目錄

第六章 多邊形

6.1 節　四邊形

定義 6.1-1 四邊形

由四線段兩兩相連於端點所圍成的圖形為四邊形。

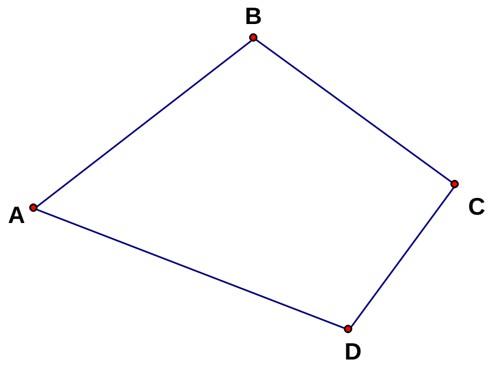


圖 6.1-1 四邊形

定義 6.1-2 梯形

梯形為一組對邊平行的四邊形。
平行的兩邊為底，其中一邊為上底，另一邊為下底。
若不平行的兩邊等長則為等腰梯形。
梯形之高為平行兩邊的垂直距離。

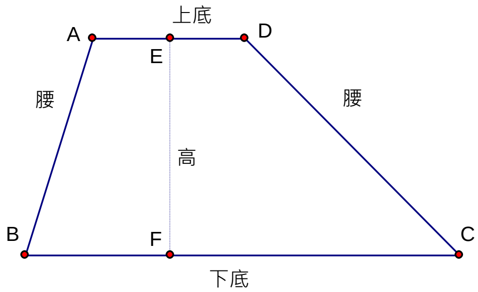


圖 6.1-2: 梯形

圖 6.1-2 中的四邊形 ABCD 為一梯形，其中$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，$\overline{AD}$為上底，$\overline{BC}$為下底，$\overline{AB}$和$\overline{CD}$為梯形的兩個腰，$\overline{EF}$為梯形的高。

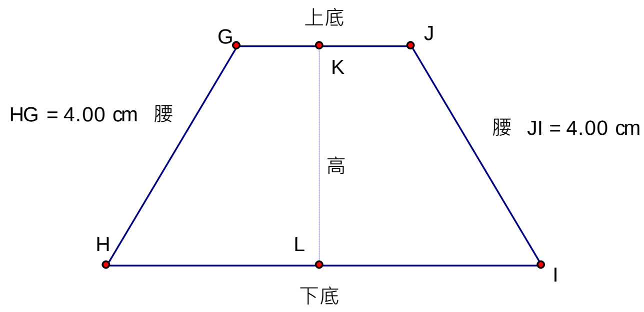


圖 6.1-3 等腰梯形

圖 6.1-3 中梯形 GHIJ 的兩個腰$\overline{HG}$和$\overline{JI}$等長，故 GHIJ 為一等腰梯形。

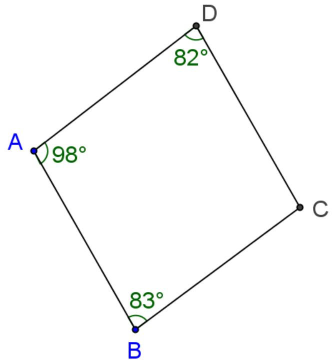
例題 6.1-1：

下圖四邊形 ABCD 中，$\angle D=82°$、$\angle A=98°$、$\angle B=83°$，則：

(1) $\overline{AB}$與$\overline{CD}$是否平行？為什麼？

(2) $\overline{AD}$與$\overline{BC}$是否平行？為什麼？

(3) 四邊形 ABCD 是哪一種四邊形？為什麼？



想法：(1) 兩直線平行的條件為：1. 同位角相等
2. 內錯角相等
3. 同側內角互補

(2) 梯形為一組對邊平行的四邊形

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	已知$\angle D=82°$、$\angle A=98°$ & $\angle A+\angle D=98°+82°=180°$(同側內角互補)
(2) $\overline{AD}$與$\overline{BC}$不平行	已知$\angle A=98°$、$\angle B=83°$ & $\angle A+\angle B=98°+83°=181°$(同側內角不互補)
(3) 四邊形 ABCD 是梯形	梯形定義

定義 6.1-3 平行四邊形

二組對邊都平行的四邊形稱為平行四邊形(如圖 6.1-4)，其中$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$且$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$。

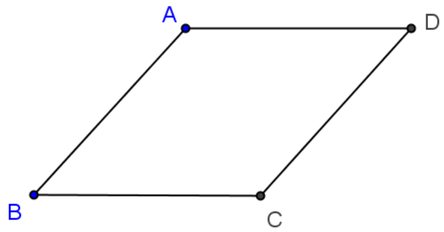


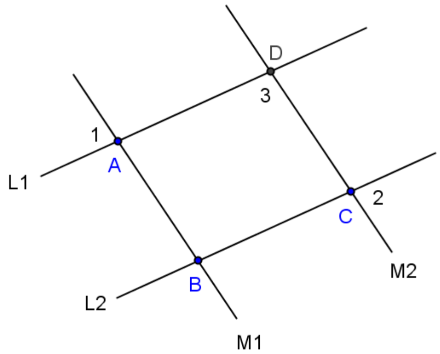
圖 6.1-4 平行四邊形

例題 6.1-2：

如下圖，$L_1 \parallel L_2$，$M_1 \parallel M_2$，四條直線互相交於 A、B、C、D 四點，已知$\angle 1 = 63°$，則

(1) ABCD 是哪一種四邊形？

(2) 求$\angle 2$、$\angle 3$。



想法：(1) 二組對邊都平行的四邊形為平行四邊形

(2) 若兩直線平行，則：1. 同位角相等

2. 內錯角相等

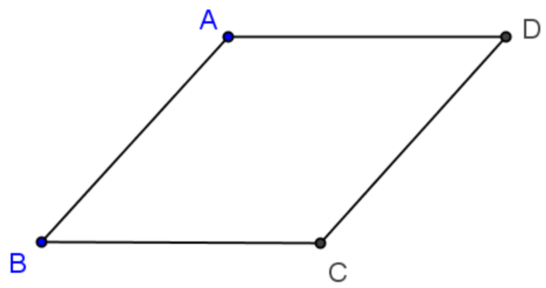
3. 同側內角互補

解：

敘述	理由
(1) ABCD 是平行四邊形	已知 $L_1 \parallel L_2$，$M_1 \parallel M_2$ & 平行四邊形定義
(2) $\angle DAB = \angle 1 = 63°$	對頂角相等 & 已知$\angle 1 = 63°$
(3) $\angle DAB + \angle 3 = 180°$	已知 $M_1 \parallel M_2$ & 同側內角互補
(4) $\angle 3 = 180° - \angle DAB = 117°$	由(3)移項 & (2) $\angle DAB = 63°$
(5) $\angle DCB + \angle 3 = 180°$	已知 $L_1 \parallel L_2$ & 同側內角互補
(6) $\angle DCB = 180° - \angle 3 = 63°$	由(5)移項 & (4) $\angle 3 = 117°$
(7) $\angle 2 = \angle DCB = 63°$	對頂角相等 & (6) $\angle DCB = 63°$

例題 6.1-3：

已知：四邊形 ABCD 中，$\angle A=132°$，$\angle B=48°$，$\angle C=132°$，$\angle D=48°$
求證：ABCD 為平行四邊形



想法：(1) 兩直線平行的條件為：1. 同位角相等
2. 內錯角相等
3. 同側內角互補

(2) 二組對邊都平行的四邊形為平行四邊形

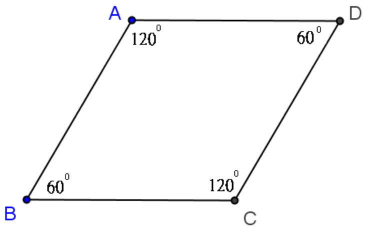
證明：

敘述	理由
(1) $\angle B+\angle C=48°+132°=180°$	已知$\angle B=48°$，$\angle C=132°$
(2) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	由(1) & 同側內角互補則兩直線互相平行
(3) $\angle A+\angle B=132°+48°=180°$	已知$\angle A=132°$，$\angle B=48°$
(4) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	由(3) & 同側內角互補則兩直線互相平行
(5) ABCD 是平行四邊形	由(2) & (4) & 平行四邊形定義(兩組對邊平行的四邊形為平行四邊形)

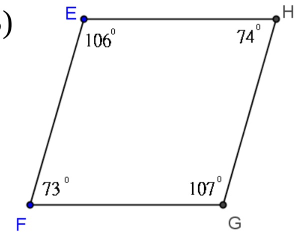
例題 6.1-4：

試問下列四個四邊形中，哪一個<u>不是</u>平行四邊形？

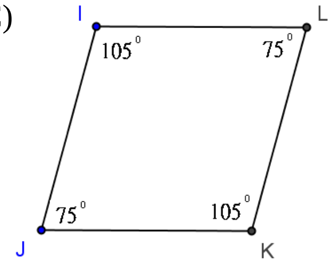
(A)



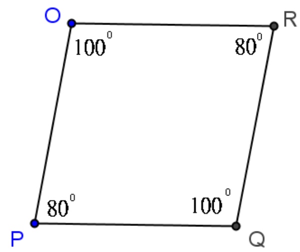
(B)



(C)



(D)



想法：(1) 兩直線平行的條件為：1. 同位角相等

2. 內錯角相等

3. 同側內角互補

(2) 二組對邊都平行的四邊形為平行四邊形

解：

敘述	理由
(1) 四邊形 ABCD 中	如圖(A)
(2) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	$\angle A+\angle D=180°$，同側內角互補
(3) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	$\angle A+\angle B=180°$，同側內角互補
(4) 四邊形 ABCD 為平行四邊形	由(2) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ & (3) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
(5) 四邊形 EFGH 中	如圖(B)
(6) $\overline{EF} \parallel \overline{HG}$	$\angle E+\angle H=180°$，同側內角互補
(7) $\overline{EH}$不平行$\overline{FG}$	$\angle E+\angle F\neq 180°$
(8) 四邊形 EFGH 為梯形	由(6) $\overline{EF} \parallel \overline{HG}$ & (7) $\overline{EH}$不平行$\overline{FG}$
(9) 四邊形 IJKL 中	如圖(C)
(10) $\overline{IL} \parallel \overline{JK}$	$\angle I+\angle J=180°$，同側內角互補

(11) $\overline{IJ} \parallel \overline{LK}$	∠I＋∠L＝180°，同側內角互補
(12) 四邊形 IJKL 為平行四邊形	由(10) $\overline{IL} \parallel \overline{JK}$ & (11) $\overline{IJ} \parallel \overline{LK}$
(13) 四邊形 OPQR 中	如圖(D)
(14) $\overline{OP} \parallel \overline{QR}$	∠O＋∠R＝180°，同側內角互補
(15) $\overline{OR} \parallel \overline{PQ}$	∠O＋∠P＝180°，同側內角互補
(16) 四邊形 OPQR 為平行四邊形	由(14) $\overline{OP} \parallel \overline{QR}$ & (15) $\overline{OR} \parallel \overline{PQ}$
(17) 因此本題選(B)	由(1)~(16)

定義 6.1-4 菱形

四邊相等的平行四邊形叫菱形(如圖 6.1-5)，其中$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$、$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$且$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{AD}$。

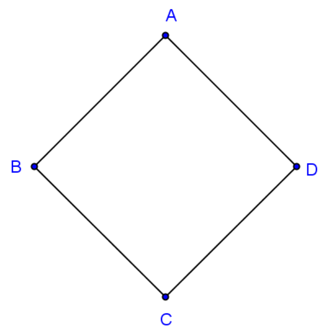


圖 6.1-5 菱形

定義 6.1-5 長方形(矩形)

平行四邊形的四個角都是直角稱為長方形或矩形(如圖 6.1-6)，其中$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$、$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$且∠A＝∠B＝∠C＝∠D＝90°。

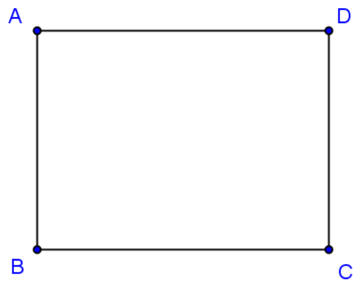


圖 6.1-6 矩形

定義 6.1-6 正方形

四邊都相等的矩形就叫正方形(如圖 6.1-7) ，其中$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$、$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$且$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$且$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$。

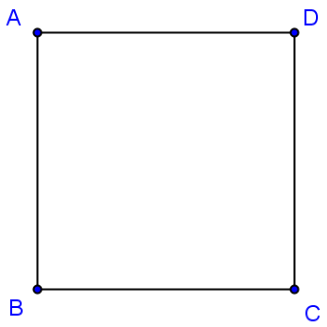


圖 6.1-7 正方形

定義 6.1-7 鳶形

兩組鄰邊相等的四邊形就叫鳶形，也叫做箏形，其中$\overline{AB} = \overline{AD}$且$\overline{BC} = \overline{CD}$。

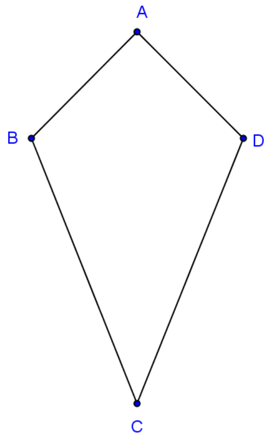
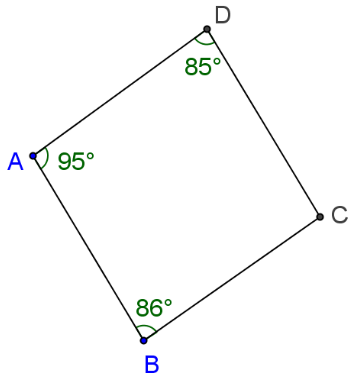


圖 6.1-8 鳶形

習題 6.1

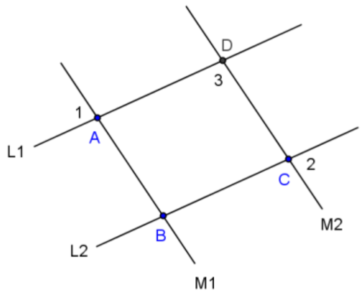
習題 6.1-1

下圖四邊形 ABCD 中，∠D＝85°、∠A＝95°、∠B＝86°，則：
(1) $\overline{AB}$與$\overline{CD}$是否平行？為什麼？
(2) $\overline{AD}$與$\overline{BC}$是否平行？為什麼？
(3) 四邊形 ABCD 是哪一種四邊形？為什麼？



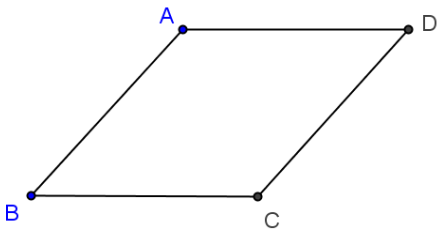
習題 6.1-2

如下圖，$L_1 \parallel L_2$，$M_1 \parallel M_2$，四條直線互相交於 A、B、C、D 四點，已知∠1＝65°，則
(1) ABCD 是哪一種四邊形？
(2) 求∠2、∠3。



習題 6.1-3

已知：四邊形 ABCD 中，∠A＝135°，∠B＝45°，∠C＝135°，∠D＝45°
求證：ABCD 為平行四邊形



習題 6.1-4

試證明平行四邊形若有一角為直角，則為矩形。

習題 6.1-5

若一平行四邊形的兩鄰邊相等，試證明此四邊形為正方形或菱形。

習題 6.1-6

試證矩形的對角線相等。

6.2 節 平行四邊形的性質

定理 6.2-1 平行四邊形性質定理(一)

平行四邊形的對邊相等及對角相等。

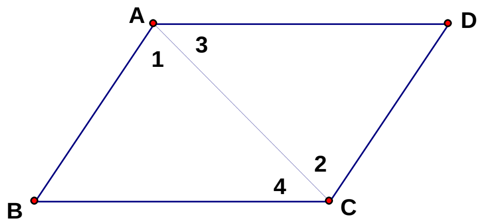


圖 6.2-1 平行四邊形

已知：如圖 6.2-1，ABCD 為平行四邊形($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$)。

求證：(1) $\overline{AB}=\overline{CD}$， $\overline{CB}=\overline{AD}$。

(2) $\angle ABC=\angle CDA$，$\angle BAD=\angle DCB$。

想法：利用兩全等三角形之對應邊相等及對應角相等的性質。

證明：

敘述	理由
(1) 連接 A 點及 C 點	作圖
(2) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	平行四邊形的對邊平行
(3) $\angle 1=\angle 2$	由(2) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ & 兩平行線的內錯角相等
(4) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	平行四邊形的對邊平行
(5) $\angle 3=\angle 4$	由(4) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ & 兩平行線的內錯角相等
(6) 在△ABC 與△C D A 中 $\angle 1=\angle 2$ $\overline{AC}=\overline{CA}$ $\angle 3=\angle 4$	如圖所示 由(3) 已證 共同邊 由(5) 已證
(7) △ABC ≅ △CDA	由(6) & 根據 A.S.A 三角形全等定理
(8) $\overline{AB}=\overline{CD}$， $\overline{CB}=\overline{AD}$	由(7) & 全等三角形的對應邊相等
(9) $\angle ABC=\angle CDA$	由(7) & 全等三角形的對應角相等
(10) $\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$ $\therefore \angle BAD=\angle DCB$	由(3)式 ＋ (5)式 & 等量相加 如圖 $\angle BAD=\angle 1+\angle 3$、$\angle DCB=\angle 2+\angle 4$

Q. E. D.

例題 6.2-1：

若一平行四邊形的三邊長分別為 4、7、4，則第四個邊長為__________。

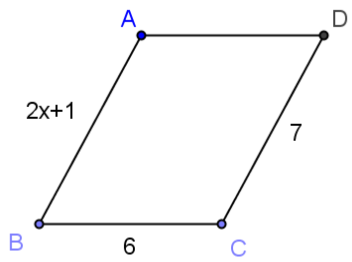
想法：利用平行四邊形兩組對邊等長，求出第四個邊

解：

敘述	理由
(1) 第四個邊長為 7	平行四邊形兩組對邊等長

例題 6.2-2：

如下圖，平行四邊形 ABCD 中，若 $\overline{AB}=2x+1$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CD}=7$，求 x＝？



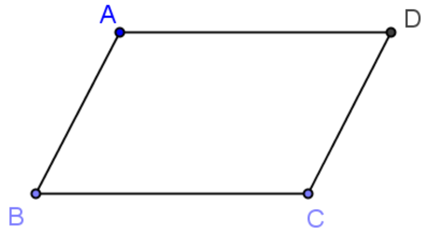
想法：利用平行四邊形兩組對邊等長，求 x 之值

解：

敘述	理由
(1) $\overline{CD}=\overline{AB}$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 對邊相等
(2) $7=2x+1$	由(1) & 已知 $\overline{AB}=2x+1$，$\overline{CD}=7$
(3) $x=3$	由(2) & 解一元一次方程式

例題 6.2-3：

如下圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB}+\overline{CD}=20$，$\overline{BC}+\overline{DA}=30$，求$\overline{AB}+\overline{BC}$。



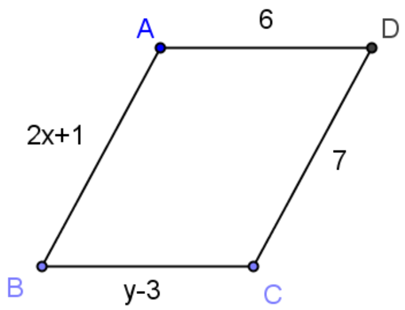
想法：利用平行四邊形兩組對邊等長，分別求出$\overline{AB}$與$\overline{BC}$，再算$\overline{AB}+\overline{BC}$之值

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}=\overline{CD}$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 對邊相等
(2) $\overline{AB}+\overline{CD}=20$	已知
(3) $\overline{AB}+\overline{AB}=20$	將(1) $\overline{CD}=\overline{AB}$ 代入(2)
(4) $\overline{AB}=10$	由(3) & 解一元一次方程式
(5) $\overline{DA}=\overline{BC}$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 對邊相等
(6) $\overline{BC}+\overline{DA}=30$	已知
(7) $\overline{BC}+\overline{BC}=30$	將(5) $\overline{DA}=\overline{BC}$代入(6)
(8) $\overline{BC}=15$	由(7) &解一元一次方程式
(9) $\overline{AB}+\overline{BC}=10+15=25$	由(4) $\overline{AB}=10$ & (8) $\overline{BC}=15$

例題 6.2-4：

如下圖，平行四邊形 ABCD 中，$\overline{AD}=6$，$\overline{CD}=7$，$\overline{AB}=2x+1$，$\overline{BC}=y-3$，求 xy。



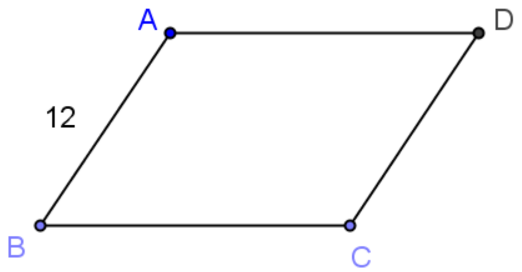
想法：利用平行四邊形兩組對邊等長，分別求出 x 與 y，再算 xy 之值

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}=\overline{CD}$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 對邊相等
(2) $2x+1=7$	由(1) & 已知 $\overline{AB}=2x+1$ & $\overline{CD}=7$
(3) $x=3$	由(2) & 解一元一次方程式
(4) $\overline{BC}=\overline{DA}$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 對邊相等
(5) $y-3=6$	由(4) & 已知 $\overline{BC}=y-3$ & $\overline{DA}=6$
(6) $y=9$	由(5) &解一元一次方程式
(7) $xy=3\times9=27$	由(3) & (6)

例題 6.2-5：

如下圖，平行四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{AD}+\overline{BC}=56$，$\overline{AB}=12$，求$\overline{AD}$。



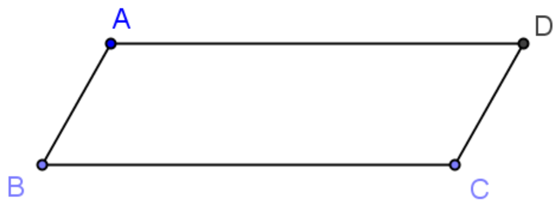
想法：利用平行四邊形兩組對邊相等，求$\overline{AD}$之值

解：

敘述	理由
(1) $\overline{CD}=\overline{AB}$ & $\overline{BC}=\overline{AD}$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 對邊相等
(2) $\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{AD}+\overline{BC}=56$	已知
(3) $\overline{AB}+\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{AD}=56$	將 (1) $\overline{CD}=\overline{AB}$ &$\overline{BC}=\overline{AD}$代入 (2)
(4) $2(\overline{AB}+\overline{AD})=56$	由(3) 整理後提出 2
(5) $\overline{AB}+\overline{AD}=28$	由(4) 等量除法，等式兩邊同除以 2
(6) $12+\overline{AD}=28$	將已知$\overline{AB}=12$ 代入(5) $\overline{AB}+\overline{AD}=28$
(7) $\overline{AD}=28-12=16$	由(6) 移項

例題 6.2-6：

如下圖，平行四邊形 ABCD 中，$3\overline{AB}=\overline{AD}$，且$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{AD}+\overline{BC}=24$，求$\overline{CD}$。



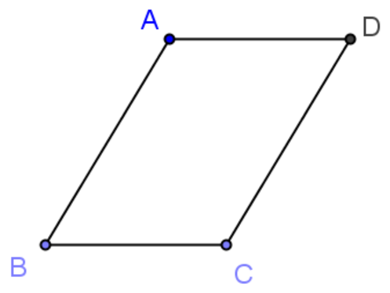
想法：利用平行四邊形兩組對邊相等，求$\overline{CD}$之值

解：

敘述	理由
(1) $\overline{CD}=\overline{AB}$ & $\overline{BC}=\overline{AD}$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 對邊相等
(2) $\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{AD}+\overline{BC}=24$	已知
(3) $\overline{AB}+\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{AD}=24$	將 (1) $\overline{CD}=\overline{AB}$ & $\overline{BC}=\overline{AD}$代入 (2)
(4) $2(\overline{AB}+\overline{AD})=24$	由(3) 整理後提出 2
(5) $\overline{AB}+\overline{AD}=12$	由(4) 等量除法，等式兩邊同除以 2
(6) $\overline{AB}+3\overline{AB}=12$	將已知 $\overline{AD}=3\overline{AB}$ 代入 (5)
(7) $\overline{AB}=3$	由(6) & 解一元一次方程式
(8) $\overline{CD}=\overline{AB}=3$	由(7) $\overline{AB}=3$ & (1) $\overline{CD}=\overline{AB}$

例題 6.2-7：

如下圖，平行四邊形 ABCD 中，$3\overline{AB}=4\overline{BC}$，且$\overline{AB}$和$\overline{BC}$的差為 5，求$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{AD}+\overline{BC}=$？



想法：(1) 利用已知條件求出$\overline{AB}$和$\overline{BC}$ 之值，

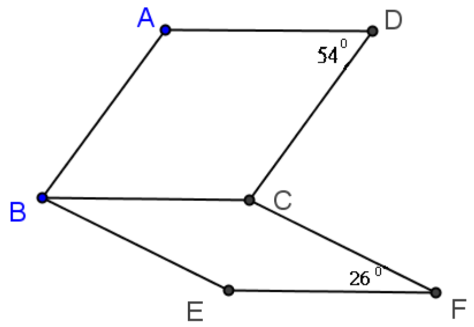
(2) 再利用平行四邊形兩組對邊相等，計算出$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{AD}+\overline{BC}$ 之值

