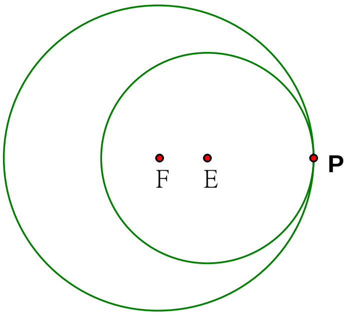
敘述	理由
(1) △ABC 內切圓半徑 $=\frac{\overline{AC}+\overline{BC}-\overline{AB}}{2}$ $=\frac{4公分+3公分-5公分}{2}$ ＝1 公分	若△ABC 為直角三角形，∠C＝90°，則△ABC 內切圓半徑＝$\frac{\overline{AC}+\overline{BC}-\overline{AB}}{2}$ & 已知$\overline{BC}$＝3 公分、$\overline{AC}$＝4 公分、$\overline{AB}$＝5 公分

定義 7.3-3 相切圓

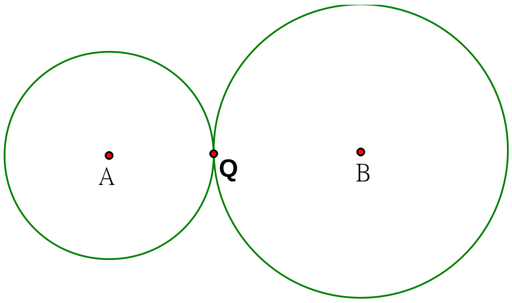
在同一平面上，若兩圓只有一個交點，則稱此兩圓相切。

若一圓的圓心在另一圓內的相切，叫作內切。

若一圓的圓心在另一圓外的相切，叫作外切。



內切圓



外切圓

圖 7.3-15

圖 7.3-15 中，圓 E 與圓 F 兩圓內切於 P 點；圓 A 與圓 B 兩圓外切於 Q 點。

定理 7.3-3 兩圓相切定理

相切兩圓的兩圓心連線，必過切點。

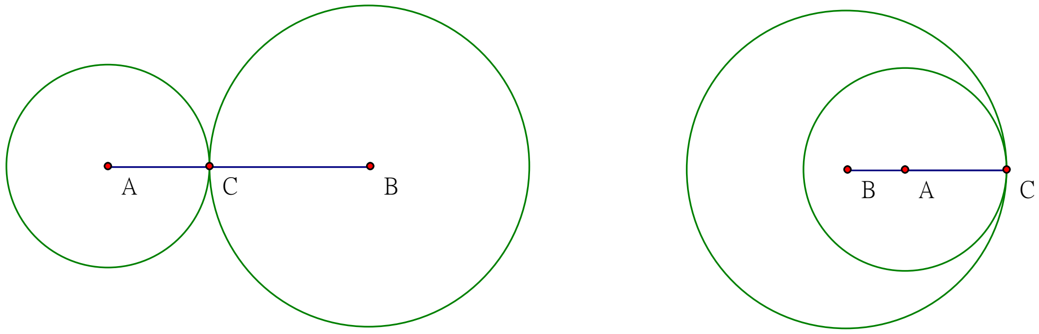


圖 7.3-16

已知：如圖 7.3-16，圓 A 與圓 B 相切於 C 點。
求證：C 點在連心線$\overline{AB}$上
想法：利用切線定理及過直線上一點的垂線只有一條。

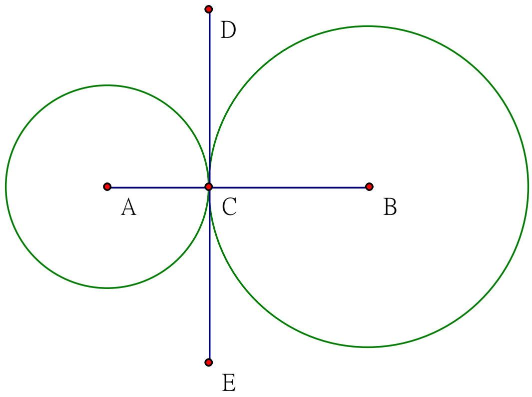


圖 7.3-16(a)

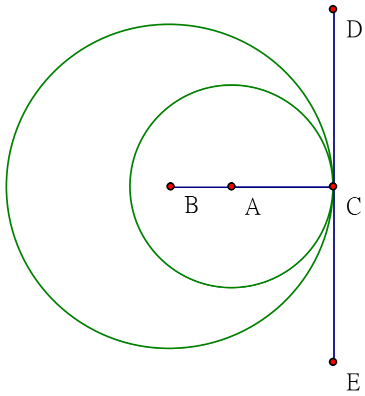


圖 7.3-16(b)

證明：

敘述	理由
(1) 過 C 點作圓 A (或圓 B)的切線 $\overline{DE}$，$\overline{DE}$為兩圓的公切線，如圖 7.3-16(a)、圖 7.3-16(b)	兩圓相交於 C 點，過一點只有一條切線，C 點在圓 A 也在圓 B 上，所以$\overline{DE}$是圓 A 的切線也是圓 B 的切線
(2) $\overline{AC}\perp\overline{DE}$，$\overline{BC}\perp\overline{DE}$	由(1) & 切線與過切點的半徑互相垂直
(3) $\overline{ACB}$ 或 $\overline{BAC}$ 在一直線上	由(2) & 過直線上一點的垂線只有一條

Q. E. D.

兩圓之位置關係

同一平面上相異的兩個圓，依照兩圓心距離的遠近，可分為以下六種情形：

（一） **外離：**兩圓不相交。如圖 7.3-17。

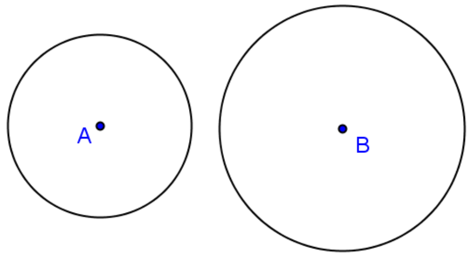


圖 7.3-17

（二） **外切：**兩圓交於一點。如圖 7.3-18。

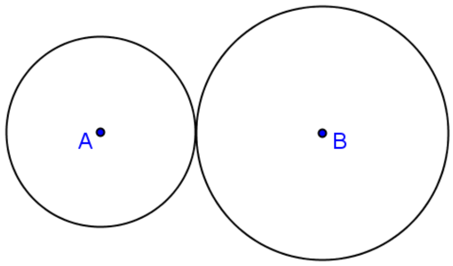


圖 7.3-18

（三） **兩圓相交於兩點**。如圖 7.3-19。

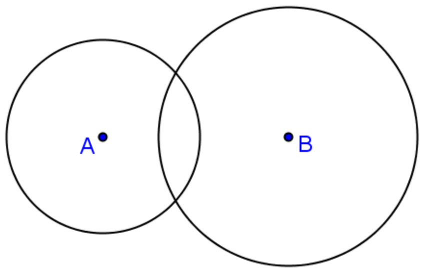


圖 7.3-19

（四） 內切：兩圓交於一點。如圖 7.3-20。

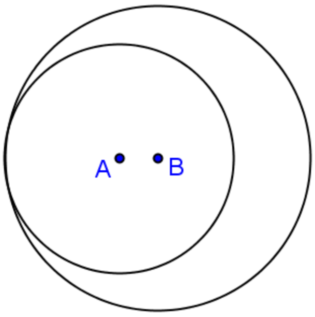


圖 7.3-20

（五） 內離：兩圓不相交。如圖 7.3-21。

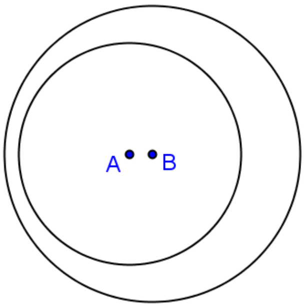


圖 7.3-21

（六） 同心圓：兩圓不相交，且兩圓圓心重合。如圖 7.3-22。

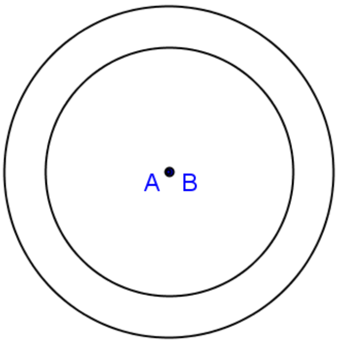


圖 7.3-22

例題 7.3-13：

若圓 A 半徑為 6 公分、圓 B 半徑為 3 公分，兩圓心相連的連心線段$\overline{AB}$長為 k，則：

(1) 當兩圓外離時，連心線段長 k 的範圍為____________。

(2) 當兩圓外切時，連心線段長 k 的範圍為____________。

(3) 當兩圓相交於兩點時，連心線段長 k 的範圍為____________。

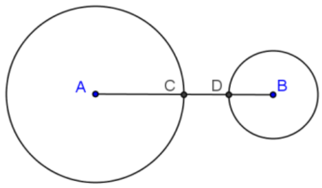
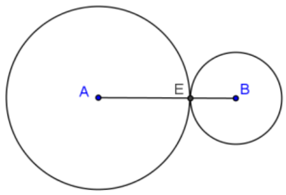
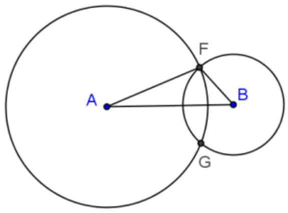
(4) 當兩圓內切時，連心線段長 k 的範圍為____________。

(5) 當兩圓內離時，連心線段長 k 的範圍為____________。

(6) 當兩圓為同心圓時，連心線段長 k 的範圍為_____________。

想法：利用兩圓心距離(圓心距)與兩圓半徑判斷兩圓的關係

解：

敘述	理由
(1) 如圖 7.3-23(a)所示，若圓 A 與圓 B 不相交， 則 k＝$\overline{AB}$＝$\overline{AC}$＋$\overline{CD}$＋$\overline{BD}$，也就是說 k＝6 公分＋$\overline{CD}$＋3 公分＝9 公分＋$\overline{CD}$＞9 公分， 所以 k＞9 公分 **(連心線長＞兩半徑和)**	已知兩圓外離  **圖 7.3-23(a)**
(2) 如圖 7.3-23(b)所示，若圓 A 與圓 B 相交於一點 E， 由於相切兩圓的兩圓心連線，必過切點， 所以 A、E、B 三點共線； 則 k＝$\overline{AB}$＝$\overline{AE}$＋$\overline{BE}$，(全量等於分量之和) 也就是說 k＝6 公分＋3 公分＝9 公分 **(連心線長＝兩半徑和)**	已知兩圓外切  **圖 7.3-23(b)**
(3) 如圖 7.3-23(c)，若圓 A 與圓 B 相交於 F、G 兩點， 則根據△ABF 三邊長之關係，我們可以得知 $\overline{AF}$－$\overline{BF}$＜k＝$\overline{AB}$＜$\overline{AF}$＋$\overline{BF}$， 也就是說 6 公分－3 公分＜k＜6 公分＋3 公分， 所以 3 公分＜k＜9 公分 **(兩半徑差＜連心線長＜兩半徑和)**	已知兩圓相交於兩點  **圖 7.3-23(c)**

(4) 如圖 7.3-23(d)所示，若圓 A 與圓 B 相交於一點 H，，由於相切兩圓的兩圓心連線，必過切點，所以 A、B、H 三點共線；

則 $k=\overline{AB}=\overline{AH}-\overline{BH}$，(全量等於分量之和)

也就是說 k＝6 公分－3 公分＝3 公分

(連心線長＝兩半徑差)

已知兩圓內切

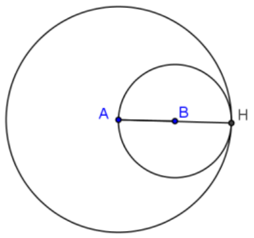


圖 7.3-23(d)

(5) 如圖 7.3-23(e)所示，若圓 A 與圓 B 不相交，

則 $k=\overline{AB}=\overline{AI}-\overline{BJ}-\overline{JI}$，也就是說

$k=6$ 公分-3 公分$-\overline{JI}=3$ 公分$-\overline{JI}<3$ 公分，

所以 $k<3$ 公分

(連心線長＜兩半徑差)

已知兩圓內離

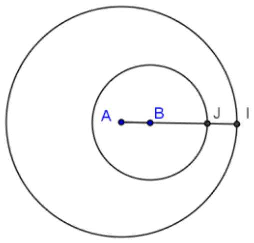


圖 7.3-23(e)

(6) 如圖 7.3-23(f)所示，若圓心 A 點與圓心 B 點重合，

則 $k=\overline{AB}=0$ 公分，

也就是說 k＝0 公分

(連心線長＝0)

已知兩圓為同心圓

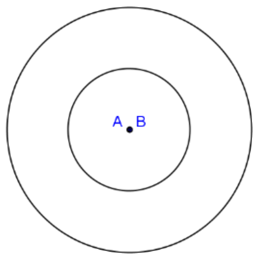


圖 7.3-23(f)

由上述**例題 7.3-13**，我們可以由連心線長與兩半徑間的關係，來判斷出兩圓間的關係。判斷的規則如下：

(一) 若連心線長＞兩半徑和，則兩圓外離。

(二) 若連心線長＝兩半徑和，則兩圓外切。

(三) 若兩半徑差＜連心線長＜兩半徑和，則兩圓相交於兩點。

(四) 若連心線長＝兩半徑差，則兩圓內切。

(五) 若連心線長＜兩半徑差，則兩圓內離。

(六) 若連心線長＝0，則兩圓為同心圓。

例題 7.3-14：

若圓 A 及圓 B 的半徑各為 2 公分及 4 公分，且$\overline{AB}$＝7 公分，則下列哪一個圖示可以代表圓 A 和圓 B 的位置關係？

(A)

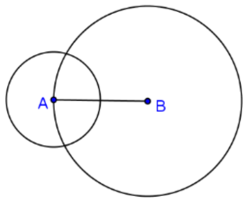


圖 7.3-24(a)

(B)

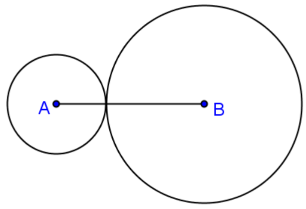


圖 7.3-24(b)

(C)

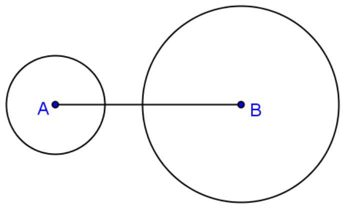


圖 7.3-24(c)

(D)

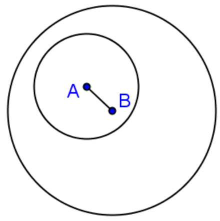


圖 7.3-24(d)

想法：判斷兩圓關係的規則如下：

(1) 若連心線長＞兩半徑和，則兩圓外離。
(2) 若連心線長＝兩半徑和，則兩圓外切。
(3) 若兩半徑差＜連心線長＜兩半徑和，則兩圓相交於兩點。
(4) 若連心線長＝兩半徑差，則兩圓內切。
(5) 若連心線長＜兩半徑差，則兩圓內離。
(6) 若連心線長＝0，則兩圓為同心圓。

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}$＝7 公分＞2 公分＋4 公分＝6 公分	已知$\overline{AB}$＝7 公分 & 圓 A 及圓 B 的半徑各為 2 公分及 4 公分
(2) 圓 A 與圓 B 外離	由(1) & 連心線長＞兩半徑和，則兩圓外離
(3) 所以本題選(C)	由(2)

例題 7.3-15：

已知圓 A 與圓 B 的連心線段長為 17 單位。若圓 A 與圓 B 的半徑分別如下表，請完成下表中兩圓的位置關係。

圓 A 半徑	9 單位	28 單位	35 單位	10 單位	30 單位
圓 B 半徑	8 單位	15 單位	10 單位	5 單位	13 單位
兩圓位置關係					

想法：判斷兩圓關係的規則如下：

(1) 若連心線長＞兩半徑和，則兩圓外離。
(2) 若連心線長＝兩半徑和，則兩圓外切。
(3) 若兩半徑差＜連心線長＜兩半徑和，則兩圓相交於兩點。
(4) 若連心線長＝兩半徑差，則兩圓內切。
(5) 若連心線長＜兩半徑差，則兩圓內離。
(6) 若連心線長＝0，則兩圓為同心圓。

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}=17=9+8$ 所以圓 A 與圓 B 外切	已知$\overline{AB}=17$ 單位 & 圓 A 及圓 B 的半徑各為 9 單位及 8 單位 & 連心線長＝兩半徑和，則兩圓外切
(2) $28-15<\overline{AB}=17<28+15$ 所以圓 A 與圓 B 交於兩點	已知$\overline{AB}=17$ 單位 & 圓 A 及圓 B 的半徑各為 28 單位及 15 單位& 兩半徑差＜連心線長＜兩半徑和，則兩圓相交於兩點
(3) $\overline{AB}=17<35-10$ 所以圓 A 與圓 B 內離	已知$\overline{AB}=17$ 單位 & 圓 A 及圓 B 的半徑各為 35 單位及 10 單位 & 連心線長＜兩半徑差，則兩圓內離
(4) $\overline{AB}=17>10+5$ 所以圓 A 與圓 B 外離	已知$\overline{AB}=17$ 單位 & 圓 A 及圓 B 的半徑各為 10 單位及 5 單位 & 連心線長＞兩半徑和，則兩圓外離
(5) $\overline{AB}=17=30-13$ 所以圓 A 與圓 B 內切	已知$\overline{AB}=17$ 單位 & 圓 A 及圓 B 的半徑各為 30 單位及 13 單位 & 連心線長＝兩半徑差，則兩圓內切

例題 7.3-16：

已知大小兩個圓，若兩圓外切時，其連心線段長為 11 公分，若兩圓內切時，其連心線段長為 3 公分，求兩圓之半徑分別為多少？

想法：(1) 若兩圓外切，則連心線長＝兩半徑和

(2) 若兩圓內切，則連心線長＝兩半徑差。

解：

敘述	理由
(1) 假設大圓半徑 R、小圓半徑 r	假設
(2) R＋r＝11 公分	已知兩圓外切時，其連心線段長為 11 公分 ＆ 若兩圓外切，則連心線長＝兩半徑和
(3) R－r＝3 公分	已知兩圓內切時，其連心線段長為 3 公分 ＆ 若兩圓內切，則連心線長＝兩半徑差
(4) R＝7 公分 ＆ r＝4 公分	由(2) ＆ (3) 解二元一次聯立方程式得
(5) 大圓半徑 7 公分 小圓半徑 4 公分	由(1) 假設 ＆ (4) R＝7 公分 ＆ r＝4 公分

例題 7.3-17：

如圖 7.3-25，A、B、C 分別是兩兩相互外切的三圓的圓心，若$\overline{AB}$＝5 公分，$\overline{BC}$＝4 公分，$\overline{AC}$＝3 公分，試求此三圓的半徑。

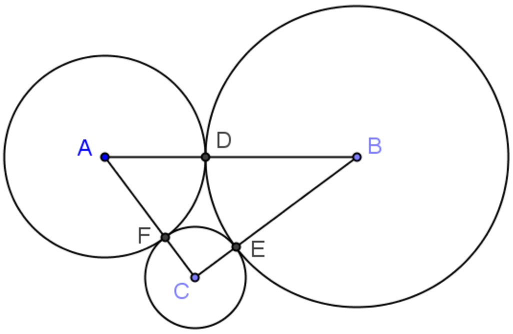


圖 7.3-25

想法：若兩圓外切，則連心線長＝兩半徑和

解：

敘述	理由
(1) 假設圓 A 半徑$\overline{AF}$＝$\overline{AD}$＝a 圓 B 半徑$\overline{BD}$＝$\overline{BE}$＝b 圓 C 半徑$\overline{CE}$＝$\overline{CF}$＝c	同圓半徑相等 ＆ 假設
(2) $\overline{AB}$＝$\overline{AD}$＋$\overline{BD}$	已知 A、B 兩圓外切 ＆ 連心線長＝兩半徑和
(3) 5 公分＝a＋b	將已知$\overline{AB}$＝5 公分 ＆ (1) $\overline{AD}$＝a、$\overline{BD}$＝b 代入(2)得
(4) $\overline{BC}$＝$\overline{BE}$＋$\overline{CE}$	已知 B、C 兩圓外切 ＆ 連心線長＝兩半徑和
(5) 4 公分＝b＋c	將已知$\overline{BC}$＝4 公分 ＆ (1) $\overline{BE}$＝b、$\overline{CE}$＝c 代入(4)得
(6) $\overline{AC}$＝$\overline{AF}$＋$\overline{CF}$	已知 A、C 兩圓外切 ＆ 連心線長＝兩半徑和
(7) 3 公分＝a＋c	將已知$\overline{AC}$＝3 公分 ＆ (1) $\overline{AF}$＝a、$\overline{CF}$＝c 代入(6)得
(8) 12 公分＝2(a＋b＋c)	由(3)式＋(5) 式＋(7) 式得
(9) 6 公分＝a＋b＋c	由(8) 等式兩邊同除以 2
(10) a＝2 公分 b＝3 公分 c＝1 公分	由(9)式－(5)式得 由(9)式－(7)式得 由(9)式－(3)式得
(11) 所以圓 A 半徑為 2 公分 圓 B 半徑為 3 公分 圓 C 半徑為 1 公分	由(1)圓 A 半徑$\overline{AF}$＝$\overline{AD}$＝a ＆ (10) a＝2 公分 由(1)圓 B 半徑$\overline{BD}$＝$\overline{BE}$＝b ＆ (10) b＝3 公分 由(1)圓 C 半徑$\overline{CE}$＝$\overline{CF}$＝c ＆ (10) c＝1 公分

例題 7.3-18：

設有 A、B、C 三圓，其半徑分別為 16 公分、6 公分、5 公分。若圓 A 分別與圓 B、圓 C 內切，圓 B 與圓 C 外切，則$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=$______公分。

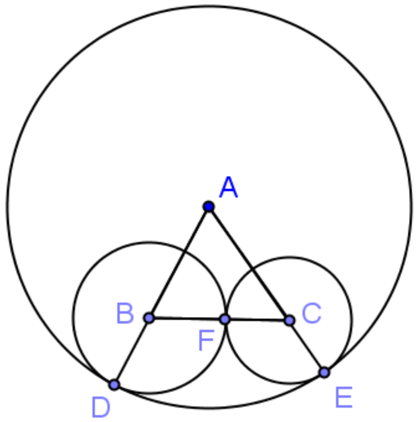


圖 7.3-26

想法：(1) 若兩圓外切，則連心線長＝兩半徑和

(2) 若兩圓內切，則連心線長＝兩半徑差。

解：

敘述	理由
(1) 依題意繪圖，如圖 7.3-26 所示	由已知圓 A 分別與圓 B、圓 C 內切，圓 B 與圓 C 外切作圖
(2) $\overline{AB}=\overline{AD}-\overline{BD}$	已知 A、B 兩圓內切 & 連心線長＝兩半徑差
(3) $\overline{AB}=$16 公分－6 公分 ＝10 公分	將已知圓 A 半徑$\overline{AD}=$16 公分 & 圓 B 半徑$\overline{BD}=$6 公分 代入(2)
(4) $\overline{BC}=\overline{BF}+\overline{CF}$	已知 B、C 兩圓外切 & 連心線長＝兩半徑和
(5) $\overline{BC}=$6 公分＋5 公分 ＝11 公分	將已知圓 B 半徑$\overline{BF}=$6 公分 & 圓 C 半徑$\overline{CF}=$5 公分 代入(4)
(6) $\overline{AC}=\overline{AE}-\overline{CE}$	已知 A、C 兩圓內切 & 連心線長＝兩半徑差
(7) $\overline{AC}=$16 公分－5 公分 ＝11 公分	將已知圓 A 半徑$\overline{AE}=$16 公分 & 圓 C 半徑$\overline{CE}=$5 公分 代入(6)
(8) 所以$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$ ＝(10＋11＋11)公分 ＝32 公分	由(3)式＋(5)式＋(7)式得

定義 7.3-4 公切線

一直線同時與兩圓相切就叫作此兩圓的公切線。

若兩圓在直線的兩側叫作內公切線。

若兩圓在直線的同側叫作外公切線。

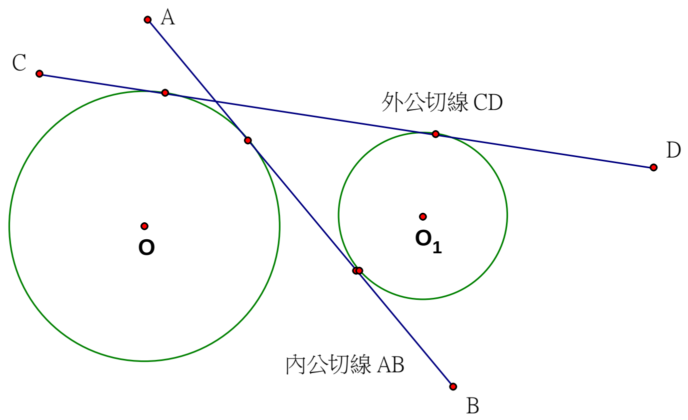


圖 7.3-27

圖 7.3-27 中，$\overline{AB}$為圓 O 與圓 O_1 兩圓的內公切線；$\overline{CD}$為圓 O 與圓 O_1 兩圓的外公切線。