解：

敘述	理由
(1) $\overline{CD}=\overline{AB}$ & $\overline{AD}=\overline{BC}$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 對邊相等
(2) $3\overline{AB}=4\overline{BC}$	已知
(3) $\overline{AB}=\dfrac{4}{3}\overline{BC}$	由(2) 等號兩邊同$\times\dfrac{1}{3}$
(4) $\overline{AB}>\overline{BC}$	由(3)
(5) $\overline{AB}=\overline{BC}+5$	已知$\overline{AB}$和$\overline{BC}$的差為 5 & (4) $\overline{AB}>\overline{BC}$
(6) $\dfrac{4}{3}\overline{BC}=\overline{BC}+5$	將(3) $\overline{AB}=\dfrac{4}{3}\overline{BC}$ 代入(5) $\overline{AB}=\overline{BC}+5$
(7) $\overline{BC}=15$	由(6) & 解一元一次方程式
(8) $\overline{AB}=\overline{BC}+5=15+5=20$	將(7) $\overline{BC}=15$ 代入 (5) $\overline{AB}=\overline{BC}+5$
(9) 所以$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{AD}+\overline{BC}$ $=\overline{AB}+\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{BC}$ $=20+20+15+15$ $=70$	題目所求列式 將(1) $\overline{CD}=\overline{AB}$ & $\overline{AD}=\overline{BC}$ 代入 將(7) $\overline{BC}=15$ & (8) $\overline{AB}=20$ 代入 加法運算

例題 6.2-8：

如下圖，ABCD 與 BEFC 皆為平行四邊形，已知∠D＝54°，∠F＝26°，求∠ABE。



想法：(1) 利用平行四邊形對角相等，先求出∠ABC 與∠EBC，

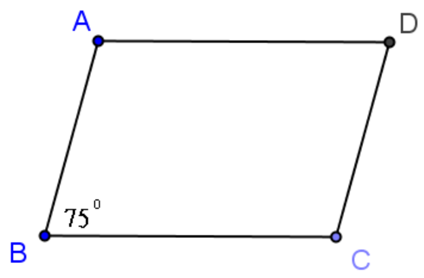
(2) 再相加計算出∠ABE 之值

解：

敘述	理由
(1) ∠ABC＝∠D＝54°	已知 ABCD 為平行四邊形 ＆ 對角相等
(2) ∠EBC＝∠F＝26°	已知 BEFC 為平行四邊形 ＆ 對角相等
(3) ∠ABE＝∠ABC＋∠EBC＝80°	全量等於分量之和 ＆ 由(1) ＆ (2)

例題 6.2-9：

如下圖，平行四邊形 ABCD 中，$\angle B=75°$，求$\angle A$、$\angle C$、$\angle D$。



想法：(1) 先利用平行四邊形對邊互相平行 & 同側內角互補的性質求出$\angle A$後，

(2) 再利用平行四邊形對角相等求出$\angle C$與$\angle D$

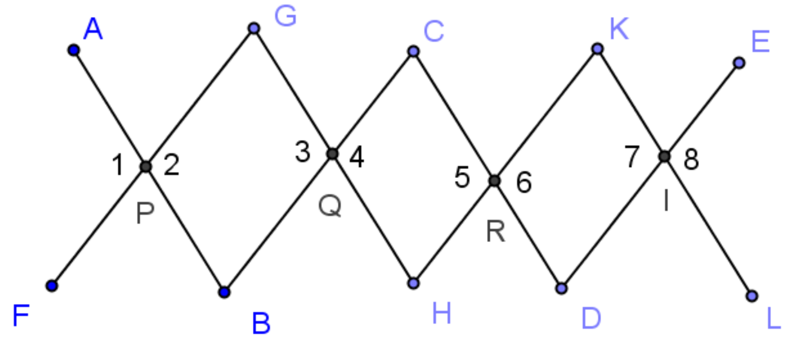
解：

敘述	理由
(1) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 對邊互相平行
(2) $\angle A+\angle B=180°$	由(1) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ & 同側內角互補
(3) $\angle A=180°-\angle B=105°$	由(2) 移項 & 已知$\angle B=75°$
(4) $\angle D=\angle B=75°$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 對角相等 & 已知$\angle B=75°$
(5) $\angle C=\angle A=105°$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 對角相等 & 由(3) $\angle A=105°$ 已證

例題 6.2-10：

如右圖，$\overline{AB} \parallel \overline{GH} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{KL}$，$\overline{FG} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{HK} \parallel \overline{DE}$，如果∠G＝70°，則下列敘述何者正確？

(A)∠1＝70° (B)∠H＝110° (C)∠K＝110° (D)∠8＝110°



想法：(1) 利用平行線同側內角互補先求出∠2 的度數，

(2) 再利用對頂角相等求出∠1 的度數，

(3) 接著利用平行四邊形對角相等的性質求出∠3 的度數，

(4) 最後再反覆利用對頂角相等、同側內角互補與平行四邊形對角相等的性質，依序求出∠4、∠H、∠5、∠6、∠K、∠7 與∠8 之度數

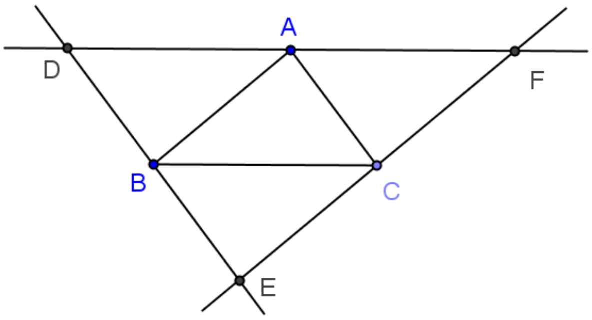
解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB} \parallel \overline{GH} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{KL}$	已知
(2) $\overline{FG} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{HK} \parallel \overline{DE}$	已知
(3) PGQB、QCRH、RKID 皆為平行四邊形	由(1) & (2) 兩組對邊平行為平行四邊形
(4) 在平行四邊形 PGQB 中	如圖所示
(5) ∠G＋∠2＝180°	由(1) $\overline{AB} \parallel \overline{GH}$ & 同側內角互補
(6) 70°＋∠2＝180°	將已知∠G＝70° 代入(5)中
(7) ∠2＝180°－70°＝110°	由(6) 移項
(8) ∠1＝∠2＝110°	對頂角相等 & 由(7) ∠2＝110° 已證
(9) ∠3＝∠2＝110°	由(3) PGQB 為平行四邊形 & 對角相等

(10) 在平行四邊形 QCRH 中	如圖所示
(11) $\angle 4 = \angle 3 = 110°$	對頂角相等 & 由(9) $\angle 3 = 110°$ 已證
(12) $\angle 5 = \angle 4 = 110°$	由(3) QCRH 為平行四邊形 & 對角相等
(13) $\angle H = 180° - \angle 4$	由(2) $\overline{BC} \parallel \overline{HK}$ & 同側內角互補
(14) $\angle H = 180° - 110° = 70°$	將(11) $\angle 4 = 110°$ 代入 (13)
(15) 在平行四邊形 RKID 中	如圖所示
(16) $\angle 6 = \angle 5 = 110°$	對頂角相等 & 由(12) $\angle 5 = 110°$ 已證
(17) $\angle 7 = \angle 6 = 110°$	由(3) RKID 為平行四邊形 & 對角相等
(18) $\angle K = 180° - \angle 6$	由(1) $\overline{CD} \parallel \overline{KL}$ & 同側內角互補
(19) $\angle K = 180° - 110° = 70°$	將(16) $\angle 6 = 110°$ 代入 (18)
(20) $\angle 8 = \angle 7 = 110°$	對頂角相等 & 由(17) $\angle 7 = 110°$ 已證
(21) 所以答案選(D) $\angle 8 = 110°$	由(20) 已證

例題 6.2-11：

如下圖，過△ABC 三頂點作對邊的平行線，三線交於 D、E、F 三點，若∠BAD＝40°，求∠DFE。



想法：(1) 兩組對邊平行為平行四邊形

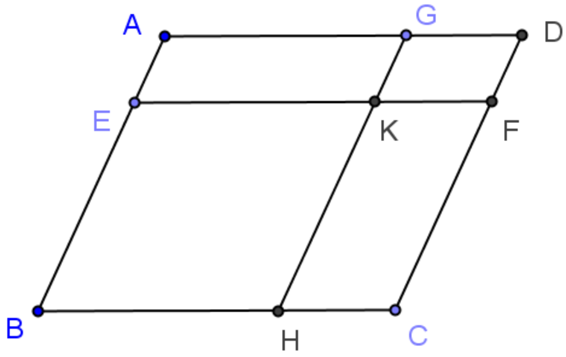
(2) 平行四邊形對角相等

解：

敘述	理由
(1) $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$	已知過△ABC 三頂點作對邊的平行線
(2) ∠ABC＝∠BAD＝40°	由(1) 內錯角相等 & 已知∠BAD＝40°
(3) 四邊形 ABCF 中	如圖所示
(4) $\overline{AF} \parallel \overline{BC}$ & $\overline{CF} \parallel \overline{AB}$	已知過△ABC 三頂點作對邊的平行線
(5) 四邊形 ABCF 為平行四邊形	由(4) 兩組對邊平行為平行四邊形
(6) ∠DFE＝∠AFC＝∠ABC＝40°	由(5) 平行四邊形對角相等

例題 6.2-12：

如下圖，$\overline{AB}//\overline{GH}//\overline{CD}$，$\overline{AD}//\overline{EF}//\overline{BC}$，若∠A＝115°，求∠GKF。



想法：(1) 兩組對邊平行為平行四邊形

(2) 平行四邊形對角相等

解：

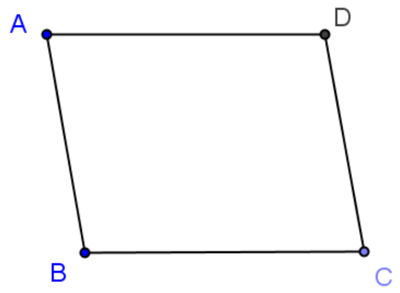
敘述	理由
(1) $\overline{AB} \parallel \overline{GH}$ & $\overline{AD} \parallel \overline{EF}$	已知
(2) AEKG 為平行四邊形	由(1) & 兩組對邊平行為平行四邊形
(3) ∠GKE＝∠A＝115°	由(2) & 平行四邊形對角相等
(4) ∠GKF＋∠GKE＝180°	如圖所示 ∠GKF 與∠GKE 互為補角
(5) ∠GKF＋115°＝180°	由(4) & (3)∠GKE＝115° 已證
(6) ∠GKF＝180°－115°＝65°	由(5) 移項

例題 6.2-13：

如下圖，平行四邊形 ABCD 中，$\angle A=(6x-4)^\circ$，$\angle C=(4x+24)^\circ$，求：

(1) x 之值

(2) $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$



想法：(1) 平行四邊形兩組對角相等

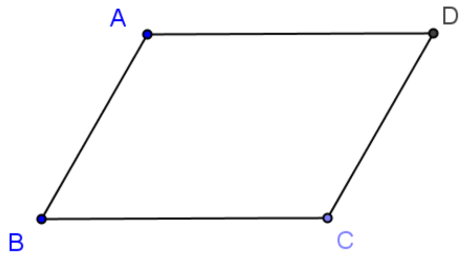
(2) 同側內角互補

解：

敘述	理由
(1) $\angle C=\angle A$	ABCD 為平行四邊形 & 對角相等
(2) $4x+24=6x-4$	由(1) & $\angle C=(4x+24)^\circ$ & $\angle A=(6x-4)^\circ$
(3) $x=14$	由(2) & 解一元一次方程式
(4) $\angle A=(6x-4)^\circ=(6\times 14-4)^\circ=80^\circ$	將(3) 代入$\angle A=(6x-4)^\circ$
(5) $\angle C=(4x+24)^\circ=(4\times 14+24)^\circ=80^\circ$	將(3) 代入$\angle C=(4x+24)^\circ$
(6) $\overline{AD}\parallel\overline{BC}$	ABCD 為平行四邊形 & 對邊平行
(7) $\angle A+\angle B=180^\circ$	由(6) $\overline{AD}\parallel\overline{BC}$ & 同側內角互補
(8) $\angle B=180^\circ-\angle A=100^\circ$	由(7)移項 & (4) $\angle A=80^\circ$已證
(9) $\angle D=\angle B=100^\circ$	ABCD 為平行四邊形 & 對角相等 & 由(8) $\angle B=100^\circ$已證

例題 6.2-14：

如下圖，平行四邊形 ABCD 中，$\angle B=\dfrac{1}{2}\angle A$，求$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$。



想法：(1) 同側內角互補

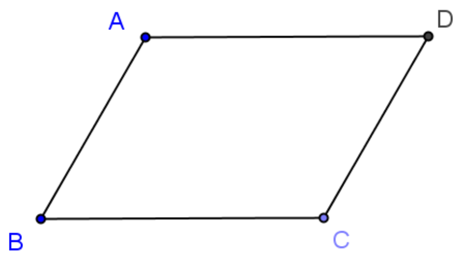
(2) 平行四邊形兩組對角相等

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	ABCD 為平行四邊形 & 對邊互相平行
(2) $\angle A+\angle B=180°$	$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ & 同側內角互補
(3) $\angle A+\dfrac{1}{2}\angle A=180°$	由(2) & 已知$\angle B=\dfrac{1}{2}\angle A$
(4) $\angle A=120°$	由(3) & 解一元一次方程式
(5) $\angle B=\dfrac{1}{2}\angle A=\dfrac{1}{2}\times 120°=60°$	將(4)代入已知$\angle B=\dfrac{1}{2}\angle A$
(6) $\angle C=\angle A=120°$	ABCD 為平行四邊形 & 對角相等 & 由(4) $\angle A=120°$ 已證
(7) $\angle D=\angle B=60°$	ABCD 為平行四邊形 & 對角相等 & 由(5) $\angle B=60°$ 已證

例題 6.2-15：

如下圖，平行四邊形 ABCD 中，若∠A＝∠B＋∠D，求∠C。



想法：(1) 同側內角互補

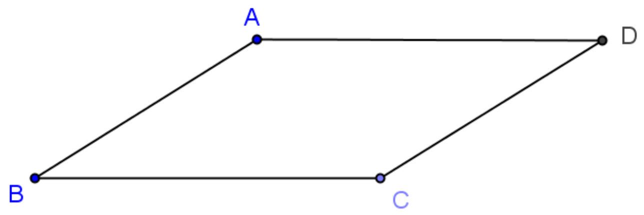
(2) 平行四邊形兩組對角相等

解：

敘述	理由
(1) $\angle D = \angle B$	ABCD 為平行四邊形 & 對角相等
(2) $\angle A = \angle B + \angle D$ $= \angle B + \angle B = 2\angle B$	已知$\angle A = \angle B + \angle D$ & (1) $\angle D = \angle B$ 已證
(3) $\angle B = \frac{1}{2}\angle A$	由(2) & 等式兩邊同乘$\frac{1}{2}$
(4) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	ABCD 為平行四邊形 & 對邊平行
(5) $\angle A + \angle B = 180°$	$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ & 同側內角互補
(6) $\angle A + \frac{1}{2}\angle A = 180°$	由(5) & (3) $\angle B = \frac{1}{2}\angle A$ 已證
(7) $\angle A = 120°$	由(6) & 解一元一次方程式
(8) $\angle C = \angle A = 120°$	ABCD 為平行四邊形 & 對角相等 & 由(7) $\angle A = 120°$ 已證

例題 6.2-16：

如下圖，平行四邊形 ABCD 中，$\angle A=(5y-2)°$，$\angle B=4x°$，$\angle D=32°$，求 $x+y$。



想法：(1) 同側內角互補

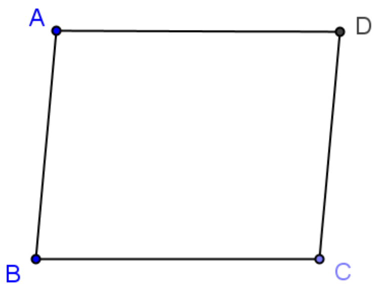
(2) 平行四邊形兩組對角相等

解：

敘述	理由
(1) $\angle B=\angle D$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 對角相等
(2) $4x°=32°$	由(1) & 已知$\angle B=4x°$ & $\angle D=32°$
(3) $x=8$	由(2) & 解一元一次方程式
(4) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 對邊平行
(5) $\angle A+\angle D=180°$	由(4) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ & 同側內角互補
(6) $(5y-2)°+32°=180°$	由(5) & 已知$\angle A=(5y-2)°$ & $\angle D=32°$
(7) $y=30$	由(6) & 解一元一次方程式
(8) $x+y=8+30=38$	由(3) $x=8$ & (7) $y=30$ 已證

例題 6.2-17：

如下圖，平行四邊形 ABCD 中，若∠A 比∠B 大 10°，求∠D。



想法：(1) 同側內角互補

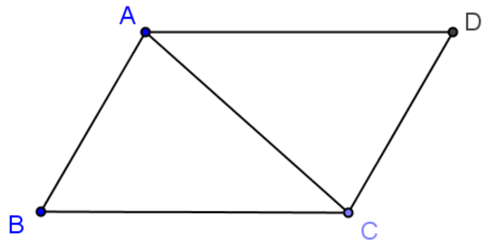
(2) 平行四邊形兩組對角相等

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 對邊平行
(2) ∠A＋∠B＝180°	由(1) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ & 同側內角互補
(3) ∠A＝∠B＋10°	已知∠A 比∠B 大 10°
(4) (∠B＋10°)＋∠B＝180°	將(3)式代入(2)式得
(5) ∠B＝85°	由(4) 解一元一次方程式
(6) ∠D＝∠B＝85°	平行四邊形 ABCD 中，對角相等 & (5) ∠B＝85° 已證

例題 6.2-18：

如下圖，平行四邊形 ABCD 中，$\overline{AC}$為對角線，∠BAC＝95°，∠D＝60°，求∠ACB。



想法：(1) 平行四邊形對角相等

(2) 三角形內角和 180°

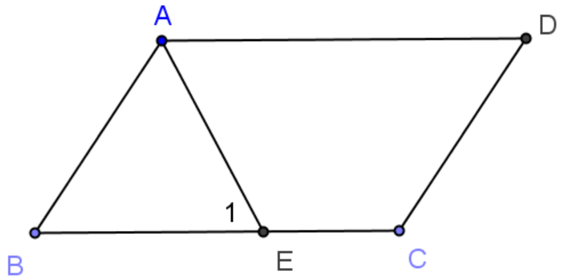
解：

敘述	理由
(1) ∠B＝∠D＝60°	已知 ABCD 為平行四邊形，對角相等 & 已知∠D＝60°
(2) 三角形 ABC 中 ∠ACB＋∠B＋∠BAC＝180°	如圖所示 三角形內角和 180°
(3) ∠ACB＋60°＋95°＝180°	將(1) ∠B＝60° & 已知∠BAC＝95° 代入(2)得
(4) ∠ACB＝180°－60°－95°＝25°	由(4) 移項

例題 6.2-19：

如下圖，平行四邊形 ABCD 中，E 在$\overline{BC}$上，$\overline{AE}$為∠BAD 的角平分線，$\overline{AB}$＝5，$\overline{AD}$＝8，∠D＝56°，求：

(1)∠1　　　(2) $\overline{EC}$



想法：(1) 利用已知∠D＝56° & 平行四邊形鄰角互補可得∠BAD＝124°

(2) 利用已知$\overline{AE}$為∠BAD 的角平分線 & ∠BAD＝124° ，可求得∠BAE＝62°

(3) 利用已知∠D＝56° & 平行四邊形對角相等可得∠B＝∠D＝56°

(4) 利用三角形 ABE 內角和 180° & ∠B＝56°、∠BAE＝62° ，可求得∠1＝62°

(5) 利用∠1＝∠BAE＝62°得知三角形 ABE 為等腰三角形 & 已知$\overline{AB}$＝5，可求得$\overline{BE}$＝$\overline{AB}$＝5

(6) 利用已知$\overline{AD}$＝8 &平行四邊形對邊相等可得$\overline{BC}$＝$\overline{AD}$＝8

(7) 最後利用$\overline{BC}$＝8 & $\overline{BE}$＝5 可求得$\overline{EC}$＝$\overline{BC}$－$\overline{BE}$＝8－5＝3

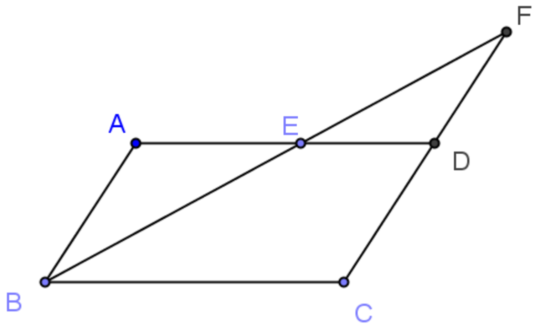
解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 對邊平行
(2) ∠BAD＋∠D＝180°	由(1) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ & 同側內角互補
(3) ∠BAD＝180°－∠D＝180°－56°＝124°	由(2) 移項 & 已知∠D＝56°
(4) ∠BAE＝∠EAD＝$\frac{1}{2}$∠BAD＝$\frac{1}{2}$×124° ＝62°	已知$\overline{AE}$為∠BAD 的角平分線 & (3) ∠BAD＝124° 已證

(5)∠B＝∠D＝56°	已知 ABCD 為平行四邊形 & 對角相等 & 已知∠D＝56°
(6) 三角形 ABE 中 ∠1＋∠BAE＋∠B＝180°	如圖所示 三角形內角和 180°
(7) ∠1＋62°＋56°＝180°	將(4) ∠BAE＝62° 已證 & (5) ∠B＝56° 已證 代入(6)得
(8) ∠1＝180°－62°－56°＝62°	由(7)移項
(9) 三角形 ABE 為等腰三角形	由(4) & (8) ∠1＝∠BAE＝62° & 等底角三角形為等腰三角形
(10) $\overline{BE}$＝$\overline{AB}$＝5	由(9)三角形 ABE 為等腰三角形 &等腰三角形兩腰等長 & $\overline{AB}$＝5
(11) 平行四邊形 ABCD 中 $\overline{BC}$＝$\overline{AD}$＝8	如圖所示 平行四邊形對邊相等 & 已知$\overline{AD}$＝8
(13) $\overline{EC}$＝$\overline{BC}$－$\overline{BE}$＝8－5＝3	如圖所示 & (11) $\overline{BC}$＝8 已證 & (10) $\overline{BE}$＝5 已證

例題 6.2-20：

如下圖，平行四邊形 ABCD 中，∠ABC 的角平分線$\overrightarrow{BE}$交$\overrightarrow{CD}$於 F 點，E 在$\overline{AD}$上，已知$\overline{AB}=10$，$\overline{BC}=18$，求$\overline{ED}$。



想法：(1) 利用$\overrightarrow{BE}$平分∠ABC 可得知∠FBC＝∠ABF＝$\frac{1}{2}$∠ABC

(2) 利用平行四邊形對邊平行($\overline{AB} \parallel \overline{CF}$) &內錯角相等，得知∠F＝∠ABF

(3) 利用平行四邊形對邊平行($\overline{AD} \parallel \overline{BC}$) & 同位角相等，得知∠FED＝∠FBC

(4) 於是我們得到∠F＝∠FBC & ∠F＝∠FED & 兩底角相等為等腰三角形，得到三角形 BCF 與三角形 FED 皆為等腰三角形

(5) 利用三角形 BCF 為等腰三角形，等腰三角形兩腰等長 & 已知$\overline{BC}=18$，得知$\overline{CF}=\overline{CB}=18$

(6) 利用平行四邊形對邊相等 & 已知$\overline{AB}=10$，得知$\overline{CD}=\overline{AB}=10$

(7) 於是我們得到$\overline{FD}=\overline{CF}-\overline{CD}=18-10=8$

(8) 利用三角形 FED 為等腰三角形，等腰三角形兩腰等長 & 已證$\overline{FD}=8$，得知$\overline{ED}=\overline{FD}=8$

解：

敘述	理由
(1) ∠FBC＝∠ABF＝$\frac{1}{2}$∠ABC	已知∠ABC 的角平分線$\overrightarrow{BE}$交$\overrightarrow{CD}$於 F 點
(2) $\overline{AB} \parallel \overline{CF}$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 對邊平行
(3) ∠F＝∠ABF＝∠FBC	由(2) $\overline{AB} \parallel \overline{CF}$ & 內錯角相等 & (1) ∠ABF＝∠FBC
(4) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 對邊平行

(5) ∠FED＝∠FBC	由(4) $\overline{AD}\parallel\overline{BC}$ & 同位角相等
(6) 三角形 FED 中	如圖所示
(7) ∠F＝∠FBC＝∠FED	由(3) & (5) 遞移律
(8) 三角形 FED 為等腰三角形	由(7) ∠F＝∠FED 已證 & 等底角三角形為等腰三角形
(9) $\overline{ED}=\overline{FD}$	由(8) 三角形 FED 為等腰三角形 & 等腰三角形兩腰等長
(10) 三角形 BCF 中	如圖所示
(11) 三角形 BCF 為等腰三角形	由(7) ∠F＝∠FBC 已證 & 等底角三角形為等腰三角形
(12) $\overline{CF}=\overline{BC}=18$	由(11) 三角形 BCF 為等腰三角形 & 等腰三角形兩腰等長 & 已知$\overline{BC}=18$
(13) 平行四邊形 ABCD 中	如圖所示
(14) $\overline{CD}=\overline{AB}=10$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 對邊等長 & 已知$\overline{AB}=10$
(15) $\overline{FD}=\overline{CF}-\overline{CD}=18-10=8$	如圖所示 & (12) $\overline{CF}=18$ 已證 & (14) $\overline{CD}=10$ 已證
(16) $\overline{ED}=\overline{FD}=8$	由(9) $\overline{ED}=\overline{FD}$ 已證 & (15) $\overline{FD}=8$ 已證

定理 6.2-2 平行四邊形性質定理(二)

平行四邊形的對角線互相平分。

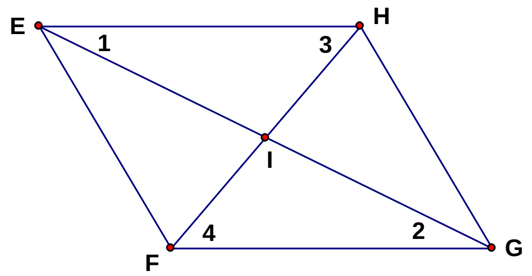


圖 6.2-2

已知：如圖 6.2-2，平行四邊形 EFGH 的兩對角線$\overline{EG}$及$\overline{FH}$相交於 I。

求證： $\overline{EI}=\overline{GI}$ 且 $\overline{FI}=\overline{HI}$

想法：證明 △EHI ≅ △GFI，全等三角形的對應邊相等。

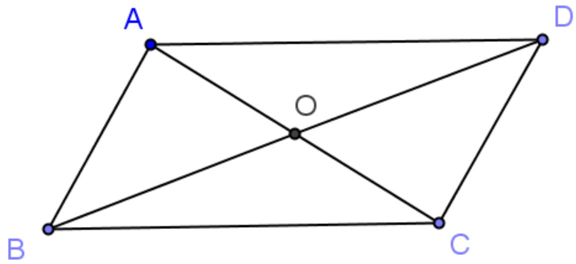
證明：

敘述	理由
(1) ∠1=∠2	平行四邊形對邊平行$\overline{EH} \parallel \overline{FG}$ & 內錯角相等
(2) $\overline{EH}=\overline{GF}$	平行四邊形的對邊相等
(3) ∠3=∠4	平行四邊形對邊平行$\overline{EH} \parallel \overline{FG}$ & 內錯角相等
(4) △EHI ≅ △GFI	由(1)~(3) & 根據 A.S.A. 三角形全等定理
(5) $\overline{EI}=\overline{GI}$ 且 $\overline{FI}=\overline{HI}$	由(4) & 全等三角形的對應邊相等

Q. E. D.

例題 6.2-21：

ABCD 為平行四邊形，兩對角線交於 O 點。如果$\overline{AC}=9$，$\overline{BD}=14$，則$\overline{AO}=$________，$\overline{DO}=$________。



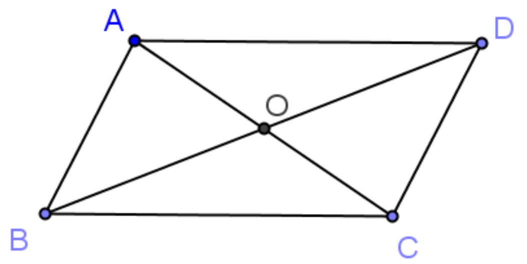
想法：平行四邊形對角線互相平分

解：

敘述	理由
(1) ABCD 為平行四邊形	已知
(2) $\overline{AC}$與$\overline{BD}$為對角線且相交於 O 點	已知
(3) $\overline{OA}=\overline{OC}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times 9=\frac{9}{2}=4.5$	由(1)、(2) & 平行四邊形對角線互相平分 & 已知$\overline{AC}=9$
(4) $\overline{OD}=\overline{OB}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times 14=7$	由(1)、(2) & 平行四邊形對角線互相平分 & 已知$\overline{BD}=14$

例題 6.2-22：

ABCD 為平行四邊形，兩對角線交於 O 點。如果$\overline{BD}$＝12，$\overline{OC}$＝4，則$\overline{OD}$＝_______，$\overline{AC}$＝________。



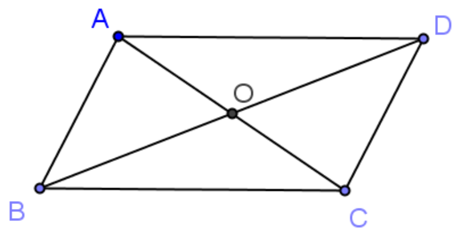
想法：平行四邊形對角線互相平分

解：

敘述	理由
(1) ABCD 為平行四邊形	已知
(2) $\overline{AC}$與$\overline{BD}$為對角線且相交於 O 點	已知
(3) $\overline{OA}=\overline{OC}=\frac{1}{2}\overline{AC}$	由(1)、(2) & 平行四邊形對角線互相平分，$\overline{OA}=\overline{OC}$
(4) $4=\frac{1}{2}\overline{AC}$	由(3) & 已知$\overline{OC}=4$
(5) $\overline{AC}=8$	由(4) & 等式兩邊同乘以 2
(6) $\overline{OD}=\overline{OB}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times 12=6$	由(1)、(2) & 平行四邊形對角線互相平分 & 已知$\overline{BD}=12$

例題 6.2-23：

如下圖，平行四邊形 ABCD 中，對角線$\overline{AC}$和$\overline{BD}$相交於 O 點，
若$\overline{AO}$＝8x＋3，$\overline{OC}$＝9x－1，求$\overline{AC}$。



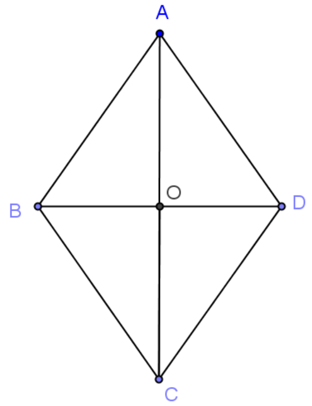
想法：平行四邊形對角線互相平分
解：

敘述	理由
(1) ABCD 為平行四邊形	已知
(2) $\overline{AC}$與$\overline{BD}$為對角線且相交於 O 點	已知
(3) $\overline{OA}=\overline{OC}=\frac{1}{2}\overline{AC}$	由(1)、(2) & 平行四邊形對角線互相平分，$\overline{OA}=\overline{OC}$
(4) 8x＋3＝9x－1	由(3) & 已知$\overline{OA}$＝8x＋3，$\overline{OC}$＝9x－1
(5) x＝4	由(4) & 解一元一次方程式
(6) $\overline{OA}$＝8x＋3＝8×4＋3＝35	將(5) x＝4 代入 已知$\overline{OA}$＝8x＋3
(7) $35=\frac{1}{2}\overline{AC}$	將(6) $\overline{OA}$＝35 代入 (3) $\overline{OA}=\frac{1}{2}\overline{AC}$
(8) $\overline{AC}$＝2×35＝70	由(7) & 等式兩邊同乘以 2

例題 6.2-24：(菱形的兩對角線互相垂直且平分)

如下圖所示，ABCD 為菱形，對角線$\overline{AC}$和$\overline{BD}$相交於 O 點，求證：

(1) $\overline{AC} \perp \overline{BD}$　　　(2) $\overline{OB} = \overline{OD}$、$\overline{OA} = \overline{OC}$



想法：(1) 利用 △ABC ≅ △ADC，得知∠BAC＝∠DAC；

(2) 利用 ABCD 為菱形的定義，得知$\overline{AB} = \overline{AD}$，可得到△ABD 為等腰三角形；

(3) 利用等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊的性質，可得證$\overline{AC} \perp \overline{BD}$且$\overline{OB} = \overline{OD}$；

(4) 同理可證：$\overline{BD} \perp \overline{AC}$且$\overline{OA} = \overline{OC}$。

證明：

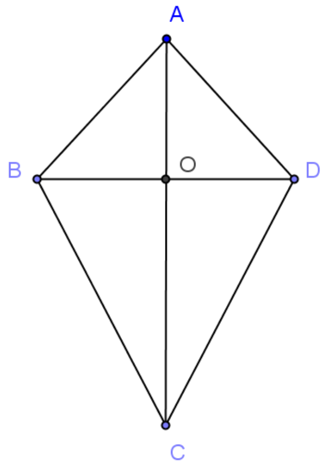
敘述	理由
(1) 在△ABC 與△ADC 中 $\overline{AB} = \overline{AD}$ $\overline{BC} = \overline{DC}$ $\overline{AC} = \overline{AC}$	如圖所示 ABCD 為菱形 & 菱形四邊等長 ABCD 為菱形 & 菱形四邊等長 共同邊
(2) △ABC ≅ △ADC	由(1) & 根據 S.S.S.三角形全等定理
(3) ∠BAC＝∠DAC	由(2) & 對應角相等
(4) △ABD 中，$\overline{AB} = \overline{AD}$	ABCD 為菱形 & 菱形四邊等長
(5) △ABD 為等腰三角形 $\overline{AO}$平分∠BAD	由(4) & 等腰三角形定義 由(3) ∠BAC＝∠DAC 已證
(6) $\overline{AO} \perp \overline{BD}$ (即$\overline{AC} \perp \overline{BD}$) 且$\overline{OB} = \overline{OD}$	由(5) & 等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊

(7) 同理可證： $\overline{DO}\perp\overline{AC}$ （ 即$\overline{BD}\perp\overline{AC}$ ） 且$\overline{OA}=\overline{OC}$	同理：△ABD ≅ △CBD，∠ADB＝∠CDB； △ACD 為等腰三角形，$\overline{DO}$平分∠ADC； 等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊
(8) 所以$\overline{AC}\perp\overline{BD}$ 且 $\overline{OB}=\overline{OD}$、$\overline{OA}=\overline{OC}$	由(6) & (7)

在例題 6.2-24 中，我們得知菱形的對角線互相垂直且平分，因為正方形亦為菱形，所以正方形的兩對角線亦互相垂直且平分。

例題 6.2-25：(鳶形的兩對角線互相垂直)

如下圖所示，ABCD 為鳶形，對角線$\overline{AC}$和$\overline{BD}$相交於 O 點，求證：
(1) $\overline{AC}\perp\overline{BD}$。
(2) $\overline{OB}=\overline{OD}$



想法：(1) 利用 △ABC ≅ △ADC，得知∠BAC＝∠DAC，

(2) 利用 ABCD 為鳶形的定義，得知$\overline{AB}=\overline{AD}$，則△ABD 為等腰三角形，

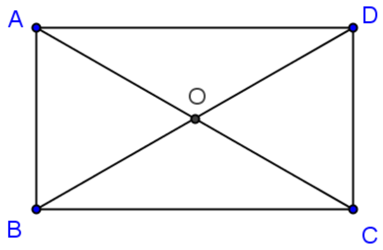
(3) 利用等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊的性質，可得證$\overline{AC}\perp\overline{BD}$且$\overline{OB}=\overline{OD}$。

證明：

敘述	理由
(1) 在△ABC 與△ADC 中 $\overline{AB}=\overline{AD}$ $\overline{BC}=\overline{DC}$ $\overline{AC}=\overline{AC}$	如圖所示 ABCD 為鳶形 & 鳶形鄰邊等長 ABCD 為鳶形 & 鳶形鄰邊等長 共同邊
(2) △ABC ≅ △ADC	由(1) & 根據 S.S.S.三角形全等定理
(3) ∠BAC＝∠DAC	由(2) & 對應角相等
(4) △ABD 中，$\overline{AB}=\overline{AD}$	ABCD 為鳶形 & 鳶形鄰邊等長
(5) △ABD 為等腰三角形 $\overline{AO}$平分∠BAD	由(4) & 等腰三角形定義 由(3) ∠BAC＝∠DAC 已證
(6) $\overline{AO}\perp\overline{BD}$ & $\overline{OB}=\overline{OD}$	由(5) & 等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊
(7) 所以$\overline{AC}\perp\overline{BD}$	由(6) $\overline{AO}\perp\overline{BD}$
(8) 所以$\overline{OB}=\overline{OD}$	由(6) $\overline{OB}=\overline{OD}$

例題 6.2-26：(矩形的兩對角線等長)

如下圖所示，ABCD 為長方形，對角線$\overline{AC}$和$\overline{BD}$相交於 O 點，求證：$\overline{DB}=\overline{AC}$。



想法：利用△ABD ≅ △DCA，可得證$\overline{DB}=\overline{AC}$。

證明：

敘述	理由
(1) 在△ABD 與△DCA 中	如圖所示
$\overline{AB}=\overline{DC}$	ABCD 為長方形 & 長方形對邊等長
∠BAD＝∠CDA＝90°	ABCD 為長方形 & 長方形四個角皆為 90 度
$\overline{AD}=\overline{DA}$	共同邊
(2) △ABD ≅ △DCA	由(1) & 根據 S.A.S.三角形全等定理
(3) $\overline{DB}=\overline{AC}$	由(2) & 對應邊相等

在例題 6.2-26 中，我們得知矩形的兩對角線等長，因為正方形亦為矩形，所以正方形的兩對角線亦等長。

例題 6.2-27：

下列圖形各具有哪些性質？（在空格中打∨）

性質＼圖形	平行四邊形	長方形	菱形	正方形	鳶形
對邊平行					
對邊等長					
對角線等長					
對角線互相平分					
對角線互相垂直					
四角皆為直角					

想法：利用各圖形的性質作答

解：

敘述	理由
(1) 平行四邊形對邊平行	平行四邊形定義
平行四邊形對邊等長	定理 6.2-1
平行四邊形對角線互相平分	定理 6.2-2
(2) 長方形對邊平行	長方形也是平行四邊形
長方形對邊等長	長方形也是平行四邊形
長方形對角線等長	例題 6.2-26
長方形對角線互相平分	長方形也是平行四邊形
長方形四個角皆為直角	長方形定義
(3) 菱形對邊平行	菱形也是平行四邊形
菱形對邊等長	菱形也是平行四邊形
菱形對角線互相平分	菱形也是平行四邊形
菱形對角線互相垂直	例題 6.2-24
(4) 正方形對邊平行	正方形也是平行四邊形
正方形對邊等長	正方形也是平行四邊形
正方形對角線等長	正方形也是長方形
正方形對角線互相平分	正方形也是平行四邊形
正方形對角線互相垂直	正方形也是菱形
正方形四個角皆為直角	正方形也是長方形
(5) 鳶形對角線互相垂直	例題 6.2-25

定理 6.2-3 平行四邊形判別定理(一)

四邊形的一組對邊若平行且相等，則為平行四邊形。

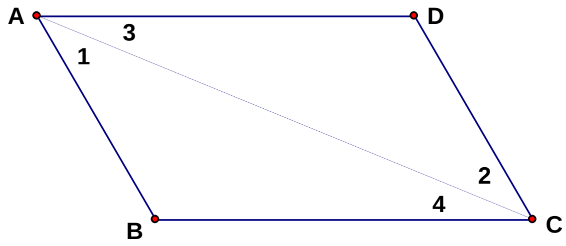


圖 6.2-3

已知：如圖 6.2-3，四邊形 ABCD 中$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$且$\overline{AB}=\overline{CD}$。
求證：ABCD 為平行四邊形。

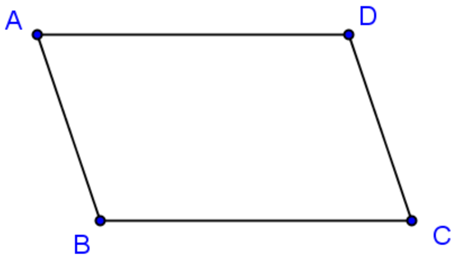
想法：利用兩全等三角形之對應邊相等及對應角相等性質及平行四邊形的定義。
證明：

敘述	理由
(1) 在△ABC 與 △CDA 中 $\angle 1=\angle 2$ $\overline{AB}=\overline{CD}$ $\overline{AC}=\overline{CA}$	如圖所示 已知$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ & 內錯角相等 已知 共同邊
(2) △ABC ≅ △CDA	由(1) & 根據 S.A.S.三角形全等定理
(3) $\angle 3=\angle 4$	由(2) & 全等三角形的對應角相等
(4) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	由(3) & 內錯角相等的兩線平行
(5) 故 ABCD 為平行四邊形	由已知$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ & (4) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 已證 & 平行四邊形的定義

Q. E. D.

例題 6.2-28

如下圖，四邊形 ABCD 中，$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，且$\overline{AB}=8$，$\overline{CD}=8$，則 ABCD 是否為平行四邊形？



想法：一組對邊平行且相等的四邊形為平行四邊形

解：

敘述	理由
(1) 四邊形 ABCD 中 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ $\overline{AB}=\overline{CD}$	如圖所示 已知$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 已知$\overline{AB}=8$，$\overline{CD}=8$
(2) ABCD 為平行四邊形	由(1) & 一組對邊平行且相等的四邊形為平行四邊形定理

定理 6.2-4 平行四邊形判別定理(二)

四邊形的兩組對邊若分別相等，則為平行四邊形。

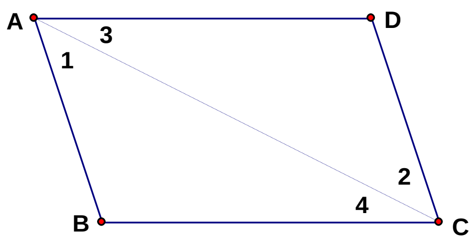


圖 6.2-4

已知：如圖 6.2-4，四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=\overline{CD}$，$\overline{AD}=\overline{BC}$
求證：ABCD 為平行四邊形

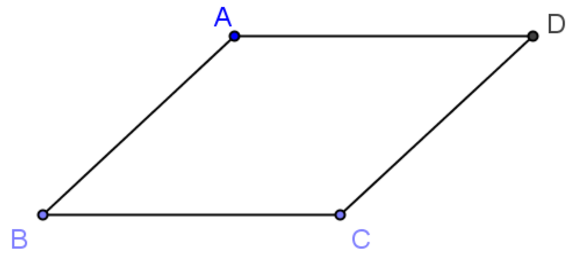
想法：利用全等三角形的對應角相等及內錯角相等則兩線平行的性質。
證明：

敘述	理由
(1) 連接 A，C 兩點作一直線	過兩點可畫一直線。
(2) 在△ABC 與△CDA 中 $\overline{AB}=\overline{CD}$ $\overline{BC}=\overline{DA}$ $\overline{AC}=\overline{CA}$	如圖所示 已知$\overline{AB}=\overline{CD}$ 已知$\overline{AD}=\overline{BC}$ 共同邊
(3) △ABC ≅ △CDA	由(2) & 根據 S.S.S.全等三角形性質
(4) ∠1=∠2，∠3=∠4	全等三角形的對應角相等
(5) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	由(4) & 內錯角相等則兩線平行
(6) 故得 ABCD 為平行四邊形	由(5) & 兩組對邊平行為平行四邊形定義

Q. E. D.

例題 6.2-29：

如下圖，四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=16$，$\overline{BC}=18$，$\overline{CD}=16$，$\overline{AD}=18$，則 ABCD 是否為平行四邊形？



想法：兩組對邊相等的四邊形為平行四邊形

解：

敘述	理由
(1) 四邊形 ABCD 中	如圖所示
$\overline{AB}=\overline{CD}=16$	已知
$\overline{BC}=\overline{DA}=18$	已知
(2) 四邊形 ABCD 為平行四邊形	由(1) & 兩組對邊相等的四邊形為平行四邊形定理

例題 6.2-30：

下列哪一組邊長可以拼成平行四邊形？

(A) 5，6，7，8　　(B) 3，5，5，7

(C) 7，9，9，7　　(D) 6，6，6，7

想法：兩組對邊相等的四邊形為平行四邊形

解：

敘述	理由
(1) 四邊長分別為 7，9，9，7 可拼成平行四邊形	兩組對邊相等的四邊形為平行四邊形定理
(2) 所以答案選(C)	

例題 6.2-31：

阿明用不同長度的棒子當做平行四邊形的四個邊長，則下列哪一組棒子的長度依序以逆時針方向連接起來，無法組成平行四邊形？____________

(A) 4，4，6，6　　(B) 1，4，1，4
(C) 8，8，8，8　　(D) 5，2，5，2

想法：(1) 兩組對邊相等的四邊形為平行四邊形

(2) 相鄰兩邊相等的四邊形為鳶形(箏形)

解：

敘述	理由
(1) 四邊長分別為 1，4，1，4 可拼成平行四邊形	兩組對邊相等的四邊形為平行四邊形定理
(2) 四邊長分別為 8，8，8，8 可拼成菱形，亦為平行四邊形	兩組對邊相等的四邊形為平行四邊形定理
(3) 四邊長分別為 5，2，5，2 可拼成平行四邊形	兩組對邊相等的四邊形為平行四邊形定理
(4) 所以答案選(A) 四邊長分別為 4，4，6，6 可拼成鳶形(箏形)	兩組鄰邊相等的四邊形為鳶形(箏形)

定理 6.2-5 平行四邊形判別定理(三)

四邊形的對角線若互相平分，則為平行四邊形。

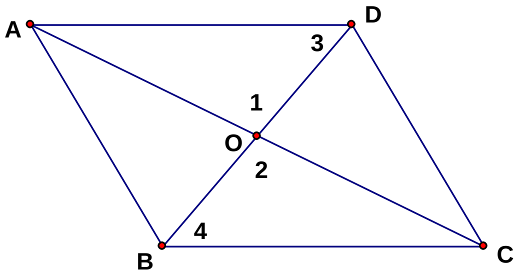


圖 6.2-5

已知： 如圖 6.2-5，四邊形 ABCD，兩對角線$\overline{AC}$和$\overline{BD}$相交於 O，$\overline{AO}=\overline{CO}$且$\overline{BO}=\overline{DO}$。

求證： ABCD 為平行四邊形。

想法： 證明$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$且$\overline{AD}=\overline{BC}$，利用四邊形的一組對邊平行且相等，則為平行四邊形性質。

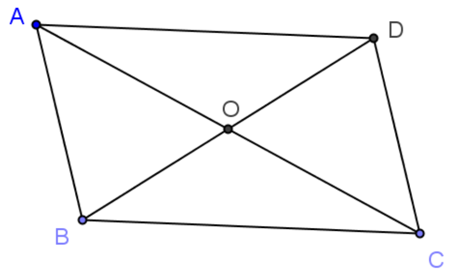
證明：

敘述	理由
(1) 在△AOD 與 △COB $\overline{AO}=\overline{CO}$ $\angle 1=\angle 2$ $\overline{BO}=\overline{DO}$	如圖所示 已知 對頂角相等 已知
(2) △AOD ≅ △COB	由(1) & 根據 S.A.S.全等三角形定理
(3) $\angle 3=\angle 4$	全等三角形的對應角相等
(4) $\overline{AD}=\overline{CB}$	全等三角形的對應邊相等
(5) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	由(3) $\angle 3=\angle 4$ 已證 & 內錯角相等則兩線平行定理
(6) ABCD 為平行四邊形	由(4) & (5) & 四邊形的一組對邊平行且相等，則為平行四邊形定理

Q. E. D.

例題 6.2-32：

如下圖，四邊形 ABCD 中，$\overline{AO}$＝7，$\overline{BO}$＝5.5，$\overline{CO}$＝7，$\overline{DO}$＝5.5，則 ABCD 是否為平行四邊形？



想法：對角線互相平分的四邊形為平行四邊形

解：

敘述	理由
(1) 四邊形 ABCD 中 $\overline{OA}=\overline{OC}=7$ $\overline{OB}=\overline{OD}=5.5$	如圖所示 已知 已知
(2) ABCD 為平行四邊形	由(1) & 對角線互相平分的四邊形為平行四邊形定理

定理 6.2-6 平行四邊形判別定理(四)

四邊形的兩組對角相等，則為平行四邊形。

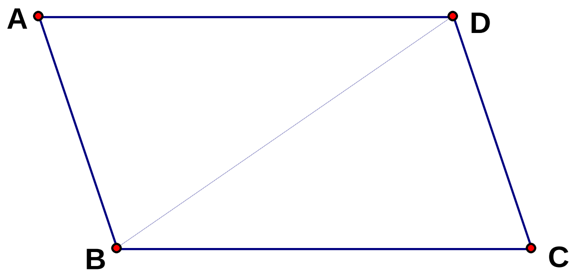


圖 6.2-6

已知：如圖 6.2-6，四邊形 ABCD，兩組對角相等，∠BAD＝∠BCD 且 ∠ABC＝∠ADC。

求證： ABCD 為平行四邊形。

想法：利用同側內角互補之兩線平行證明$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$且$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$，再利用平行四邊形定義：四邊形的兩組對邊平行，則為平行四邊形。

證明：

敘述	理由
(1) ∠BAD＋∠BCD＋∠ABC＋∠ADC＝360°	四邊形可由兩個三角形組成，如圖 6.2-6，每個三角形內角和為 180°，合計 360°。
(2) ∠BAD＋∠BAD＋∠ABC＋∠ABC＝2(∠BAD+∠ABC)＝360°	由(1) & 已知∠BCD＝∠BAD 且∠ADC＝∠ABC & 整理後提出 2
(3) ∠BAD＋∠ABC＝180°	由(2) & 等式兩邊同除以 2
(4) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	由(3) & 同側內角互補之兩線平行
(5) 同理 ∠ABC＋∠BCD＝180°	同(2) & (3) 同理可證
(6) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$	由(5) & 同側內角互補之兩線平行
(7) 所以四邊形 ABCD 為平行四邊形	由(4) & (6) & 兩組對邊平行之平行四邊形定義

Q. E. D.

例題 6.2-33：

當四邊形 PQRS 滿足下列哪一個選項的條件時，才能確定是平行四邊形？

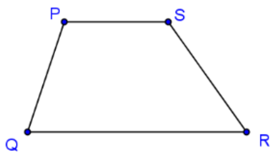
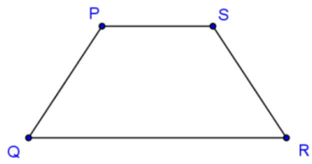
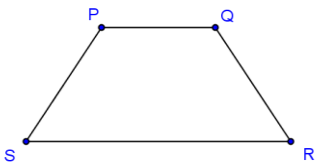
(A) $\angle P+\angle Q=\angle R+\angle S=180°$　　(B) $\overline{PS}\parallel\overline{QR}$，$\overline{PQ}=\overline{RS}$

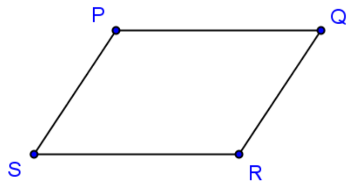
(C) $\angle P=\angle Q$ 且 $\angle R=\angle S$　　(D) $\angle P=\angle R$，$\angle Q=\angle S$