例題 7.3-19：

已知 A、B 兩圓的半徑分別是 4 公分、6 公分，連心線段長為 10 公分，則此兩圓共有______條公切線。

想法：1. 判斷兩圓關係的規則如下：

(1) 若連心線長＞兩半徑和，則兩圓外離。

(2) 若連心線長＝兩半徑和，則兩圓外切。

(3) 若兩半徑差＜連心線長＜兩半徑和，則兩圓相交於兩點。

(4) 若連心線長＝兩半徑差，則兩圓內切。

(5) 若連心線長＜兩半徑差，則兩圓內離。

(6) 若連心線長＝0，則兩圓為同心圓。

2. 一直線同時與兩圓相切就叫作此兩圓的公切線

3. 若兩圓在直線的兩側叫作內公切線

4. 若兩圓在直線的同側叫作外公切線

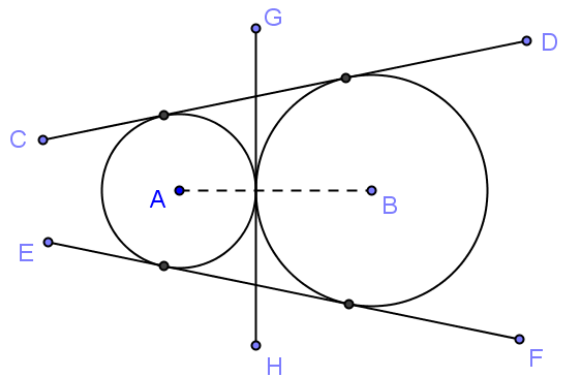


圖 7.3-28

解：

敘述	理由
(1) A、B 兩圓外切	已知 A、B 兩圓的半徑分別是 4 公分、6 公分，連心線段長為 10 公分 ⇒10 公分＝4 公分＋6 公分 & 若連心線長＝兩半徑和，則兩圓外切
(2) 如圖 7.3-28，A、B 兩圓共有 $\overline{CD}$、$\overline{EF}$與$\overline{GH}$ 3 條公切線。其中$\overline{CD}$、$\overline{EF}$為外公切線；$\overline{GH}$為內公切線	一直線同時與兩圓相切就叫作此兩圓的公切線 & 兩圓在直線的兩側叫作內公切線 & 兩圓在直線的同側叫作外公切線

例題 7.3-20：

已知 A、B 兩圓的半徑分別是 4 公分、6 公分，連心線段長為 2 公分，則此兩圓共有幾條公切線。

想法：1. 判斷兩圓關係的規則如下：

(1) 若連心線長＞兩半徑和，則兩圓外離。

(2) 若連心線長＝兩半徑和，則兩圓外切。

(3) 若兩半徑差＜連心線長＜兩半徑和，則兩圓相交於兩點。

(4) 若連心線長＝兩半徑差，則兩圓內切。

(5) 若連心線長＜兩半徑差，則兩圓內離。

(6) 若連心線長＝0，則兩圓為同心圓。

2. 一直線同時與兩圓相切就叫作此兩圓的公切線

3. 若兩圓在直線的兩側叫作內公切線

4. 若兩圓在直線的同側叫作外公切線

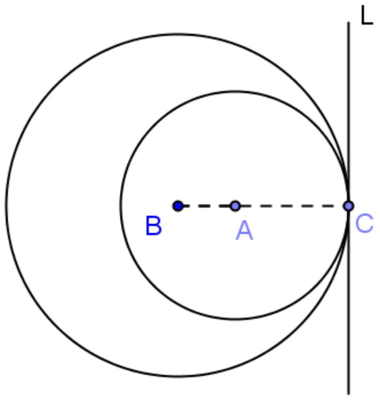


圖 7.3-29

解：

敘述	理由
(1) A、B 兩圓內切	已知 A、B 兩圓的半徑分別是 4 公分、6 公分，連心線段長為 2 公分 ⇒2 公分＝6 公分－4 公分 ＆ 若連心線長＝兩半徑差，則兩圓內切
(2) 如圖 7.3-29 所示，A、B 兩圓只有一條公切線 L，且 L 為外公切線	一直線同時與兩圓相切就叫作此兩圓的公切線 ＆ 兩圓在直線的同側叫作外公切線

例題 7.3-21：

已知 A、B 兩圓的半徑分別是 4 公分、6 公分，連心線段長為 15 公分，則此兩圓共有幾條公切線。

想法： 1. 判斷兩圓關係的規則如下：

(1) 若連心線長＞兩半徑和，則兩圓外離。
(2) 若連心線長＝兩半徑和，則兩圓外切。
(3) 若兩半徑差＜連心線長＜兩半徑和，則兩圓相交於兩點。
(4) 若連心線長＝兩半徑差，則兩圓內切。
(5) 若連心線長＜兩半徑差，則兩圓內離。
(6) 若連心線長＝0，則兩圓為同心圓。

2. 一直線同時與兩圓相切就叫作此兩圓的公切線

3. 若兩圓在直線的兩側叫作內公切線

4. 若兩圓在直線的同側叫作外公切線

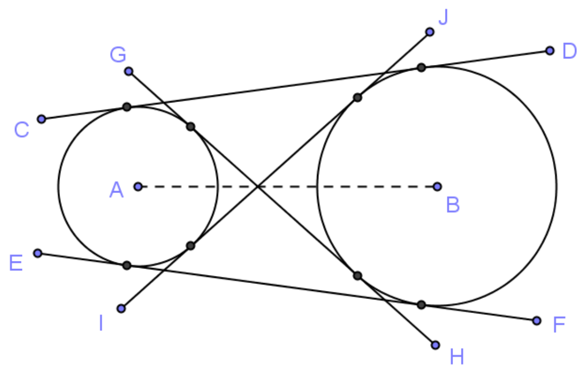


圖 7.3-30

解：

敘述	理由
(1) A、B 兩圓外離	已知 A、B 兩圓的半徑分別是 4 公分、6 公分，連心線段長為 15 公分 ⇒15 公分＞6 公分＋4 公分 & 若連心線長＞兩半徑和，則兩圓外離
(2) 如圖 7.3-30 所示，A、B 兩圓共有 $\overline{CD}$、$\overline{EF}$、$\overline{GH}$、$\overline{IJ}$ 4 條公切線，其中$\overline{CD}$、$\overline{EF}$為外公切線；$\overline{GH}$、$\overline{IJ}$為內公切線	一直線同時與兩圓相切就叫作此兩圓的公切線 & 兩圓在直線的兩側叫作內公切線 & 兩圓在直線的同側叫作外公切線

例題 7.3-22：

已知 A、B 兩圓的半徑分別是 4 公分、6 公分，連心線段長為 8 公分，則此兩圓共有幾條公切線。

想法：1. 判斷兩圓關係的規則如下：

(1) 若連心線長＞兩半徑和，則兩圓外離。

(2) 若連心線長＝兩半徑和，則兩圓外切。

(3) 若兩半徑差＜連心線長＜兩半徑和，則兩圓相交於兩點。

(4) 若連心線長＝兩半徑差，則兩圓內切。

(5) 若連心線長＜兩半徑差，則兩圓內離。

(6) 若連心線長＝0，則兩圓為同心圓。

2. 一直線同時與兩圓相切就叫作此兩圓的公切線

3. 若兩圓在直線的兩側叫作內公切線

4. 若兩圓在直線的同側叫作外公切線

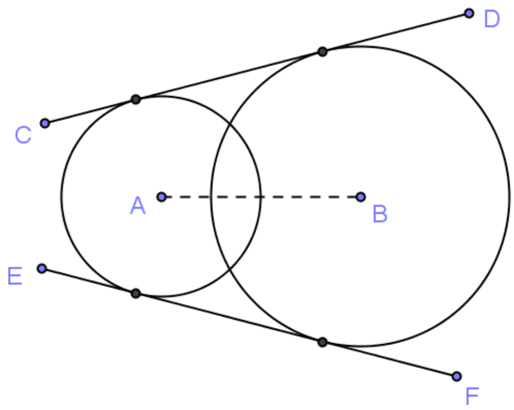


圖 7.3-31

解：

敘述	理由
(1) A、B 兩圓交於兩點	已知 A、B 兩圓的半徑分別是 4 公分、6 公分，連心線段長為 8 公分 ⇒6 公分－4 公分＜8 公分＜6 公分＋4 公分 & 若兩半徑差＜連心線長＜兩半徑和，則兩圓交於兩點
(2) 如圖 7.3-31 所示，A、B 兩圓共有 $\overline{CD}$與$\overline{EF}$ 2 條公切線： $\overline{CD}$與$\overline{EF}$皆為外公切線	一直線同時與兩圓相切就叫作此兩圓的公切線 & 兩圓在直線的同側叫作外公切線

例題 7.3-23：

已知 A、B 兩圓的半徑分別是 4 公分、6 公分，連心線段長為 1 公分，則此兩圓共有幾條公切線。

想法：1. 判斷兩圓關係的規則如下：

(1) 若連心線長＞兩半徑和，則兩圓外離。
(2) 若連心線長＝兩半徑和，則兩圓外切。
(3) 若兩半徑差＜連心線長＜兩半徑和，則兩圓相交於兩點。
(4) 若連心線長＝兩半徑差，則兩圓內切。
(5) 若連心線長＜兩半徑差，則兩圓內離。
(6) 若連心線長＝0，則兩圓為同心圓。

2. 一直線同時與兩圓相切就叫作此兩圓的公切線

3. 若兩圓在直線的兩側叫作內公切線

4. 若兩圓在直線的同側叫作外公切線

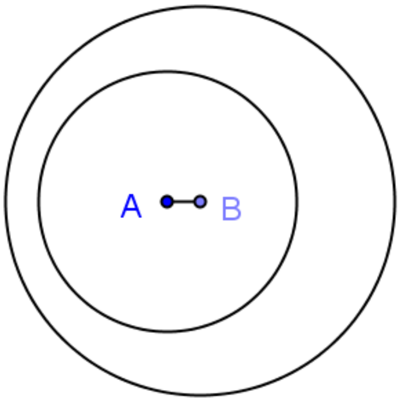


圖 7.3-32

解：

敘述	理由
(1) A、B 兩圓內離	已知 A、B 兩圓的半徑分別是 4 公分、6 公分，連心線段長為 1 公分 ⇒1 公分＜6 公分－4 公分 & 連心線長＜兩半徑差，則兩圓內離
(2) 如圖 7.3-32，A、B 兩圓沒有公切線	由(1) & 一直線同時與兩圓相切就叫作此兩圓的公切線

由以上**例題 7.3-19~例題 7.3-23** 中，我們可以得到以下的結論：

1. 在同一平面上，若**兩圓外離**，則此兩圓共有 **4 條公切線**，其中 **2 條為內公切線**，**2 條為外公切線**。
2. 在同一平面上，若**兩圓外切**，則此兩圓共有 **3 條公切線**，其中 **1 條為內公切線**，**2 條為外公切線**。
3. 在同一平面上，若**兩圓相交於兩點**，則此兩圓共有 **2 條公切線**，且此 **2 條皆為外公切線**。
4. 在同一平面上，若**兩圓內切**，則此兩圓**只有 1 條公切線**，**且此公切線為外公切線**。
5. 在同一平面上，若**兩圓內離**，則此兩圓**沒有公切線**。

例題 7.3-24：

已知圓 O_1 與圓 O_2 的連心線段長為 12 單位，若圓 O_1 與圓 O_2 的半徑分別如下表，請完成下表。

圓 O_1 半徑	12 單位	3 單位	5 單位	4 單位	2 單位
圓 O_2 半徑	24 單位	8 單位	7 單位	13 單位	20 單位
兩圓位置關係					
公切線數					

想法： 1. 在同一平面上，若兩圓外離，則此兩圓共有 4 條公切線，其中 2 條為內公切線，2 條為外公切線。

2. 在同一平面上，若兩圓外切，則此兩圓共有 3 條公切線，其中 1 條為內公切線，2 條為外公切線。

3. 在同一平面上，若兩圓相交於兩點，則此兩圓共有 2 條公切線，且此 2 條皆為外公切線。

4. 在同一平面上，若兩圓內切，則此兩圓只有 1 條公切線，且此公切線為外公切線。

5. 在同一平面上，若兩圓內離，則此兩圓沒有公切線。

解：

敘述	理由
(1) 若圓 O_1 與圓 O_2 半徑分別為 12 單位、24 單位，則圓 O_1 與圓 O_2 內切 所以圓 O_1 與圓 O_2 只有一條公切線	已知圓 O_1 與圓 O_2 半徑分別為 12 單位、24 單位，連心線段長為 12 單位 ⇒12 單位＝24 單位－12 單位 & 連心線長＝兩半徑差，則兩圓內切 & 兩圓內切，則此兩圓只有 1 條公切線
(2) 若圓 O_1 與圓 O_2 半徑分別為 3 單位、8 單位，則圓 O_1 與圓 O_2 外離 所以圓 O_1 與圓 O_2 共有 4 條公切線	已知圓 O_1 與圓 O_2 半徑分別為 3 單位、8 單位，連心線段長為 12 單位 ⇒12 單位＞3 單位＋8 單位 & 連心線長＞兩半徑和，則兩圓外離 & 兩圓外離，則此兩圓共有 4 條公切線
(3) 若圓 O_1 與圓 O_2 半徑分別為 5 單位、7 單位，則圓 O_1 與圓 O_2 外切 所以圓 O_1 與圓 O_2 共有 3 條公切線	已知圓 O_1 與圓 O_2 半徑分別為 5 單位、7 單位，連心線段長為 12 單位 ⇒12 單位＝5 單位＋7 單位 & 連心線長＝兩半徑和，則兩圓外切 & 兩圓外切，則此兩圓共有 3 條公切線

(4) 若圓 O_1 與圓 O_2 半徑分別為 4 單位、13 單位，則圓 O_1 與圓 O_2 交於 2 點 所以圓 O_1 與圓 O_2 共有 2 條公切線	已知圓 O_1 與圓 O_2 半徑分別為 4 單位、13 單位，連心線段長為 12 單位 ⇒(13－4)單位＜12 單位＜(13＋4)單位 ＆ 兩半徑差＜連心線長＜兩半徑和，則兩圓相交於 2 點 ＆ 兩圓相交於 2 點，則此兩圓共有 2 條公切線
(5) 若圓 O_1 與圓 O_2 半徑分別為 2 單位、20 單位，則圓 O_1 與圓 O_2 內離 所以圓 O_1 與圓 O_2 沒有公切線	已知圓 O_1 與圓 O_2 半徑分別為 2 單位、20 單位，連心線段長為 12 單位 ⇒12 單位＜20 單位－2 單位 ＆ 連心線長＜兩半徑差，則兩圓內離 ＆ 兩圓內離，則此兩圓沒有公切線

例題 7.3-25：

平面上有相異兩點 A、B，若分別以 A、B 為圓心，$\frac{1}{2}\overline{AB}$長為半徑畫圓，

則所得的兩圓共有________條公切線。

想法：1. 在同一平面上，若兩圓外離，則此兩圓共有 4 條公切線，其中 2 條為內公切線，2 條為外公切線。

2. 在同一平面上，若兩圓外切，則此兩圓共有 3 條公切線，其中 1 條為內公切線，2 條為外公切線。

3. 在同一平面上，若兩圓相交於兩點，則此兩圓共有 2 條公切線，且此 2 條皆為外公切線。

4. 在同一平面上，若兩圓內切，則此兩圓只有 1 條公切線，且此公切線為外公切線。

5. 在同一平面上，若兩圓內離，則此兩圓沒有公切線。

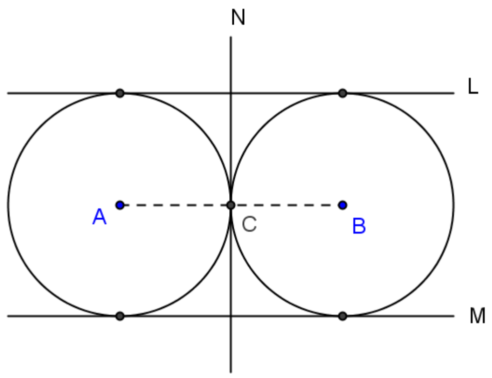


圖 7.3-33

解：

敘述	理由
(1) 依題意作圖，如圖 7.3-33	已知平面上有相異兩點 A、B，若分別以 A、B 為圓心，$\frac{1}{2}\overline{AB}$長為半徑畫圓
(2) 圓 A 與圓 B 兩圓外切	已知圓 A 與圓 B 半徑皆為$\frac{1}{2}\overline{AB}$， 連心線段長為$\overline{AB}$ $\Rightarrow \overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{AB}$ & 連心線長＝兩半徑和，則兩圓外切
(3) 圓 A 與圓 B 兩圓共有 3 條公切線（ L、M 與 N ）	由(2) & 兩圓外切，則此兩圓共有 3 條公切線

例題 7.3-26： 兩切線交點與圓心的連線平分這兩切線所成的夾角。

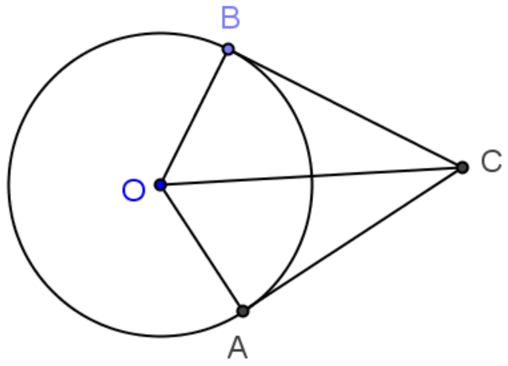


圖 7.3-34

已知：如圖 7.3-34，$\overline{BC}$與$\overline{AC}$為圓 O 之切線，且$\overline{BC}$與$\overline{AC}$相交於 C 點

求證：$\overline{OC}$為∠BCA 的角平分線

想法：利用兩全等三角形對應角相等來證明

證明：

敘述	理由
(1) ∠OBC＝∠OAC＝90°	已知$\overline{BC}$與$\overline{AC}$為圓 O 的兩切線 & 切線與過切點的半徑互相垂直
(2) 在△OBC 與 △OAC 中 $\overline{BO}=\overline{AO}$ ∠OBC＝∠OAC＝90° $\overline{CO}=\overline{CO}$	如圖 7.3-34 所示 同圓半徑相等 由(1) 已證 同線段相等
(3) △OBC ≅ △OAC	由(2) & 根據 R.H.S. 三角形全等定理
(4) ∠BCO＝∠ACO	由(3) & 全等三角形的對應邊相等
(5) 所以$\overline{OC}$為∠BCA 的角平分線	由(4) ∠BCO＝∠ACO 已證

例題 7.3-27： **若兩圓大小不等，則兩圓的連心線必過兩外公切線的交點。**

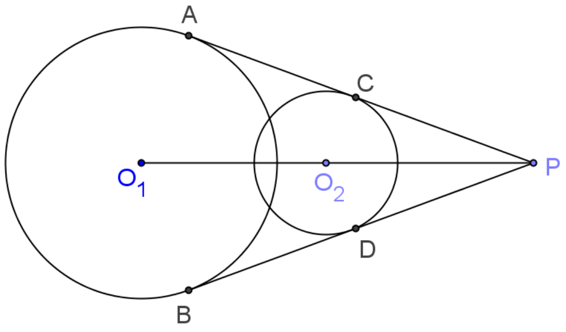


圖 7.3-35(a)

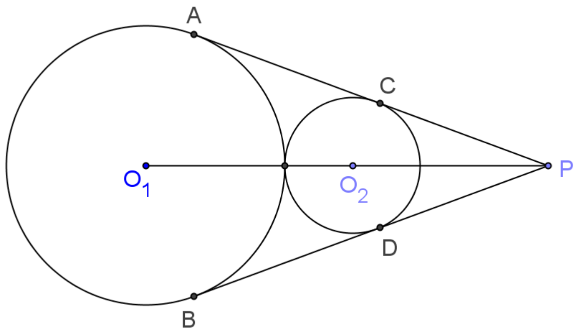


圖 7.3-35(b)

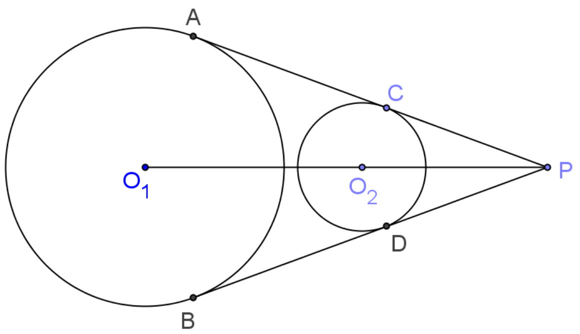


圖 7.3-35(c)

已知： $\overline{AP}$、$\overline{BP}$為圓 O_1 與圓 O_2 的兩外公切線，且$\overline{AP}$與$\overline{BP}$相交於 P 點，如圖 7.3-35(a)、圖 7.3-35(b)、圖 7.3-35(c)所示

求證： $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 必通過 P 點

想法：(1) 兩切線交點與圓心的連線平分這兩切線所成的夾角

(2) 一個角只有一條角平分線

證明：

敘述	理由
(1) $\overline{O_1P}$為∠APB 的角平分線	已知$\overline{AP}$、$\overline{BP}$為圓 O_1 的兩切線，且$\overline{AP}$與$\overline{BP}$相交於 P 點 ＆ 兩切線交點與圓心的連線平分這兩切線所成的夾角
(2) $\overline{O_2P}$為∠APB 的角平分線	已知$\overline{AP}$、$\overline{BP}$為圓 O_2 的兩切線，且$\overline{AP}$與$\overline{BP}$相交於 P 點 ＆ 兩切線交點與圓心的連線平分這兩切線所成的夾角
(3) $\overline{O_1P}$與$\overline{O_2P}$必在同一直線上	由(1) ＆ (2) 一個角只有一條角平分線
(4) 所以$\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 必通過 P 點	由(3)

例題 7.3-28：　兩圓的連心線必過兩內公切線的交點。

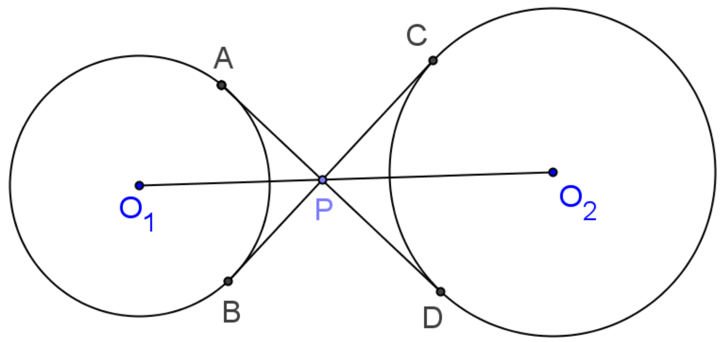


圖 7.3-36

已知：如圖 7.3-36，$\overline{AD}$、$\overline{BC}$為圓 O_1 與圓 O_2 的兩內公切線，且$\overline{AD}$與$\overline{BC}$相交於 P 點。

求證： $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 必通過 P 點

想法：(1) 兩切線交點與圓心的連線平分這兩切線所成的夾角
(2) 周角為 360°
(3) 平角為 180°

證明：

敘述	理由
(1) $\angle APB = \angle CPD$、$\angle APC = \angle BPD$	已知$\overline{AD}$與$\overline{BC}$相交於 P 點 ＆ 對頂角相等
(2) $\overline{O_1P}$為$\angle APB$ 的角平分線 (即$\angle APO_1 = \angle BPO_1 = \frac{1}{2}\angle APB$)	已知$\overline{AD}$、$\overline{BC}$為圓 O_1 的兩切線，且$\overline{AD}$與$\overline{BC}$相交於 P 點 ＆ 兩切線交點與圓心的連線平分這兩切線所成的夾角
(3) $\overline{O_2P}$為$\angle CPD$ 的角平分線 (即$\angle CPO_2 = \angle DPO_2 = \frac{1}{2}\angle CPD$)	已知$\overline{AD}$、$\overline{BC}$為圓 O_2 的兩切線，且$\overline{AD}$與$\overline{BC}$相交於 P 點 ＆ 兩切線交點與圓心的連線平分這兩切線所成的夾角
(4) $\angle APO_1 = \angle BPO_1 = \frac{1}{2}\angle APB$ $= \frac{1}{2}\angle CPD = \angle CPO_2 = \angle DPO_2$	由(2) $\angle APO_1 = \angle BPO_1 = \frac{1}{2}\angle APB$ 、(3) $\angle CPO_2 = \angle DPO_2 = \frac{1}{2}\angle CPD$ ＆ (1) $\angle APB = \angle CPD$ 遞移律
(5) $\angle APO_1 + \angle APC + \angle CPO_2 + \angle DPO_2 + \angle BPD + \angle BPO_1 = 360°$	全量等於分量之和 ＆ 周角為 360°

(6) $\angle APO_1 + \angle APC + \angle CPO_2 + \angle APO_1 + \angle APC + \angle CPO_2 = 360°$	由(5) ＆ (4) $\angle DPO_2 = \angle APO_1$、$\angle BPO_1 = \angle CPO_2$ ＆ (1) $\angle APC = \angle BPD$ 代換
(7) $2(\angle APO_1 + \angle APC + \angle CPO_2) = 360°$	由(6) 化簡
(8) $\angle APO_1 + \angle APC + \angle CPO_2 = 180°$	由(7) 等式兩邊同除以 2
(9) O_1、P、O_2 三點共線	由(8) 平角為 180°
(10) 所以$\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 必通過 P 點	由(9)

例題 7.3-29：　兩圓的兩外公切線等長。

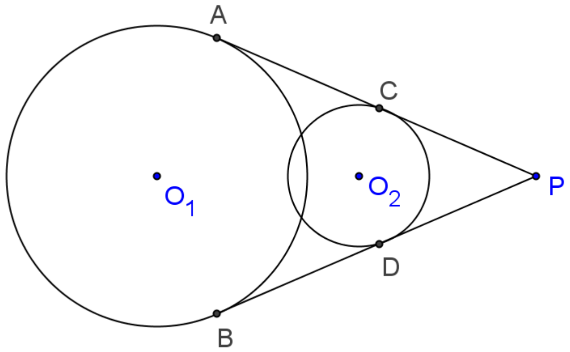


圖 7.3-37(a)

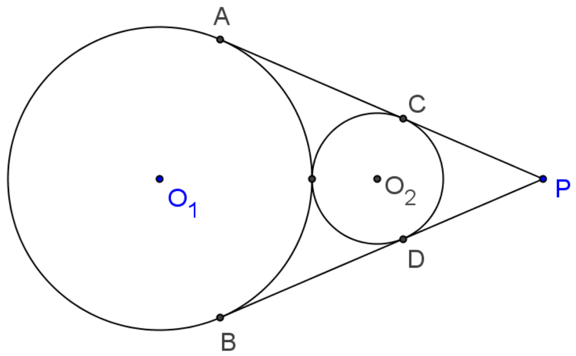


圖 7.3-37(b)

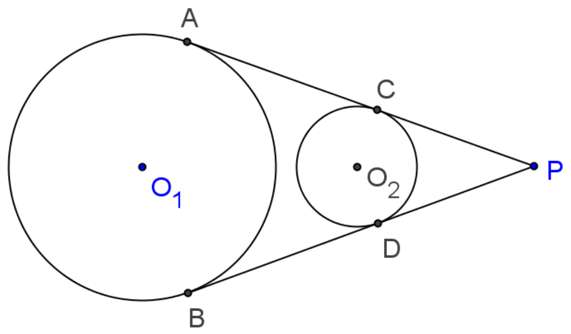


圖 7.3-37(c)

已知： $\overline{AC}$、$\overline{BD}$為圓 O_1 與圓 O_2 的兩外公切線，且$\overline{AC}$與$\overline{BD}$的延長線相交於 P 點，如圖 7.3-37(a)、圖 7.3-37(b)、圖 7.3-37(c)所示

求證：$\overline{AC}=\overline{BD}$

想法：利用圓外一點到圓的兩切線等長

證明：

敘述	理由
(1) $\overline{AP}=\overline{BP}$	已知$\overline{AC}$、$\overline{BD}$為圓 O_1 的兩切線，且$\overline{AC}$與$\overline{BD}$的延長線相交於 P 點 ＆ 圓外一點到圓的兩切線等長
(2) $\overline{CP}=\overline{DP}$	已知$\overline{AC}$、$\overline{BD}$為圓 O_2 的兩切線，且$\overline{AC}$與$\overline{BD}$的延長線相交於 P 點 ＆ 圓外一點到圓的兩切線等長
(3) $\overline{AP}-\overline{CP}=\overline{BP}-\overline{DP}$	由(1) ＆ (2) 等量減法公理
(4) 所以$\overline{AC}=\overline{BD}$	由(3) ＆ $\overline{AP}-\overline{CP}=\overline{AC}$ 、 $\overline{BP}-\overline{DP}=\overline{BD}$

例題 7.3-30：　兩圓的兩內公切線等長。

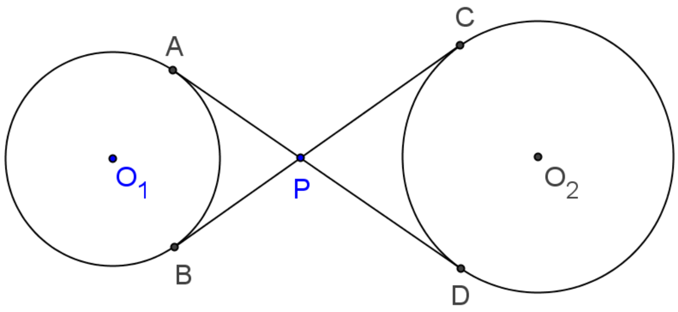


圖 7.3-38

已知：如圖 7.3-38，$\overline{AD}$、$\overline{BC}$為圓 O_1 與圓 O_2 的兩內公切線，且$\overline{AD}$與$\overline{BC}$相交於 P 點。

求證：$\overline{AD}=\overline{BC}$

想法：利用圓外一點到圓的兩切線等長

證明：

敘述	理由
(1) $\overline{PA}=\overline{PB}$	已知$\overline{AD}$、$\overline{BC}$為圓 O_1 的兩切線，且$\overline{AD}$與$\overline{BC}$相交於 P 點 & 圓外一點到圓的兩切線等長
(2) $\overline{PD}=\overline{PC}$	已知$\overline{AD}$、$\overline{BC}$為圓 O_2 的兩切線，且$\overline{AD}$與$\overline{BC}$相交於 P 點 & 圓外一點到圓的兩切線等長
(3) $\overline{PA}+\overline{PD}=\overline{PB}+\overline{PC}$	由(1) & (2) 等量加法公理
(4) 所以$\overline{AD}=\overline{BC}$	由(3) & $\overline{PA}+\overline{PD}=\overline{AD}$ 、 $\overline{PB}+\overline{PC}=\overline{BC}$

定理 7.3-4 切線與弦交角定理

圓的切線與過切點的弦所成的角(弦切角)的度數，等於這弦與切線間的弧度數的一半。

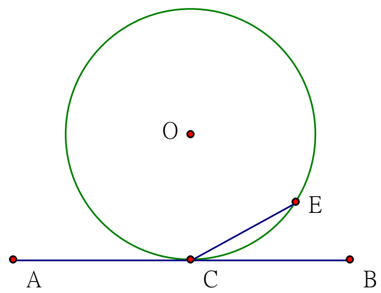


圖 7.3-39

已知：如圖 7.3-39，$\overline{AB}$與圓 O 相切於 C 點，$\overline{CE}$為此圓的一弦

求證： $\angle BCE = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CE}$

想法：(1) 利用圓周角的度數等於所對弧的一半

(2) $\angle BCE = \angle D$

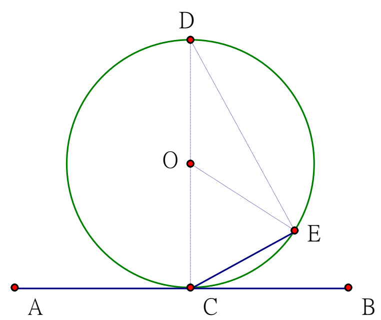


圖 7.3-39(a)

證明：

敘述	理由
(1) 過 C 點作直徑$\overline{CD}$，連結 O 點與 E 點及 D 點與 E 點，如圖 7.3-39(a)	過兩點可作一直線
(2) $\overline{AB} \perp \overline{CD}$，$\angle BCD=90°$	已知$\overline{AB}$與圓 O 相切於 C 點 & 切線定理
(3) $\angle BCE + \angle ECD = \angle BCD = 90°$	全量等於分量和 & (2) $\angle BCD=90°$
(4) $\angle CED = 90°$	由(1) $\overline{CD}$為圓 O 直徑 & 直徑所對的圓周角為直角
(5) $\triangle DCE$ 為直角三角形	由(4) $\angle CED=90°$

(6) ∠ECD＋∠D＋∠CED＝180°	三角形內角和為 180°
(7) ∠ECD＋∠D＝180°－∠CED ＝180°－90°＝90°	由(6) 等量減法公理 & (4) ∠CED＝90° 已證
(8) ∠BCE＋∠ECD＝∠ECD＋∠D	由(3) & (7) 遞移律
(9) ∠BCE＝∠D	由(8) 等式兩邊同減∠ECD
(10) $\angle D=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CE}$	圓周角的度數等於所對弧的一半
(11) $\angle BCE=\angle D=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CE}$	由(9) & (10) 遞移律

Q. E. D.

例題 7.3-31：

如圖 7.3-40，ABCDEF 為圓內接正六邊形，且$\overline{PQ}$切圓 O 於 A 點，則∠PAB＝？

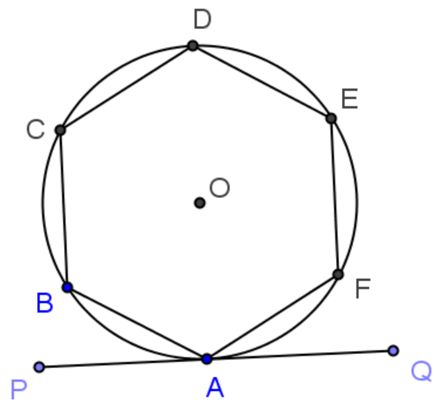


圖 7.3-40

想法：(1) 利用正六邊形六個頂點將圓周六等分 & 圓周為 360°，可以得知$\overset{\frown}{AB}$度數；

(2) 利用$\overset{\frown}{AB}$度數 & 弦切角等於所對弧度的一半，即可得∠PAB 之度數

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{AB}$＝360°÷6＝60°	已知 ABCDEF 為圓內接正六邊形，六個頂點將圓周六等分 & 圓周為 360°
(2) $\angle PAB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}=\frac{1}{2}\times60°$ ＝30°	弦切角的度數等於這弦與切線間的弧度數的一半 & (1) $\overset{\frown}{AB}$＝60°

例題 7.3-32：

如圖 7.3-41，$\overline{AD}$切圓於 C 點。若 $\overset{\frown}{EB}=160°$，$\angle B=25°$，

(1) 求$\angle$ACE 的度數。 (2) 求$\angle$BCD 的度數。

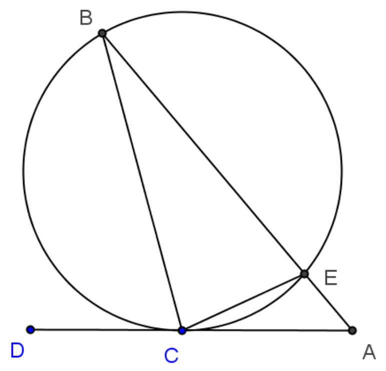


圖 7.3-41

想法：(1) 利用已知$\angle B=25°$ & 弧度為所對圓周角的 2 倍，可得$\overset{\frown}{CE}$度數；

(2) 利用$\overset{\frown}{CE}$度數 & 弦切角等於所對弧度的一半，可得$\angle$ACE 之度數；

(3) 利用已知$\overset{\frown}{EB}=160°$、$\overset{\frown}{CE}$度數 & 圓周為 360°，可得$\overset{\frown}{BC}$度數；

(4) 利用$\overset{\frown}{BC}$度數 & 弦切角等於所對弧度的一半，可得$\angle$BCD 之度數

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{CE}=2\angle B=2\times25°=50°$	弧度為所對圓周角的 2 倍 & 已知$\angle B=25°$
(2) $\angle ACE=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CE}$	弦切角的度數等於這弦與切線間的弧度數的一半
(3) $\angle ACE=\frac{1}{2}\times50°=25°$	將(1) $\overset{\frown}{CE}=50°$代入(2)式得
(4) $\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CE}+\overset{\frown}{EB}=360°$	如圖 7.3-41 所示，$\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CE}+\overset{\frown}{EB}=$圓周
(5) $\overset{\frown}{BC}+50°+160°=360°$	將(1) $\overset{\frown}{CE}=50°$ & 已知$\overset{\frown}{EB}=160°$ 代入(4)式得

(6) $\overset{\frown}{BC}=360°-50°-160°=150°$	由(5) 等量減法公理
(7) $\angle BCD=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$	弦切角的度數等於這弦與切線間的弧度數的一半
(8) $\angle BCD=\frac{1}{2}\times150°=75°$	將(6) $\overset{\frown}{BC}=150°$ 代入(7)式得

例題 7.3-33：

如圖 7.3-42，$\overline{AC}$是圓 O 的弦，$\overline{BE}$切圓 O 於 A 點。若$\angle CAB=38°$，則：
(1) $\angle COA=$_______ 度。　　　　(2) $\angle CDA=$_______度。

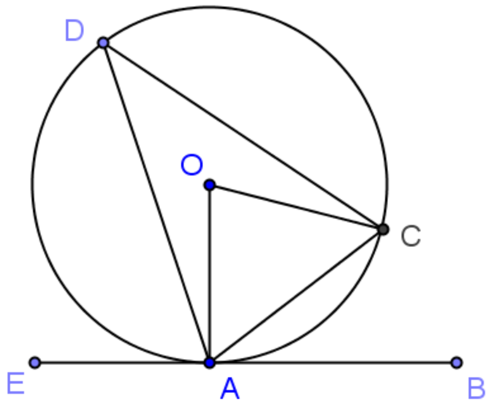


圖 7.3-42

想法：(1) 利用已知$\angle CAB=38°$ & 弦與切線所夾的弧度等於弦切角的 2 倍，可得知$\overset{\frown}{AC}$度數；

(2) 利用$\overset{\frown}{AC}$度數 & 圓心角等於所對的弧度，可得知$\angle COA$之度數；

(3) 利用$\overset{\frown}{AC}$度數 & 圓周角等於所對弧度的一半，可得知$\angle CDA$之度數

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{AC}=2\angle CAB=2\times38°=76°$	已知$\angle CAB=38°$ & 弦與切線所夾的弧度等於弦切角的 2 倍
(2) $\angle COA=\overset{\frown}{AC}=76°$	圓心角等於所對的弧度 & (1) $\overset{\frown}{AC}=76°$
(3) $\angle CDA=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}=\frac{1}{2}\times76°=38°$	圓周角等於所對弧度的一半 & (1) $\overset{\frown}{AC}=76°$

例題 7.3-34：

如圖 7.3-43，圓 P 與圓 Q 外切於 A 點，直線 L 為兩圓的外公切線，與圓 P、圓 Q 的切點分別為 B 點、C 點。已知$\overset{\frown}{AB}=70°$，$\overset{\frown}{AC}=110°$，則 $\angle BAC=$_____度。

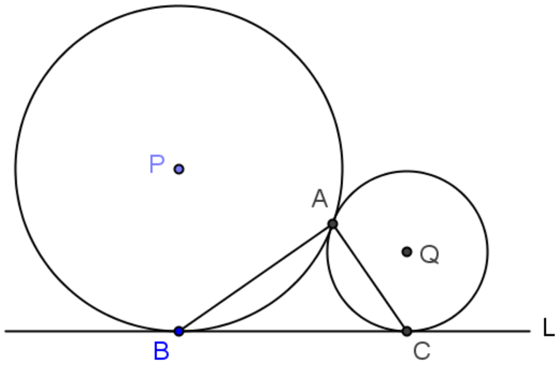


圖 7.3-43

想法：(1) 利用已知$\overset{\frown}{AB}=70°$ & 弦切角等於所對弧度的一半，可得知 $\angle ABC$ 之度數；

(2) 利用已知$\overset{\frown}{AC}=110°$ & 弦切角等於所對弧度的一半，可得知 $\angle ACB$ 之度數；

(3) 利用 $\angle ABC$、$\angle ACB$ & $\triangle ABC$ 內角和 180°，可得知$\angle BAC$ 之度數

解：

敘述	理由
(1) $\angle ABC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}=\frac{1}{2}\times 70°=35°$	弦切角等於所對弧度之一半 & 已知$\overset{\frown}{AB}=70°$
(2) $\angle ACB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}=\frac{1}{2}\times 110°=55°$	弦切角等於所對弧度之一半 & 已知$\overset{\frown}{AC}=110°$
(3) $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC+\angle ACB+\angle BAC=180°$	如圖 7.3-43 所示，三角形內角和 180°
(4) $35°+55°+\angle BAC=180°$	將(1)$\angle ABC=35°$ & (2) $\angle ACB=55°$ 代入(3)式得
(5) $\angle BAC=180°-35°-55°=90°$	由(4) 等量減法公理

例題 7.3-35：

如圖 7.3-44，$\overline{AC}$與圓 O 相切於 B 點，且$\overline{AE}$與圓 O 相交於 D、E 兩點。已知$\overset{\frown}{BD}=86°$，$\overset{\frown}{BE}=140°$，則∠A＝______度。

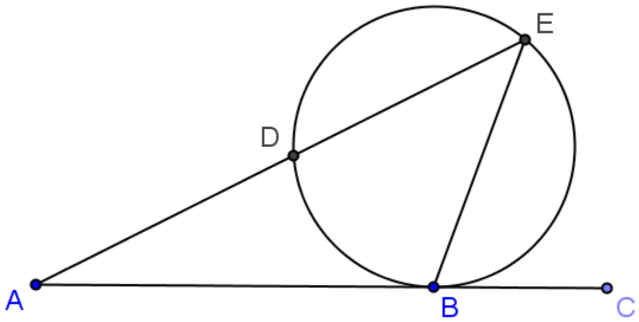


圖 7.3-44

想法： (1) 利用已知$\overset{\frown}{BD}=86°$ & 圓周角等於所對弧度的一半，可得∠E 之度數；

(2) 利用已知$\overset{\frown}{BE}=140°$ & 弦切角等於所對弧度的一半，可得∠EBC 之度數；

(3) 利用∠E、∠EBC & 三角形外角定理，可得∠A 之度數

解：

敘述	理由
(1) $\angle E=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}=\frac{1}{2}\times 86°=43°$	圓周角等於所對弧度之一半 & 已知$\overset{\frown}{BD}=86°$
(2) $\angle EBC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BE}=\frac{1}{2}\times 140°=70°$	弦切角等於所對弧度之一半 & 已知$\overset{\frown}{BE}=140°$
(3) △ABE 中，∠EBC 為∠EBA 的外角 ∠EBC＝∠A＋∠E	如圖 7.3-44 所示，外角等於內對角的和
(4) 70°＝∠A＋43°	將(2) ∠EBC＝70°、(1) ∠E＝43° 代入(3)式得
(5) ∠A＝70°－43°＝27°	由(4) 等量減法公理

例題 7.3-36：

如圖 7.3-45，A、B、C 三點皆在圓周上，過 B 點的切線與 $\overline{AC}$ 的延長線交於 D。若∠BAC＝40°，∠D＝35°，求 $\overset{\frown}{AC}$ 的度數。

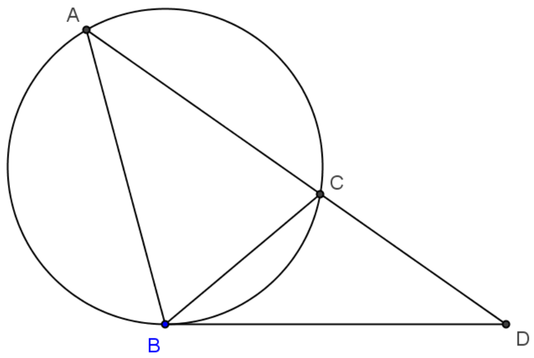


圖 7.3-45

想法：(1) 利用已知∠BAC＝40° & 弧度為所對圓周角的 2 倍，可得 $\overset{\frown}{BC}$ 度數；

(2) 利用 $\overset{\frown}{BC}$ 度數 & 弦切角等於所對弧度的一半，可得∠CBD 之度數；

(3) 利用已知∠BAC＝40°、∠D＝35° & 三角形 ABD 內角和 180°，可得∠ABD 之度數；

(4) 利用∠ABD、∠CBD & 全量等於分量和，可得∠ABC 之度數；

(5) 利用∠ABC & 弧度為所對圓周角的 2 倍，可得 $\overset{\frown}{AC}$ 度數

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{BC}$＝2∠BAC＝2×40°＝80°	弧度為所對圓周角的 2 倍 & 已知∠BAC＝40°
(2) ∠CBD＝$\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$＝$\frac{1}{2}$×80°＝40°	弦切角的度數等於這弦與切線間的弧度數的一半 & (1) $\overset{\frown}{BC}$＝80°
(3) ∠BAC＋∠D＋∠ABD＝180°	三角形 ABD 內角和 180°
(4) 40°＋35°＋∠ABD＝180°	將已知∠BAC＝40°、∠D＝35°代入(3)式得
(5) ∠ABD＝180°－40°－35°＝105°	由(4) 等量減法公理
(6) ∠ABD＝∠ABC＋∠CBD	全量等於分量之和

(7) $105° = \angle ABC + 40°$	將(5) $\angle ABD = 105°$ ＆ (2) $\angle CBD = 40°$ 代入(6)式得
(8) $\angle ABC = 105° - 40° = 65°$	由(7) 等量減法公理
(9) $\overset{\frown}{AC} = 2\angle ABC = 2 \times 65° = 130°$	弧度為所對圓周角的 2 倍 ＆ (8) $\angle ABC = 65°$

例題 7.3-37：

如圖 7.3-46，A、B、C 在同一圓上，$\overline{DE}$與圓 O 相切於 B 點。若$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overset{\frown}{BC}=100°$，求∠ABD 的度數。

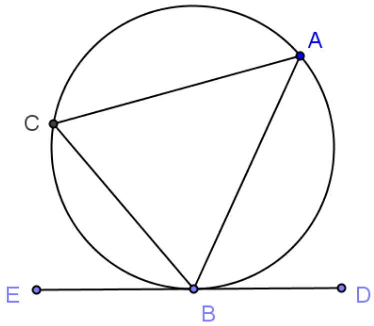


圖 7.3-46

想法：(1) 利用已知$\overset{\frown}{BC}=100°$ & 圓周角為所對弧度的一半，可得∠A 之度數；

(2) 利用已知$\overline{AB}=\overline{AC}$ & 兩腰等長為等腰三角形 & 等腰三角形兩底角相等，可得∠C＝∠ABC；

(3) 利用∠A、∠C＝∠ABC & 三角形 ABC 內角和 180°，可得∠C 與∠ABC 之度數；

(4) 利用∠C & 弧的度數等於所對圓周角的 2 倍，可得$\overset{\frown}{AB}$度數；

(5) 利用$\overset{\frown}{AB}$ & 弦切角為所對弧度的一半，可得∠ABD 之度數

解：

敘述	理由
(1) $\angle A=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}=\frac{1}{2}\times 100°=50°$	弦切角的度數等於這弦與切線間的弧度數的一半 & 已知$\overset{\frown}{BC}=100°$
(2) 三角形 ABC 為等腰三角形	已知$\overline{AB}=\overline{AC}$ & 兩腰等長為等腰三角形
(3) ∠ABC＝∠C	由(2) & 等腰三角形兩底角相等
(4) ∠A＋∠C＋∠ABC＝180°	三角形 ABC 內角和 180°
(5) 50°＋∠C＋∠C＝180°	將(1)∠A＝50° & (3) ∠ABC＝∠C 代入(4)式得
(6) ∠C＝(180°－50°)÷2＝65°	由(5)式解一元一次方程式
(7) $\overset{\frown}{AB}=2\angle C=2\times 65°=130°$	弧度為所對圓周角的 2 倍 &(6) ∠C＝65°
(8) $\angle ABD=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}=\frac{1}{2}\times 130°=65°$	弦切角的度數等於這弦與切線間的弧度數的一半 & (7) $\overset{\frown}{AB}=130°$

例題 7.3-38：

如圖 7.3-47，$\overline{DE}$、$\overline{DF}$分別切圓 O 於 A、B 兩點，$\overline{BC}$為圓 O 的直徑。
若∠D＝46°，則∠CAE＝______度。

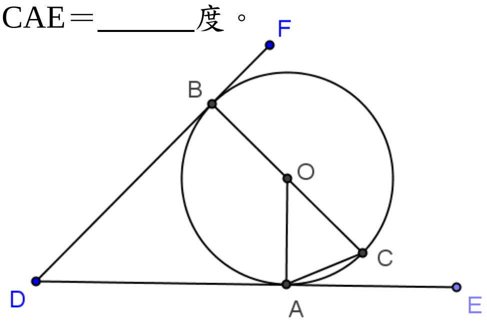


圖 7.3-47

想法：(1) 利用已知$\overline{DE}$、$\overline{DF}$分別切圓 O 於 A、B 兩點 ＆ 過切點的半徑與切線垂直，可得知∠OAD＝∠OBD＝90°；