想法：可以判斷平行四邊形之方法有：

1. 根據平行四邊形之定義：兩組對邊平行的四邊形為平行四邊形
2. 兩組對邊相等的四邊形為平行四邊形
3. 一組對邊平行且相等的四邊形為平行四邊形
4. 兩組對角相等的四邊形為平行四邊形
5. 對角線互相平分的四邊形為平行四邊形

解：

敘述	理由
(A) 四邊形 PQRS 中，如圖所示	
$\overline{PS}\parallel\overline{QR}$	$\angle P+\angle Q=\angle R+\angle S=180°$ 同側內角互補
所以 PQRS 為梯形	梯形定義
(B) 四邊形 PQRS 中，如圖所示	
$\overline{PS}\parallel\overline{QR}$ & $\overline{PQ}=\overline{RS}$	已知
所以 PQRS 為等腰梯形	等腰梯形定義
(C) 四邊形 PQRS 中，如圖所示	
$\angle P=\angle Q$ 且 $\angle R=\angle S$	已知
所以 PQRS 為等腰梯形	等腰梯形定義

(D) 四邊形 PQRS 中，如圖所示	
∠P＝∠R，∠Q＝∠S	已知
所以 PQRS 為平行四邊形	兩組對角相等為平行四邊形定理
所以本題選(D)	

例題 6.2-34：

下列四個條件中，哪一個<u>不能</u>用來判定四邊形 ABCD 為平行四邊形？

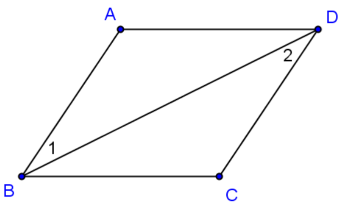
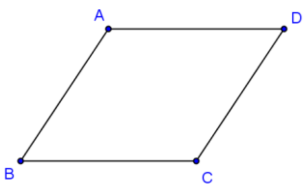
(A) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，$\angle A = \angle C$　　(B) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，$\overline{AB} = \overline{CD}$

(C) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，$\overline{AB} = \overline{CD}$　　(D) $\overline{AB} = \overline{CD}$，$\overline{AD} = \overline{BC}$

想法：可以判斷平行四邊形之方法有：

1. 根據平行四邊形之定義：兩組對邊平行的四邊形為平行四邊形
2. 兩組對邊相等的四邊形為平行四邊形
3. 一組對邊平行且相等的四邊形為平行四邊形
4. 兩組對角相等的四邊形為平行四邊形
5. 對角線互相平分的四邊形為平行四邊形

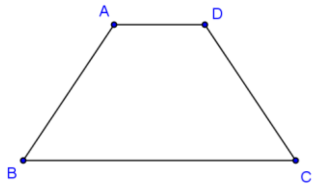
解：

敘述	理由
(A) 四邊形 ABCD 中，如右圖所示 連接 B 點與 D 點	
在△ABD 與△CDB 中	如上圖所示
$\angle A = \angle C$	已知
$\angle 1 = \angle 2$	$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ & 內錯角相等
$\overline{BD} = \overline{DB}$	共同邊
所以△ABD ≅ △CDB	根據 A.A.S.三角形全等性質
所以 $\overline{AB} = \overline{CD}$	對應邊相等
所以四邊形 ABCD 為平行四邊形	$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ & $\overline{AB} = \overline{CD}$ 一組對邊平行且相等的四邊形為平行四邊形定理
(B) 四邊形 ABCD 中，如右圖所示	
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	已知
$\overline{AB} = \overline{CD}$	已知
所以為 ABCD 平行四邊形	一組對邊平行且相等的四邊形為平行四邊形定理

(C) 本選項有兩種情形：

第一種情形：

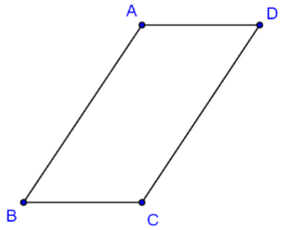
四邊形 ABCD 中，如右圖所示



$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	已知
$\overline{AB}=\overline{CD}$	已知
所以 ABCD 為等腰梯形	等腰梯形定義

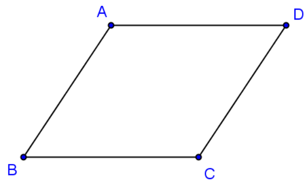
第二種情形：

四邊形 ABCD 中，如右圖所示



$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	已知
$\overline{AB}=\overline{CD}$	已知
所以 ABCD 為平行四邊形	如圖所示

(D) 四邊形 ABCD 中，如右圖所示



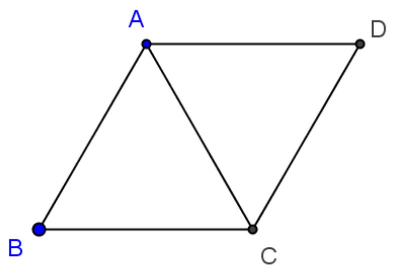
$\overline{AB}=\overline{CD}$	已知
$\overline{AD}=\overline{BC}$	已知
所以為 ABCD 平行四邊形	兩組對邊相等為平行四邊形定理

所以此題選(C)

例題 6.2-35：

如下圖，若△ABC 與△ACD 皆為正三角形，則四邊形 ABCD 為下列何者？

(A) 長方形　(B) 正方形　(C) 平行四邊形　(D) 梯形



想法：1. 一組對邊平行的四邊行為梯形

2. 可以判斷平行四邊形之方法有：
   (1) 根據平行四邊形之定義：兩組對邊平行的四邊形為平行四邊形
   (2) 兩組對邊相等的四邊形為平行四邊形
   (3) 一組對邊平行且相等的四邊形為平行四邊形
   (4) 兩組對角相等的四邊形為平行四邊形
   (5) 對角線互相平分的四邊形為平行四邊形

3. 四個角皆為直角的平行四邊形為長方形

4. 四邊等長的長方形為正方形

解：

敘述	理由
(1) △ABC 與△ACD 中	如圖所示
(2) ∠BAC＝∠DCA＝60°	已知△ABC 與△ACD 皆為正三角形
(3) ∠BCA＝∠DAC＝60°	已知△ABC 與△ACD 皆為正三角形
(4) 所以$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	由(2) ∠BAC＝∠DCA ＆ 內錯角相等的兩直線互相平行
(5) 所以$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	由(3) ∠BCA＝∠DAC ＆ 內錯角相等的兩直線互相平行
(6) 所以 ABCD 為平行四邊形	由(4) ＆ (5) 兩組對邊平行的四邊形為平行四邊形
(7) 所以此題選(C)	

定義 6.2-1 全等形

兩個可以完全重合的圖形就叫做全等形。

定理 6.2-7 平行四邊形全等定理

一平行四邊形的兩邊及其夾角若分別等於另一平行四邊形的兩邊及其夾角，則此二平行四邊形全等。

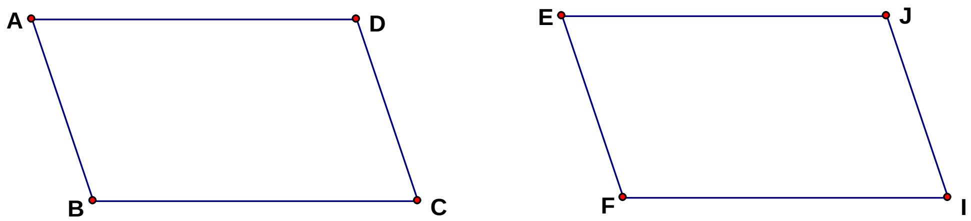


圖 6.2-7

已知：如圖 6.2-7，ABCD 及 EFIJ 為兩平行四邊形，$\overline{AD}=\overline{EJ}$，$\overline{AB}=\overline{EF}$且 $\angle$BAD$=\angle$FEJ

求證：ABCD 及 EFIJ 為兩全等平行四邊形。

想法：利用移形公理，證明兩平行四邊形完全重合。

證明：

敘述	理由
(1) 將平行四邊形 ABCD 移至平行四邊形 EFIJ 上，使$\overline{AB}$與$\overline{EF}$重合，$\overline{AD}$與$\overline{EJ}$重合。	移形公理 & 已知$\overline{AD}=\overline{EJ}$，$\overline{AB}=\overline{EF}$且 $\angle$BAD$=\angle$FEJ。
(2) B 點與 F 點重合，D 點與 J 點重合。	由(1) $\overline{AB}$與$\overline{EF}$重合，$\overline{AD}$與$\overline{EJ}$重合。
(3) $\overline{BC}$與$\overline{FI}$重合。	過 B 點只有$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ & 過 F 點只有$\overline{FI} \parallel \overline{EJ}$。
(4) $\overline{DC}$與$\overline{JI}$重合。	過 D 點只有$\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ & 過 J 點只有$\overline{JI} \parallel \overline{EF}$。
(5) C 點與 I 點重合。	由(3) & (4)相異兩線相交只有一交點。
(6) 平行四邊形 ABCD 與平行四邊形 EFIJ 完全重合。	由(1)~(5)，兩平行四邊形的四邊完全重合。
(7) 所以 ABCD 及 EFIJ 為兩全等平行四邊形。	全等形定義。

Q. E. D.

定理 6.2-8 三角形兩邊中點連線定理

三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半。

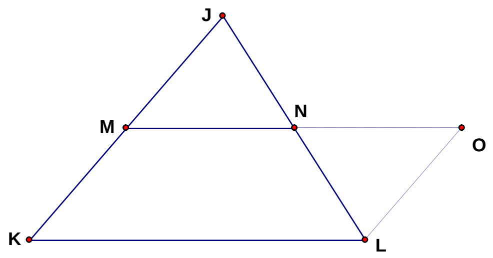


圖 6.2-8

已知： 如圖 6.2-8，△JKL 中，M 為$\overline{JK}$的中點，N 為$\overline{JL}$的中點。

求證： $\overline{MN} \parallel \overline{KL}$且$\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{KL}$

想法： 延長$\overline{MN}$至 O 點，使$\overline{MO}=2\overline{MN}$，然後證明 LKMO 為平行四邊形，

利用平行四邊形對邊相等質可得$\overline{MO}=\overline{KL}$，所以$\overline{MN} \parallel \overline{KL}$且$\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{KL}$。

證明：

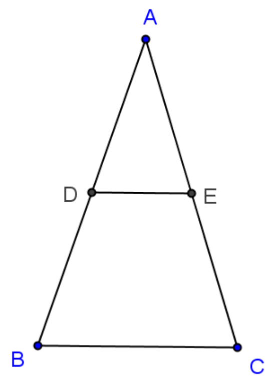
敘述	理由
(1) 延長$\overline{MN}$至 O 點，使$\overline{NO}=\overline{MN}$，即$\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{MO}$	延長線作圖
(2) 連接 L 點與 O 點	過兩點可作一直線
(3) 在△JNM 與 △LNO 中 $\overline{MN}=\overline{ON}$ ∠JNM＝∠LNO $\overline{JN}=\overline{LN}$	如圖所示 由(1)作圖$\overline{NO}=\overline{MN}$ 對頂角相等 已知 N 為$\overline{JL}$中點
(4) △JNM ≅ △LNO	由(3) & 根據 S.A.S. 三角形全等性質
(5) ∠JMN＝∠LON	由(4) & 全等三角形對應角相等
(6) 所以$\overline{JM} \parallel \overline{LO}$	由(5) & 內錯角相等的兩線互相平行
(7) $\overline{JM}=\overline{LO}$	由(4) & 全等三角形對應邊相等
(8) $\overline{JM}=\overline{MK}$	已知 M 為$\overline{JK}$中點

(9) $\overline{MK}=\overline{LO}$	由(7) & (8) 遞移律
(10) 四邊形 MKLO 中 $\overline{MK} \parallel \overline{LO}$ 且 $\overline{MK}=\overline{LO}$	如圖所示 由(6) $\overline{JM} \parallel \overline{LO}$ & (9) $\overline{MK}=\overline{LO}$
(11) 所以 MKLO 為平行四邊形	由(10) &一組對邊平行且相等的四邊形為平行四邊形定理
(12) $\overline{MO} \parallel \overline{KL}$ (即 $\overline{MN} \parallel \overline{KL}$)	由(11) & 平行四邊形的對邊平行
(13) $\overline{MO}=\overline{KL}$	由(11) & 平行四邊形的對邊等長
(14) $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{KL}$	由(1) $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{MO}$ & (13) $\overline{MO}=\overline{KL}$
(15) 所以$\overline{MN} \parallel \overline{KL}$ 且 $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{KL}$	由(12) $\overline{MN} \parallel \overline{KL}$ & (14) $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{KL}$

Q. E. D.

例題 6.2-36：

如下圖，△ABC 中，D、E 分別是 $\overline{AB}$ 及$\overline{AC}$ 的中點。若$\overline{BC}=6$，則 $\overline{DE}=$______。



想法：三角形的兩邊中點連線等於第三邊的一半

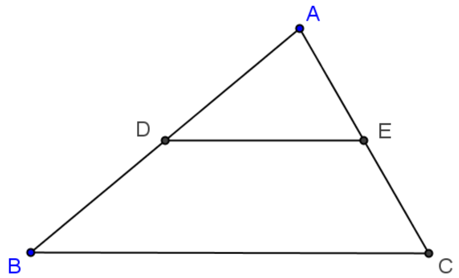
解：

敘述	理由
(1) △ABC 中， D、E 分別是$\overline{AB}$、$\overline{AC}$的中點	如圖所示 已知
(2) $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 6=3$	由(1) & 三角形的兩邊中點連線等於第三邊的一半 & 已知$\overline{BC}=6$

例題 6.2-37：

如下圖，△ABC 中，已知 D、E 分別是$\overline{AB}$、$\overline{AC}$的中點。若$\overline{DE}$＝5，∠B＝40°，∠A＝80°，則：

(1) $\overline{BC}$＝？　　(2) ∠AED＝？



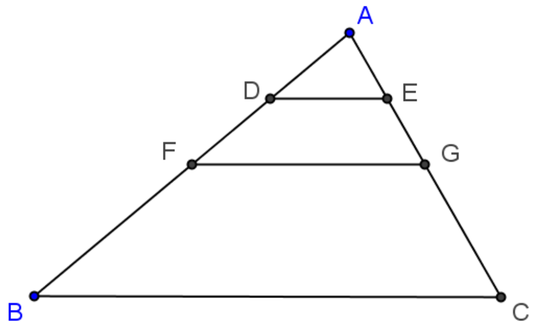
想法：三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半

解：

敘述	理由
(1) △ABC 中， D、E 分別是$\overline{AB}$、$\overline{AC}$的中點	如圖所示 已知
(2) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ & $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BC}$	由(1) & 三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半
(3) 所以$\overline{BC}=2\overline{DE}=2\times5=10$	由(2) $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BC}$ & 已知$\overline{DE}=5$
(4) △ABC 中， ∠A＋∠B＋∠C＝180°	如圖所示 三角形內角和 180°
(5) 80°＋40°＋∠C＝180°	由(4) & 已知 ∠A＝80°，∠B＝40°
(6) ∠C＝180°－80°－40°＝60°	由(5) & 移項
(7) ∠AED＝∠C＝60°	由(2) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 已證 & 同位角相等 & (6) ∠C＝60° 已證

例題 6.2-38：

如下圖，△ABC 中，F、G 分別為 $\overline{AB}$ 及 $\overline{AC}$ 的中點，D、E 分別為 $\overline{AF}$ 及 $\overline{AG}$ 的中點。若$\overline{BC}=12$，則 $\overline{FG}+\overline{DE}=$______。



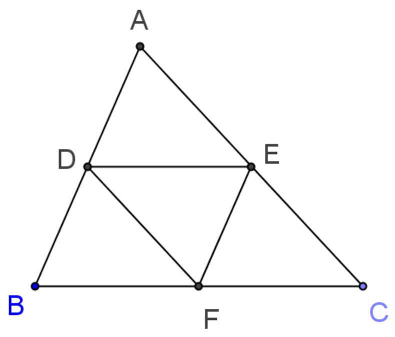
想法：三角形的兩邊中點連線等於第三邊的一半

解：

敘述	理由
(1) △ABC 中， F、G 分別是$\overline{AB}$、$\overline{AC}$的中點	如圖所示 已知
(2) $\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times12=6$	由(1) & 三角形的兩邊中點連線等於第三邊的一半 & 已知$\overline{BC}=12$
(3) △AFG 中， D、E 分別是$\overline{AF}$、$\overline{AG}$的中點	如圖所示 已知
(4) $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{FG}=\frac{1}{2}\times6=3$	由(3) & 三角形的兩邊中點連線等於第三邊的一半 & (2) $\overline{FG}=6$ 已證
(5) $\overline{FG}+\overline{DE}=6+3=9$	由(2) $\overline{FG}=6$ & (4) $\overline{DE}=3$ 已證

例題 6.2-39：

如下圖，有一三角形的荷花池 ABC，取三邊中點 D、E、F，建三座橋 $\overline{DE}$、$\overline{DF}$、$\overline{EF}$。已知橋的長度 $\overline{DE}=6$ 公尺，$\overline{DF}=5$ 公尺，$\overline{EF}=4$ 公尺，那麼$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=$？



想法：三角形的兩邊中點連線等於第三邊的一半

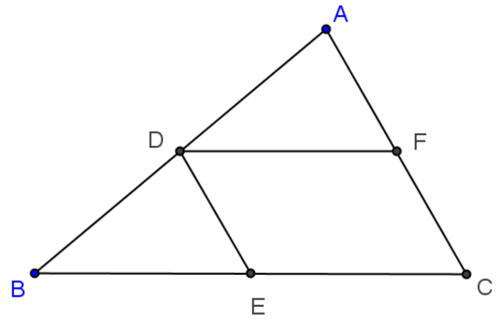
解：

敘述	理由
(1) △ABC 中 D、E 分別是$\overline{AB}$、$\overline{AC}$的中點	如圖所示 已知
(2) $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BC}$	由(1) & 三角形的兩邊中點連線等於第三邊的一半
(3) $6=\frac{1}{2}\overline{BC}$	由(2) & 已知$\overline{DE}=6$ 公尺
(4) $\overline{BC}=2\times 6=12$ 公尺	由(3) 等式兩邊同乘以 2
(5) △ABC 中 E、F 分別是$\overline{CA}$、$\overline{CB}$的中點	如圖所示 已知
(6) $\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{AB}$	由(5) & 三角形的兩邊中點連線等於第三邊的一半
(7) $4=\frac{1}{2}\overline{AB}$	由(6) & 已知$\overline{EF}=4$ 公尺
(8) $\overline{AB}=2\times 4=8$ 公尺	由(7) & 等式兩邊同乘以 2
(9) △ABC 中 D、F 分別是$\overline{BA}$、$\overline{BC}$的中點	如圖所示 已知

(10) $\overline{DF}=\frac{1}{2}\overline{AC}$	由(9) & 三角形的兩邊中點連線等於第三邊的一半
(11) $5=\frac{1}{2}\overline{AC}$	由(10) & 已知$\overline{DF}=5$ 公尺
(12) $\overline{AC}=2\times5=10$ 公尺	由(11) & 等式兩邊同乘以 2
(13) 所以$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$ $=8$ 公尺$+12$ 公尺$+10$ 公尺 $=30$ 公尺	由(4) & (8) & (12) 加法

例題 6.2-40：

如下圖所示，已知 D、E、F 分別是$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$的中點，$\overline{AB}=80$，$\overline{BC}=88$，$\overline{AC}=72$，則$\overline{DF}+\overline{FC}+\overline{CE}+\overline{ED}=$？



想法：三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半

解：

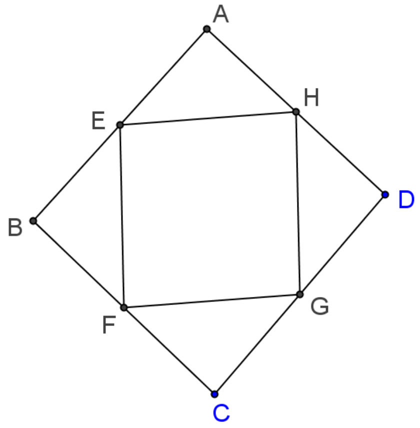
敘述	理由
(1) △ABC 中 D、F 分別是$\overline{AB}$、$\overline{AC}$的中點	如圖所示 已知
(2) $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$ & $\overline{DF}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 88=44$	由(1) & 三角形的兩邊中點連線平行等於第三邊的一半 & $\overline{BC}=88$
(3) D、E 分別是$\overline{AB}$、$\overline{BC}$的中點	已知
(4) $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ & $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times 72=36$	由(3) & 三角形的兩邊中點連線平行等於第三邊的一半 & $\overline{AC}=72$
(5) 四邊形 DECF 中 $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$ & $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$	如圖所示 由(2) $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$ & (4) $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ 已證
(6) DECF 為平行四邊形	由(5) & 兩組對邊平行為平行四邊形
(7) $\overline{CE}=\overline{DF}=44$ & $\overline{FC}=\overline{ED}=36$	由(6) & 平行四邊形兩組對邊相等 & (2) $\overline{DF}=44$ & (4) $\overline{ED}=36$
(8) 所以$\overline{DF}+\overline{FC}+\overline{CE}+\overline{ED}$ $=44+36+44+36=160$	由(7) 加法

例題 6.2-41：(四邊形四邊中點連線所成的四邊形為平行四邊形)

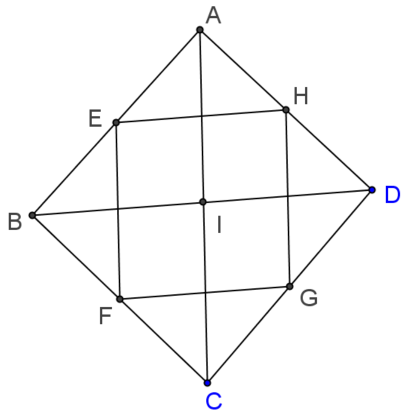
如下圖，E、F、G、H 是四邊形 ABCD 四邊的中點。若四邊形 ABCD 的對角線和為 68，則：

(1) 四邊形 EFGH 為何種四邊形？

(2) $\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{EH}=$？



想法：三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半



圖(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接 A 點與 C 點，連接 B 點與 D 點，且$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 I 點，如上圖(a)所示	兩不平行直線必相交於一點
(2) $\overline{AC}+\overline{BD}=68$	已知四邊形 ABCD 的對角線和為 68
(3) △ABD 中 $\overline{EH} \parallel \overline{BD}$ & $\overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{BD}$	如圖所示 已知 E、H 分別是$\overline{AB}$、$\overline{AD}$的中點 & 三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半

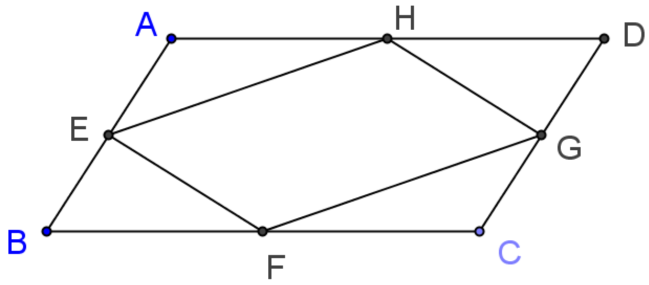
(4) △CBD 中 $\overline{FG} \parallel \overline{BD}$ & $\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{BD}$	如圖所示 已知 F、G 分別是$\overline{CB}$、$\overline{CD}$的中點 & 三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半
(5) △ABC 中 $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$ & $\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{AC}$	如圖所示 已知 E、F 分別是$\overline{BA}$、$\overline{BC}$的中點 & 三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半
(6) △ACD 中 $\overline{GH} \parallel \overline{AC}$ & $\overline{GH}=\frac{1}{2}\overline{AC}$	如圖所示 已知 G、H 分別是$\overline{DC}$、$\overline{DA}$的中點 & 三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半
(7) $\overline{EH} \parallel \overline{FG} \parallel \overline{BD}$ & $\overline{EF} \parallel \overline{GH} \parallel \overline{AC}$	由(3) $\overline{EH} \parallel \overline{BD}$、(4) $\overline{FG} \parallel \overline{BD}$ & (5) $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$、(6) $\overline{GH} \parallel \overline{AC}$ 遞移律
(8) 所以四邊形 EFGH 為平行四邊形	由(7) $\overline{EH} \parallel \overline{FG}$ & $\overline{EF} \parallel \overline{GH}$ & 兩組對邊平行為平行四邊形
(9) 所以$\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{EH}$ $=\frac{1}{2}\overline{AC}+\frac{1}{2}\overline{BD}+\frac{1}{2}\overline{AC}+\frac{1}{2}\overline{BD}$ $=\overline{AC}+\overline{BD}=68$	題目所求 由(3) $\overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{BD}$、(4) $\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{BD}$ (5) $\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{AC}$、(6) $\overline{GH}=\frac{1}{2}\overline{AC}$ & (2) $\overline{AC}+\overline{BD}=68$

例題 6.2-42： (平行四邊形四邊中點連線所成的四邊形為平行四邊形)

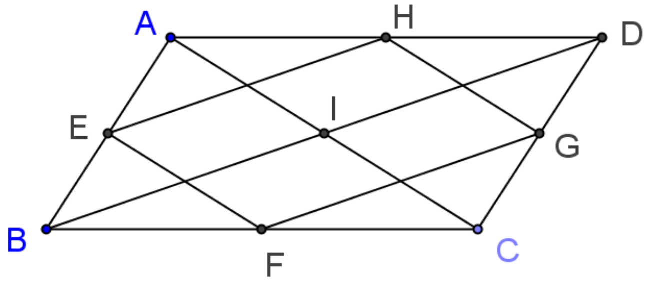
如下圖，E、F、G、H 是平行四邊形 ABCD 四邊的中點。若平行四邊形 ABCD 的對角線和為 48，則：