(2) 利用四邊形 AOBD 內角和 360° ＆ ∠OAD＝∠OBD＝90° ＆ 已知∠D＝46°、可得知∠AOB 度數；

(3) 利用∠AOB ＆ $\overline{BC}$為圓 O 的直徑，可得知∠AOC 之度數；

(4) 利用∠AOC ＆ 弧的度數等於所對圓心角的度數，可得知$\overset{\frown}{AC}$度數；

(5) 利用$\overset{\frown}{AC}$ ＆ 弦切角等於所對弧度的一半，可得知∠CAE 之度數

解：

敘述	理由
(1) ∠OAD＝∠OBD＝90°	已知$\overline{DE}$、$\overline{DF}$分別切圓 O 於 A、B 兩點 ＆ 過切點的半徑與切線
(2) ∠OAD＋∠OBD＋∠D＋∠AOB＝360°	四邊形內角和 360°
(3) 90°＋90°＋46°＋∠AOB＝360°	將(1) ∠OAD＝∠OBD＝90° ＆ 已知∠D＝46° 代入(2)式得
(4) ∠AOB＝360°－90°－90°－46°＝134°	由(3) 等量減法公理
(5) ∠AOB＋∠AOC＝180°	已知$\overline{BC}$為圓 O 的直徑
(6) 134°＋∠AOC＝180°	將(4) ∠AOB＝134° 代入(5)式得
(7) ∠AOC＝180°－134°＝46°	由(6) 等量減法公理
(8) $\overset{\frown}{AC}$＝∠AOC＝46°	弧的度數等於所對圓心角的度數 ＆ (7) ∠AOC＝46°
(9) ∠CAE＝$\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$＝$\frac{1}{2}$×46°＝23°	弦切角等於所對弧度的一半 ＆ (8) $\overset{\frown}{AC}$＝46°

在證明下一個定理 7.3-5 之前，我們先練習以下的這一個例題 7.3-39。

例題 7.3-39：

如圖 7.3-48，$\overset{\frown}{AE}=140°$，$\overset{\frown}{BD}=50°$，求∠C 的度數。

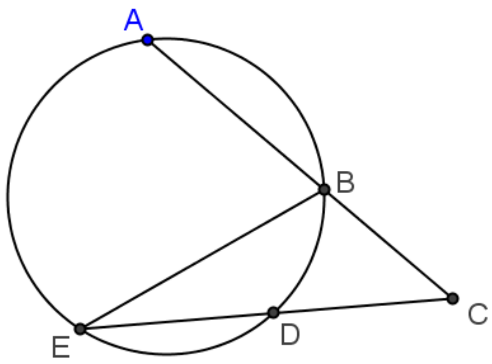


圖 7.3-48

想法：(1) 利用已知$\overset{\frown}{AE}=140°$ ＆ 圓周角等於所對弧度的一半，可得∠ABE 之度數；

(2) 利用已知$\overset{\frown}{BD}=50°$ ＆ 圓周角等於所對弧度的一半，可得∠E 之度數；

(3) 利用∠ABE、∠E ＆ 三角形外角定理，可得知∠C 之度數

解：

敘述	理由
(1) $\angle ABE=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AE}=\frac{1}{2}\times 140°=70°$	圓周角的度數等於所對弧的一半 ＆ 已知$\overset{\frown}{AE}=140°$
(2) $\angle E=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}=\frac{1}{2}\times 50°=25°$	圓周角的度數等於所對弧的一半 ＆ 已知$\overset{\frown}{BD}=50°$
(3) △EBC 中，$\angle ABE=\angle E+\angle C$	三角形的外角等於內對角的和
(4) $\angle C=\angle ABE-\angle E$	由(3) 等量減法公理
(5) $\angle C=70°-25°=45°$	將(1)式 ＆ (2)式代入(4)式得

定理 7.3-5 割線與切線交角定理(1)： 圓外角定理 1

兩割線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半。

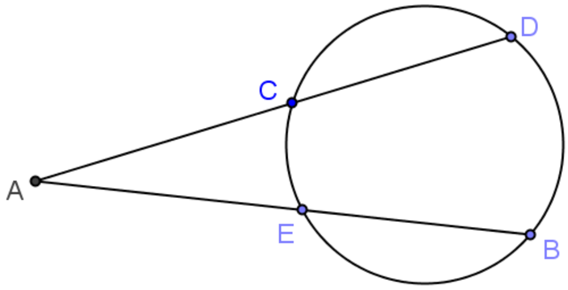


圖 7.3-49

已知：如圖 7.3-49，圓 O 的兩割線$\overline{AB}$及$\overline{AD}$在圓外相交於 A 點

求證：$\angle A = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{EC})$

想法：(1) 應用三角形的外角等於內對角的和

(2) 圓周角的度數等於所對弧的一半

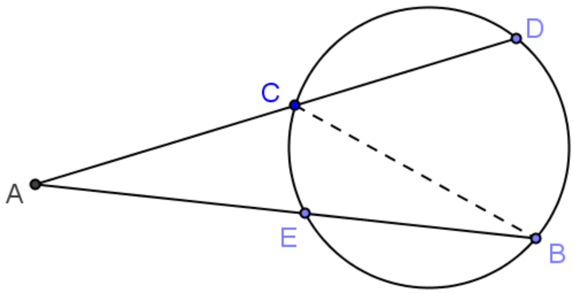


圖 7.3-49(a)

證明：

敘述	理由
(1) 連接 B、C 兩點，如圖 7.3-49(a)	過兩點可作一直線
(2) △ABC 中，$\angle DCB = \angle CBA + \angle A$	三角形的外角等於內對角的和
(3) $\angle A = \angle DCB - \angle CBA$	由(2) 等量減法公理
(4) $\angle DCB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$	圓周角的度數等於所對弧的一半
(5) $\angle CBA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{EC}$	圓周角的度數等於所對弧的一半
(6) $\angle A = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{EC})$	將(4)式 & (5)式代入(3)式得

Q. E. D.

接著，我們將定理 7.3-5：割線與切線交角定理(1)：圓外角定理 1，應用在例題 7.3-40~例題 7.3-46 之中。

例題 7.3-40：

如圖 7.3-50，兩弦$\overline{AD}$與$\overline{CB}$的延長線相交於圓外一點 P。已知$\overset{\frown}{AC}=110°$，$\overset{\frown}{BD}=38°$，則$\angle P=$______度。

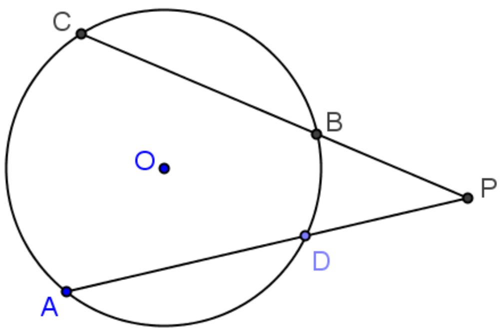


圖 7.3-50

想法：兩割線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半

解：

敘述	理由
(1) $\angle P$ 為圓外角	已知兩弦$\overline{AD}$與$\overline{CB}$的延長線相交於圓外一點 P
(2) $\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD})$	由(1) & 兩割線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半
(3) $\angle P=\frac{1}{2}(110°-38°)=36°$	將已知$\overset{\frown}{AC}=110°$、$\overset{\frown}{BD}=38°$ 代入(2)式得

例題 7.3-41：

如圖 7.3-51，兩弦$\overline{AB}$與$\overline{CD}$的延長線相交於圓外一點 P。已知$\overparen{AC}=100°$，$\angle P=24°$，則$\overparen{BD}=$______度。

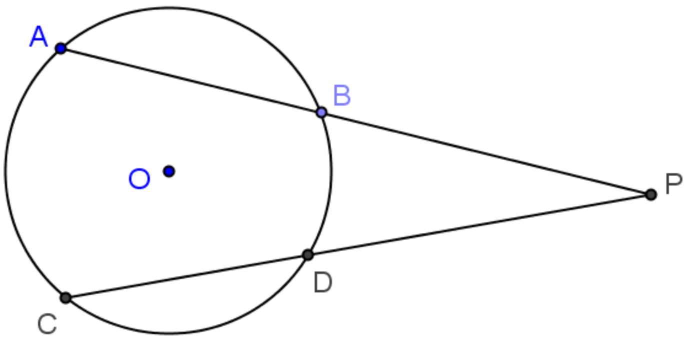


圖 7.3-51

想法：兩割線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半

解：

敘述	理由
(1) $\angle P$ 為圓外角	已知兩弦$\overline{AB}$與$\overline{CD}$的延長線相交於圓外一點 P
(2) $\angle P=\dfrac{1}{2}(\overparen{AC}-\overparen{BD})$	由(1) & 兩割線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半
(3) $24°=\dfrac{1}{2}(100°-\overparen{BD})$	將已知$\angle P=24°$、$\overparen{AC}=100°$ 代入(2)式得
(4) $\overparen{BD}=100°-2\times24°=52°$	由(3)式解一元一次方程式

例題 7.3-42：

如圖 7.3-52，$\overline{AB}$是圓 O 的直徑，$\overline{AC}=\overline{BC}$。若∠A＝66°，求 $\overset{\frown}{DE}$ 的度數。

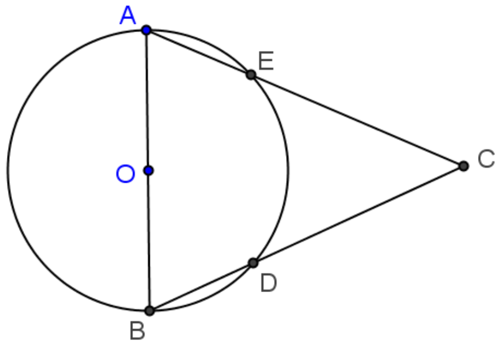


圖 7.3-52

想法：兩割線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半

解：

敘述	理由
(1) △ABC 為等腰三角形，∠A 為底角、∠C 為頂角	已知$\overline{AC}=\overline{BC}$ & 兩腰等長為等腰三角形
(2) ∠C＝180°－2∠A ＝180°－2×66°＝48°	由(1) & 等腰三角形頂角與底角的關係 & 已知∠A＝66°
(3) $\overset{\frown}{AB}$＝360°÷2＝180°	已知$\overline{AB}$是圓 O 的直徑 & 直徑平分圓周
(4) ∠C 為圓外角	如圖 7.3-52 所示，$\overline{AC}$與$\overline{BC}$為圓 O 兩割線
(5) $\angle C=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{DE})$	由(4) & 兩割線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半
(6) $48°=\frac{1}{2}(180°-\overset{\frown}{DE})$	將(2) ∠C＝48° & (3) $\overset{\frown}{AB}$＝180° 代入(5)式得
(7) $\overset{\frown}{DE}$＝180°－2×48°＝84°	由(6)式解一元一次方程式

例題 7.3-43：

如圖 7.3-53，兩弦$\overline{AD}$與$\overline{BC}$相交於 Q 點，兩弦$\overline{AB}$與$\overline{CD}$的延長線相交於圓外一點 P。已知$\overset{\frown}{AC}=100°$，$\overset{\frown}{BD}=52°$，則：

(1) $\angle P=$______度。　(2) $\angle AQC=$______度。

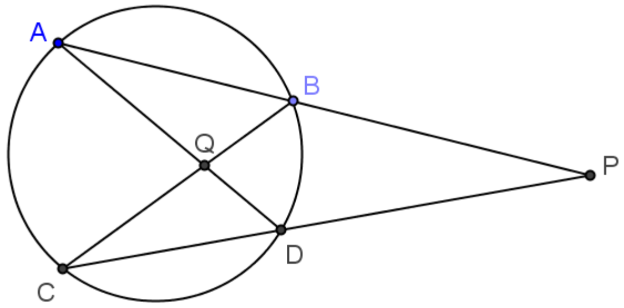


圖 7.3-53

想法：(1) 圓內角的度數，等於這角與它的對頂角所對兩弧度數和的一半

(2) 兩割線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半

解：

敘述	理由
(1) $\angle P$ 為圓外角	已知兩弦$\overline{AB}$與$\overline{CD}$的延長線相交於圓外一點 P
(2) $\angle P=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD})$	由(1) & 兩割線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半
(3) $\angle P=\dfrac{1}{2}(100°-52°)=24°$	將已知$\overset{\frown}{AC}=100°$、$\overset{\frown}{BD}=52°$代入(2)式得
(4) $\angle AQC$ 為圓內角	已知兩弦$\overline{AD}$與$\overline{BC}$相交於 Q 點
(5) $\angle AQC=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})$	由(4) & 圓內角的度數，等於這角與它的對頂角所對兩弧度數和的一半
(6) $\angle AQC=\dfrac{1}{2}(100°+52°)$ $=76°$	將已知$\overset{\frown}{AC}=100°$、$\overset{\frown}{BD}=52°$代入(5)式得

例題 7.3-44：

如圖 7.3-54，若 $\overset{\frown}{AC}=112°$，$\angle P=35°$，則：

(1) $\overset{\frown}{BD}=$______度。　　　(2) $\angle AQC=$______度。

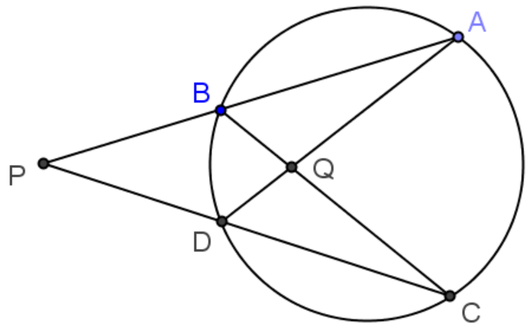


圖 7.3-54

想法：(1) 圓內角的度數，等於這角與它的對頂角所對兩弧度數和的一半

(2) 兩割線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半

解：

敘述	理由
(1) $\angle P$ 為圓外角	如圖 7.3-54，$\overline{AB}$與$\overline{CD}$的延長線相交於圓外一點 P
(2) $\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD})$	由(1) &兩割線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半
(3) $35°=\frac{1}{2}(112°-\overset{\frown}{BD})$	將已知$\angle P=35°$、$\overset{\frown}{AC}=112°$ 代入(2)式得
(4) $\overset{\frown}{BD}=112°-2\times35°=42°$	由(3)式解一元一次方程式
(5) $\angle AQC$ 為圓內角	如圖 7.3-54，兩弦$\overline{AD}$與$\overline{BC}$相交於 Q 點
(6) $\angle AQC=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})$	由(5) & 圓內角的度數，等於這角與它的對頂角所對兩弧度數和的一半
(7) $\angle AQC=\frac{1}{2}(112°+42°)$ $=77°$	將已知$\overset{\frown}{AC}=112°$ &(4) $\overset{\frown}{BD}=42°$代入(5)式得

例題 7.3-45：

如圖 7.3-55，$\overline{AB}$與$\overline{CD}$的延長線相交於 P 點，$\overline{AD}$與$\overline{BC}$相交於 M 點。

若 $\overset{\frown}{BD}=30°$，$\angle AMC=70°$，則：

(1) $\overset{\frown}{AC}=$______度。　　　(2) $\angle P=$______度。

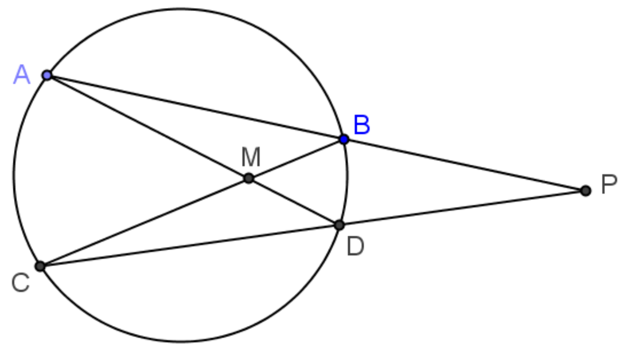


圖 7.3-55

想法：(1) 圓內角的度數，等於這角與它的對頂角所對兩弧度數和的一半

(2) 兩割線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半

解：

敘述	理由
(1) $\angle AMC$ 為圓內角	已知$\overline{AD}$與$\overline{BC}$相交於 M 點
(2) $\angle AMC=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})$	由(1) & 圓內角的度數，等於這角與它的對頂角所對兩弧度數和的一半
(3) $70°=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+30°)$	將已知$\angle AMC=70°$ & $\overset{\frown}{BD}=30°$ 代入(2)
(4) $\overset{\frown}{AC}=2\times70°-30°=110°$	由(3)式解一元一次方程式
(5) $\angle P$ 為圓外角	已知$\overline{AB}$與$\overline{CD}$的延長線相交於圓外一點 P
(6) $\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD})$	由(5) &兩割線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半
(7) $\angle P=\frac{1}{2}(110°-30°)=40°$	將(4) $\overset{\frown}{AC}=110°$ & 已知$\overset{\frown}{BD}=30°$ 代入(6)

例題 7.3-46：

如圖 7.3-56，若$\angle AFB=70°$，$\angle E=30°$，求 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{CD}$ 的度數。

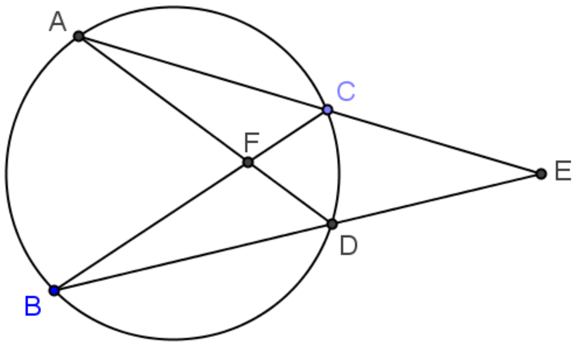


圖 7.3-56

想法：(1) 圓內角的度數，等於這角與它的對頂角所對兩弧度數和的一半

(2) 兩割線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半

解：

敘述	理由
(1) $\angle AFB$ 為圓內角	如圖 7.3-56，$\overline{AD}$與$\overline{BC}$相交於 F 點
(2) $\angle AFB=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD})$	由(1) & 圓內角的度數，等於這角與它的對頂角所對兩弧度數和的一半
(3) $70°=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD})$	將已知$\angle AFB=70°$ 代入(2)式得
(4) $\angle E$ 為圓外角	如圖 7.3-56，$\overline{AC}$與$\overline{BD}$的延長線相交於圓外一點 E
(5) $\angle E=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CD})$	由(4) &兩割線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半
(6) $30°=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CD})$	將已知$\angle E=30°$ 代入(5)式得
(7) 所以$\overset{\frown}{AB}=100°$ & $\overset{\frown}{CD}=40°$	由(3) & (6) 解二元一次聯立方程式得

定理 7.3-6 割線與切線交角定理(2)：圓外角定理 2

兩切線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半。

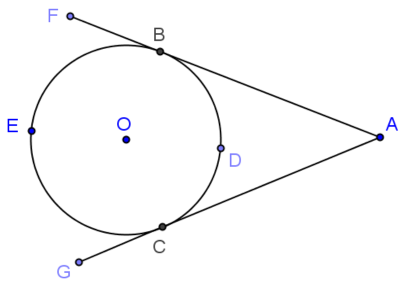


圖 7.3-57

已知：如圖 7.3-57，圓 O 的兩切線$\overline{AF}$及$\overline{AG}$在圓外相交於 A 點

求證：$\angle A=\frac{1}{2}(\widehat{BEC}-\widehat{BDC})$

想法：(1) 應用三角形的外角等於兩內對角的和

(2) 切線與弦交角定理： 圓的切線與過切點的弦所成的角的度數，等於這弦與切線間的弧度數的一半

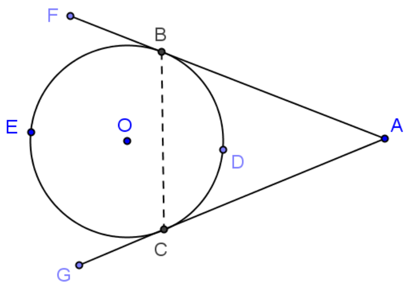


圖 7.3-57(a)

證明：

敘述	理由
(1) 連接 B、C 兩點，如圖 7.3-57(a)	過兩點可作一直線
(2) △ABC 中，$\angle GCB=\angle CBA+\angle A$	三角形的外角等於兩內對角的和
(3) $\angle A=\angle GCB-\angle CBA$	由(2) 等量減法公理
(4) $\angle GCB=\frac{1}{2}\widehat{BEC}$	切線與弦交角定理
(5) $\angle CBA=\frac{1}{2}\widehat{BDC}$	切線與弦交角定理
(6) 所以$\angle A=\frac{1}{2}(\widehat{BEC}-\widehat{BDC})$	將(4)式 & (5)式代入(3)式得

Q. E. D.

例題 7.3-47：

如圖 7.3-58，P 為圓外一點，$\overline{PA}$、$\overline{PB}$與圓 O 相切於 A、B 兩點。
若$\overset{\frown}{ACB}$＝140°，求∠P 的度數。

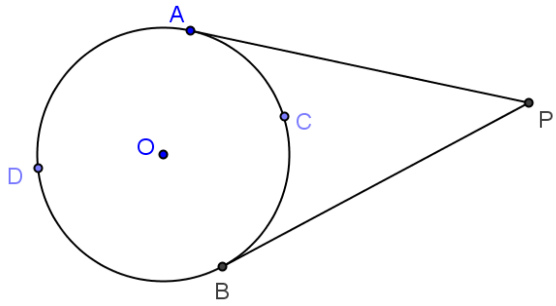


圖 7.3-58

想法：(1) 圓周為 360°

(2) 兩切線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{ADB}+\overset{\frown}{ACB}=360°$	如圖 7.3-58 所示，$\overset{\frown}{ADB}+\overset{\frown}{ACB}$為圓周
(2) $\overset{\frown}{ADB}=360°-\overset{\frown}{ACB}$ $=360°-140°=220°$	由(1) 等量減法公理 & 已知$\overset{\frown}{ACB}=140°$
(3) ∠P 為圓外角	已知 P 為圓外一點，$\overline{PA}$、$\overline{PB}$與圓 O 相切於 A、B 兩點
(4) $\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{ADB}-\overset{\frown}{ACB})$	由(3) & 兩切線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半
(5) $\angle P=\frac{1}{2}(220°-140°)=40°$	將(2) $\overset{\frown}{ADB}=220°$ & 已知$\overset{\frown}{ACB}=140°$ 代入(4)式得

例題 7.3-48：

如圖 7.3-59，P 為圓外一點，$\overline{PA}$、$\overline{PB}$與圓 O 相切於 A、B 兩點，且 ∠PAB＝70°，則∠P＝____度。

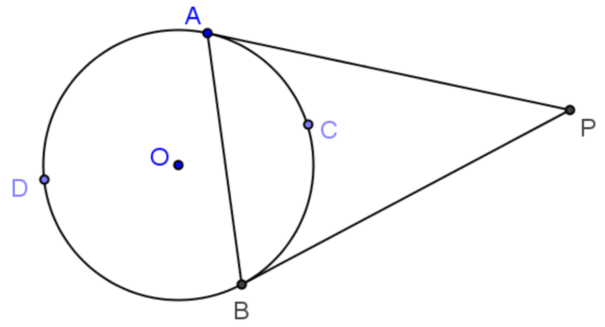


圖 7.3-59

想法：(1) 弧的度數為所對弦切角的 2 倍

(2) 圓周為 360°

(3) 兩切線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{ACB}$＝2∠PAB＝2x70°＝140°	弧的度數為所對弦切角的 2 倍 & 已知∠PAB＝70°
(2) $\overset{\frown}{ADB}$＋$\overset{\frown}{ACB}$＝360°	如圖 7.3-59 所示，$\overset{\frown}{ADB}$＋$\overset{\frown}{ACB}$為圓周
(3) $\overset{\frown}{ADB}$＝360°－$\overset{\frown}{ACB}$ ＝360°－140°＝220°	由(2) 等量減法公理 & (1) $\overset{\frown}{ACB}$＝140°
(4) ∠P 為圓外角	已知 P 為圓外一點，$\overline{PA}$、$\overline{PB}$與圓 O 相切於 A、B 兩點
(5) $\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{ADB}-\overset{\frown}{ACB})$	由(4) & 兩切線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半
(6) $\angle P=\frac{1}{2}(220°-140°)=40°$	將(3) $\overset{\frown}{ADB}$＝220° & (1) $\overset{\frown}{ACB}$＝140° 代入(5)式得

例題 7.3-49：

如圖 7.3-60，P 為圓外一點，$\overline{PA}$、$\overline{PB}$與圓 O 相切於 A、B 兩點。若∠P＝40°，則∠PAB＝______度。