(1) 四邊形 EFGH 為何種四邊形？

(2) $\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{EH}=$？



想法：三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半



圖(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接 A 點與 C 點，連接 B 點與 D 點，且$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 I 點，如上圖(a)所示	兩不平行直線必相交於一點
(2) $\overline{AC}+\overline{BD}=48$	已知四邊形 ABCD 的對角線和為 48
(3) △ABD 中 $\overline{EH}\parallel\overline{BD}$ & $\overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{BD}$	如圖所示 已知 E、H 分別是$\overline{AB}$、$\overline{AD}$的中點 & 三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半
(4) △CBD 中 $\overline{FG}\parallel\overline{BD}$ & $\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{BD}$	如圖所示 已知 F、G 分別是$\overline{CB}$、$\overline{CD}$的中點 & 三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半

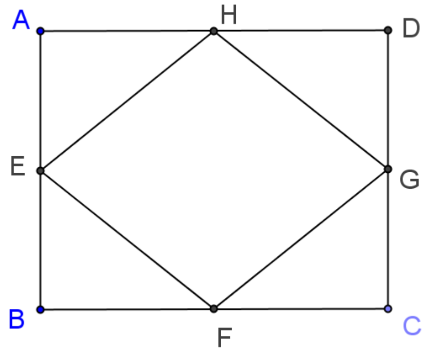
(5) △ABC 中 $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$ & $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{AC}$	如圖所示 已知 E、F 分別是$\overline{BA}$、$\overline{BC}$的中點 & 三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半
(6) △ACD 中 $\overline{GH} \parallel \overline{AC}$ & $\overline{GH} = \frac{1}{2}\overline{AC}$	如圖所示 已知 G、H 分別是$\overline{DC}$、$\overline{DA}$的中點 & 三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半
(7) $\overline{EH} \parallel \overline{FG} \parallel \overline{BD}$ & $\overline{EF} \parallel \overline{GH} \parallel \overline{AC}$	由(3) $\overline{EH} \parallel \overline{BD}$、(4) $\overline{FG} \parallel \overline{BD}$ & (5) $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$、(6) $\overline{GH} \parallel \overline{AC}$ 遞移律
(8) 所以四邊形 EFGH 為平行四邊形	由(7) $\overline{EH} \parallel \overline{FG}$ & $\overline{EF} \parallel \overline{GH}$ & 兩組對邊平行為平行四邊形
(9) 所以$\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{EH}$ $=\frac{1}{2}\overline{AC}+\frac{1}{2}\overline{BD}+\frac{1}{2}\overline{AC}+\frac{1}{2}\overline{BD}$ $=\overline{AC}+\overline{BD}=48$	題目所求 由(3) $\overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{BD}$、(4) $\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{BD}$ (5) $\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{AC}$、(6) $\overline{GH}=\frac{1}{2}\overline{AC}$ & (2) $\overline{AC}+\overline{BD}=48$

例題 6.2-43： (矩形四邊中點連線所成的四邊形為菱形)

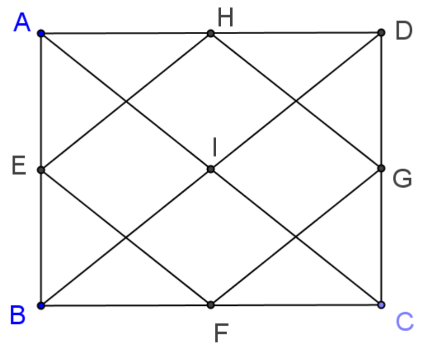
如下圖，E、F、G、H 是矩形 ABCD 四邊的中點。若矩形 ABCD 的對角線和為 24，則：

(1) 四邊形 EFGH 為何種四邊形？

(2) $\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{EH}=$？



想法：三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半



圖(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接 A 點與 C 點，連接 B 點與 D 點，且$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 I 點，如上圖(a)所示	兩不平行直線必相交於一點
(2) $\overline{AC}+\overline{BD}=24$	已知四邊形 ABCD 的對角線和為 24
(3) $\overline{AC}=\overline{BD}$	已知 ABCD 為矩形 ＆ 矩形對角線相等
(4) △ABD 中 $\overline{EH} \parallel \overline{BD}$ ＆ $\overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{BD}$	如圖所示 已知 E、H 分別是$\overline{AB}$、$\overline{AD}$的中點 ＆ 三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半

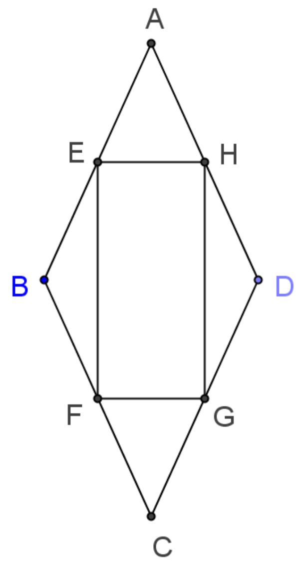
(5) △CBD 中 $\overline{FG} \parallel \overline{BD}$ & $\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{BD}$	如圖所示 已知 F、G 分別是$\overline{CB}$、$\overline{CD}$的中點 & 三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半
(6) △ABC 中 $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$ & $\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{BD}$	如圖所示 已知 E、F 分別是$\overline{BA}$、$\overline{BC}$的中點 & 三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半 & (3) $\overline{AC}=\overline{BD}$
(7) △ACD 中 $\overline{GH} \parallel \overline{AC}$ & $\overline{GH}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{BD}$	如圖所示 已知 G、H 分別是$\overline{DC}$、$\overline{DA}$的中點 & 三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半 & (3) $\overline{AC}=\overline{BD}$
(8) $\overline{EH} \parallel \overline{FG} \parallel \overline{BD}$、$\overline{EF} \parallel \overline{GH} \parallel \overline{AC}$ & $\overline{EH}=\overline{FG}=\overline{EF}=\overline{GH}=\frac{1}{2}\overline{BD}$	由(4)、(5)、(6) & (7) 遞移律
(9) 所以四邊形 EFGH 為菱形	由(8) $\overline{EH} \parallel \overline{FG}$、$\overline{EF} \parallel \overline{GH}$、 $\overline{EH}=\overline{FG}=\overline{EF}=\overline{GH}$ & 四邊等長的平行四邊形為菱形
(10)所以$\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{EH}$ $=\frac{1}{2}\overline{AC}+\frac{1}{2}\overline{BD}+\frac{1}{2}\overline{AC}+\frac{1}{2}\overline{BD}$ $=\overline{AC}+\overline{BD}=24$	題目所求 由(4) $\overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{BD}$、(5) $\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{BD}$ (6) $\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{AC}$、(7) $\overline{GH}=\frac{1}{2}\overline{AC}$ & (2) $\overline{AC}+\overline{BD}=24$

例題 6.2-44：(菱形四邊中點連線所成的四邊形為矩形)

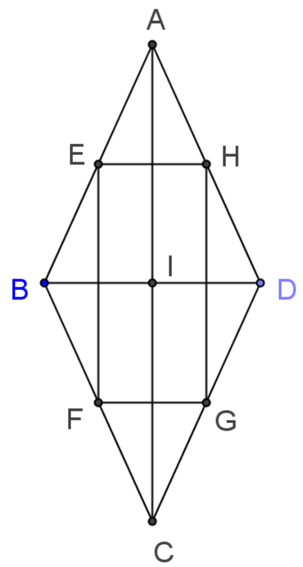
如下圖，E、F、G、H 是菱形 ABCD 四邊的中點。若菱形 ABCD 的對角線和為 36，則：

(1) 四邊形 EFGH 為何種四邊形？

(2) $\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{EH}=$？



想法：三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半



圖(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接 A 點與 C 點，連接 B 點與 D 點，且$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 I 點，如上圖(a)所示	不平行的兩直線必相交於一點

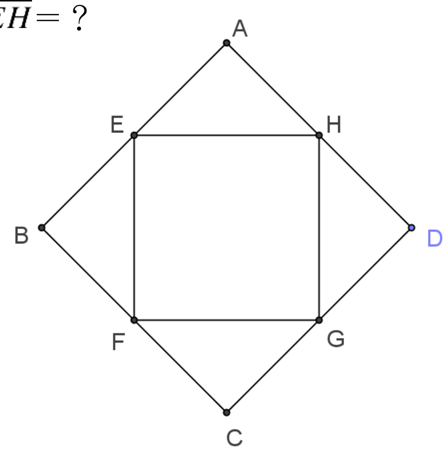
(2) $\overline{AC}+\overline{BD}=36$	已知四邊形 ABCD 的對角線和為 36
(3) $\overline{AC}\perp\overline{BD}$	已知 ABCD 為菱形 ＆ 菱形對角線互相垂直且平分
(4) △ABD 中 $\overline{EH}\parallel\overline{BD}$ ＆ $\overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{BD}$	如圖所示 已知 E、H 分別是$\overline{AB}$、$\overline{AD}$的中點 ＆ 三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半
(5) △CBD 中 $\overline{FG}\parallel\overline{BD}$ ＆ $\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{BD}$	如圖所示 已知 F、G 分別是$\overline{CB}$、$\overline{CD}$的中點 ＆ 三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半
(6) △ABC 中 $\overline{EF}\parallel\overline{AC}$ ＆ $\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{AC}$	如圖所示 已知 E、F 分別是$\overline{BA}$、$\overline{BC}$的中點 ＆ 三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半
(7) △ACD 中 $\overline{GH}\parallel\overline{AC}$ ＆ $\overline{GH}=\frac{1}{2}\overline{AC}$	如圖所示 已知 G、H 分別是$\overline{DC}$、$\overline{DA}$的中點 ＆ 三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半
(8) $\overline{EH}\parallel\overline{FG}\parallel\overline{BD}$、$\overline{EF}\parallel\overline{GH}\parallel\overline{AC}$	由(4) $\overline{EH}\parallel\overline{BD}$、(5) $\overline{FG}\parallel\overline{BD}$ ＆ (6) $\overline{EF}\parallel\overline{AC}$、(7) $\overline{GH}\parallel\overline{AC}$ 遞移律
(9) 四邊形 EFGH 為平行四邊形	由(8) $\overline{EH}\parallel\overline{FG}$、$\overline{EF}\parallel\overline{GH}$ ＆ 兩組對邊平行為平行四邊形
(10) $\overline{EH}\perp\overline{HG}$、$\overline{HG}\perp\overline{FG}$、$\overline{FG}\perp\overline{EF}$、$\overline{EF}\perp\overline{EH}$	由(8)$\overline{EH}\parallel\overline{FG}\parallel\overline{BD}$、$\overline{EF}\parallel\overline{GH}\parallel\overline{AC}$ ＆ (3) $\overline{AC}\perp\overline{BD}$
(11) 所以四邊形 EFGH 為矩形	由(9)、(10) ＆ 四個角皆為直角的平行四邊形為矩形
(12) 所以$\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{EH}$ $=\frac{1}{2}\overline{AC}+\frac{1}{2}\overline{BD}+\frac{1}{2}\overline{AC}+\frac{1}{2}\overline{BD}$ $=\overline{AC}+\overline{BD}=36$	題目所求 由(4) $\overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{BD}$、(5) $\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{BD}$ (6) $\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{AC}$、(7) $\overline{GH}=\frac{1}{2}\overline{AC}$ ＆ (2) $\overline{AC}+\overline{BD}=36$

例題 6.2-45： (正方形四邊中點連線所成的四邊形為正方形)

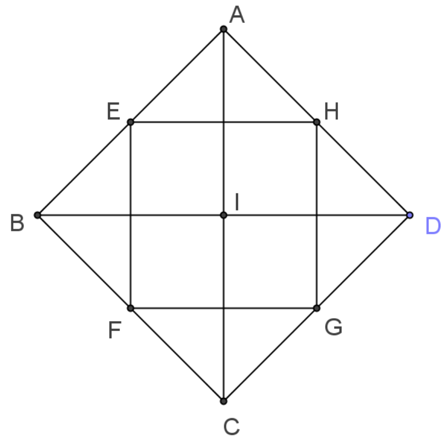
如下圖，E、F、G、H 是正方形 ABCD 四邊的中點。若正方形 ABCD 的對角線和為 56，則：

(1) 四邊形 EFGH 為何種四邊形？

(2) $\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{EH}=$？



想法：三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半



圖(a)

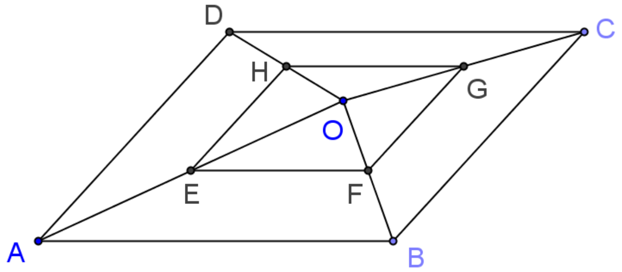
解：

敘述	理由
(1) 連接 A 點與 C 點，連接 B 點與 D 點，且$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 I 點，如上圖(a)所示	不平行兩直線必相交於一點
(2) $\overline{AC}+\overline{BD}=56$	已知四邊形 ABCD 的對角線和為 56
(3) $\overline{AC}\perp\overline{BD}$ 且 $\overline{AC}=\overline{BD}$	已知 ABCD 為正方形 & 正方形對角線互相垂直 & 正方形兩對角線相等

(4) △ABD 中 $\overline{EH} \parallel \overline{BD}$ & $\overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{BD}$	如圖所示 已知 E、H 分別是$\overline{AB}$、$\overline{AD}$的中點 & 三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半
(5) △CBD 中 $\overline{FG} \parallel \overline{BD}$ & $\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{BD}$	如圖所示 已知 F、G 分別是$\overline{CB}$、$\overline{CD}$的中點 & 三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半
(6) △ABC 中 $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$ & $\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{BD}$	如圖所示 已知 E、F 分別是$\overline{BA}$、$\overline{BC}$的中點 & 三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半 & (3) $\overline{AC}=\overline{BD}$
(7) △ACD 中 $\overline{GH} \parallel \overline{AC}$ & $\overline{GH}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{BD}$	如圖所示 已知 G、H 分別是$\overline{DC}$、$\overline{DA}$的中點 & 三角形的兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半 & (3) $\overline{AC}=\overline{BD}$
(8) $\overline{EH} \parallel \overline{FG} \parallel \overline{BD}$、$\overline{EF} \parallel \overline{GH} \parallel \overline{AC}$ & $\overline{EH}=\overline{FG}=\overline{EF}=\overline{GH}=\frac{1}{2}\overline{BD}$	由(4)、(5)、(6) & (7) 遞移律
(9) 四邊形 EFGH 為菱形	由(8) $\overline{EH} \parallel \overline{FG}$、$\overline{EF} \parallel \overline{GH}$、 $\overline{EH}=\overline{FG}=\overline{EF}=\overline{GH}$ & 四邊等長的平行四邊形為菱形
(10) $\overline{EH} \perp \overline{HG}$、$\overline{HG} \perp \overline{FG}$、$\overline{FG} \perp \overline{EF}$、 $\overline{EF} \perp \overline{EH}$	由(8)$\overline{EH} \parallel \overline{FG} \parallel \overline{BD}$、$\overline{EF} \parallel \overline{GH} \parallel \overline{AC}$ & (3) $\overline{AC} \perp \overline{BD}$
(11) 所以四邊形 EFGH 為正方形	由(9)、(10) & 四個角皆為直角的菱形為正方形
(12) 所以$\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{EH}$ $=\frac{1}{2}\overline{AC}+\frac{1}{2}\overline{BD}+\frac{1}{2}\overline{AC}+\frac{1}{2}\overline{BD}$ $=\overline{AC}+\overline{BD}=56$	題目所求 由(4) $\overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{BD}$、(5) $\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{BD}$ (6) $\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{AC}$、(7) $\overline{GH}=\frac{1}{2}\overline{AC}$ & (2) $\overline{AC}+\overline{BD}=56$

例題 6.2-46：

如下圖，O 點為平行四邊形 ABCD 內部之一點，且 E、F、G、H 分別是$\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$、$\overline{OD}$的中點。若$\overline{AB}=15$ 公分，$\overline{BC}=12$ 公分，則
(1) 四邊形 EFGH 為何種四邊形？
(2) $\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{HE}=$？



想法：三角形的兩中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半

解：

敘述	理由
(1) 平行四邊形 ABCD 中	如圖所示
(2) $\overline{AB}\parallel\overline{CD}$ & $\overline{BC}\parallel\overline{AD}$	平行四邊形兩組對邊平行
(3) $\overline{AB}=\overline{CD}$ & $\overline{BC}=\overline{AD}$	平行四邊形兩組對邊相等
(4) △OAB 中	如圖所示
(5) E、F 分別是$\overline{OA}$、$\overline{OB}$的中點	已知
(6) $\overline{EF}\parallel\overline{AB}$ & $\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 15=\frac{15}{2}$	由(5) & 三角形的兩中點連線平行等於第三邊的一半 & $\overline{AB}=15$
(7) △OBC 中	如圖所示
(8) F、G 分別是$\overline{OB}$、$\overline{OC}$的中點	已知
(9) $\overline{FG}\parallel\overline{BC}$ &$\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 12=6$	由(8) & 三角形的兩中點連線平行等於第三邊的一半 & $\overline{BC}=12$
(10) △OCD 中	如圖所示
(11) G、H 分別是$\overline{OC}$、$\overline{OD}$的中點	已知
(12) $\overline{GH}\parallel\overline{CD}$ & $\overline{GH}=\frac{1}{2}\overline{CD}$	由(11) & 三角形的兩中點連線平行等於第三邊的一半
(13) △OAD 中	如圖所示

(14) E、H 分別是$\overline{OA}$、$\overline{OD}$的中點	已知
(15) $\overline{EH} \parallel \overline{AD}$ & $\overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{AD}$	由(14) & 三角形的兩中點連線平行等於第三邊的一半
(16) 四邊形 EFGH 中	如圖所示
(17) $\overline{EF} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{GH}$	由(6) $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ & (2) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ & (12) $\overline{GH} \parallel \overline{CD}$ 遞移律
(18) $\overline{FG} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{AD} \parallel \overline{EH}$	由(9) $\overline{FG} \parallel \overline{BC}$ & (2) $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ & (15) $\overline{EH} \parallel \overline{AD}$ 遞移律
(19) EFGH 為平行四邊形	由(17)$\overline{EF} \parallel \overline{GH}$ & (18)$\overline{FG} \parallel \overline{EH}$ 兩組對邊平行為平行四邊形
(20) $\overline{GH}=\overline{EF}=\frac{15}{2}$ & $\overline{EH}=\overline{FG}=6$	由(19) 平行四邊形兩組對邊相等 & (6) $\overline{EF}=\frac{15}{2}$ & (9) $\overline{FG}=6$
(21) $\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{EH}$ $=\frac{15}{2}+6+\frac{15}{2}+6=27$	由(20) 加法

定理 6.2-9 平行線截等線段定理

一組平行線截一直線為等線段，若有另一直線與此組平行線相交，則此線也被此組平行線截為等線段。

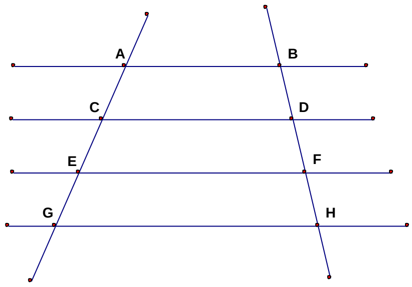


圖 6.2-9

已知： 如圖 6.2-9，$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{GH}$ 且$\overline{AC}=\overline{CE}=\overline{EG}$

求證： $\overline{BD}=\overline{DF}=\overline{FH}$

想法： 利用平行四邊形之對邊相等及全等三角形對應邊相等之性質

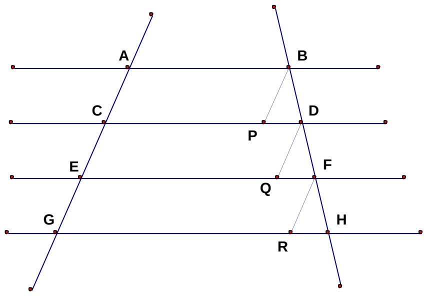


圖 6.2-10

證明：

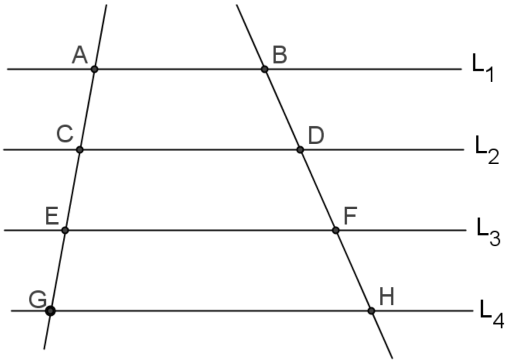
敘述	理由
(1) 作$\overline{BP} \parallel \overline{AG}$，$\overline{DQ} \parallel \overline{AG}$，$\overline{FR} \parallel \overline{AG}$，如圖 6.2-10	過線外一點作平行線作圖
(2) ACPB、CEQD、EGRF 皆為平行四邊形	由(1) & 已知$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{GH}$ & 兩組對邊平行為平行四邊形
(3) $\overline{AC}=\overline{BP}$、$\overline{CE}=\overline{DQ}$、$\overline{EG}=\overline{FR}$	由(2) & 平行四邊形之對邊相等
(4) $\overline{BP}=\overline{DQ}=\overline{FR}$	由(3) & 已知$\overline{AC}=\overline{CE}=\overline{EG}$ 遞移律
(5) ∠BDP＝∠DFQ＝∠FHR	已知$\overline{CD} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{GH}$ & 平行線之同位角相等
(6) $\overline{BP} \parallel \overline{DQ} \parallel \overline{FR}$	由(1) & 平行同一直線之諸線平行
(7) ∠PBD＝∠QDF＝∠RFH	由(6) & 平行線之同位角相等

(8) 在△BDP、△DFQ 與△FHR 中 ∠BDP＝∠DFQ＝∠FHR ∠PBD＝∠QDF＝∠RFH $\overline{BP}=\overline{DQ}=\overline{FR}$	如圖所示 由(5) 已證 由(7) 已證 由(4) 已證
(9) 所以△BDP ≅ △DFQ ≅ △FHR	由(8) & 根據 A.A.S. 三角形全等定理
(10) $\overline{BD}=\overline{DF}=\overline{FH}$	由(9) & 全等三角形對應邊相等

Q. E. D.

例題 6.2-47：

如下圖，$L_1 \parallel L_2 \parallel L_3 \parallel L_4$ 且$\overline{AC}=\overline{CE}=\overline{EG}$，若$\overline{BH}=15$，則$\overline{FH}=$？



想法：平行線截等線段定理

解：

敘述	理由
(1) $\overline{BD}=\overline{DF}=\overline{FH}$	已知 $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3 \parallel L_4$ 且$\overline{AC}=\overline{CE}=\overline{EG}$ & 平行線截等線段定理
(2) $\overline{BH}=\overline{BD}+\overline{DF}+\overline{FH}$	全量等於分量之和
(3) $15=\overline{FH}+\overline{FH}+\overline{FH}$	由(2) & 已知$\overline{BH}=15$ & (1) $\overline{BD}=\overline{DF}=\overline{FH}$
(4) $\overline{FH}=15\div3=5$	由(3) 解一元一次方程式

習題 6.2

習題 6.2-1

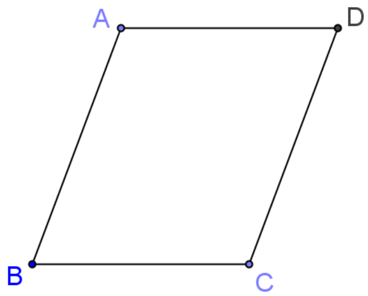
平行四邊形的對角線分原圖形為兩個全等的三角形。

習題 6.2-2

若一平行四邊形的三邊長分別為 5、8、5，則第四個邊長為__________。

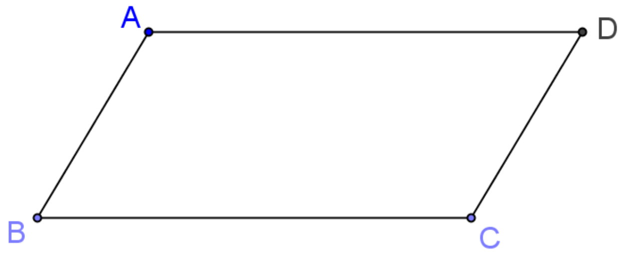
習題 6.2-3

如下圖，平行四邊形 ABCD 中，若$\overline{AB}=3x+1$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CD}=7$，求 $x=$？



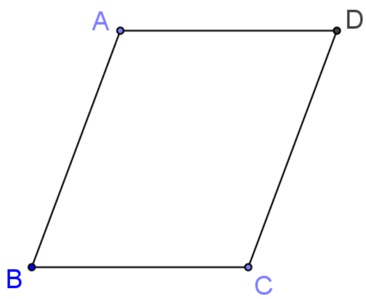
習題 6.2-4

如下圖，平行四邊形 *ABCD* 中， $\overline{AB}+\overline{CD}=10$，$\overline{BC}+\overline{DA}=20$，求$\overline{AB}+\overline{BC}$。



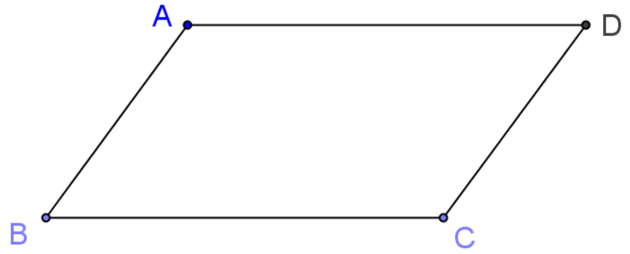
習題 6.2-5

如下圖，平行四邊形 ABCD 中，$\overline{AD}=6$，$\overline{CD}=7$，$\overline{AB}=3x+1$，$\overline{BC}=y-4$，求 xy。