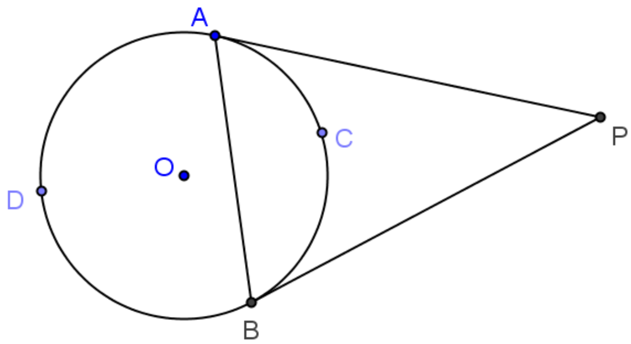


圖 7.3-60

想法：(1) 圓周為 360°

(2) 兩切線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半

(3) 弦切角等於所對弧度的一半

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{ADB}+\overset{\frown}{ACB}=360°$	如圖 7.3-60 所示，$\overset{\frown}{ADB}+\overset{\frown}{ACB}$為圓周
(2) $\overset{\frown}{ADB}=360°-\overset{\frown}{ACB}$	由(1) 等量減法公理
(3) ∠P 為圓外角	已知 P 為圓外一點，$\overline{PA}$、$\overline{PB}$與圓 O 相切於 A、B 兩點
(4) $\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{ADB}-\overset{\frown}{ACB})$	由(3) & 兩切線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半
(5) $40°=\frac{1}{2}(360°-\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{ACB})$	將已知∠P＝40° & (2) $\overset{\frown}{ADB}=360°-\overset{\frown}{ACB}$ 代入(4)式得
(6) $\overset{\frown}{ACB}=(360°-2\times40°)\div2=140°$	由(5)式解一元一次方程式
(7) $\angle PAB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{ACB}=\frac{1}{2}\times140°=70°$	弦切角等於所對弧度的一半 & (6) $\overset{\frown}{ACB}=140°$

定理 7.3-7 割線與切線交角定理(3)：圓外角定理 3

一割線與一切線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半。

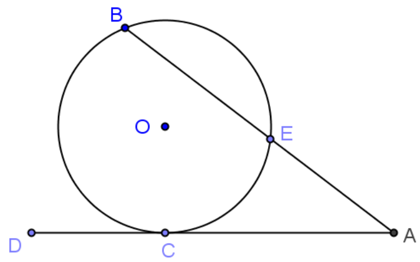


圖 7.3-61

已知：如圖 7.3-61，圓 O 的割線$\overline{BA}$及切線$\overline{DA}$在圓外相交於 A 點

求證：$\angle A=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{CE})$

想法：(1) 應用三角形的外角等於兩內對角的和

(2) 圓周角的度數等於所對弧的一半

(3) 切線與弦交角定理：圓的切線與過切點的弦所成的角的度數，等於這弦與切線間的弧度數的一半

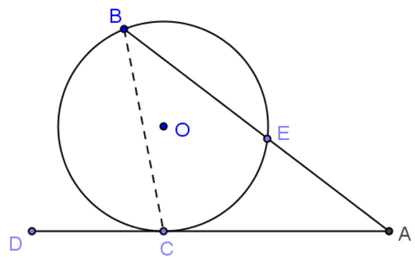


圖 7.3-61(a)

證明：

敘述	理由
(1) 連接 B、C 兩點，如圖 7.3-61(a)	過兩點可作一直線
(2) △ABC 中，$\angle DCB=\angle CBA+\angle A$	三角形的外角等於兩內對角的和
(3) $\angle A=\angle DCB-\angle CBA$	由(2) 等量減法公理
(4) $\angle DCB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$	切線與弦交角定理
(5) $\angle CBA=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CE}$	圓周角的度數等於所對弧的一半
(6) $\angle A=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{CE})$	將(4)式 & (5)式代入(3)式得

Q. E. D.

例題 7.3-50：

如圖 7.3-62，$\overline{PA}$切圓 O 於 A，$\overline{PB}$交圓 O 於 B、C 兩點。已知$\overset{\frown}{AB}=170°$，$\overset{\frown}{AC}=70°$，則∠P＝______度。

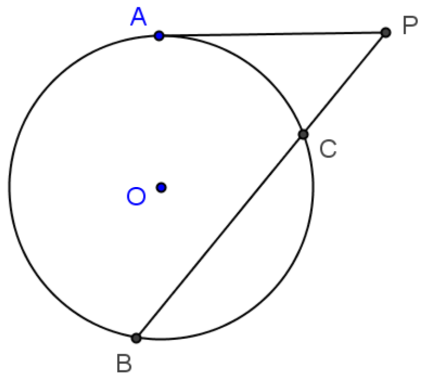


圖 7.3-62

想法：一割線與一切線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半

解：

敘述	理由
(1) ∠P 為圓外角	已知$\overline{PA}$切圓 O 於 A，$\overline{PB}$交圓 O 於 B、C 兩點
(2) $\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{AC})$ $=\frac{1}{2}(170°-70°)$ $=50°$	由(1) & 一割線與一切線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半 & 已知$\overset{\frown}{AB}=170°$、$\overset{\frown}{AC}=70°$

例題 7.3-51：

如圖 7.3-63，$\overline{PA}$切圓 O 於 A，$\overline{PB}$交圓 O 於 B、C 兩點。已知$\angle P=50°$，$\overset{\frown}{AC}=70°$，則$\overset{\frown}{AB}=$______度。

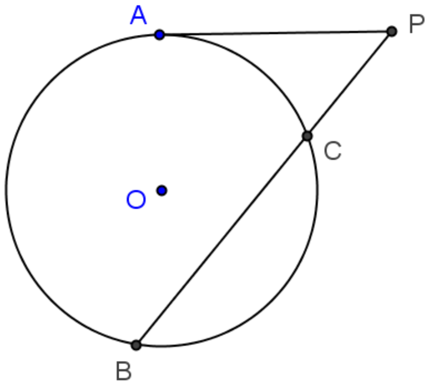


圖 7.3-63

想法：一割線與一切線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半

解：

敘述	理由
(1) $\angle P$ 為圓外角	已知$\overline{PA}$切圓 O 於 A，$\overline{PB}$交圓 O 於 B、C 兩點
(2) $\angle P=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{AC})$	由(1) & 一割線與一切線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半
(3) $50°=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}-70°)$	將已知$\angle P=50°$ & $\overset{\frown}{AC}=70°$ 代入(2)式得
(4) $\overset{\frown}{AB}=2\times50°+70°=170°$	由(3)式解一元一次方程式

例題 7.3-52：

如圖 7.3-64，已知$\overline{PA}$切圓 O 於 P 點，$\overline{CB}$為直徑，且$\overline{CB}$的延長線交$\overline{PA}$於 A 點。若∠A＝40°，則∠APB＝______度。

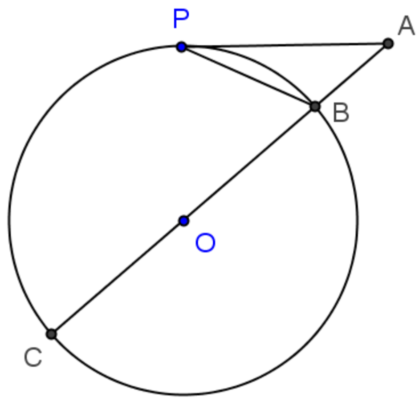


圖 7.3-64

想法：(1) 圓周為 360°

(2) 直徑將圓周平分

(3) 一割線與一切線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半

解：

敘述	理由
(1) ∠A 為圓外角	已知$\overline{PA}$切圓 O 於 P 點，$\overline{CB}$的延長線交$\overline{PA}$於 A 點
(2) $\angle A=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{PC}-\overset{\frown}{PB})$	由(1) & 一割線與一切線在圓外相交所成的角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半
(3) $\overset{\frown}{PC}+\overset{\frown}{PB}=\overset{\frown}{CPB}=180°$	已知$\overline{CB}$為直徑 & 直徑將圓周平分
(4) $\overset{\frown}{PC}=180°-\overset{\frown}{PB}$	由(3) 等量減法公理
(5) $40°=\frac{1}{2}(180°-\overset{\frown}{PB}-\overset{\frown}{PB})$	將已知∠A＝40° & (4) $\overset{\frown}{PC}=180°-\overset{\frown}{PB}$ 代入(2)式得
(6) $\overset{\frown}{PB}=(180°-2\times40°)\div2=50°$	由(5)式解一元一次方程式
(7) $\angle APB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{PB}=\frac{1}{2}\times50°$ $=25°$	弦切角為所對弧度的一半 & (6) $\overset{\frown}{PB}=50°$

定理 7.3-8 平行線截取等弧定理

平行線在圓周上截取兩相等的弧。

平行線在圓周上截取兩相等的弧的情形有如圖 7-3.26 三種：

(a) 兩平行線均為切線

(b) 兩平行線均為割線

(c) 兩平行線一為切線一為割線。

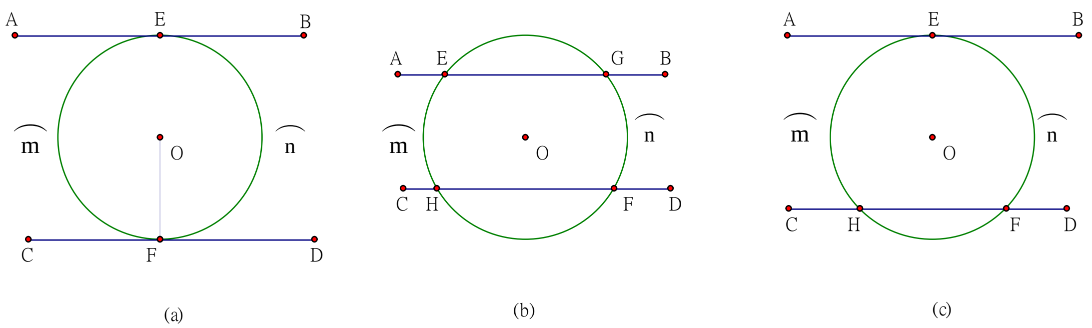


圖 7.3-65

已知：如圖 7.3-65，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$與圓 O 相交或相切且$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$。

求證：$\overset{\frown}{m} = \overset{\frown}{n}$

想法：(1) 平行線的內錯角相等。

(2) 圓周角的度數等於所對弧的一半。

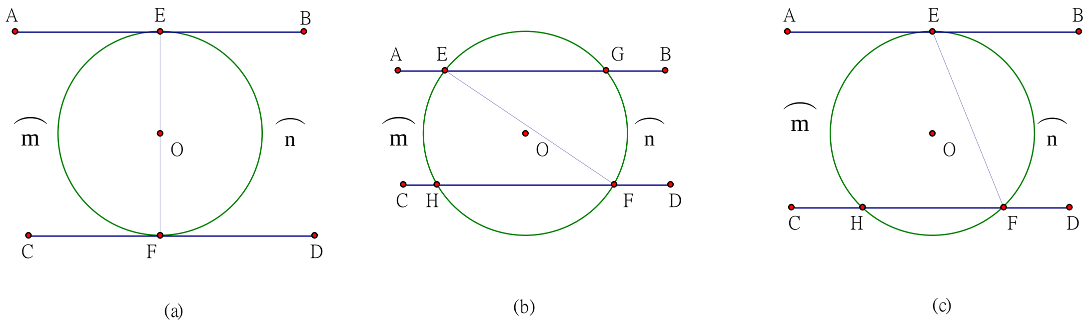


圖 7.3-66

證明：

敘述	理由
(1) 連接 E、F 兩點，如圖 7.3-66	過兩點可作一直線
(2) $\angle CFE = \angle BEF$	已知$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ & 平行線的內錯角相等
(3) $\angle CFE = \frac{1}{2}\overset{\frown}{m}$	圓周角(或弦切角)的度數等於所對弧的一半
(4) $\angle BEF = \frac{1}{2}\overset{\frown}{n}$	圓周角(或弦切角)的度數等於所對弧的一半
(5) $\frac{1}{2}\overset{\frown}{m} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{n}$	將(3)式 & (4)式代入(2)式得
(6) $\overset{\frown}{m} = \overset{\frown}{n}$	由(5) & 等式兩邊同乘以 2

Q. E. D.

例題 7.3-53：

如圖 7.3-67，已知 L $\parallel$ M，且$\overset{\frown}{AC} = 60°$，則$\overset{\frown}{BD} =$？

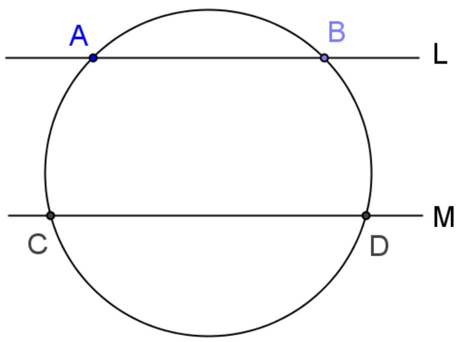


圖 7.3-67

想法：平行線在圓周上截取兩相等的弧

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AC} = 60°$	已知 L $\parallel$ M & 平行線在圓周上截取兩相等的弧 & 已知$\overset{\frown}{AC} = 60°$

習題 7.3

習題 7.3-1：

有一個圓 O，其半徑為 7 公分，判斷直線 L 與圓的相交情形及交點個數。

圓心 O 到直線 L 距離	10 公分	7 公分	3 公分
交點個數			

習題 7.3-2：　過直徑兩端的兩切線必平行。

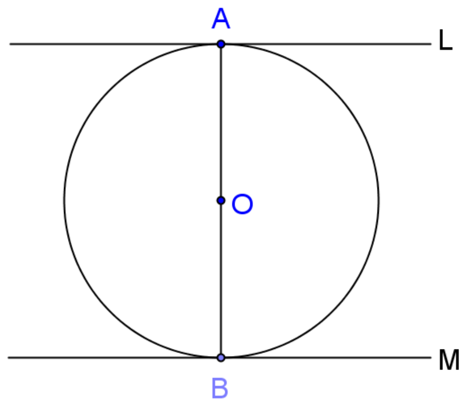


圖 7.3-68

已知： 如圖 7.3-68，$\overline{AB}$為圓 O 的直徑，L 與 M 為圓 O 的兩切線，且 L 切圓 O 於 A 點、M 切圓 O 於 B 點

求證： L ∥ M

習題 7.3-3：

如圖 7.3-69，P 點在圓 O 的外部，$\overline{PA}$與$\overline{PB}$分別與圓 O 相切於 A 與 B 兩點。若∠P＝35°，則∠AOB＝________度。

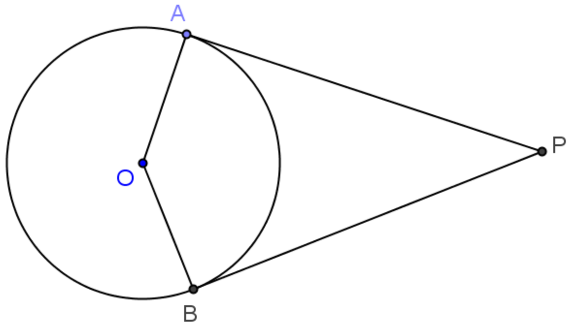


圖 7.3-69

習題 7.3-4：

如圖 7.3-70，$\overline{AC}$、$\overline{BC}$為圓 O 之切線， A、B 為切點。若$\overline{BC}$＝10 公分，則$\overline{AC}$＝？

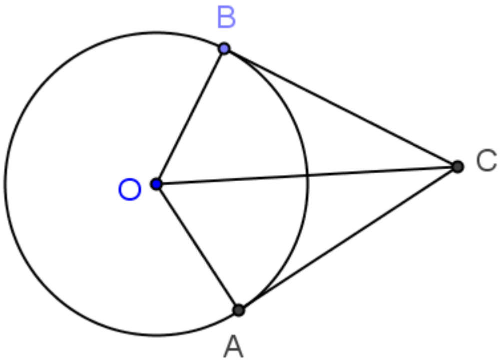


圖 7.3-70

習題 7.3-5：

如圖 7.3-71，已知 $\overline{AD}$、$\overline{AE}$、$\overline{BC}$ 分別與圓相切於 D、E、F 三點。
若 $\overline{AD}$＝20 公分，求$\overline{AB}$＋$\overline{BC}$＋$\overline{AC}$之值。

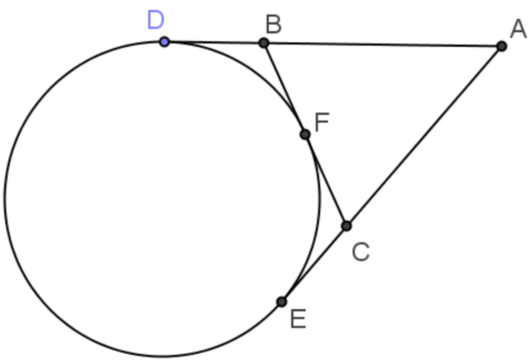


圖 7.3-71

習題 7.3-6：

圖 7.3-72 中，已知△ABC 為直角三角形，∠A＝90°，且 I 點為△ABC 的內心，若$\overline{AB}$＝5 公分、$\overline{AC}$＝12 公分、$\overline{BC}$＝13 公分，則△ABC 內切圓半徑為何？

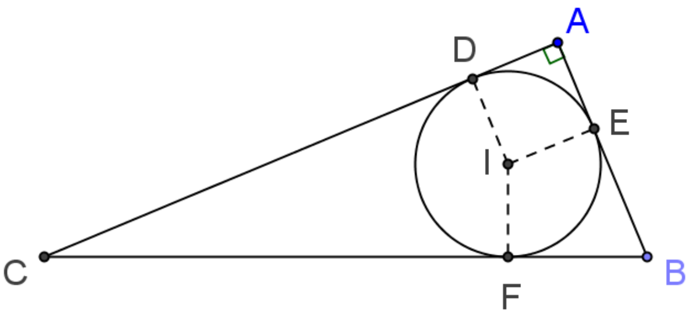


圖 7.3-72

習題 7.3-7：

已知圓 A 與圓 B 的連心線段長為 10 單位。若圓 A 與圓 B 的半徑分別如下，試問兩圓位置關係各為何？

圓 O_1 的半徑	2 單位	5 單位	4 單位	7 單位	15 單位
圓 O_2 的半徑	3 單位	7 單位	6 單位	21 單位	25 單位
兩圓位置關係					

習題 7.3-8：

已知大、小兩圓的半徑分別為 5r、3r，當兩圓內切時，其連心線段長為 6 公分，則當兩圓外切時，則連心線段長為_______公分。

習題 7.3-9：

設有 A、B、C 三圓，圓 A 與圓 B 外切，且兩圓同時和圓 C 內切。若圓 A 的半徑為 5 公分，圓 B 半徑為 4 公分，圓 C 半徑為 11 公分，則$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$之值為何？

習題 7.3-10

已知圓 O_1 與圓 O_2 的連心線段長為 10 公分，若圓 O_1 與圓 O_2 的半徑分別如下表，請完成下表。

圓 O_1 半徑	6 公分	5 公分	4 公分	5 公分	6 公分
圓 O_2 半徑	16 公分	3 公分	6 公分	8 公分	20 公分
兩圓位置關係					
公切線數					

習題 7.3-11： **兩圓外切，過切點的內公切線，必平分這兩圓的外公切線。**

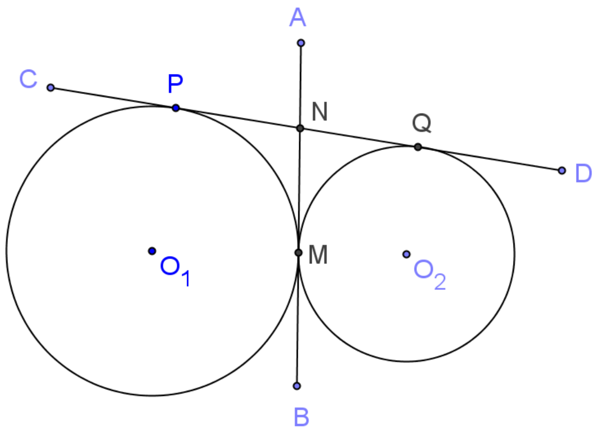


圖 7.3-73

已知：如圖 7.3-73，圓 O_1 與圓 O_2 兩圓外切於 M 點，$\overline{AB}$為兩圓的內公切線，$\overline{CD}$為圓 O_1 及圓 O_2 兩圓的外公切線，切點分別為點 P 與點 Q，$\overline{AB}$與$\overline{CD}$相交於點 N。

求證：$\overline{PN}=\overline{NQ}$

習題 7.3-12：

圖 7.3-74 中，$\overline{DE}$為圓的切線，A 為切點，C 為$\overset{\frown}{AB}$的中點，求證$\overline{CA}$為∠BAD 的角平分線。

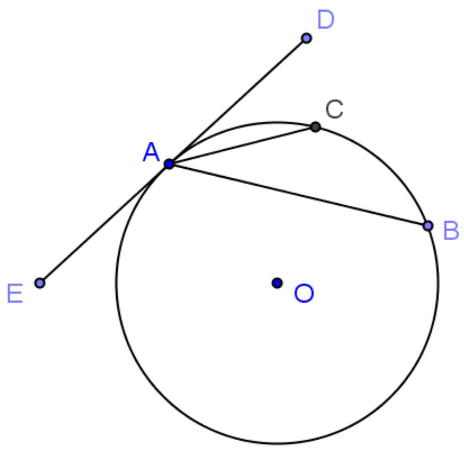


圖 7.3-74

習題 7.3-13：

如圖 7.3-75，ABCDE 為正五邊形，且 5 個頂點皆在圓周上，若$\overline{PQ}$切圓 O 於 A 點，則∠PAE＝？

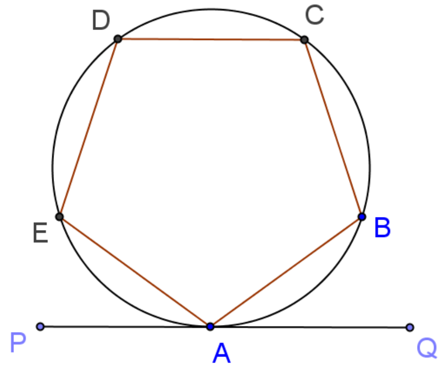


圖 7.3-75

習題 7.3-14：

如圖 7.3-76，$\overline{AD}$切圓於 C 點。若 $\overparen{EB}$＝150°，∠B＝30°，

(1) 求∠ACE 的度數。　　(2) 求∠BCD 的度數。

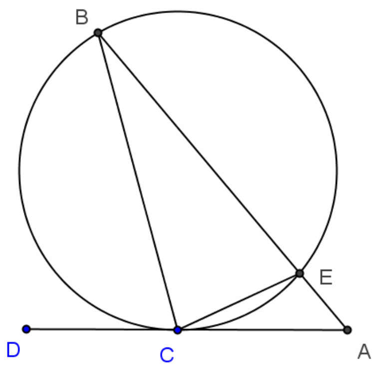


圖 7.3-76

習題 7.3-15：

如圖 7.3-77，$\overline{AC}$是圓 O 的弦，$\overline{BE}$切圓 O 於 A 點。若∠CAB＝40°，則：

(1) ∠COA＝________ 度。　　(2) ∠CDA＝________度。

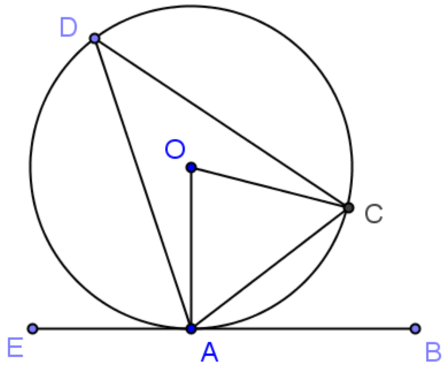


圖 7.3-77

習題 7.3-16：

如圖 7.3-78，圓 P 與圓 Q 外切於 A 點，直線 L 為兩圓的外公切線，與圓 P、圓 Q 的切點分別為 B 點、C 點。已知$\overset{\frown}{AB}$＝68°，$\overset{\frown}{AC}$＝112°，則∠BAC＝_____度。

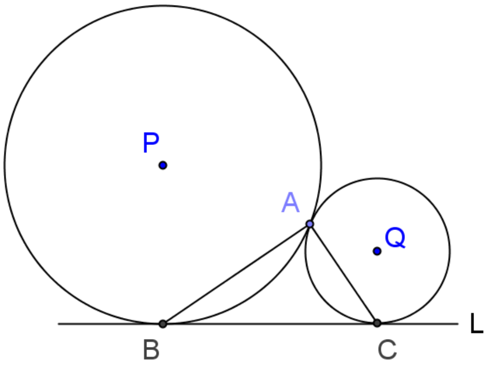


圖 7.3-78

習題 7.3-17：

如圖 7.3-79，$\overline{AC}$與圓 O 相切於 B 點，且$\overline{AE}$與圓 O 相交於 D、E 兩點。已知$\overset{\frown}{BD}$＝90°，$\overset{\frown}{BE}$＝140°，則∠A＝______度。

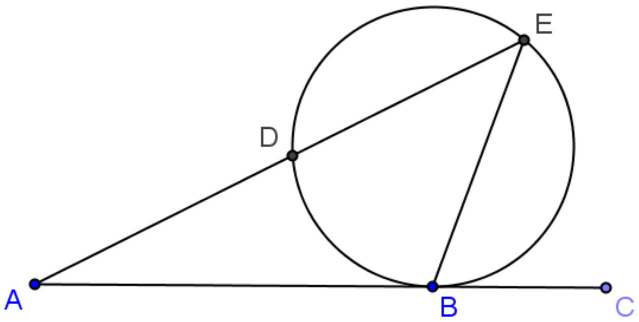


圖 7.3-79

習題 7.3-18：

如圖 7.3-80，兩弦$\overline{AD}$與$\overline{CB}$的延長線相交於圓外一點 P。已知$\overset{\frown}{AC}$＝110°，$\overset{\frown}{BD}$＝40°，則∠P＝______度。

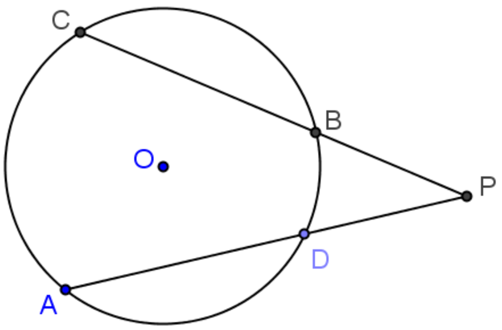


圖 7.3-80

習題 7.3-19：

如圖 7.3-81，兩弦$\overline{AB}$與$\overline{CD}$的延長線相交於圓外一點 P。已知$\overset{\frown}{AC}=105°$，$\angle P=25°$，則$\overset{\frown}{BD}=$______度。

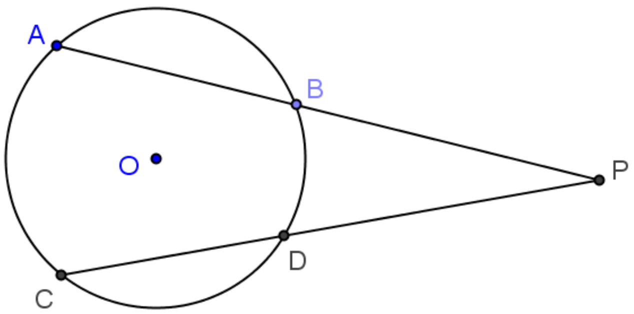


圖 7.3-81

習題 7.3-20：

如圖 7.3-82，兩弦$\overline{AD}$與$\overline{BC}$相交於 Q 點，兩弦$\overline{AB}$與$\overline{CD}$的延長線相交於圓外一點 P。已知$\overset{\frown}{AC}=102°$，$\overset{\frown}{BD}=50°$，則：

(1)$\angle P=$______度。　(2) $\angle AQC=$______度。

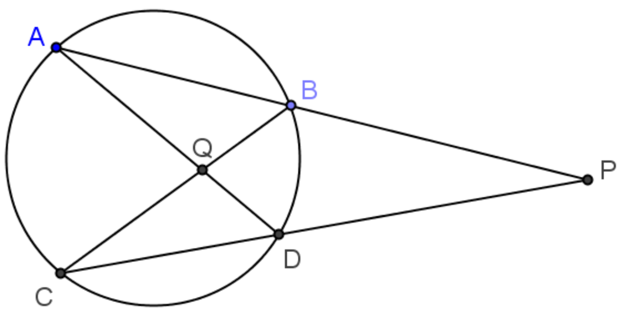


圖 7.3-82

習題 7.3-21：

如圖 7.3-83，若 $\overset{\frown}{AC}=110°$，$\angle P=33°$，則：

(1) $\overset{\frown}{BD}=$______度。　(2) $\angle AQC=$______度。

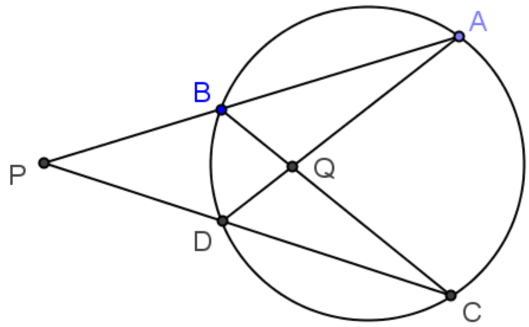


圖 7.3-83

習題 7.3-22：

如圖 7.3-84，$\overline{AB}$與$\overline{CD}$的延長線相交於 P 點，$\overline{AD}$與$\overline{BC}$相交於 M 點。若 $\overset{\frown}{BD}=25°$，$\angle AMC=65°$，則：

(1) $\overset{\frown}{AC}=$______度。　　　　(2) $\angle P=$______度。

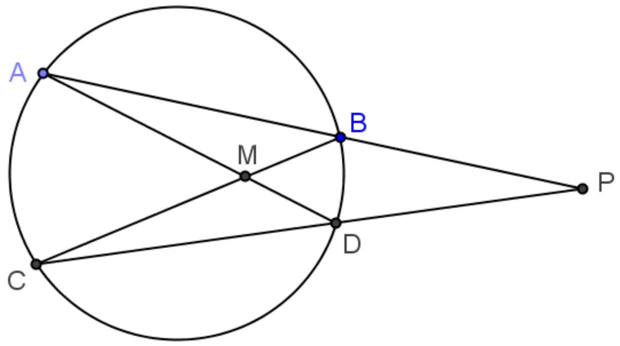


圖 7.3-84

習題 7.3-23：

如圖 7.3-85，若$\angle AFB=65°$，$\angle E=25°$，求 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{CD}$ 的度數。

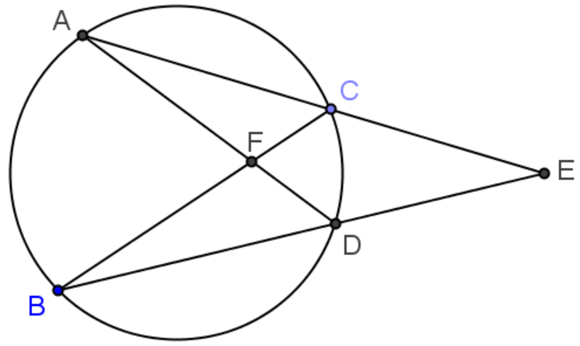


圖 7.3-85

習題 7.3-24：

如圖 7.3-86，P 為圓外一點，$\overline{PA}$、$\overline{PB}$與圓 O 相切於 A、B 兩點。若$\overset{\frown}{ACB}=150°$，求$\angle P$ 的度數。

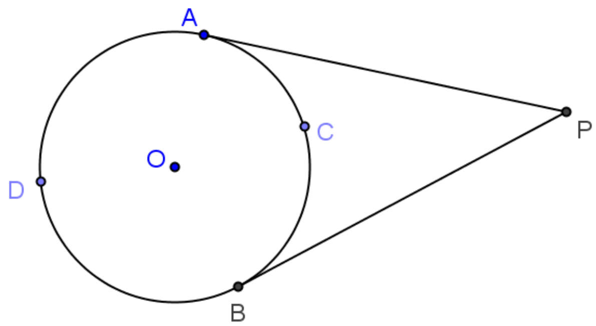


圖 7.3-86

習題 7.3-25：

如圖 7.3-87，P 為圓外一點，$\overline{PA}$、$\overline{PB}$與圓 O 相切於 A、B 兩點，且∠PAB＝65°，則∠P＝____度。

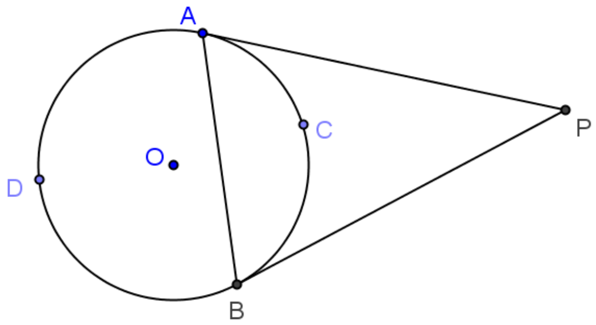


圖 7.3-87

習題 7.3-26：

如圖 7.3-88，P 為圓外一點，$\overline{PA}$、$\overline{PB}$與圓 O 相切於 A、B 兩點。若∠P＝35°，則∠PAB＝______度。

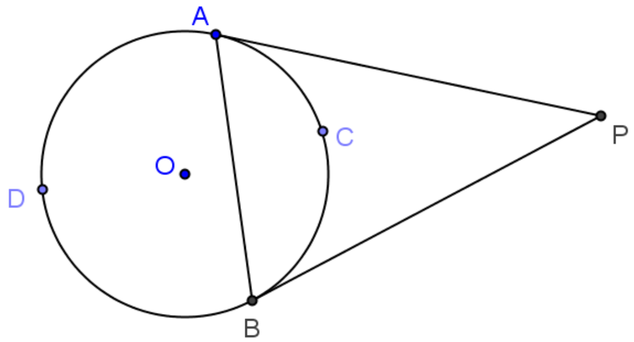


圖 7.3-88

習題 7.3-27：

如圖 7.3-89，$\overline{PA}$切圓 O 於 A，$\overline{PB}$交圓 O 於 B、C 兩點。已知$\overset{\frown}{AB}$＝175°，$\overset{\frown}{AC}$＝65°，則∠P＝______度。

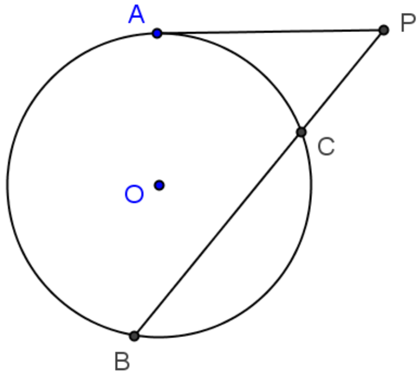


圖 7.3-89

習題 7.3-28：

如圖 7.3-90，$\overline{PA}$切圓 O 於 A，$\overline{PB}$交圓 O 於 B、C 兩點。已知∠P＝50°，$\overset{\frown}{AC}$＝75°，則$\overset{\frown}{AB}$＝______度。

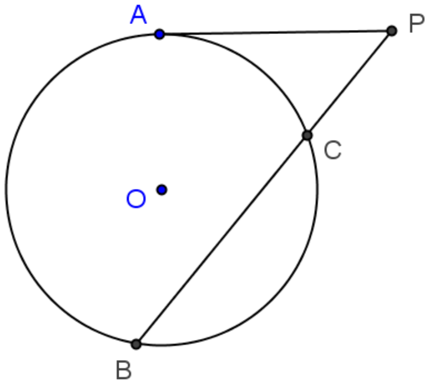


圖 7.3-90

習題 7.3-29：

如圖 7.3-91，已知$\overline{PA}$切圓 O 於 P 點，$\overline{CB}$為直徑，且$\overline{CB}$的延長線交$\overline{PA}$於 A 點。若∠A＝45°，則∠APB＝______度。

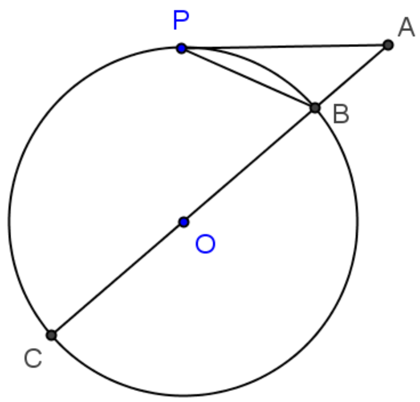


圖 7.3-91

習題 7.3-30：

如圖 7.3-92，已知 L || M，且$\overset{\frown}{AC}$＝80°，則$\overset{\frown}{BD}$＝？

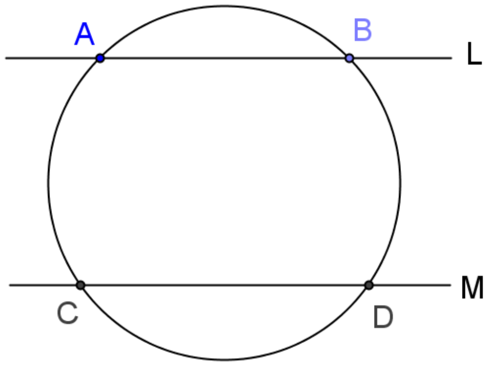


圖 7.3-92

7.4節　圓的內接及外切多邊形

定義 7.4-1 內接與外切

頂點在同圓周上的多邊形，叫作此圓的內接多邊形，這圓是多邊形的外接圓。

多邊形的各邊都與圓相切，叫作此圓的外切多邊形，這圓是多邊形的內切圓。

圓的內接多邊形
多邊形的外接圓

圓的外切多邊形
多邊形的內切圓

圖 7.4-1

在證明定理 7.4-1 (內接四邊形對角定理)之前，我們先練習以下的例題 7.4-1。

例題 7.4-1：

如圖 7.4-2，ABCD 為圓的內接四邊形，$\angle A=80°$，$\angle D=110°$，則$\angle B$與$\angle C$的度數各為何？

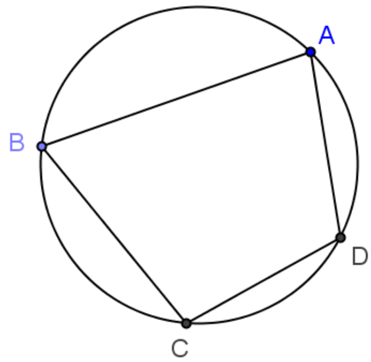


圖 7.4-2

想法：(1) 圓周為 360°

(2) 圓周角為所對弧度的一半

解：

敘述	理由
(1) $\overset{\frown}{BCD}=2\angle A=2\times80°=160°$	弧度為所對圓周角的 2 倍 & 已知$\angle A=80°$
(2) $\overset{\frown}{BCD}+\overset{\frown}{BAD}=360°$	$\overset{\frown}{BCD}+\overset{\frown}{BAD}$為圓周$=360°$
(3) $\overset{\frown}{BAD}=360°-\overset{\frown}{BCD}$ $=360°-160°=200°$	由(2) 等量減法公理 & (1) $\overset{\frown}{BCD}=160°$
(4) $\angle C=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BAD}=\frac{1}{2}\times200°=100°$	圓周角為所對弧度的一半 & (3) $\overset{\frown}{BAD}=200°$
(5) $\overset{\frown}{ABC}=2\angle D=2\times110°=220°$	弧度為所對圓周角的 2 倍 & 已知$\angle D=110°$
(6) $\overset{\frown}{ABC}+\overset{\frown}{CDA}=360°$	$\overset{\frown}{ABC}+\overset{\frown}{CDA}$為圓周$=360°$
(7) $\overset{\frown}{CDA}=360°-\overset{\frown}{ABC}$ $=360°-220°=140°$	由(6) 等量減法公理 & (5) $\overset{\frown}{ABC}=220°$
(8) $\angle B=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CDA}=\frac{1}{2}\times140°=70°$	圓周角為所對弧度的一半 & (7) $\overset{\frown}{CDA}=140°$
(9) 所以$\angle B=70°$ & $\angle C=100°$	由(8) & (4)

定理 7.4-1 內接四邊形對角定理

圓的內接四邊形的對角互為補角。

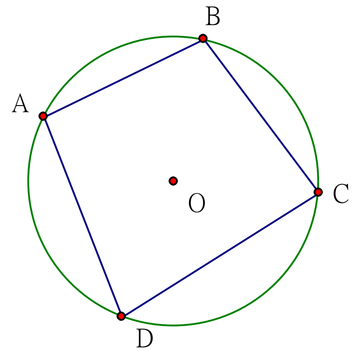


圖 7.4-3

已知：如圖 7.4-3，四邊形 ABCD 為圓 O 的內接四邊形

求證：$\angle A+\angle C=180°$，$\angle B+\angle D=180°$

想法：圓周角的度數等於所對弧的一半

證明：

敘述	理由
(1) $\angle A=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD}$	圓周角的度數等於所對弧的一半
(2) $\angle C=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BAD}$	圓周角的度數等於所對弧的一半
(3) $\angle A+\angle C=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BCD}+\overset{\frown}{BAD})$	由(1)式＋(2)式得
(4) $\overset{\frown}{BCD}+\overset{\frown}{BAD}=360°$	$\overset{\frown}{BCD}+\overset{\frown}{BAD}$為圓周＝360°
(5) $\angle A+\angle C=\frac{1}{2}\times 360°=180°$	將(4)式代入(3)式得
(6) 同理可證 $\angle B+\angle D=180°$	由(1) ~ (5)

Q. E. D.

接著，我們利用定理 7.4-1 (內接四邊形對角定理)，來解決下面兩個例題。

例題 7.4-2：

如圖 7.4-4，ABCD 為圓 O 的內接四邊形。若∠C＝75°，∠D＝95°，則∠A 與∠B 的度數各為何？

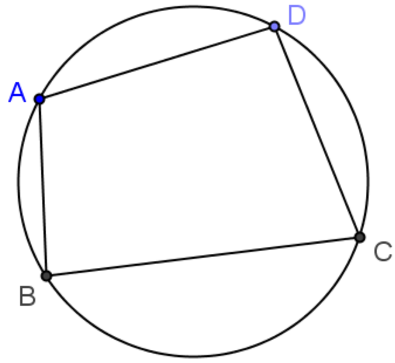


圖 7.4-4

想法：圓的內接四邊形的對角互為補角

解：

敘述	理由
(1) ∠A＋∠C＝180°	已知 ABCD 為圓 O 的內接四邊形 & 圓的內接四邊形的對角互為補角
(2) ∠A＝180°－∠C ＝180°－75° ＝105°	由(1) 等量減法公理 & 已知∠C＝75°
(3) ∠B＋∠D＝180°	已知 ABCD 為圓 O 的內接四邊形 & 圓的內接四邊形的對角互為補角
(4) ∠B＝180°－∠D ＝180°－95° ＝85°	由(3) 等量減法公理 & 已知∠D＝95°

例題 7.4-3：

如圖 7.4-5，四邊形 ABCD 是圓內接四邊形。若∠P＝32°，∠CDQ＝50°，求∠Q 的度數。

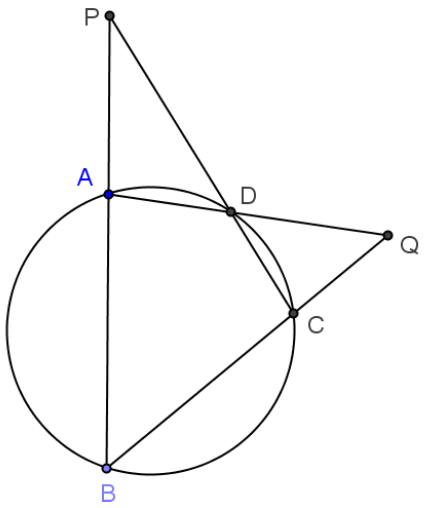


圖 7.4-5

想法：(1) 利用已知∠CDQ＝50° ＆ 對頂角相等，可得知∠PDA＝∠CDQ；

(2) 利用已知∠P＝32°、∠PDA 度數 ＆ 三角形外角等於兩內對角的和，可得知∠BAD 之度數；

(3) 利用已知四邊形 ABCD 是圓內接四邊形、∠BAD 度數 ＆ 圓內接四邊形的對角互為補角，可得知∠BCD 之度數；

(4) 利用已知∠CDQ＝50°、∠BCD 度數 ＆ 三角形外角等於兩內對角的和，可得知∠Q 之度數

解：

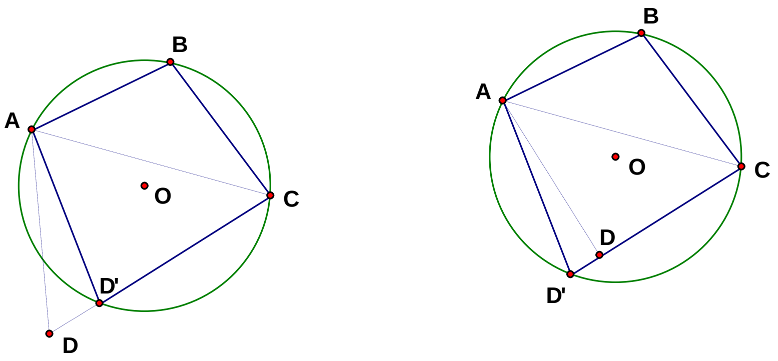
敘述	理由
(1) ∠PDA＝∠CDQ＝50°	對頂角相等 ＆ 已知∠CDQ＝50°
(2) △PDA 中，∠BAD＝∠P＋∠PDA ＝32°＋50°＝82°	三角形外角等於兩內對角的和 ＆ 已知∠P＝32° 、(1) ∠PDA＝50°
(3) ∠BAD＋∠BCD＝180°	已知 ABCD 為圓內接四邊形 ＆ 圓的內接四邊形的對角互為補角
(4) ∠BCD＝180°－∠BAD ＝180°－82°＝98°	由(3) 等量減法公理 ＆ (2) ∠BAD＝82°
(5) △CDQ 中，∠BCD＝∠Q＋∠CDQ	三角形外角等於兩內對角的和
(6) ∠Q＝∠BCD－∠CDQ ＝98°－50°＝48°	由(5) 等量減法公理 ＆ (4) ∠BCD＝98°、已知∠CDQ＝50°

定理 7.4-2 圓內接四邊形的判別定理

若四邊形的對角互為補角，則此四邊形必為圓內接四邊形。

已知：如圖 7.4-6，若四邊形 ABCD 的兩對角和為 180°，即∠B＋∠ADC＝180°。
求證：四邊形 ABCD 為圓的內接四邊形。

想法：用矛盾證法，假設 D 點不在 ABC 三點所形成的圓周上，證明假設錯誤，所以 D 點也在圓周上，故四邊形 ABCD 為圓的內接四邊形。



(a) (b)

圖 7.4-6

證明：

敘述	理由
(1) 以△ABC 的外心 O 為圓心，可作一圓過 A、B、C 三點	過三點可作一圓，且三角形的外心與三頂點等距離
(2) 假設 D 點不在圓周上，則 D 點在圓外，如圖 7.4-6(a)，或 D 點在圓內，如圖 7.4-6(b)	點一定在圓內、圓外或圓周上三種情形之一(三一律)
(3) 作$\overleftrightarrow{CD}$與圓周交於 D`點	過兩點可作一直線
(4) 四邊形 ABCD`為圓的內接四邊形	由(1)&(3) A、B、C、D`四點都在圓周上
(5) ∠B＋∠AD`C＝180°	由(4) & 圓內接四邊形對角互補
(6) ∠ADC < ∠AD`C 如圖 7.4-6(a) 或 ∠ADC > ∠AD`C 如圖 7.4-6(b)	三角形的外角大於不相鄰的內對角
(7) ∠B＋∠ADC ≠ ∠B＋∠AD`C	由(6) & 同加∠B
(8) ∠B＋∠ADC ≠ 180°	將(5)式 代入(7)式得
(9) ∠B＋∠ADC =180°	己知∠B＋∠ADC =180°

(10) 所以假設錯誤，D 點應在圓周上，因此 A、B、C、D 四點都在圓周上，四邊形 ABCD 為圓的內接四邊形	由(8)式 & (9)式不可能同時發生(互相矛盾) 所以假設 D 點不在圓周上錯誤

Q. E. D.

例題 7.4-4：

如圖 7.4-7，若∠B＝70°、∠D＝110°，是否可以找到一個圓通過四邊形 ABCD 的四個頂點？為什麼？

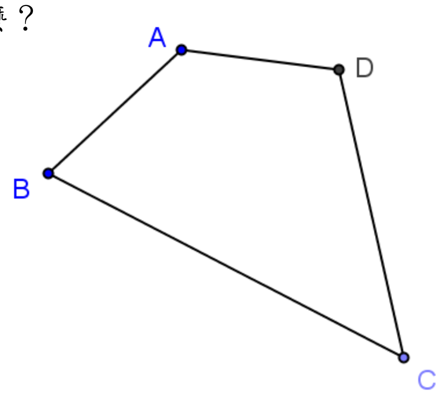
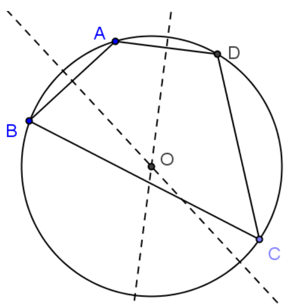