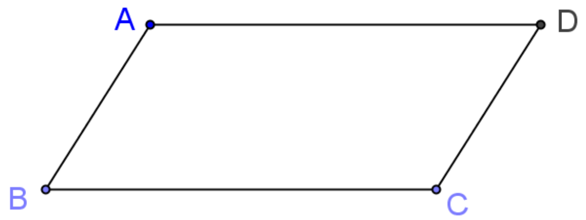
習題 6.2-6

如下圖，平行四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{AD}+\overline{BC}=64$，$\overline{AB}=12$，求$\overline{AD}$。



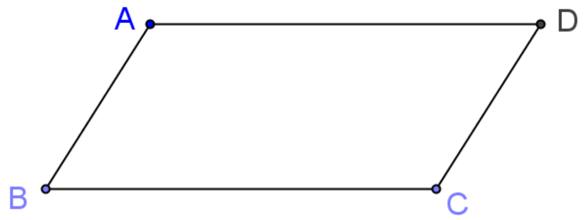
習題 6.2-7

如下圖，平行四邊形 ABCD 中，$2\overline{AB}=\overline{AD}$，且$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{AD}+\overline{BC}=24$，求$\overline{CD}$。



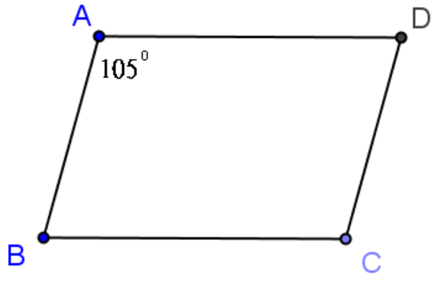
習題 6.2-8

如下圖，平行四邊形 ABCD 中，$2\overline{AB}=\overline{BC}$，且$\overline{AB}$和$\overline{BC}$的差為 5，求$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{AD}+\overline{BC}=$？



習題 6.2-9

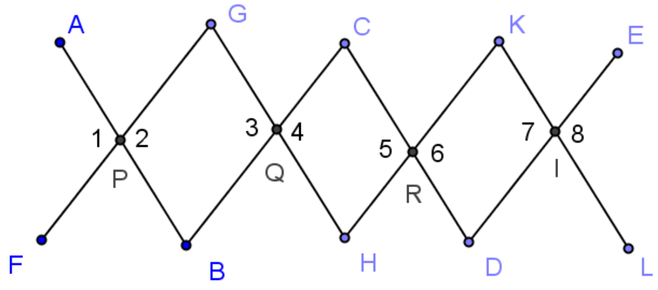
如下圖，平行四邊形 ABCD 中，$\angle A=105°$，求$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$。



習題 6.2-10

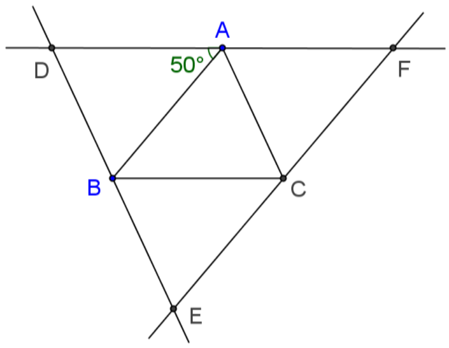
如下圖，$\overline{AB} \parallel \overline{GH} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{KL}$，$\overline{FG} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{HK} \parallel \overline{DE}$，如果∠G＝65°，則下列敘述何者正確？

(A)∠1＝65°　(B)∠H＝115°　(C)∠K＝115°　(D)∠8＝115°



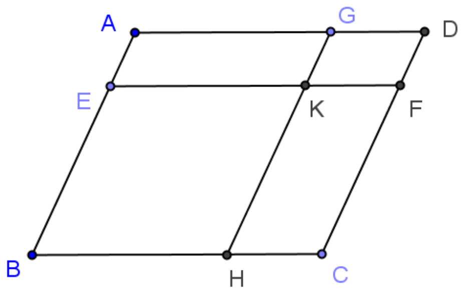
習題 6.2-11

如下圖，過△ABC 三頂點作對邊的平行線，三線交於 D、E、F 三點，若∠BAD＝50°，求∠DFE。



習題 6.2-12

如下圖，$\overline{AB}//\overline{GH}//\overline{CD}$，$\overline{AD}//\overline{EF}//\overline{BC}$，若∠A＝110°，求∠GKF。

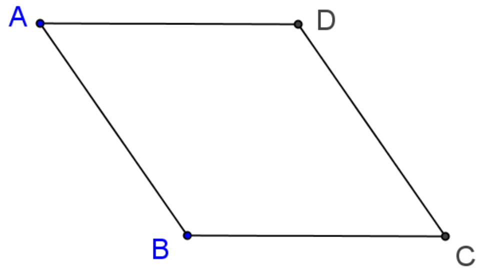


習題 6.2-13

如下圖，平行四邊形 ABCD 中，∠A=（3x+4）°，∠C=(4x−13)°，求：

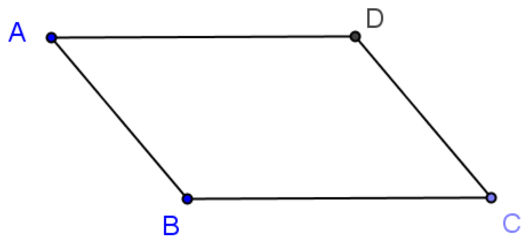
(1)　x 之值

(2)　∠A、∠B、∠C、∠D



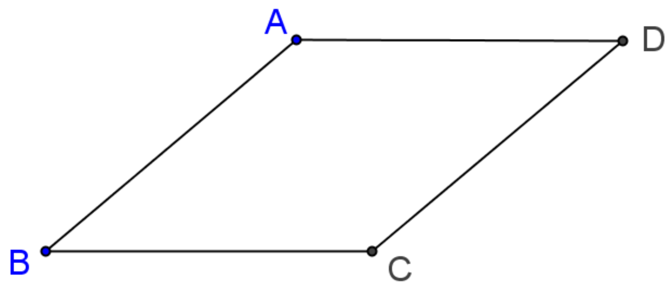
習題 6.2-14

如下圖，平行四邊形 ABCD 中，∠B=3∠A−20°，求∠A、∠B、∠C、∠D。



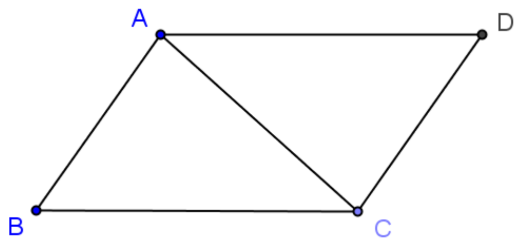
習題 6.2-15

如下圖，平行四邊形 ABCD 中，∠A=（5y+40）°，∠B=4x°，∠D=40°，求 x+y。



習題 6.2-16

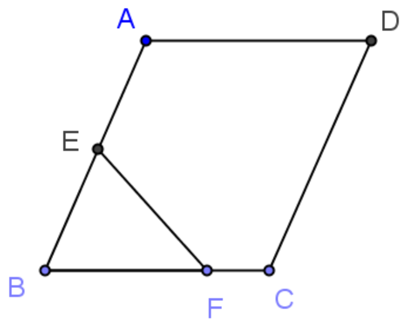
如下圖，平行四邊形 ABCD 中，$\overline{AC}$為對角線，且∠D＝55°，∠ACD＝70°，求：(1)∠BAC　　　(2)∠ACB



習題 6.2-17

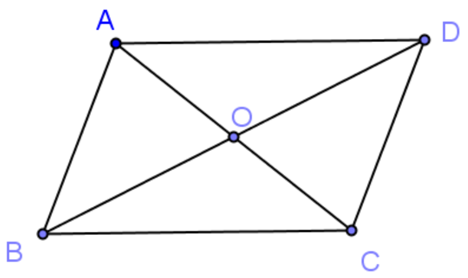
如下圖，平行四邊形 ABCD 中，E、F 分別在$\overline{AB}$、$\overline{BC}$上，且∠D＝66°，∠EFB＝48°，$\overline{FC}$＝5，$\overline{AD}$＝18，求：

(1) ∠BEF。　　　(2) $\overline{EF}$。



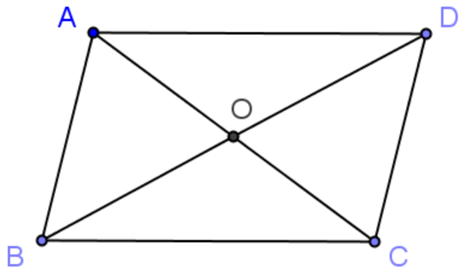
習題 6.2-18

ABCD 為平行四邊形，兩對角線交於 O 點。如果$\overline{BD}$＝6，$\overline{AC}$＝4.2，則$\overline{BO}$＝______，$\overline{AO}$＝______。



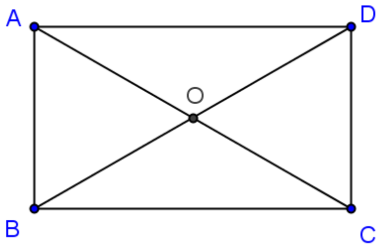
習題 6.2-19

如下圖，平行四邊形 ABCD 中，對角線$\overline{AC}$和$\overline{BD}$相交於 O 點，
若$\overline{AO}=2y-2$，$\overline{OC}=x+2$，$\overline{BO}=-x+7$，$\overline{DO}=3y-4$，求：
(1) $\overline{AC}$ (2) $\overline{BD}$



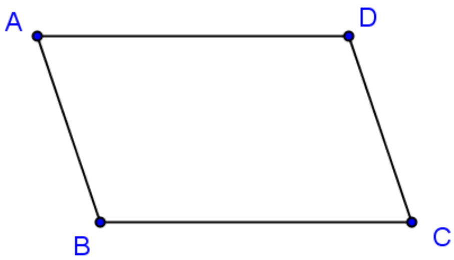
習題 6.2-20

如下圖所示，ABCD 為長方形，對角線$\overline{AC}$和$\overline{BD}$相交於 O 點，若$\overline{DB}=10$，
則$\overline{AC}=$？



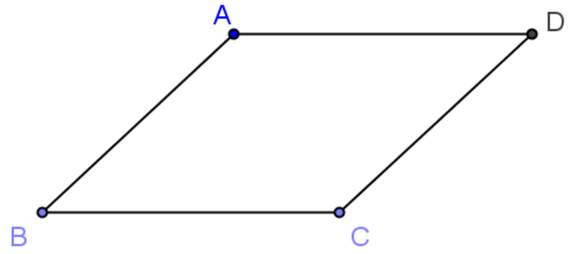
習題 6.2-21

如下圖，四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}\parallel\overline{CD}$，且$\overline{AB}=10$，$\overline{CD}=10$，則 ABCD 是否
為平行四邊形？



習題 6.2-22

如下圖，四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=24$，$\overline{BC}=27$，$\overline{CD}=24$，$\overline{AD}=27$，則 ABCD 是否為平行四邊形？



習題 6.2-23

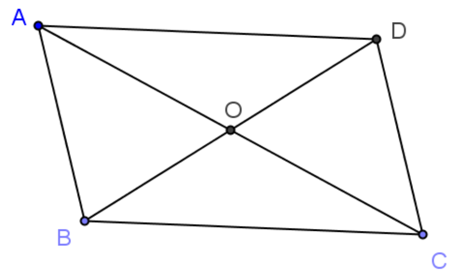
下列哪一組邊長不可以拼成平行四邊形？

(A) 7，8，7，8　　(B) 4，5，5，4

(C) 6，7，9，7　　(D) 1，2，2，1

習題 6.2-24

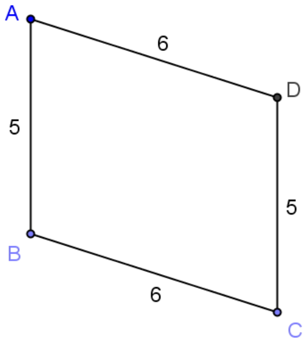
如下圖，四邊形 ABCD 中，$\overline{AO}=28$，$\overline{BO}=22$，$\overline{CO}=28$，$\overline{DO}=22$，則 ABCD 是否為平行四邊形？



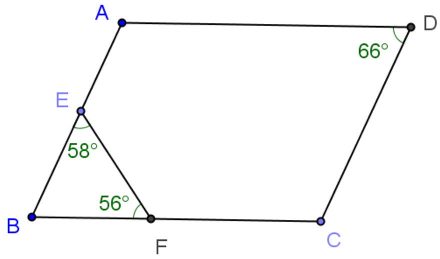
習題 6.2-25

利用平行四邊形的判別方法，檢查下列各四邊形 ABCD 是否為平行四邊形。若是，說明其判別方法。

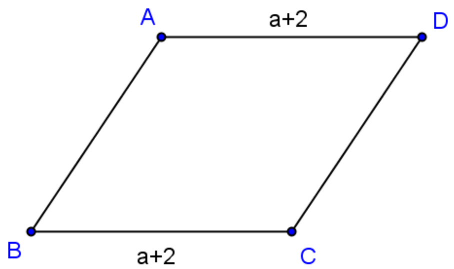
(1)



(2) $\angle A = \angle C$

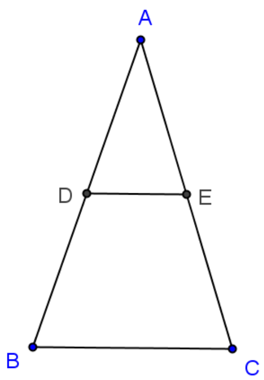


(3) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



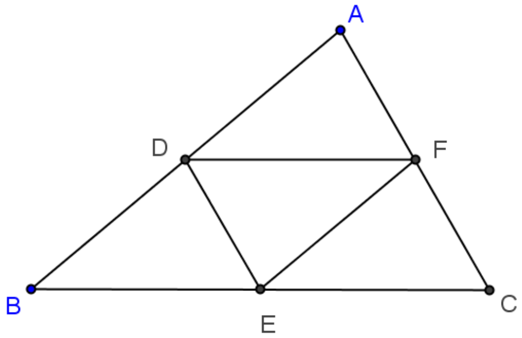
習題 6.2-26

如下圖，△ABC 中，D、E 分別是 $\overline{AB}$ 及 $\overline{AC}$ 的中點。若 $\overline{DE}=8$，則 $\overline{BC}=$____。



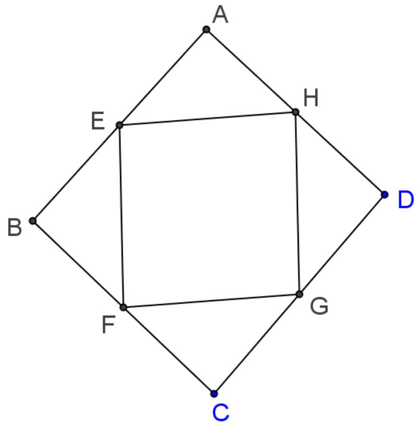
習題 6.2-27

下圖△ABC 中，已知$\overline{AB}$＝7，$\overline{BC}$＝9，$\overline{AC}$＝8，且 D、E、F 分別是$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$的中點，則$\overline{DF}+\overline{DE}+\overline{EF}$＝？



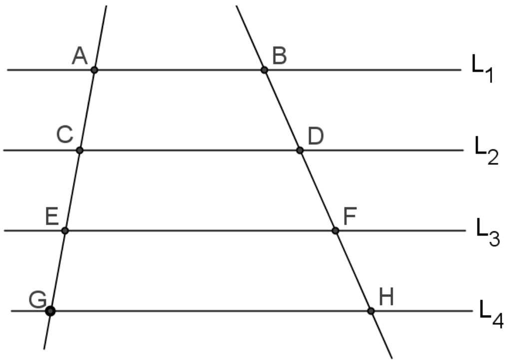
習題 6.2-28

如下圖，ABCD 為任意四邊形，E、F、G、H 分別為$\overline{AD}$、$\overline{DC}$、$\overline{BC}$、$\overline{AB}$的中點。若四邊形 ABCD 兩對角線之和為 50 公分，$\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{EH}$＝？



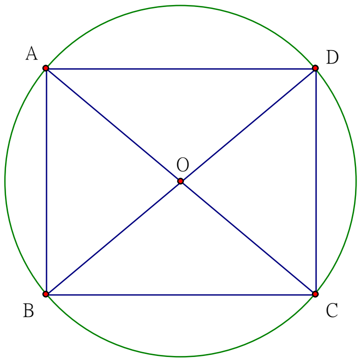
習題 6.2-29

如下圖，$L_1 \parallel L_2 \parallel L_3 \parallel L_4$ 且$\overline{AC}=\overline{CE}=\overline{EG}$，若$\overline{BH}$＝21，則$\overline{FH}$＝？



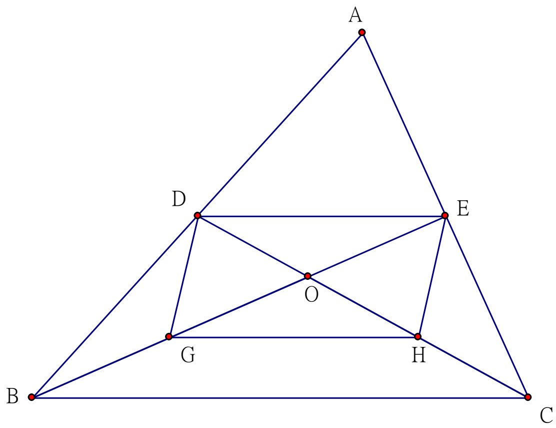
習題 6.2-30

下圖中，$\overline{AC}$及$\overline{BD}$皆為圓 O 的直徑，試證 ABCD 為一矩形。



習題 6.2-31

三角形 ABC 中，D 為$\overline{AB}$中點，E 為$\overline{AC}$中點，$\overline{BE}$及$\overline{CD}$兩線相交於 O 點，G 為$\overline{BO}$中點，H 為$\overline{CO}$中點，試證 DEHG 為平行四邊形。



6.3 節 梯形的性質

定理 6.3-1 梯形兩腰中點連線定理

梯形的兩腰中點連線必平行兩底且等於兩底和的一半。

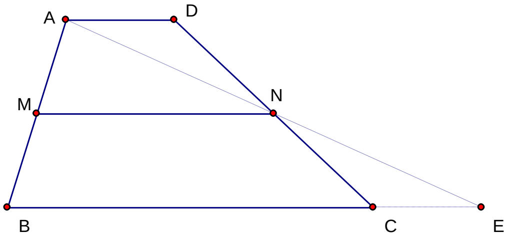


圖 6.3-1

已知：如圖 6.3-1，梯形 ABCD 中，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，M 為$\overline{AB}$的中點，N 為$\overline{CD}$的中點。

求證：(1) $\overline{MN} \parallel \overline{AD} \parallel \overline{BC}$

(2) $\overline{MN}=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})$

想法：利用三角形兩邊中點連線定理：三角形的兩中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半。

證明：

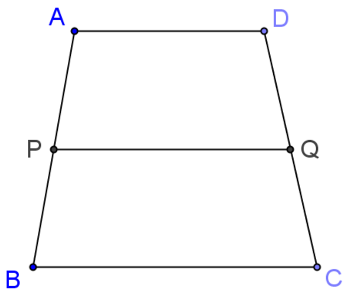
敘述	理由
(1) 作$\overline{AN}$，並延長$\overline{AN}$交$\overline{BC}$的延長線於 E 點。	兩點可作一直線 不平行的兩線必相交於一點
(2) 在△AND 與△ENC 中 ∠AND＝∠ENC $\overline{DN}=\overline{CN}$ ∠ADN＝∠ECN	如圖所示 對頂角相等 已知 N 為$\overline{CD}$的中點 已知$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ & 內錯角相等
(3) △AND ≅ △ENC	由(2) & 根據三角形 A.S.A.全等定理
(4) $\overline{AD}=\overline{EC}$ 且 $\overline{AN}=\overline{EN}$	由(3) & 全等三角形對應邊相等
(5) △ABE 中，N 為 AE 的中點，M 為 AB 中點	由(4) $\overline{AN}=\overline{EN}$ & 已知 M 為 AB 中點
(6) $\overline{MN} \parallel \overline{BE}$ 且 $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BE}$	由(5) & 三角形兩邊中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半
(7) 所以$\overline{MN} \parallel \overline{AD} \parallel \overline{BC}$	由(6) $\overline{MN} \parallel \overline{BE}$ &已知$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 遞移律

(8) $\overline{BE}=\overline{BC}+\overline{CE}=\overline{BC}+\overline{AD}$	全量等於分量之和 & (4) $\overline{AD}=\overline{EC}$
(9) 所以$\overline{MN}=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})$	由(6) $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BE}$ & (8) $\overline{BE}=\overline{BC}+\overline{AD}$

Q. E. D.

例題 6.3-1：

如下圖，梯形 ABCD 中，$\overline{AD}\parallel\overline{BC}$，$\overline{PQ}$為梯形中線，$\overline{AD}=8$，$\overline{BC}=12$，則 $\overline{PQ}=$？



想法：梯形的兩腰中點連線等於兩底和的一半

解：

敘述	理由
(1) $\overline{PQ}=(\overline{AD}+\overline{BC})\div 2$ $=(8+12)\div 2=10$	已知梯形 ABCD 中，$\overline{AD}\parallel\overline{BC}$，$\overline{PQ}$為梯形中線 & 梯形的兩腰中點連線等於兩底和的一半

例題 6.3-2：

若一梯形的中線長為 10 公分，且下底是上底的 3 倍，求下底與上底的差。

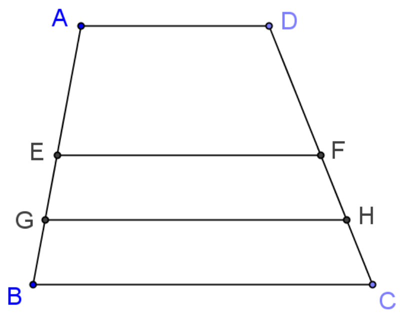
想法：梯形的兩腰中點連線等於兩底和的一半

解：

敘述	理由
(1) 假設上底為 x 公分、下底為 3x 公分	已知下底是上底的 3 倍 ＆ 假設
(2) $10=(x+3x)\div 2$	由(1) ＆ 梯形的中線等於兩底和的一半 ＆ 已知梯形的中線長為 10
(3) $x=5$	由(2) 解一元一次方程式
(4) 下底與上底的差＝下底－上底 $=3x-x=2x=10$	由(1) 上底為 x 公分、下底為 3x 公分 ＆ (3) $x=5$
(6) 所以下底與上底的差＝10 公分	由(4)

例題 6.3-3：

如下圖，梯形 ABCD 中，E、F 分別為$\overline{AB}$、$\overline{CD}$中點，G、H 分別為$\overline{EB}$、$\overline{CF}$中點，若$\overline{AD}=5$，$\overline{BC}=9$，求$\overline{GH}$。



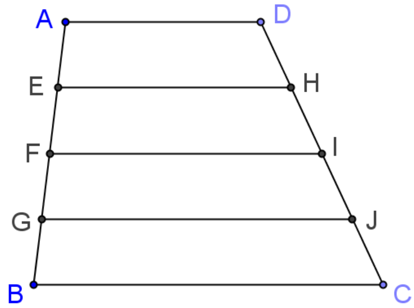
想法：梯形的兩腰中點連線必平行兩底且等於兩底和的一半

解：

敘述	理由
(1) 梯形 ABCD 中，$\overline{EF}$為梯形中線	已知 E、F 分別為$\overline{AB}$、$\overline{CD}$中點
(2) $\overline{EF}=(\overline{AD}+\overline{BC})\div 2$ $=(5+9)\div 2=7$	由(1) & 梯形的兩腰中點連線等於兩底和的一半 & 已知$\overline{AD}=5$，$\overline{BC}=9$
(3) $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$	由(1) & 梯形的兩腰中點連線必平行兩底
(4) 四邊形 EFCB 為梯形	由(3) $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ & 一組對邊平行為梯形
(5) 梯形 EFCB 中，$\overline{GH}$為梯形中線	已知 G、H 分別為$\overline{EB}$、$\overline{CF}$中點
(6) $\overline{GH}=(\overline{EF}+\overline{BC})\div 2$ $=(7+9)\div 2=8$	由(5) & 梯形的兩腰中點連線等於兩底和的一半 & 已知$\overline{BC}=9$ &(2) $\overline{EF}=7$ 已證

例題 6.3-4：

如下圖，梯形 ABCD 中，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，$\overline{AD}=10$，$\overline{BC}=18$，且 E、F、G 將$\overline{AB}$四等分，H、I、J 將$\overline{CD}$四等分，求$\overline{EH}+\overline{FI}+\overline{GJ}$。