圖 7.4-7

想法：若四邊形的對角互為補角，則此四邊形必為圓內接四邊形

解：

敘述	理由
(1) ∠B＋∠D＝180°	已知∠B＝70°、∠D＝110°
(2) ∠B 與∠D 互補	由(1) & 補角定義
(3) 四邊形 ABCD 為圓內接四邊形	由(2) & 四邊形的對角互為補角，則此四邊形必為圓內接四邊形
(4) 尺規作圖，以$\overline{AB}$、$\overline{BC}$中垂線的交點 O 為圓心，$\overline{OA}$為半徑畫圓，圓 O 即為四邊形 ABCD 的外接圓，如圖 7.4-7(a)  **圖 7.4-7(a)**	利用中垂線上任一點到線段兩端等距離 & 同圓半徑相等的性質，可得知 O 點為圓心

定理 7.4-3 圓外切四邊形之邊長定理

圓外切四邊形的相對一組對邊和等於另一組對邊和。

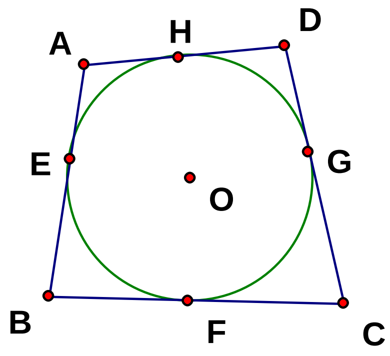


圖 7.4-8

已知： 如圖 7.4-8，若四邊形 ABCD 為圓 O 的外切四邊形，各邊的切點分別為 E、F、G、H

求證： $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$

想法： 利用圓外一點與圓的兩切點連線段等長性質來證明

證明：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$ 皆為圓 O 切線	已知四邊形 ABCD 為圓 O 的外切四邊形，各邊的切點分別為 E、F、G、H
(2) $\overline{AH}=\overline{AE}$、$\overline{BE}=\overline{BF}$、$\overline{CF}=\overline{CG}$、$\overline{DH}=\overline{DG}$	由(1) & 圓外一點與圓的兩切點連線段等長
(3) $\overline{AB}+\overline{CD}$	題目所求
$=(\overline{AE}+\overline{BE})+(\overline{CG}+\overline{DG})$	如圖，$\overline{AB}=\overline{AE}+\overline{BE}$ & $\overline{CD}=\overline{CG}+\overline{DG}$
$=(\overline{AH}+\overline{BF})+(\overline{CF}+\overline{DH})$	由(2) $\overline{AE}=\overline{AH}$、$\overline{BE}=\overline{BF}$、$\overline{CG}=\overline{CF}$、$\overline{DG}=\overline{DH}$
$=(\overline{AH}+\overline{DH})+(\overline{BF}+\overline{CF})$	加法交換律 & 結合律
$=\overline{AD}+\overline{BC}$	如圖 7.4-8，$\overline{AH}+\overline{DH}=\overline{AD}$ & $\overline{BF}+\overline{CF}=\overline{BC}$
(4) 所以 $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$	由(3)

Q. E. D.

例題 7.4-5：

如圖 7.4-9，四邊形 ABCD 的四邊分別與圓相切。若 $\overline{AB}=11$ cm，$\overline{CD}=10$ cm，求 $\overline{AD}+\overline{BC}=$______cm。

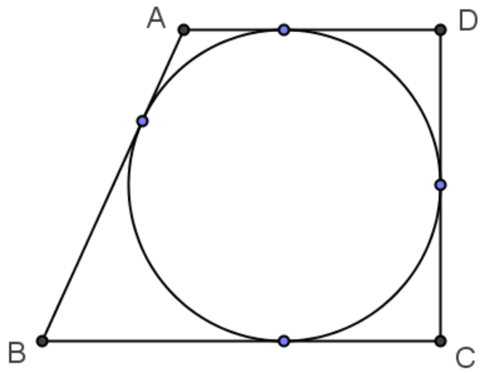


圖 7.4-9

想法：圓外切四邊形的相對一組對邊和等於另一組對邊和

解：

敘述	理由
(1) 四邊形 ABCD 為圓的外切四邊形	已知四邊形 ABCD 的四邊分別與圓相切
(2) $\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{CD}$	由(1) ＆ 圓外切四邊形的相對一組對邊和等於另一組對邊和
(3) $\overline{AD}+\overline{BC}=11$ 公分$+10$ 公分 $=21$ 公分	將已知$\overline{AB}=11$ 公分，$\overline{CD}=10$ 公分代入(2)式得

例題 7.4-6：

如圖 7.4-10，已知四邊形 ABCD 的四邊分別與圓相切。
若$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}=50$ 公分，則$\overline{AB}+\overline{CD}=$______公分。

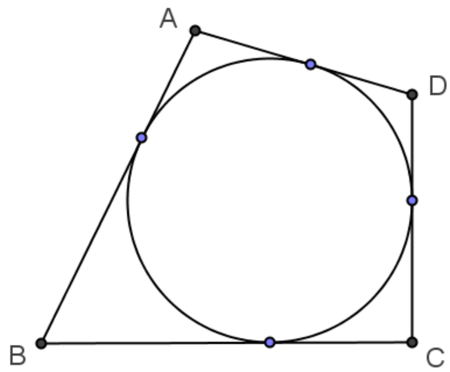


圖 7.4-10

想法：圓外切四邊形的相對一組對邊和等於另一組對邊和

解：

敘述	理由
(1) 四邊形 ABCD 為圓的外切四邊形	已知四邊形 ABCD 的四邊分別與圓相切
(2) $\overline{BC}+\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{CD}$	由(1) & 圓外切四邊形的相對一組對邊和等於另一組對邊和
(3) $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}=50$ 公分	已知
(4) $(\overline{AB}+\overline{CD})+(\overline{BC}+\overline{AD})=50$ 公分	由(3) & 加法交換律 & 結合律
(5) $(\overline{AB}+\overline{CD})+(\overline{AB}+\overline{CD})=50$ 公分	將(2) $\overline{BC}+\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{CD}$ 代入(4)式得
(6) $2(\overline{AB}+\overline{CD})=50$ 公分	由(5) 加法
(7) $\overline{AB}+\overline{CD}=(50$ 公分$)\div 2=25$ 公分	由(6)等式兩邊同除以 2 得

例題 7.4-7：

圖 7.4-11 中，圓 O 為四邊形 ABCD 的內切圓。若 $\overline{AB}$＝x，$\overline{BC}$＝y，$\overline{CD}$＝x－6，$\overline{DA}$＝y＋2，且 3y＝2x，求$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}$之值。

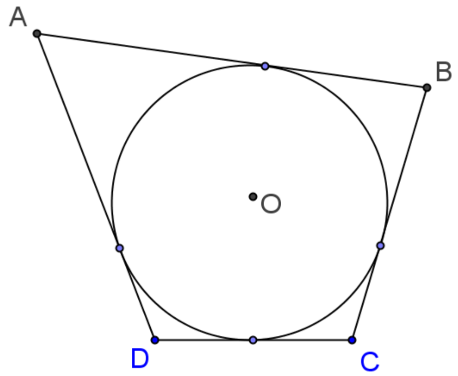


圖 7.4-11

想法：圓外切四邊形的相對一組對邊和等於另一組對邊和

解：

敘述	理由
(1) 四邊形 ABCD 為圓的外切四邊形	已知圓 O 為四邊形 ABCD 的內切圓
(2) $\overline{BC}+\overline{DA}=\overline{AB}+\overline{CD}$	由(1) ＆ 圓外切四邊形的相對一組對邊和等於另一組對邊和
(3) y＋(y＋2)＝x＋(x－6)	將已知$\overline{BC}$＝y、$\overline{DA}$＝y＋2、$\overline{AB}$＝x、$\overline{CD}$＝x－6 代入(2)式得
(4) 2 y＋2＝2x－6	由(3)式化簡得
(5) 2 y＋2＝3y－6	將已知 3y＝2 x 代入(4)式得
(6) y＝8	由(5)式解一元一次方程式
(7) x＝12	將(6) y＝8 代入已知 3y＝2 x ＆ 解 x
(8) $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}$ ＝x＋y＋(x－6)＋(y＋2) ＝2x＋2y－4 ＝2x12＋2x8－4＝36	題目所求 將已知$\overline{AB}$＝x、$\overline{BC}$＝y、$\overline{CD}$＝x－6、$\overline{DA}$＝y＋2 代入 將(6) y＝8 ＆ (7) x＝12 代入
(9) 所以$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}$＝36	由(8)

定理 7.4-4 圓外切四邊形判別定理

若四邊形的一組對邊和等於另一組對邊和，則此四邊形必為一圓的外切四邊形。

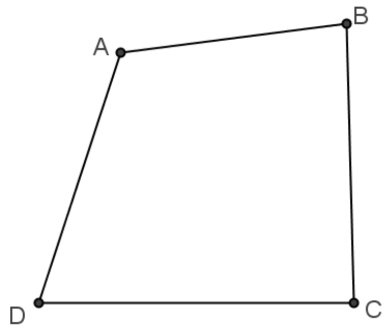


圖 7.4-12

已知： 如圖 7.4-12，$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$。

求證： 四邊形 ABCD 必為一圓的外切四邊形。

想法： 先畫出與$\overline{AD}$、$\overline{AB}$、$\overline{BC}$相切的圓，再用矛盾證法，假設此圓與$\overline{CD}$不相切，證明假設錯誤，所以此圓也與$\overline{CD}$相切，故四邊形 ABCD 為圓的外切四邊形。

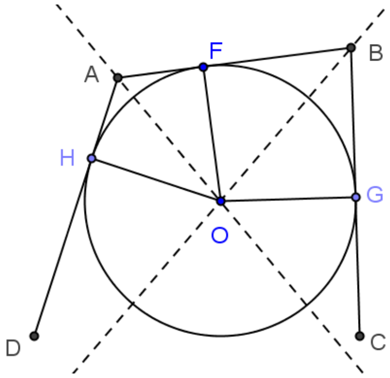


圖 7.4-12(a)

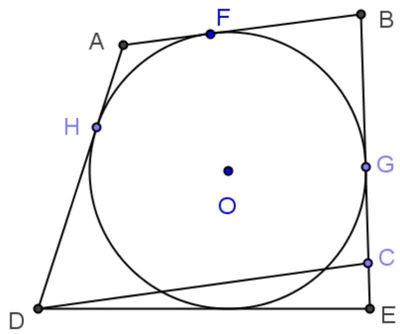


圖 7.4-12(b)

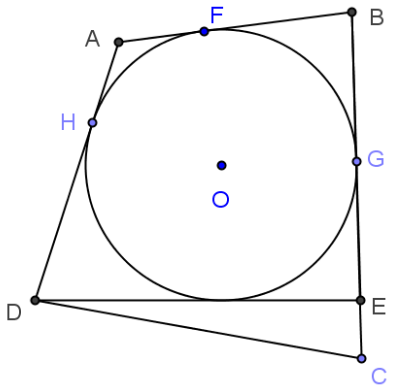


圖 7.4-12(c)

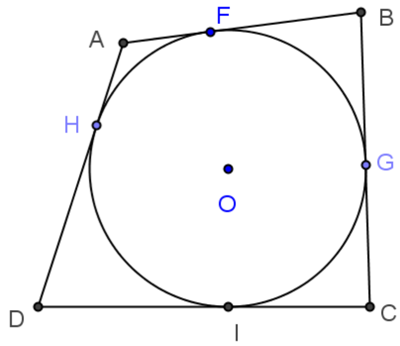


圖 7.4-12(d)

證明：

敘述	理由
(1) 分別作∠DAB 與∠ABC 的角平分線，此兩條平分線相交於 O 點，並作 $\overline{OH}\perp\overline{AD}$，接著以 O 點為圓心，$\overline{OH}$為半徑畫圓，圓 O 分別與$\overline{AD}$、$\overline{AB}$、$\overline{BC}$相切於 H、F、G 兩點，如圖 7.4-12(a)	∠DAB 平分線上任一點到角的兩邊等距離，$\overline{OH}=\overline{OF}$； ∠ABC 平分線上任一點到角的兩邊等距離，$\overline{OG}=\overline{OF}$； 由$\overline{OH}=\overline{OF}$、$\overline{OG}=\overline{OF}$，可以得知$\overline{OH}=\overline{OF}=\overline{OG}$； 所以以 O 點為圓心，$\overline{OH}$為半徑所畫的圓 O，必定也會通過 F、G 兩點；
(2) 假設圓 O 與$\overline{CD}$不相切，則圓 O 有可能交$\overline{CD}$於兩點或圓 O 與$\overline{CD}$不相交	圓 O 與$\overline{CD}$的關係一定是相切、不相交或是相交於兩點其中一種(三一律)
(3) 假設圓 O 與$\overline{CD}$交於兩點， 如圖 7.4-12(b)：過 D 作圓 O 的切線，交$\overline{BC}$延長線於 E 點，則圓 O 是四邊形 ABED 的內切圓， 因此$\overline{AD}+\overline{BE}=\overline{AB}+\overline{ED}$	由(2) 假設圓 O 與$\overline{CD}$交於兩點作圖 & 圓外切四邊形的相對一組對邊和等於另一組對邊和
(4) $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$ $=\overline{AD}+(\ \overline{BE}-\overline{CE}\ )$ $=(\ \overline{AD}+\overline{BE}\ )-\overline{CE}$ $=\overline{AB}+\overline{ED}-\overline{CE}$	已知$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$ 如圖 7.4-12(b)，$\overline{BC}=\overline{BE}-\overline{CE}$ 加法結合律 由(3) $\overline{AD}+\overline{BE}=\overline{AB}+\overline{ED}$
(5) 所以$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AB}+\overline{ED}-\overline{CE}$ $\Rightarrow\overline{CD}=\overline{ED}-\overline{CE}$	由(4) 等式兩邊同減$\overline{AB}$
(6) $\overline{CD}>\overline{ED}-\overline{CE}$	△CDE 的兩邊差小於第三邊
(7) 所以圓 O 與$\overline{CD}$交於兩點的假設錯誤	由(5)式 $\overline{CD}=\overline{ED}-\overline{CE}$ 與 (6)式$\overline{CD}>\overline{ED}-\overline{CE}$的情形不可能同時發生(矛盾)
(8) 假設圓 O 與$\overline{CD}$不相交，如圖 7.4-12(c)：過 D 作圓 O 的切線，交$\overline{BC}$於 E 點，則圓 O 是四邊形 ABED 的內切圓，因此$\overline{AD}+\overline{BE}=\overline{AB}+\overline{ED}$	由(2) 假設圓 O 與$\overline{CD}$不相交作圖 & 圓外切四邊形的相對一組對邊和等於另一組對邊和
(9) $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$ $=\overline{AD}+(\ \overline{BE}+\overline{CE}\ )$ $=(\ \overline{AD}+\overline{BE}\ )+\overline{CE}$ $=\overline{AB}+\overline{ED}+\overline{CE}$	已知$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$ 如圖 7.4-12(c)，$\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{CE}$ 加法結合律 由(8) $\overline{AD}+\overline{BE}=\overline{AB}+\overline{ED}$

(10) 所以$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AB}+\overline{ED}+\overline{CE}$ $\Rightarrow\overline{CD}=\overline{ED}+\overline{CE}$	由(9) 等式兩邊同減$\overline{AB}$
(11) $\overline{CD}<\overline{ED}+\overline{CE}$	△CDE 的兩邊和大於第三邊
(12) 所以圓 O 與$\overline{CD}$不相交的假設錯誤	由(10)式 $\overline{CD}=\overline{ED}+\overline{CE}$ 與 (11)式$\overline{CD}<\overline{ED}+\overline{CE}$的情形不可能同時發生(矛盾)
(13) 由於圓 O 與$\overline{CD}$交於兩點、圓 O 與$\overline{CD}$不相交的假設都錯誤，所以圓 O 與$\overline{CD}$不相切的假設錯誤，因此圓 O 必與$\overline{CD}$相切	由(7)、(12) & 三一律 所以圓 O 與 $\overline{CD}$不相切的假設錯誤，因此圓 O 必與$\overline{CD}$相切
(14) 所以圓 O 分別與$\overline{AD}$、$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$相切於 H、F、G、I 四點，所以四邊形 ABCD 為圓 O 的外切四邊形，如圖 7.4-12(d)所示	由(1) & (13)

習題 7.4

習題 7.4-1：

如圖 7.4-13，ABCD 為圓 O 的內接四邊形。若 $\angle C = 70°$，$\angle D = 100°$，則 $\angle A$ 與 $\angle B$ 的度數各為何？

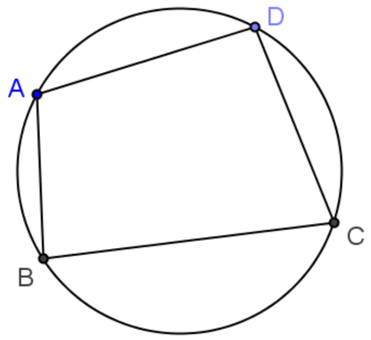


圖 7.4-13

習題 7.4-2：

如圖 7.4-14，若 $\angle B = 75°$、$\angle D = 105°$，是否可以找到一個圓通過四邊形 ABCD 的四個頂點？為什麼？

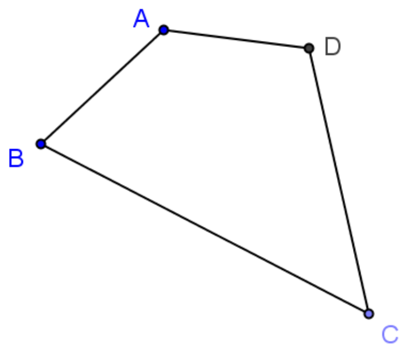


圖 7.4-14

習題 7.4-3：

證明圓的內接梯形必為等腰梯形。

習題 7.4-4：

證明圓的內接平行四邊形必為矩形或正方形。

習題 7.4-5：

如圖 7.4-15，已知四邊形 ABCD 的四邊分別與圓相切。若$\overline{AB}$＝22 公分，$\overline{CD}$＝20 公分，則$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}$ 之值。

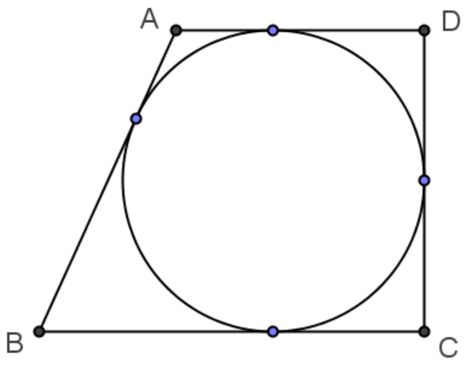


圖 7.4-15

習題 7.4-6：

如圖 7.4-16，已知四邊形 ABCD 的四邊分別與圓相切。
若$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}$＝60 公分，則$\overline{AB}+\overline{CD}$＝______公分。

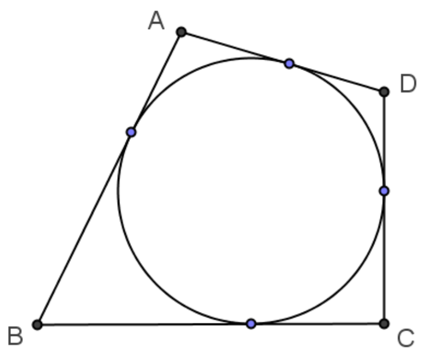


圖 7.4-16

習題 7.4-7：

圖 7.4-17 中的圓為四邊形 ABCD 的內切圓。若 $\overline{AB}$＝x，$\overline{BC}$＝y，$\overline{CD}$＝x＋6，$\overline{DA}$＝y－2，2y＝3 x，求$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}$之值。

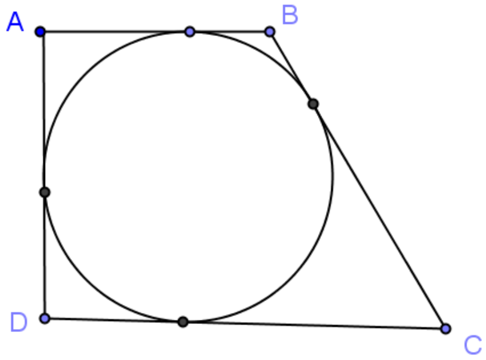


圖 7.4-17

本章重點

本章介紹圓形的一些名詞及其相關的性質：

1. 同圓半徑相等。
2. 圓心角等於所對的弧度。
3. 圓周角為所對弧度的一半。
4. 同弧所對的圓心角為圓周角的 2 倍。
5. 直徑所對的圓周角為直角。
6. 同圓中等弦對等弧。
7. 同圓中等弧對等弦。
8. 同圓中平行線截等弧。
9. 垂直於弦的直徑必平分此弦。
10. 同圓中大弦對小弦心距、小弦對大弦心距。
11. 圓內角的度數，等於這角與它的對頂角所對兩弧度數和的一半。
12. 圓外角的度數，等於它們所截兩弧度數差的一半。
13. 若直線與圓只交於一點，則此直線稱為此圓的切線。
14. 若直線與圓相交於兩點，則此直線稱為此圓的割線。
15. 過切點的半徑與切線垂直。
16. 圓外一點對圓所作的兩切線等長。
17. 弦切角為所對弧度的一半。
18. 圓外切四邊形的相對一組對邊和等於另一組對邊和。
19. 若四邊形的一組對邊和等於另一組對邊和，則此四邊形必為一圓的外切四邊形。
20. 圓內接四邊形的對角互為補角。
21. 若四邊形的對角互為補角，則此四邊形必為圓內接四邊形。
22. 一直線同時與兩圓相切就叫作此兩圓的公切線；其中若兩圓在直線的兩側叫作內公切線，若兩圓在直線的同側叫作外公切線。

23. 若連心線長＞兩半徑和，則兩圓外離；且此兩圓共有 4 條公切線，其中 2 條為外公切線，2 條為內公切線。

24. 若連心線長＝兩半徑和，則兩圓外切；且此兩圓共有 3 條公切線，其中 2 條為外公切線，1 條為內公切線。

25. 若兩半徑差＜連心線長＜兩半徑和，則兩圓相交於兩點；且此兩圓共有 2 條外公切線。

26. 若連心線長＝兩半徑差，則兩圓內切；且此兩圓只有 1 條外公切線。

27. 若連心線長＜兩半徑差，則兩圓內離；此兩圓沒有公切線。

28. 若連心線長＝0，則兩圓為同心圓；此兩圓沒有公切線。

歷年基測題目

1. 如圖 7.1，圓上有 A、B、C、D 四點，圓內有 E、F 兩點且 E、F 在$\overline{BC}$上。若四邊形 AEFD 為正方形，則下列弧度關係，何者正確？(97-1)

(A) $\overset{\frown}{AB}<\overset{\frown}{AD}$　(B) $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AD}$　(C) $\overset{\frown}{AB}<\overset{\frown}{BC}$　(D) $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$

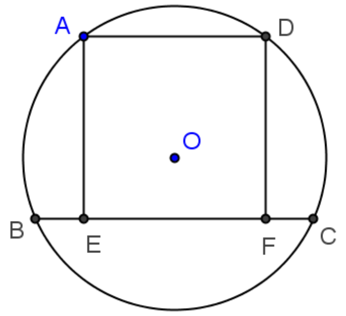


圖 7.1

解答：(C) $\overset{\frown}{AB}<\overset{\frown}{BC}$

想法：(1) 利用第二章的**逆樞紐定理：**

兩三角形有兩個對應相等的邊，若一三角形的的第三邊大於另一三角形的第三邊，則此三角形夾角大於另一三角形的夾角。

(2) 利用弧的度數等於所對圓心角的度數。

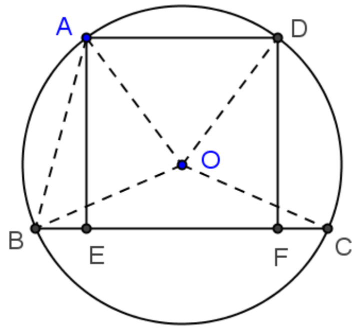


圖 7.1(a)

解：

敘述	理由
(1) △ABE 為直角三角形，∠AEB＝90°	已知四邊形 AEFD 為正方形，$\overline{AE}\perp\overline{BC}$
(2) $\overline{AB}>\overline{AE}=\overline{AD}$	由(1)直角三角形斜邊$\overline{AB}$大於任一股$\overline{AE}$ & 四邊形 AEFD 為正方形，$\overline{AE}=\overline{AD}$
(3) △AOB 與△AOD 中， $\overline{OA}=\overline{OA}$ $\overline{OB}=\overline{OD}$ $\overline{AB}>\overline{AD}$	如圖 7.1(a)所示 同圓半徑相等 同圓半徑相等 由(2) $\overline{AB}>\overline{AD}$ 已證