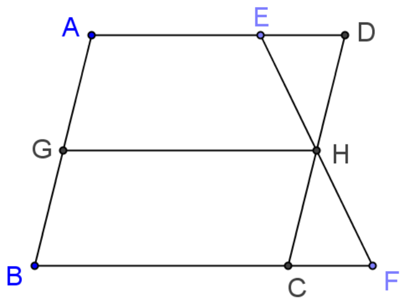
想法：梯形的兩腰中點連線必平行兩底且等於兩底和的一半

解：

敘述	理由
(1) F 為$\overline{AB}$中點、E 為$\overline{AF}$中點、G 為$\overline{FB}$中點	已知 E、F、G 將$\overline{AB}$四等分
(2) I 為$\overline{CD}$中點、H 為$\overline{DI}$中點、J 為$\overline{IC}$中點	已知 H、I、J 將$\overline{CD}$四等分
(3) 梯形 ABCD 中，$\overline{FI}$為梯形中線	由(1) F 為$\overline{AB}$中點 & (2) I 為$\overline{CD}$中點
(4) $\overline{FI}=(\overline{AD}+\overline{BC})\div 2$ $=(10+18)\div 2=14$	由(3) & 梯形的兩腰中點連線等於兩底和的一半 & 已知$\overline{AD}=10$，$\overline{BC}=18$
(5) $\overline{FI} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{AD}$	由(3) & 梯形的兩腰中點連線必平行兩底
(6) 四邊形 ADIF 為梯形	由(5) $\overline{FI} \parallel \overline{AD}$ & 一組對邊平行為梯形
(7) 梯形 ADIF 中，$\overline{EH}$為梯形中線	由(1) E 為$\overline{AF}$中點 & (2) H 為$\overline{DI}$中點
(8) $\overline{EH}=(\overline{AD}+\overline{FI})\div 2$ $=(10+14)\div 2=12$	由(7) & 梯形的兩腰中點連線等於兩底和的一半 & 已知$\overline{AD}=10$ &(4) $\overline{FI}=14$ 已證
(9) 四邊形 FICB 為梯形	由(5) $\overline{FI} \parallel \overline{BC}$ & 一組對邊平行為梯形
(10) 梯形 FICB 中，$\overline{GJ}$為梯形中線	由(1) G 為$\overline{FB}$中點 & (2) J 為$\overline{IC}$中點
(11) $\overline{GJ}=(\overline{FI}+\overline{BC})\div 2$ $=(14+18)\div 2=16$	由(10) & 梯形的兩腰中點連線等於兩底和的一半 & 已知$\overline{BC}=18$ & (4) $\overline{FI}=14$
(12) 所以$\overline{EH}+\overline{FI}+\overline{GJ}$ $=12+14+16=42$	由(8) & (4) & (11) 加法

例題 6.3-5：

如下圖，梯形 ABFE 中，$\overline{AE} \parallel \overline{BF}$，$\overline{GH}$為其中線，且四邊形 ABCD 為平行四邊形，已知$\overline{AE}=4$，$\overline{BF}=8$，求$\overline{ED}$。



想法：(1)　梯形的兩腰中點連線必平行兩底且等於兩底和的一半

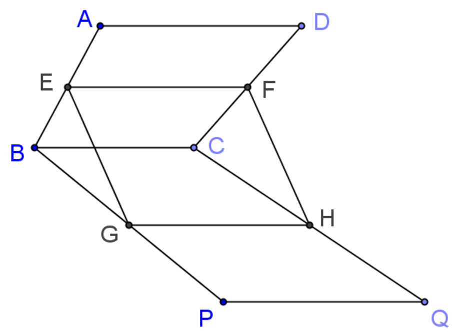
(2)　平行四邊形對邊等長

解：

敘述	理由
(1) $\overline{GH}=(\overline{AE}+\overline{BF})\div 2$ $=(4+8)\div 2$ $=6$	已知梯形 ABFE 中，$\overline{GH}$為梯形中線 ＆ 梯形的兩腰中點連線等於兩底和的一半 ＆ 已知$\overline{AE}=4$，$\overline{BF}=8$
(2) $\overline{GH} \parallel \overline{AE} \parallel \overline{BF}$	已知$\overline{GH}$為梯形中線 ＆ 梯形的兩腰中點連線必平行兩底
(3) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ＆ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	已知 ABCD 為平行四邊形＆兩組對邊平行
(4) 四邊形 ADHG 為平行四邊形	由(2) $\overline{GH} \parallel \overline{AE}$ ＆ (3) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 兩組對邊平行為平行四邊形
(5) $\overline{AD}=\overline{GH}=6$	由(4) 平行四邊形對邊等長 ＆ (1) $\overline{GH}=6$
(6) $\overline{AD}=\overline{ED}+\overline{AE}$	全量等於分量之和
(7) $\overline{ED}=\overline{AD}-\overline{AE}=6-4=2$	由(6) 移項 ＆ (5)$\overline{AD}=6$ ＆ 已知$\overline{AE}=4$

例題 6.3-6：

已知：$\overline{EF}$、$\overline{GH}$分別為梯形 ABCD 與梯形 BPQC 的中線，若$\overline{AD}=\overline{PQ}$，
求證：EGHF 是平行四邊形。



想法：(1) 梯形的兩腰中點連線必平行兩底且等於兩底和的一半

(2) 一組對邊平行且相等為平行四邊形

證明：

敘述	理由
(1) $\overline{EF}=(\overline{AD}+\overline{BC})\div 2$ 且 $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$	已知梯形 ABCD 中，$\overline{EF}$為梯形中線 & 梯形的兩腰中點連線必平行兩底且等於兩底和的一半
(2) $\overline{GH}=(\overline{PQ}+\overline{BC})\div 2$ 且 $\overline{GH} \parallel \overline{BC}$	已知梯形 BPQC 中，$\overline{GH}$為梯形中線 & 梯形的兩腰中點連線必平行兩底且等於兩底和的一半
(3) 四邊形 EGHF 中 $\overline{EF}=(\overline{AD}+\overline{BC})\div 2$ $=(\overline{PQ}+\overline{BC})\div 2=\overline{GH}$	如圖所示 由(1) $\overline{EF}=(\overline{AD}+\overline{BC})\div 2$ & 已知$\overline{AD}=\overline{PQ}$ & (2) $\overline{GH}=(\overline{PQ}+\overline{BC})\div 2$
(4) $\overline{EF} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{GH}$	由(1) $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ & (2) $\overline{GH} \parallel \overline{BC}$ 遞移律
(5) 所以 EGHF 是平行四邊形	由(3) $\overline{EF}=\overline{GH}$ & (4) $\overline{EF} \parallel \overline{GH}$ & 一組對邊平行且相等為平行四邊形

定理 6.3-2 等腰梯形底角定理

等腰梯形的兩底角相等。

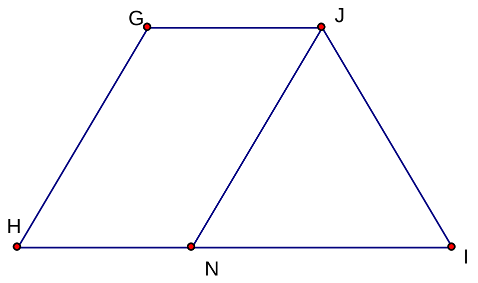


圖 6.3-2

已知：如圖 6.3-2，梯形 GHIJ 中，$\overline{GJ} \parallel \overline{HI}$，$\overline{GH}=\overline{JI}$

求證： ∠GHI＝∠JIH

想法：利用等腰三角形兩底角相等的性質

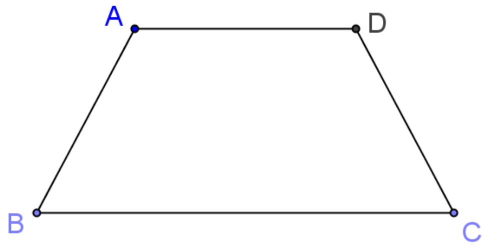
證明：

敘述	理由
(1) 過點 J 作$\overline{JN} \parallel \overline{GH}$	過一點可作一線平行另一線
(2) 四邊形 GHNJ 為一平行四邊形	已知$\overline{GJ} \parallel \overline{HI}$ & (1) $\overline{JN} \parallel \overline{GH}$ 兩組對邊平行為平行四邊行
(3) $\overline{GH}=\overline{JN}$	由(2) & 平行四邊形對應邊相等
(4) $\overline{JI}=\overline{JN}$	由(3) & 已知$\overline{GH}=\overline{JI}$ 遞移律
(5) △JNI 為等腰三角形	由(4) & 兩腰等長為等腰三角形
(6) ∠JNI＝∠JIN (即∠JNI＝∠JIH)	由(5) & 等腰三角形兩底角相等
(7) ∠GHI＝∠JNI	由(1) & 平行線的同位角相等
(8) 所以∠GHI＝∠JIH	由(6) & (7) 遞移律

Q. E. D.

例題 6.3-7：（ 等腰梯形對角互補 ）

已知：四邊形 ABCD 為等腰梯形，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$。
求證：(1) $\angle B + \angle D = 180°$
(2) $\angle A + \angle C = 180°$



想法：(1) 等腰梯形兩底角相等

(2) 平行線間同側內角互補

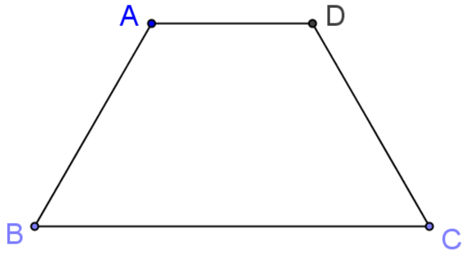
證明：

敘述	理由
(1) $\angle B = \angle C$	已知四邊形 ABCD 為等腰梯形 & 兩底角相等
(2) $\angle A + \angle B = 180°$	已知 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ & 同側內角互補
(3) $\angle A + \angle C = 180°$	將(1) $\angle B = \angle C$ 代入 (2) $\angle A + \angle B = 180°$
(4) $\angle C + \angle D = 180°$	已知 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ & 同側內角互補
(5) $\angle B + \angle D = 180°$	將(1) $\angle B = \angle C$ 代入 (4) $\angle C + \angle D = 180°$

例題 6.3-8：

已知四邊形 ABCD 為等腰梯形，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，若∠B＝60°，則：

(1) ∠C＝？　　(2) ∠D＝？



想法：(1) 等腰梯形兩底角相等

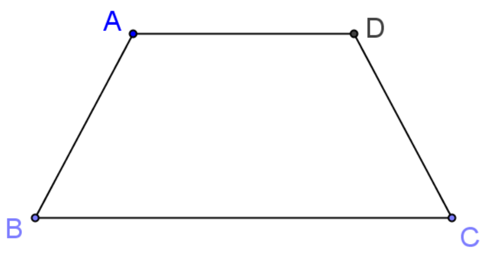
(2) 等腰梯形對角互補

解：

敘述	理由
(1) ∠C＝∠B＝60°	已知四邊形 ABCD 為等腰梯形 & 等腰梯形兩底角相等 & 已知∠B＝60°
(2) ∠D＋∠B＝180°	已知四邊形 ABCD 為等腰梯形 & 等腰梯形對角互補
(3) ∠D＝180°－∠B ＝180°－60° ＝120°	由(2) 移項 & 已知∠B＝60°

例題 6.3-9：（ 等腰梯形兩對角線相等 ）

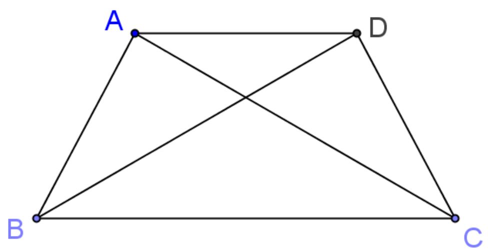
已知：四邊形 ABCD 為等腰梯形，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$。
求證：$\overline{BD} = \overline{AC}$



想法：(1) 等腰梯形兩腰等長且兩底角相等

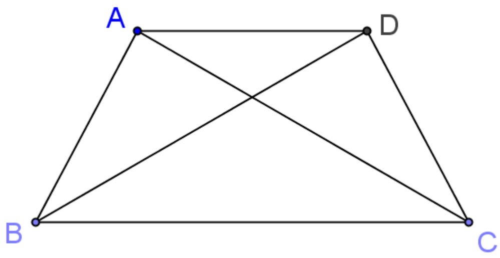
(2) 三角形全等定理

證明：

敘述	理由
(1) 連接 A 點與 C 點、 連接 B 點與 D 點， 如右圖所示	
(2) 在△ABC 與△DCB 中 $\overline{AB} = \overline{DC}$ ∠ABC＝∠DCB $\overline{BC} = \overline{CB}$	如上圖所示 已知四邊形 ABCD 為等腰梯形 ＆ 兩腰等長 已知四邊形 ABCD 為等腰梯形 ＆ 兩底角相等 共同邊
(3) △ABC ≅ △DCB	由(2) ＆ 根據 S.A.S.三角形全等定理
(4) $\overline{AC} = \overline{DB}$	由(3) ＆ 全等三角形對應邊相等

例題 6.3-10：

已知四邊形 ABCD 為等腰梯形，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，$\overline{BD}$與$\overline{AC}$為兩對角線，若 $\overline{AC}=10$，則$\overline{BD}=$？



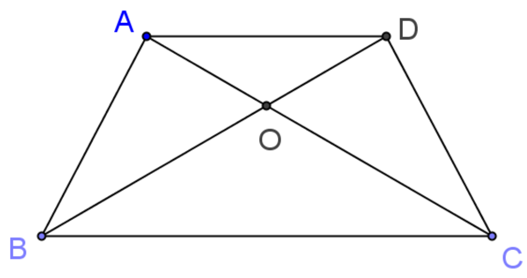
想法：等腰梯形兩對角線相等

解：

敘述	理由
(1) $\overline{BD}=\overline{AC}=10$	已知四邊形 ABCD 為等腰梯形，$\overline{BD}$與$\overline{AC}$為兩對角線 & 等腰梯形兩對角線相等 & 已知$\overline{AC}=10$

例題 6.3-11：

已知：等腰梯形 ABCD 中，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，對角線$\overline{AC}$、$\overline{BD}$交於 O 點，
求證：(1) $\overline{AO}=\overline{DO}$　　　(2) $\overline{BO}=\overline{CO}$



想法：(1) 三角形全等定理

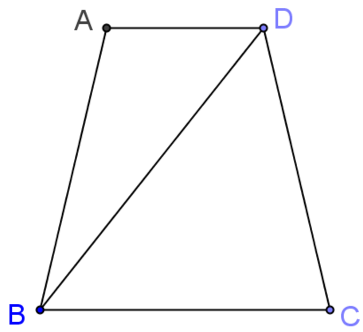
(2) 等腰梯形兩腰等長且兩底角相等

證明：

敘述	理由
(1) 在△ABC 與△DCB 中 $\overline{AB}=\overline{DC}$ ∠ABC＝∠DCB $\overline{BC}=\overline{CB}$	如圖所示 已知四邊形 ABCD 為等腰梯形 & 兩腰等長 已知四邊形 ABCD 為等腰梯形 & 兩底角相等 共同邊
(2) △ABC ≅ △DCB	由(1) & 根據 S.A.S.三角形全等定理
(3) ∠BAC＝∠CDB	由(2) & 全等三角形對應角相等
(4) 在△AOB 與△DOC 中 ∠BAC＝∠CDB ∠AOB＝∠DOC $\overline{AB}=\overline{DC}$	如圖所示 由(3) 已證 對頂角相等 已知四邊形 ABCD 為等腰梯形 & 兩腰等長
(5) △AOB ≅ △DOC	由(4) & 根據 A.A.S.三角形全等定理
(6) $\overline{AO}=\overline{DO}$ & $\overline{BO}=\overline{CO}$	由(5) & 全等三角形對應邊相等

例題 6.3-12：

等腰梯形 ABCD 中，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，∠C＝74°，∠ABD＝21°，若$\overline{BC}$＝9，求：
(1) ∠CBD　　(2) ∠CDB　　(3) $\overline{AB}$。



想法：(1) 等腰梯形兩底角及兩腰相等

(2) 兩底角相等的三角形為等腰三角形

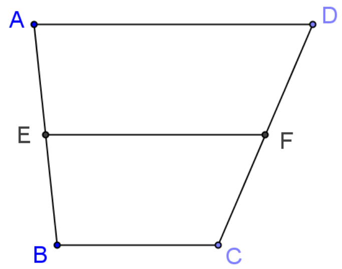
解：

敘述	理由
(1) ∠ABC＝∠C＝74°	已知 ABCD 為等腰梯形 & 兩底角相等
(2) ∠ABC＝∠CBD＋∠ABD	全量等於分量之和
(3) ∠CBD＝∠ABC－∠ABD ＝74°－21°＝53°	由(2) 移項 & (1) ∠ABC＝74° & 已知∠ABD＝21°
(4) ∠ADB＝∠CBD＝53°	已知$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ & 內錯角相等 & (3) ∠CBD＝53°
(5) △BCD 中 ∠CDB＋∠CBD＋∠C＝180°	如圖所示 三角形內角和 180°
(6) ∠CDB＝180°－∠CBD－∠C ＝180°－53°－74° ＝53°	由(5) 移項 & (3) ∠CBD＝53° & 已知∠C＝74°
(7) ∠CDB＝∠CBD＝53°	由(3) & (6) 遞移律
(8) △BCD 為等腰三角形	由(7) & 兩底角相等為等腰三角形定理
(9) $\overline{CD}$＝$\overline{BC}$＝9	由(8) & 等腰三角形兩腰等長 & 已知$\overline{BC}$＝9
(10) $\overline{AB}$＝$\overline{CD}$＝9	已知 ABCD 為等腰梯形 & 兩腰等長 & (9) $\overline{CD}$＝9

習題 6.3

習題 6.3-1：

如下圖，梯形 ABCD 中，$\overline{AD}=19$，$\overline{BC}=11$，求中線$\overline{EF}$的長。

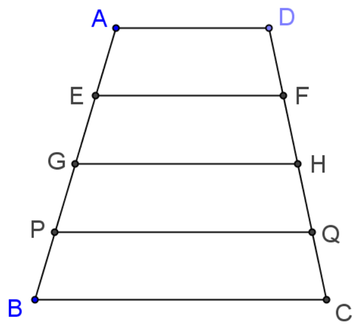


習題 6.3-2：

已知一梯形的下底比上底長 18 公分，且中線長為 20 公分，求：
(1)上底的長
(2)下底的長

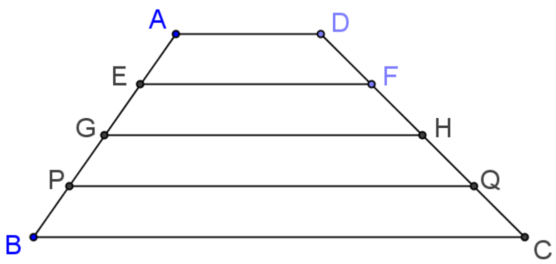
習題 6.3-3：

如下圖，梯形 ABCD 中，E、G、P 四等分$\overline{AB}$，F、H、Q 四等分$\overline{CD}$，已知$\overline{AD}=31$，$\overline{BC}=59$，求$\overline{AD}+\overline{EF}+\overline{GH}+\overline{PQ}+\overline{BC}$。



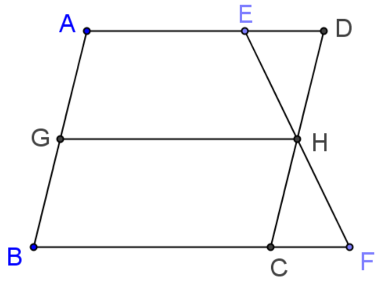
習題 6.3-4：

如下圖，梯形 ABCD 中，E、G、P 四等分$\overline{AB}$，F、H、Q 四等分$\overline{CD}$，已知$\overline{AD}=5$，$\overline{EF}=8$，求$\overline{BC}$。



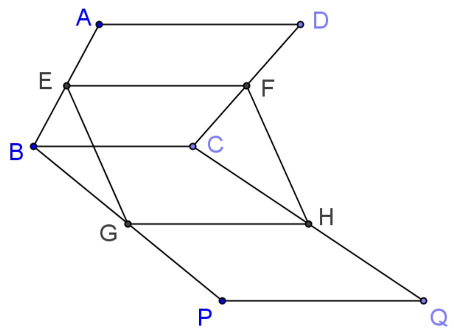
習題 6.3-5：

如下圖，梯形 ABFE 中，$\overline{AE} \parallel \overline{BF}$，$\overline{GH}$為其中線，且四邊形 ABCD 為平行四邊形，已知$\overline{AE}=5$，$\overline{BF}=11$，求$\overline{ED}$。



習題 6.3-6：

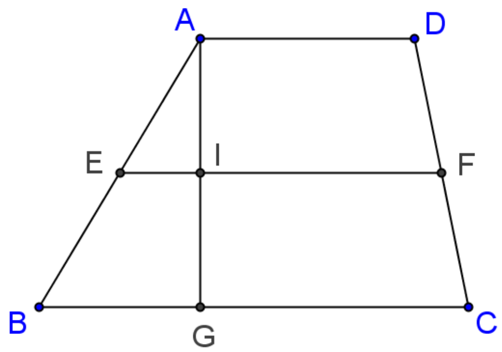
已知$\overline{EF}$、$\overline{GH}$分別為梯形 ABCD 與梯形 BPQC 的中線，若$\overline{AD}=\overline{PQ}$，$\overline{EG}=10$，則$\overline{FH}=$？



習題 6.3-7

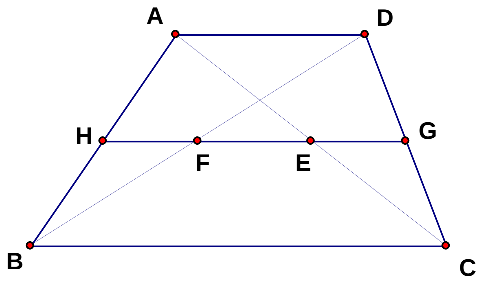
已知：如下圖，梯形 ABCD 中，$\overline{EF}$為其中線，$\overline{AG}\perp\overline{BC}$

求證：$\overline{AI}=\overline{IG}$



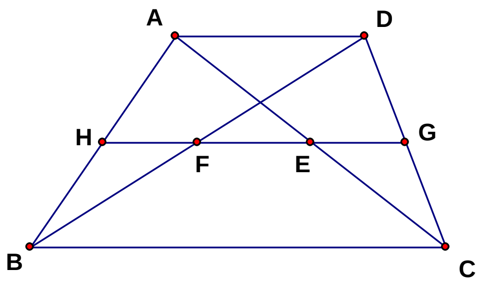
習題 6.3-8　(梯形的中線平分其對角線)

已知：如下圖，梯形 ABCD 中，$\overline{HG}$為其中線，$\overline{AC}$及$\overline{BD}$為其對角線。
求證：$\overline{AE}=\overline{EC}$ 且 $\overline{DF}=\overline{FB}$



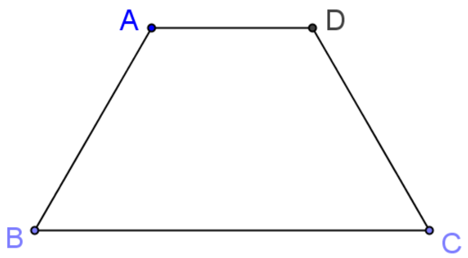
習題 6.3-9　(過梯形兩對角線中點的直線，必平分兩腰)

已知：梯形 ABCD 中，E 為對角線$\overline{AC}$的中點，F 為對角線$\overline{BD}$的中點。
求證：$\overline{AH}=\overline{BH}$ 且 $\overline{DG}=\overline{CG}$



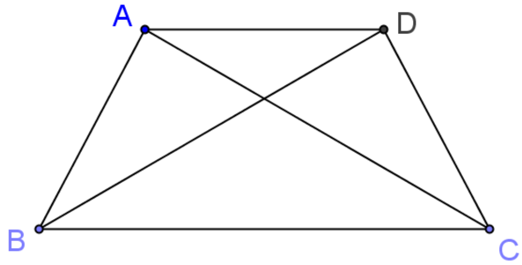
習題 6.3-10：

已知四邊形 ABCD 為等腰梯形，$\overline{AD}\parallel\overline{BC}$，若$\angle$B＝50°，則：
(1) $\angle$C＝？　　(2) $\angle$D＝？



習題 6.3-11：

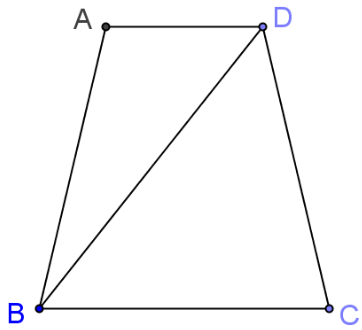
已知四邊形 ABCD 為等腰梯形，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，$\overline{BD}$與$\overline{AC}$為兩對角線，若$\overline{AC}$＝5，則$\overline{BD}$＝？



習題 6.3-12：

等腰梯形 ABCD 中，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，∠C＝80°，∠ABD＝30°，若$\overline{BC}$＝6，求：

(1) ∠CBD (2) ∠CDB (3) $\overline{AB}$。



6.4 節 多邊形的性質

定義 6.4-1 多邊形與正多邊形

由 n ($n \geq 3$)個線段所圍成的圖形稱為 n 邊形，也叫做多邊形。
若多邊形之每一邊都相等稱為等邊多邊形。
若多邊形之每一角都相等稱為等角多邊形。
若多邊形為等邊多邊形且為等角多邊形稱為正多邊形

例如： 三個邊圍成的圖形叫做三邊形(或叫三角形)，四個邊圍成的圖形叫做四邊形，五個邊圍成的圖形叫做五邊形，十個邊圍成的圖形叫做十邊形，這些圖形都叫做多邊形。

以四邊形為例，長方形是等角四邊形，菱形為等邊四邊形，正方形就是正四邊形。

我們已經介紹過三角形及四邊形的許多性質，接下來我們要介紹一般多邊形的一些性質。

定義 6.4-2 凸多邊形與凹多邊形

一個多邊形內部的任意兩點連線，若線上的每一點都在此多邊形的內部就叫此多邊形為凸多邊形。若不是凸多邊形就叫做凹多邊形。

三角形都是**凸多邊形**，但四邊形以上之多邊形就不一定是凸多邊形，圖 6.4-1 中之五邊形，左圖為凸多邊形，右圖則為凹多邊形，因為 A、B 兩點都在多邊形之內部，但兩點連線$\overline{AB}$，線段上的點有些不在多邊形之內部。