(4) 所以∠AOB＞∠AOD	由(3) ＆ 逆樞紐定理：兩三角形有兩個對應相等的邊，若一三角形的的第三邊大於另一三角形的第三邊，則此三角形夾角大於另一三角形的夾角
(5) 所以$\overset{\frown}{AB}$＞$\overset{\frown}{AD}$	弧的度數等於所對的圓心角度數 ＆ (4) ∠AOB＞∠AOD
(6) △ABE 中，$\overline{BE}+\overline{AE}>\overline{AB}$	三角形任兩邊和大於第三邊
(7) $\overline{BE}+\overline{EF}>\overline{AB}$	四邊形 AEFD 為正方形，$\overline{AE}=\overline{EF}$ 代入(6)式得
(8) $\overline{BE}+\overline{EF}+\overline{FC}>\overline{AB}$	由(7)
(9) △BOC 與△AOB 中， $\overline{OB}=\overline{OA}$ $\overline{OC}=\overline{OB}$ $\overline{BC}>\overline{AB}$	如圖 7.1(a)所示 同圓半徑相等 同圓半徑相等 已知 E、F 在$\overline{BC}$上，$\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{EF}+\overline{FC}$ ＆ (8) $\overline{BE}+\overline{EF}+\overline{FC}>\overline{AB}$
(10) 所以∠BOC＞∠AOB	由(9) ＆逆樞紐定理：兩三角形有兩個對應相等的邊，若一三角形的的第三邊大於另一三角形的第三邊，則此三角形夾角大於另一三角形的夾角
(11) 所以$\overset{\frown}{BC}$＞$\overset{\frown}{AB}$	弧的度數等於所對的圓心角度數 ＆ (10) ∠BOC＞∠AOB
(12) 所以本題答案選(C) $\overset{\frown}{AB}$＜$\overset{\frown}{BC}$	由(5) ＆ (11)

2. 如圖 7.2，A、B、C、D 四點均在一圓弧上，$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$，且$\overleftrightarrow{AB}$與$\overleftrightarrow{CD}$相交於 E 點。若∠BCA＝10°，∠BAC＝60°，則∠E＝？　　(97-1)

(A) 35°　(B) 40°　(C) 60°　(D) 70°

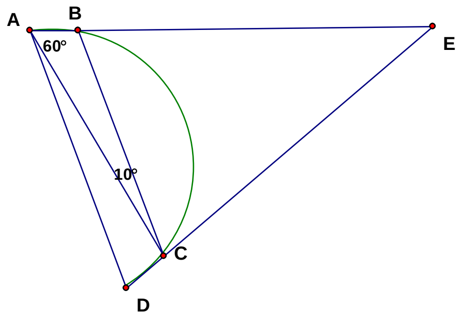


圖 7.2

解答：(B) 40°

想法：利用已知$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ＆ 平行線之內錯角相等，可得知∠DAC；

利用已知$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ＆ 同圓中平行線截等弧，可得知$\overset{\frown}{AB}$＝$\overset{\frown}{CD}$；

利用$\overset{\frown}{AB}$＝$\overset{\frown}{CD}$ ＆ 同圓中等弧對等弦，可得知$\overline{AB}=\overline{CD}$；

利用已知$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$、$\overline{AB}=\overline{CD}$ ＆ 一組對邊平行且兩腰等長為等腰梯形，可得知四邊形 ABCD 為等腰梯形；

利用四邊形 ABCD 為等腰梯形＆ 等腰梯形兩底角相等，可得知∠CDA＝∠ BAD；

利用∠CDA＝∠ BAD ＆ △ADE 內角和為 180°，可得知∠E

解：

敘述	理由
(1) ∠DAC＝∠BCA＝10°	已知$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ＆ 兩平行線之內錯角相等 ＆ 已知∠BCA＝10°
(2) ∠BAD＝∠DAC＋∠BAC ＝10°+ 60°＝70°	如圖 7.2，全量等於分量之和 ＆ (1) ∠DAC＝10° 、已知∠BAC＝60°
(3) $\overset{\frown}{AB}$＝$\overset{\frown}{CD}$	已知$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ＆ 同圓中平行線截等弧
(4) $\overline{AB}=\overline{CD}$	由(3) $\overset{\frown}{AB}$＝$\overset{\frown}{CD}$ ＆ 同圓中等弧對等弦
(5) 四邊形 ABCD 為等腰梯形	已知$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ＆ (4) $\overline{AB}=\overline{CD}$ ＆ 一組對邊平行且兩腰等長為等腰梯形

(6) ∠CDA＝∠ BAD＝70°	由(5) ＆ 等腰梯形兩底角相等 ＆ (2) ∠BAD＝70°
(7) ∠ BAD＋∠CDA＋∠E＝180°	△ADE 內角和為 180°
(8) 70°＋70°＋∠E＝180°	將(6) ∠CDA＝∠ BAD＝70°代入(7)式得
(9) ∠E＝180°－70°－70°＝40°	由(8) 等量減法公理
(10) 所以本題答案選(B) 40°	由(9)

3. 如圖 7.3，圓 O 為四邊形 ABCD 的內切圓。若∠AOB＝70°，則∠COD＝？(97-1)
(A) 110°　(B) 125°　(C) 140°　(D) 145°

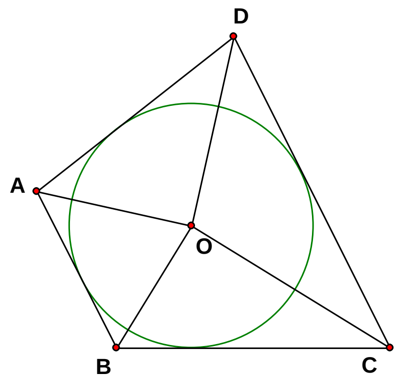


圖 7.3

解答：(A) 110°

想法：(1) 圓心與切點連線垂直切線

(2) 圓外一點與圓的兩切點等距離

(3) RSH 全等三角形定理

(4) 全等三角形之對應角相等

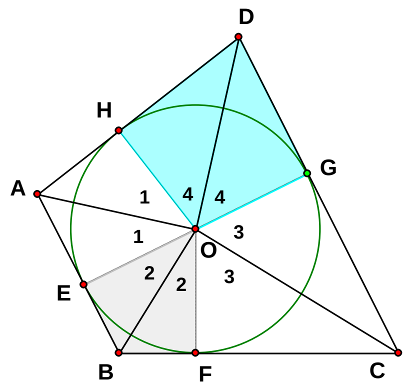


圖 7.3(a)

解：

敘述	理由
(1) 過 O 點分別作$\overline{OH}\perp\overline{AD}$、$\overline{OG}\perp\overline{CD}$、$\overline{OF}\perp\overline{BC}$、$\overline{OE}\perp\overline{AB}$，如圖 7.3(a)	已知圓 O 為四邊形 ABCD 的內切圓 & 圓心與切點連線垂直切線
(2) 在△AHO 與 △AEO 中 ∠AHO＝∠AEO＝90° $\overline{AH}=\overline{AE}$ $\overline{AO}=\overline{AO}$	如圖 7.3(a)所示 由(1) $\overline{OH}\perp\overline{AD}$、$\overline{OE}\perp\overline{AB}$ 圓外一點與圓的兩切點等距離 同一線段相等

(3) $\triangle AHO \cong \triangle AEO$	由(2) ＆ 根據 R.S.H.三角形全等定理
(4) $\angle AOH = \angle AOE = \angle 1$	由(3) ＆ 全等三角形之對應角相等
(5) 同理可證$\triangle BEO \cong \triangle BFO$ $\angle BOE = \angle BOF = \angle 2$	由(2)~(4)
(6) 同理可證$\triangle CFO \cong \triangle CGO$ $\angle COF = \angle COG = \angle 3$	同(2)~(4)
(7) 同理可證$\triangle DGO \cong \triangle DHO$ $\angle DOG = \angle DOH = \angle 4$	同(2)~(4)
(8) $2(\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4) = 360°$ $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$	如圖 7.3(a)所示，繞 O 點一圈為 360°
(9) $\angle AOB = \angle 1 + \angle 2 = 70°$	全量等於分量之和 ＆ 已知$\angle AOB = 70°$
(10) $\angle COD = \angle 3 + \angle 4$ $= 180° - (\angle 1 + \angle 2)$ $= 180° - 70°$ $= 110°$	全量等於分量之和 由(8) 等量減法公理 將(9)式$\angle 1 + \angle 2 = 70°$代入得

4. 如圖 7.4，△ABC 的內切圓分別切$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$於 D、E、F 三點，其中 P、Q 兩點分別在$\overset{\frown}{DE}$、$\overset{\frown}{DF}$上。若∠A＝30°，∠B＝80°，∠C＝70°，則$\overset{\frown}{DPE}$是$\overset{\frown}{DQF}$的幾倍？　(96-1)

(A) $\frac{2}{3}$　(B) $\frac{8}{7}$　(C) $\frac{4}{3}$　(D) $\frac{8}{3}$

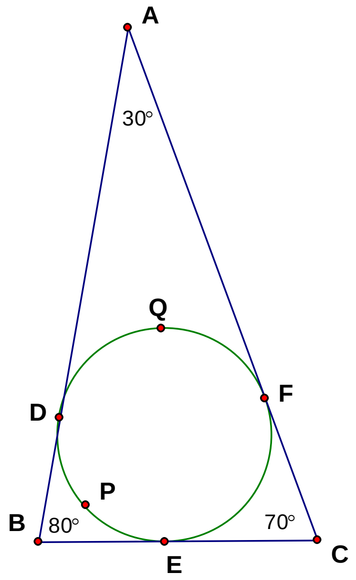


圖 7.4

解答：(A) $\frac{2}{3}$

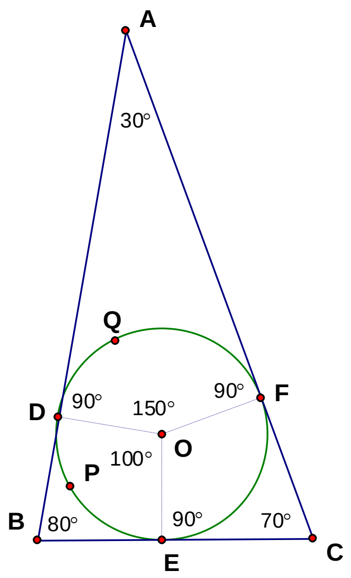


圖 7.4(a)

想法： 利用已知△ABC 的內切圓分別切$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$於 D、E、F 三點 ＆ 尺規作圖，找出△ABC 的內切圓圓心 O 點；

利用內切圓圓心與切點的連線垂直切線的性質，得知
∠ADO＝∠BDO＝∠OFA＝∠OEB＝90°；

利用四邊形 BEOD 內角和 360° ＆ ∠BDO＝∠OEB＝90°、已知∠B＝80°，可得知∠DOE；

利用圓弧的度數等於所對圓心角的度數，可得知$\overset{\frown}{DPE}$；

利用四邊形 ADOF 內角和 360° ＆ ∠ADO＝∠OFA＝90°、已知∠A＝30°，可得知∠DOF；

利用圓弧的度數等於所對圓心角的度數，可得知$\overset{\frown}{DQF}$；

解：

敘述	理由
(1) 過切點 D、E、F 分別作切線的垂直線相交於內切圓的圓心 O 點，如圖 7.4(a)所示，則： ∠ADO＝∠BDO＝∠OFA＝∠OEB＝90°	圓心與切點的連線與切線垂直
(2) 在四邊形 BEOD 中， ∠B＋∠BDO＋∠DOE＋∠OEB＝360° 80°＋90°＋∠DOE＋90°＝360° ∠DOE＝100°	如圖 7.4(a)所示 四邊形內角和 360° 將已知∠B＝80° ＆ (1) ∠BDO＝∠OEB＝90° 代入得
(3) $\overset{\frown}{DPE}$＝∠DOE＝100°	由(2) ＆ 弧度等於所對圓心角度數
(4) 在四邊形 ADOF 中， ∠A＋∠OFA＋∠DOF＋∠ADO＝360° 30°＋90°＋∠DOF＋90°＝360° ∠DOF＝150°	如圖 7.4(a)所示 四邊形內角和 360° 將已知∠A＝30° ＆ (1) ∠ADO＝∠OFA＝90° 代入得
(5) $\overset{\frown}{DQF}$＝∠DOF＝150°	由(4) ＆ 弧度等於所對圓心角度數
(6) 所以$\overset{\frown}{DPE}$＝$\frac{2}{3}$$\overset{\frown}{DQF}$	由(3) ＆ (5)
(7) 所以本題答案選(A) $\frac{2}{3}$	由(6)

5. 如圖 7.5，A、B、C 三點在圓周上，D 點在圓內，E 點圓外，L 為過 B 點之切線。根據圖中∠1、∠2、∠3、∠4 的位置，判斷下列哪一個角的角度最大？
(A) ∠1　(B) ∠2　(C) ∠3　(D)∠4　　(95-1)

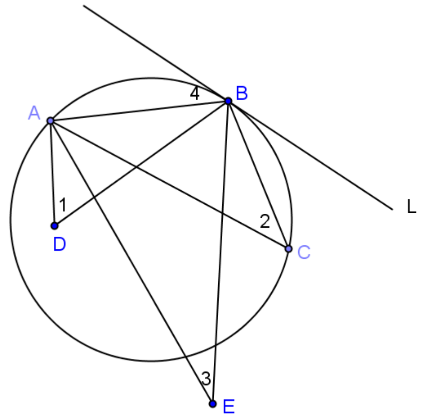


圖 7.5

解答： (A) ∠1

想法： (1) 圓周角等於所對弧度的一半
(2) 弦切角等於弦與切線所夾弧度的一半
(3) 三角形外角大於任一內對角

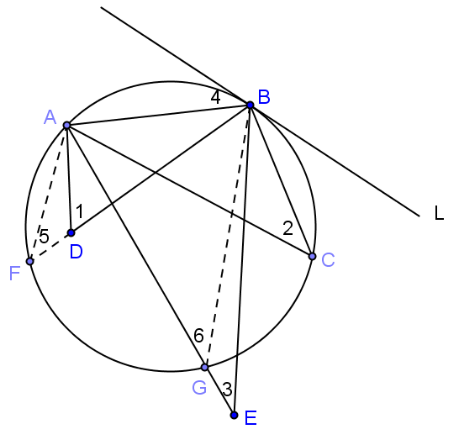


圖 7.5(a)

解：

敘述	理由
(1) 作$\overline{BD}$延長線交圓周於 F 點，作$\overline{AF}$、$\overline{BG}$，如圖 7.5(a)	作圖
(2) $\angle 2=\angle 4=\angle 5=\angle 6=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$	圓周角等於所對弧度的一半　& 弦切角等於弦與切線所夾弧度的一半
(3) △ADF 中，∠1＞∠5	三角形外角大於任一內對角

(4) △BEG 中，∠6＞∠3	三角形外角大於任一內對角
(5) ∠1＞∠2＝∠4 ＞∠3	由(2)、(3)、(4) 遞移律
(6) 所以本題選(A) ∠1 最大	由(5)

6. 如圖 7.6，圓弧上有五個點 A、B、C、M、N。比較∠MAN、∠MBN、∠MCN 的大小關係，下列敘述何者正確？(93-1)

(A) ∠MAN＝∠MBN＝∠MCN　(B) ∠MBN＞∠MCN＞∠MAN

(C) ∠MAN＞∠MCN＞∠MBN　(D) ∠MAN＝∠MCN＞∠MBN

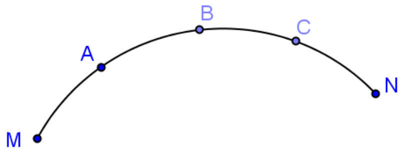


圖 7.6

解答：(A) ∠MAN＝∠MBN＝∠MCN

想法： 等弧對等圓周角定理

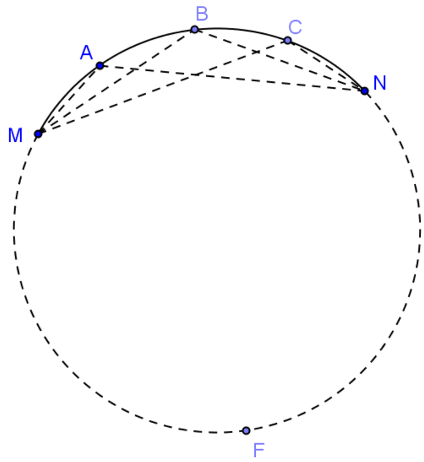


圖 7.6(a)

解：

敘述	理由
(1) 過 A、B、C 三點作一圓，如圖 7.6(a)所示	過三點可作一圓
(2) ∠MAN＝∠MBN＝∠MCN＝$\frac{1}{2}\overset{\frown}{MFN}$	∠MAN、∠MBN、∠MCN 三角都對相同的$\overset{\frown}{MFN}$ ＆ 等弧對等圓周角

7. 如圖 7.7，$\overline{AB}$為圓 O 的直徑，P、Q、R、S 為圓周上相異四點。下列敘述何者正確？(92-1)

(A) ∠APB 為銳角　　(B) ∠AQB 為直角

(C) ∠ARB 為鈍角　　(D) ∠ASB＜∠ARB

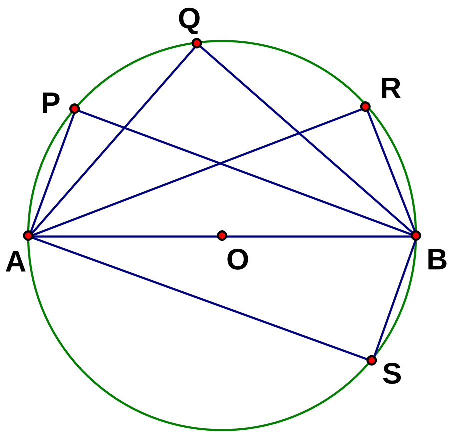


圖 7.7

解答：(B) ∠AQB 為直角

想法：直徑所對的圓周角為直角

解：

敘述	理由
(1) ∠APB、∠AQB、∠ARB、∠ASB 皆為直角	已知$\overline{AB}$為圓 O 的直徑 & 直徑所對的圓周角為直角
(2) 所以本題答案選(B) ∠AQB 為直角	由(1)

8. 如圖 7.8，$\overline{AD}$是圓 O 的直徑，B、C 兩點在$\overset{\frown}{AD}$上，如要在$\overset{\frown}{BC}$上取一點 M，使得$\overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{CM}$，則下列四個作法中，哪一個是<u>錯誤</u>的？(91-1)

(A) 作 ∠BAC 之平分線交$\overset{\frown}{BC}$於 M

(B) 作$\overline{BC}$中垂線交$\overset{\frown}{BC}$於 M

(C) 作 A 與$\overline{BC}$的中點連線，延長交$\overset{\frown}{BC}$於 M

(D) 作 O 與$\overline{BC}$的中點連線，延長交$\overset{\frown}{BC}$於 M

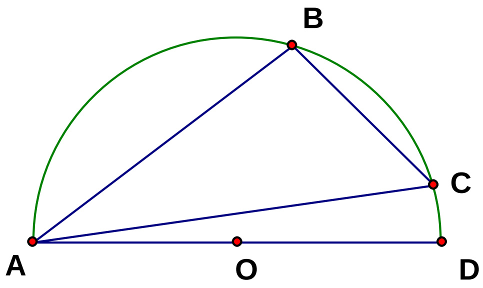
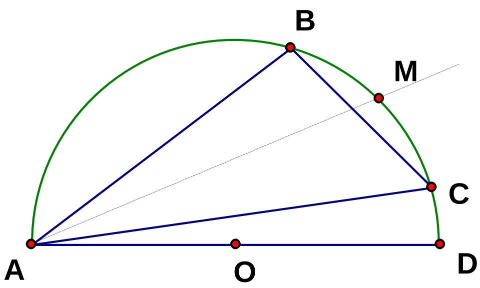
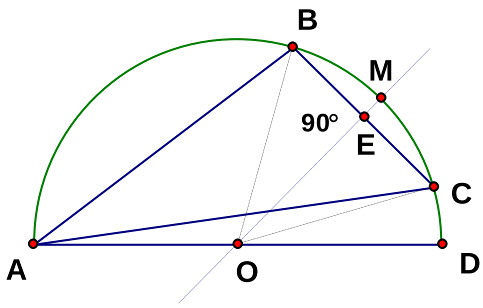


圖 7. 8

解答： (C)

想法： 依題意作圖，再證明正確性

解：

敘述	理由
1. (A)正確  **圖 7.8(a)**	如圖 7.8(a) $\angle BAM=\angle CAM=\frac{1}{2}\angle BAC$ (作圖) $\therefore \overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{CM}$ (等圓周角對等弧)
2. (B)正確  **圖 7.8(b)**	如圖 7.8(b) $\overline{BC}$的中垂線必通過圓心 O (弦的中垂線過圓心) △OBC 為等腰三角形 (同圓半徑等長$\overline{OB}=\overline{OC}$) $\angle BOM=\angle COM=\frac{1}{2}\angle BOC$ (等腰三角形底邊中垂線平分頂角) $\therefore \overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{CM}$ (等圓心角對等弧)

3. (C)錯誤

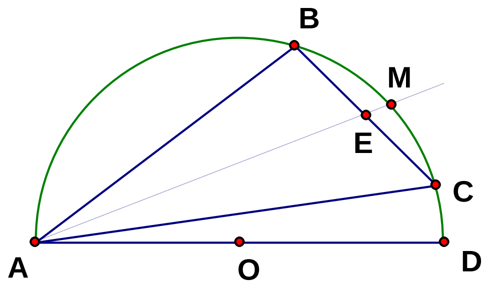


圖 7.8(c)

4. (D)正確

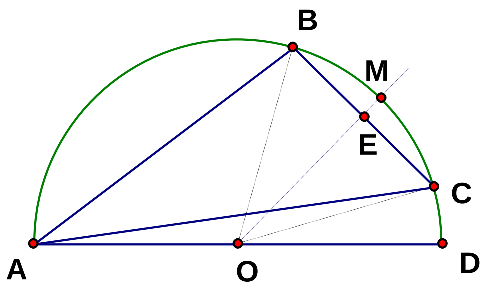


圖 7.8(d)

如圖 7.8(d)

$\overline{BC}$的中點與圓心的連線與弦垂直

(弦的中垂線過圓心)

△OBC 為等腰三角形

(同圓半徑等長$\overline{OB}=\overline{OC}$)

$\angle BOM=\angle COM=\dfrac{1}{2}\angle BOC$

(等腰三角形底邊中垂線平分頂角)

$\therefore \overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{CM}$ (等圓心角對等弧)

9. 同一平面上圓 O_1 及圓 O_2 的半徑各為 2 公分及 4 公分，且$\overline{O_1O_2}$＝7 公分，則下列哪一個圖可以表示圓 O_1 與圓 O_2 的位置關係？　　(90-1)

(A)

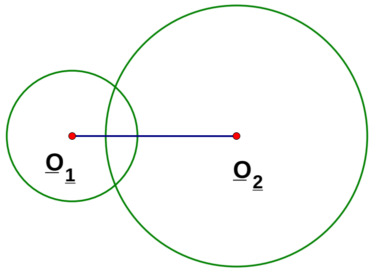


圖 7.9(a)

(B)

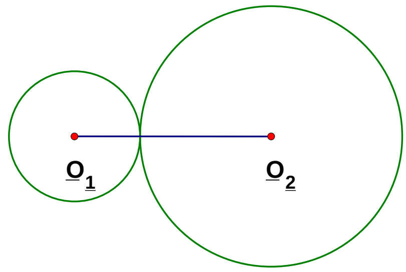


圖 7.9(b)

(C)

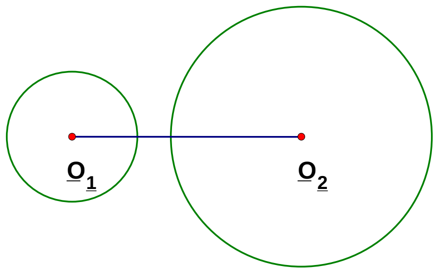


圖 7.9(c)

(D)

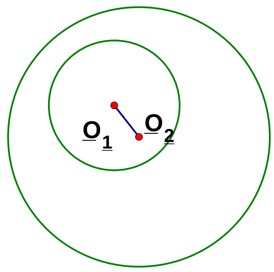


圖 7.9(d)

解： (C)

想法：判斷兩圓關係的規則如下：

1. 若連心線長＞兩半徑和，則兩圓外離。
2. 若連心線長＝兩半徑和，則兩圓外切。
3. 若兩半徑差＜連心線長＜兩半徑和，則兩圓相交於兩點。
4. 若連心線長＝兩半徑差，則兩圓內切。
5. 若連心線長＜兩半徑差，則兩圓內離。
6. 若連心線長＝0，則兩圓為同心圓。

解：

敘述	理由
(1) $\overline{O_1O_2}$＝7 公分＞(2＋4) 公分＝6 公分	已知$\overline{O_1O_2}$＝7 公分 & 圓 O_1 及圓 O_2 的半徑各為 2 公分及 4 公分
(2) 圓 O_1 及圓 O_2 外離	由(1) & 連心線長＞兩半徑和，則兩圓外離
(3) 所以本題選(C)	由(2)