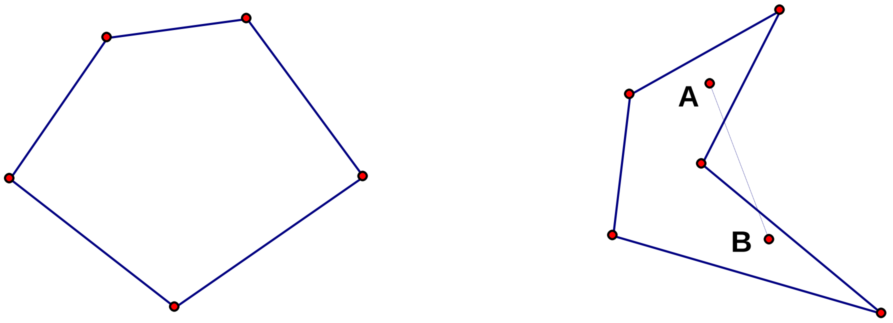


圖 6.4-1 凸多邊形與凹多邊形

本書討論的多邊形都是凸多邊形，凹多邊形不在本書的範圍。

定義 6.4-3 多邊形的內角

多邊形兩鄰邊所夾的角為多邊形的內角。

定義 6.4-4 多邊形的外角

多邊形一邊的延長線與其鄰邊所夾的角為多邊形的外角。

如圖 6.4-2 中，∠ABC、∠BCD、∠CDE、∠DEF、∠EFA、∠FAB 都是此多邊形的內角。∠GAF 是∠FAB 的外角，∠HBA 和∠IBC 是∠ABC 的外角，∠JCD 是∠BCD 的外角。

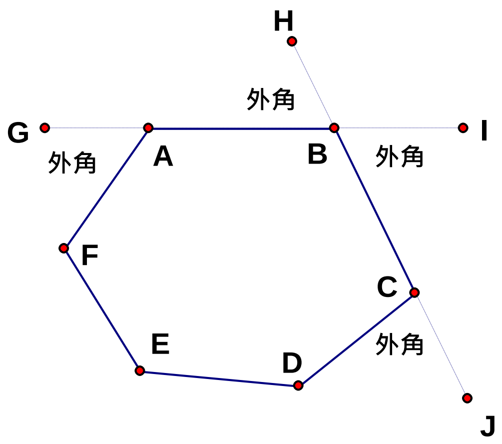


圖 6.4-2 多邊形之內角與外角

定理 6.4-1 內外角和定理

多邊形的內角與其相鄰之一外角和等於 180°

定理 6.4-1 可以由內、外角定義很容易證明其成立，請自行證明。

定理 6.4-2 多邊形內角和定理

n 多邊形的內角和等於 (n－2)×180°

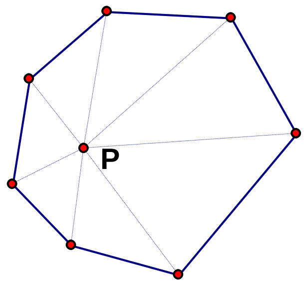


圖 6.4-3

想法一： 多邊形內取一點與多邊形的每一頂點相連，則此 n 多邊形就由 n 個三角形構成如圖 6.4-3，利用三角形內角和 180°的性質，以所有三角形之內角和，減去不是多邊形內角的部份，即是多邊形之內角和。

證明一：

敘述	理由
(1) 在多邊形內任取一點 P，作 P 點與多邊形各頂點的連線，則此多邊形分為 n 個三角形，如圖 6.4-3	兩點可作一直線
(2) 多邊形內角和 ＝n 個三角形的內角和－(不是多邊形內角的部份) ＝n×180°－360° ＝n×180°－2×180° ＝(n－2)×180°	全量公理 三角形內角和為 180°，不是多邊形內角的部份為三角形不與多邊形為邊的角度，即為以 P 點為中心，繞 P 點一周的角度，共 360°
(3) 所以 n 多邊形的內角和等於 (n－2)×180°	由(2)

Q.E.D

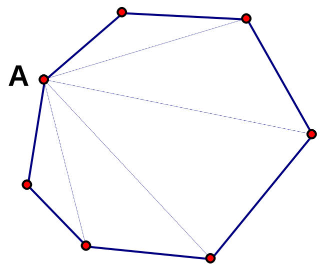


圖 6.4-4

想法二： 在多邊形上取一頂點，作此頂點與其他不相鄰的多邊形的頂點的連線，則此多邊形就由(n－2)個三角形構成，如圖 6.4-4，利用三角形內角和 180°的性質，所有(n－2)個三角形之內角和，即是多邊形之內角和。

證明二：

敘述	理由
(1) 在多邊形上取一頂點 A，作 A 點與其他不相鄰的多邊形的頂點的連線，如圖 6.4-4，則此 n 多邊形就構成(n－2)個三角形	兩點可作一直線
(2) 所以 n 多邊形內角和(n－2)×180°	三角形內角和 180° & 全量公理

Q.E.D

例題 6.4-1：

四邊形的內角和為_______________度。

想法：n 多邊形內角和$(n-2)\times 180°$

解：

敘述	理由
(1) 四邊形的內角和為$(4-2)\times 180°=360°$	已知 n 多邊形內角和$(n-2)\times 180°$

例題 6.4-2：

五邊形的內角和為_______________度。

想法：n 多邊形內角和$(n-2)\times 180°$

解：

敘述	理由
(1) 五邊形的內角和為$(5-2)\times 180°=540°$	已知 n 多邊形內角和$(n-2)\times 180°$

例題 6.4-3：

有一 n 邊形，其內角和為 2160°，則 n＝_______________。

想法：n 多邊形內角和$(n-2)\times 180°$

解：

敘述	理由
(1) $(n-2)\times 180°=2160°$	已知 n 邊形，其內角和為 2160° ＆ n 多邊形內角和$(n-2)\times 180°$
(2) $n=(2160°\div 180°)+2=14$	由(1) ＆ 解一元一次方程式

例題 6.4-4：

四邊形 ABCD 中，∠A＝85°，∠ABC＝55°，∠C＝130°，求∠ADC。

想法：n 多邊形內角和(n－2)×180°

解：

敘述	理由
(1) 四邊形的內角和為(4－2)×180°＝360°	已知 n 多邊形內角和(n－2)×180°
(2) ∠A＋∠B＋∠C＋∠D＝360°	由(1) & ∠A、∠B、∠C、∠D 為四邊形四個內角
(3) ∠ADC＝360°－∠A－∠ABC－∠C ＝360°－85°－55°－130° ＝90°	由(3) 移項 & 已知∠A＝85°、∠ABC＝55°、∠C＝130°

例題 6.4-5：

四邊形 ABCD 中，∠A＝75°、∠B＝2x°、∠C＝3x°、∠D＝（4x＋15）°，求∠D。

想法：n 多邊形內角和(n－2)×180°

解：

敘述	理由
(2) 四邊形的內角和為(4－2)×180°＝360°	已知 n 多邊形內角和(n－2)×180°
(3) ∠A＋∠B＋∠C＋∠D＝360°	由(1) & ∠A、∠B、∠C、∠D 為四邊形四個內角
(4) 75°＋2x°＋3x°＋（4x＋15）°＝360°	將已知∠A＝75°、∠B＝2x°、∠C＝3x°、∠D＝（4x＋15）° 代入(2)
(5) x＝30	由(3) & 解一元一次方程式
(6) 所以∠D＝（4x＋15）° ＝（4×30＋15）° ＝135°	已知∠D＝（4x＋15）° & (4) x＝30

例題 6.4-6：

有一 n 邊形的一個內角為 100°，其餘內角皆為 160°，則 n＝＿＿＿＿＿。

想法：n 多邊形內角和$(n-2)\times180°$
解：

敘述	理由
(1) n 邊形的內角中，有一個內角為 100°，有(n－1)個內角為 160°	已知 n 邊形的一個內角為 100°，其餘內角皆為 160°
(2) $(n-2)\times180°=100°+(n-1)\times160°$	由(1) & n 多邊形內角和$(n-2)\times180°$
(3) $n=15$	由(2) & 解一元一次方程式

例題 6.4-7：

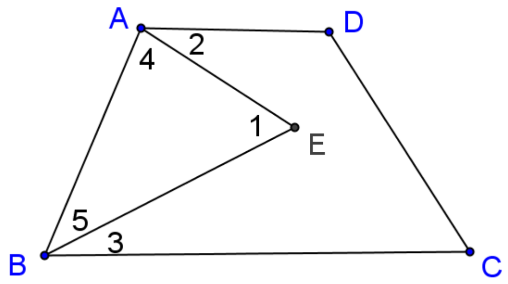
已知某四邊形有兩個內角分別為 85°、90°，另外兩個內角相差 35°，則此四邊形的最大內角為＿＿＿＿＿＿度。

想法：n 多邊形內角和$(n-2)\times180°$
解：

敘述	理由
(1) 四邊形的內角和為$(4-2)\times180°=360°$	n 多邊形內角和$(n-2)\times180°$
(2) 假設四邊行四個內角分別為 85°、90°、x°、(x＋35)°	已知四邊形有兩個內角分別為 85°、90°，另外兩個內角相差 35°
(3) $85°+90°+x°+(x+35)°=360°$	由(1) & (2) 全量定理
(4) $x=75$	由(3) & 解一元一次方程式
(5) 所以四邊行四個內角分別為 85°、90°、75°、110°	將(4) x＝75 代入(2)四邊行四個內角分別為 85°、90°、x°、(x＋35)°
(6) 此四邊形的最大內角為 110°	由(5) & $110°>90°>85°>75°$

例題 6.4-8：

如下圖，$\angle 1=60°$，則$\angle 2+\angle 3+\angle C+\angle D=$________度。



想法：(1)　一個三角形內角和 180°

(2)　n 多邊形內角和$(n-2)\times 180°$

解：

敘述	理由
(1) 三角形 ABE 中，$\angle 1+\angle 4+\angle 5=180°$	已知三角形內角和 180°
(2) $\angle 4+\angle 5=180°-\angle 1=180°-60°=120°$	由(1) 移項 & 已知$\angle 1=60°$
(3) ABCD 為四邊形， 四邊形的內角和為$(4-2)\times 180°=360°$	如圖所示 已知 n 多邊形內角和為 $(n-2)\times 180°$
(4) $\angle BAD+\angle ABC+\angle C+\angle D=360°$	由(3) & 全量定理
(5) $(\angle 2+\angle 4)+(\angle 5+\angle 3)+\angle C+\angle D=360°$	由(4) & $\angle BAD=\angle 2+\angle 4$ 、$\angle ABC=\angle 5+\angle 3$
(6) $\angle 2+\angle 3+\angle C+\angle D+\angle 4+\angle 5=360°$	由(5) & 加法交換律
(7) $(\angle 2+\angle 3+\angle C+\angle D)+(\angle 4+\angle 5)=360°$	由(6) & 加法結合律
(8) $\angle 2+\angle 3+\angle C+\angle D=360°-(\angle 4+\angle 5)$ $=360-120°=240°$	由(7) 移項 & (2) $\angle 4+\angle 5°=120°$
(9) 所以$\angle 2+\angle 3+\angle C+\angle D=240°$	由(8)

例題 6.4-9：

正五邊形的一個內角為＿＿＿＿＿＿＿度。

想法：(1) n 多邊形內角和$(n-2)\times 180°$

(2) 正五邊形的 5 個內角皆相等

解：

敘述	理由
(1) 五邊形的內角和為$(5-2)\times 180°=540°$	n 多邊形內角和$(n-2)\times 180°$
(2) 正五邊形的一個內角為 $540°\div 5=108°$	由(1)＆ 正五邊形的 5 個內角皆相等

由例題 6.4-9 中，我們可以得知正 n 多邊形一個內角的度數為 $(n-2)\times 180°\div n$ 。

例題 6.4-10：

已知有一個正 n 邊形可分成 7 個三角形，則：

(1) n＝＿＿＿＿＿＿＿。

(2) 此正 n 邊形的內角和為＿＿＿＿＿＿＿度。

(3) 此正 n 邊形的一個內角為＿＿＿＿＿＿＿度。

想法：(1) n 邊形可分割成$(n-2)$個三角形

(2) n 多邊形內角和$(n-2)\times 180°$

(3) 正 n 邊形的 n 個內角皆相等

解：

敘述	理由
(1) n 邊形可分割成$(n-2)$個三角形	多邊形內角和定理-想法二
(2) $n-2=7$	由(1) ＆ 已知 n 邊形可分成 7 個三角形
(3) $n=9$	由(2) 移項
(4) 此正 n 邊形的內角和為 $(9-2)\times 180°=7\times 180°=1260°$	由(3) ＆ n 多邊形內角和$(n-2)\times 180°$
(5) 此正 n 邊形的一個內角為 $1260°\div 9=140°$	由(4) ＆ 正 n 邊形的 n 個內角皆相等

例題 6.4-11：

有一正 n 邊形的每一個內角為 140°，求 n。

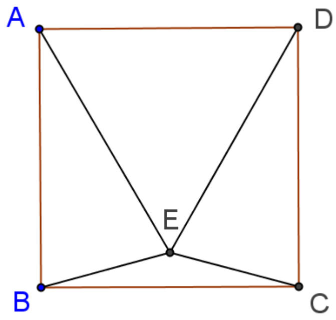
想法：正 n 多邊形一個內角的度數為$(n-2)\times 180°\div n$

解：

敘述	理由
(1) $(n-2)\times 180°\div n = 140°$	已知正 n 邊形的每一個內角為 140° & 正 n 多邊形一個內角的度數為$(n-2)\times 180°\div n$
(2) $n=9$	由(2) & 解一元一次方程式

例題 6.4-12：

如下圖，正方形 ABCD 和正三角形 ADE 有共同邊$\overline{AD}$，則∠BEC＝______度。



想法：(1) 正 n 多邊形一個內角的度數為(n－2)×180°÷n

(2) 等腰三角形兩腰相等且兩底角相等

(3) 周角為 360°

解：

敘述	理由
(1) 正方形 ABCD 中 ∠BAD＝∠ADC ＝(4－2)×180°÷4＝90° & $\overline{AD}=\overline{CD}=\overline{AB}$	如圖所示 正 n 多邊形一個內角的度數為 (n－2)×180°÷n & 正方形四邊等長
(2) 正三角形 ADE 中 ∠AED＝∠EAD＝∠ADE ＝(3－2)×180°÷3＝60° & $\overline{AD}=\overline{ED}=\overline{AE}$	如圖所示 正 n 多邊形一個內角的度數為 (n－2)×180°÷n & 正三角形三邊等長
(3) 三角形 ABE 中 $\overline{AE}=\overline{AB}$	如圖所示 由(2) $\overline{AE}=\overline{AD}$ & (1) $\overline{AD}=\overline{AB}$ 遞移律
(4) 所以三角形 ABE 為等腰三角形	由(3) & 兩腰等長為等腰三角形
(5) ∠BAD＝∠BAE＋∠EAD	如圖所示，全量等於分量之和
(6) ∠BAE＝∠BAD－∠EAD ＝90°－60°＝30°	由(5) 移項 & (1) ∠BAD＝90° & (2) ∠EAD＝60°
(7) ∠AEB＝(180°－∠BAE)÷2 ＝(180°－30°)÷2＝75°	由(4) & 等腰三角形底角與頂角之關係 & (6) ∠BAE＝30°
(8) 三角形 DEC 中 $\overline{DE}=\overline{CD}$	如圖所示 由(2) $\overline{DE}=\overline{AD}$ & (1) $\overline{AD}=\overline{CD}$ 遞移律

(9) 所以三角形 DEC 為等腰三角形	由(8) ＆ 兩腰等長為等腰三角形
(10) $\angle ADC = \angle EDC + \angle ADE$	如圖所示，全量等於分量之和
(11) $\angle EDC = \angle ADC - \angle ADE$ $= 90° - 60° = 30°$	由(10) 移項 ＆ (1) $\angle ADC = 90°$ ＆ (2) $\angle ADE = 60°$
(12) $\angle DEC = (180° - \angle EDC) \div 2$ $= (180° - 30°) \div 2 = 75°$	由(9) ＆ 等腰三角形底角與頂角之關係 ＆ (11) $\angle EDC = 30°$
(13) $360° = \angle AED + \angle DEC + \angle BEC$ $+ \angle AEB$	如圖所示，全量等於分量之和 ＆ 周角為 360°
(14) $\angle BEC = 360° - \angle AED - \angle DEC$ $- \angle AEB$ $= 360° - 75° - 60° - 75°$ $= 150°$	由(13) 移項 ＆ (2) $\angle AED = 60°$ ＆ (12) $\angle DEC = 75°$ ＆ (7) $\angle AEB = 75°$

定理 6.4-3 多邊形外角和定理

n 多邊形的外角和等於 360°

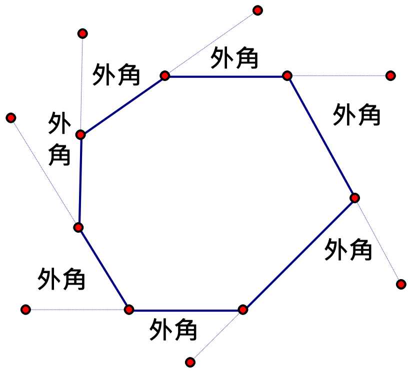


圖 6.4-5

想法： 因為 n 多邊形之每一內角與其外角和為一平角，利用 n 多邊形內角與外角的總和減去 n 多邊形的內角和，即是 n 多邊形之外角和。

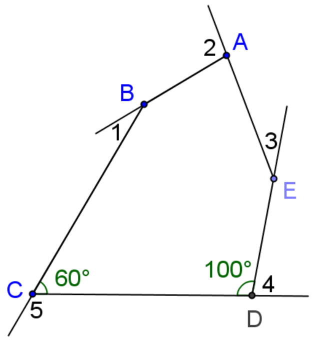
證明：

敘述	理由
(1) n 多邊形內角與外角的總和 ＝n 多邊形內角和＋n 多邊形外角和	全量等於分量之和
(2) n 多邊形外角和 ＝n 多邊形內角與外角的總和－n 多邊形的內角和 $= n \times 180° - (n-2) \times 180°$ ＝360°。	由(1) 移項 & n 多邊形內角和 $(n-2) \times 180°$

Q.E.D

例題 6.4-13：

如下圖，$\angle 1+\angle 2+\angle 3=$＿＿＿＿＿＿＿度。



想法：(1) 外角定義

(2) 任意凸多邊行一組外角和 360°

解：

敘述	理由
(1) $\angle 4=180°-100°=80°$	$\angle 4$ 是 $\angle EDC$ 的外角 ＆ 外角定義
(2) $\angle 5=180°-60°=120°$	$\angle 5$ 是 $\angle BCD$ 的外角 ＆ 外角定義
(3) $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5=360°$	$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$、$\angle 5$ 為五邊形 ABCDE 的一組外角 ＆ 五邊形一組外角和 360°
(4) $\angle 1+\angle 2+\angle 3=360°-\angle 4-\angle 5$ $=360°-80°-120°$ $=160°$	由(3) 移項 ＆ (1) $\angle 4=80°$ ＆ (2) $\angle 5=120°$ 減法
(5) 所以 $\angle 1+\angle 2+\angle 3=160°$	由(4)

例題 6.4-14：

四邊形 ABCD 中，∠1、∠2、∠3、∠4 分別為∠A、∠B、∠C、∠D 的外角，已知∠1＝120°，∠2＝50°，∠3＝(3x)°，∠4＝(x－10)°，求∠3、∠4。

想法：任意凸多邊行一組外角和 360°

解：

敘述	理由
(1) 四邊形之一組外角和 360°	任意凸多邊行一組外角和 360°
(2) ∠1＋∠2＋∠3＋∠4＝360°	由(1) ＆ 已知∠1、∠2、∠3、∠4 分別為∠A、∠B、∠C、∠D 的外角
(3) 120°＋50°＋(3x)°＋(x－10)°＝360°	由(2) ＆ 已知∠1＝120°，∠2＝50°，∠3＝(3x)°，∠4＝(x－10)°
(4) x＝50	由(3) ＆ 解一元一次方程式
(5) ∠3＝(3x)°＝(3×50)°＝150°	已知∠3＝(3x)° ＆ (4) x＝50
(6) ∠4＝(x－10)°＝(50－10)°＝40°	已知∠4＝(x－10)° ＆ (4) x＝50

例題 6.4-15：

有一個四邊形之一組外角分別為 2x°、3x°、6x°、7x°，則其最小內角為 ____________度，最大內角為______________度。

想法：(1) 任意凸多邊行一組外角和 360°

(2) 外角定義

解：

敘述	理由
(1) 四邊形之一組外角和 360°	任意凸多邊行一組外角和 360°
(2) 2x°＋3x°＋6x°＋7x°＝360°	由(1) & 已知四邊形之一組外角分別為 2x°、3x°、6x°、7x°
(3) x＝20	由(2) & 解一元一次方程式
(4) 四邊形之一組外角分別為 40°、60°、120°、140°	將(3) x＝20 代入已知四邊形之一組外角分別為 2x°、3x°、6x°、7x°
(5) 四邊形之內角分別為 140°、120°、60°、40°	由(4) & 外角定理
(6) 四邊形之最大內角為 140°	由(5) 140°＞120°＞60°＞40°
(7) 四邊形之最小內角為 40°	由(5) 140°＞120°＞60°＞40°

例題 6.4-16：

若某八邊形的一組外角成等差數列，且最小外角為 10°，則最小內角為？

想法：(1) 任意凸多邊行一組外角和 360°

(2) 外角定義

解：

敘述	理由
(1) 假設八邊形的 8 個外角分別為 10°、(10＋d)°、(10＋2d)°、(10＋3d)°、(10＋4d)°、(10＋5d)°、(10＋6d)°、(10＋7d)°	已知某八邊形的一組外角成等差數列，且最小外角為 10° ＆ 假設外角的公差為 d
(2) 10°＋(10＋d)°＋(10＋2d)°＋(10＋3d)°＋(10＋4d)°＋(10＋5d)°＋(10＋6d)°＋(10＋7d)°＝360°	任意凸多邊行一組外角和 360° ＆ 由(1) 假設
(3) d＝10	由(2) ＆ 解一元一次方程式
(4) 八邊形的 8 個外角分別為 10°、20°、30°、40°、50°、60°、70°、80°	將(3) d＝10 代入(1)
(5) 八邊形的 8 個內角分別為 170°、160°、150°、140°、130°、120°、110°、100°	由(4) ＆ 外角定義
(6) 八邊形最小內角為 100°	由 (8) 170°＞160°＞150°＞140°＞130°＞120°＞110°＞100°

例題 6.4-17：

若某 n 邊形的內角和為其一組外角和的 7 倍，則此 n 邊形的內角和為____度。

想法：(1) 任意凸多邊行一組外角和 360°

(2) n 邊形的內角和為(n－2)×180°

解：

敘述	理由
(1) (n－2)×180°＝7×360°	已知 n 邊形的內角和為其一組外角和的 7 倍 & n 邊形的內角和(n－2)×180° & 任意凸多邊行一組外角和 360°
(2) n＝16	由(1) & 解一元一次方程式
(3) 16 邊形的內角和為 (16－2)×180°＝14×180° ＝2520°	n 邊形的內角和為(n－2)×180° & (2) n＝16

例題 6.4-18：

正六邊形的一個外角為______________度。

想法：(1) 任意凸多邊行一組外角和 360°

(2) 正六邊形的每一個外角皆相等

解：

敘述	理由
(1) 正六邊形的外角和為 360°	任意凸多邊行一組外角和 360°
(2) 正六邊形的一個外角為 360°÷6＝60°	正六邊形的每一個外角皆相等

由例題 6.4-18 中，我們利用任意凸 n 邊行一組外角和 360°和正 n 邊形的每一個外角皆相等，可得知正 n 邊形的一個外角度數為 360°÷n。
若我們利用正 n 邊形的一個外角度數為 360°÷n 和外角的定義，則可得知正 n 多邊形的一個內角度數為(180°－360°÷n)，此與例題 6.4-9 所得結論：正 n 多邊形的一個內角度數為(n－2)×180°÷n 可互相搭配使用 。

例題 6.4-19：

若有一正 n 邊形的一個外角為 24°，則 n＝______________。

想法：正 n 邊形的一個外角度數為 360°÷n

解：

敘述	理由
(1) 360°÷n＝24°	正 n 邊形的一個外角度數為 360°÷n ＆ 已知正 n 邊形的一個外角為 24°
(2) n＝360°÷24°＝15	由(1) 移項

例題 6.4-20：

若有一正 n 邊形的一個內角為 140°，則 n＝______________。

想法：正 n 邊形的一個內角度數為(180°－360°÷n)

解：

敘述	理由
(1) 140°＝180°－360°÷n	正 n 邊形的一個內角度數為(180°－360°÷n) ＆ 已知正 n 邊形的一個內角為 140°
(2) n＝360°÷(180°－140°)＝9	由(1) ＆ 解一元一次方程式

例題 6.4-21：

有一正 n 邊形，其一個外角度數的 3 倍等於一個內角度數，則 n＝_______。

想法：(1) 正 n 邊形的一個外角度數為 360°÷n

(2) 正 n 邊形的一個內角度數為(180°－360°÷n)

解：

敘述	理由
(1) (360°÷n)×3＝180°－360°÷n	已知一個外角度數的 3 倍等於一個內角度數 ＆ 正 n 邊形的一個外角度數為 360°÷n ＆ 正 n 邊形的一個內角度數為(180°－360°÷n)
(2) n＝8	由(1) ＆ 解一元一次方程式

例題 6.4-22：

有一正 n 邊形，其一個外角度數的 5 倍等於一個內角度數，則此正 n 邊形的內角和為______________度。

想法：(1) 正 n 邊形的一個外角度數為 $360°\div n$

(2) 正 n 邊形的一個內角度數為$(180°-360°\div n)$

(3) 正 n 邊形的內角和為$(n-2)\times 180°$

解：

敘述	理由
(1) $(360°\div n)\times 5=180°-360°\div n$	已知一個外角度數的5倍等於一個內角度數 ＆ 正 n 邊形的一個外角度數為 $360°\div n$ ＆ 正n邊形的一個內角度數為$(180°-360°\div n)$
(2) $n=12$	由(1) ＆ 解一元一次方程式
(3) 所以正 12 邊形的內角和為 $(12-2)\times 180°=1800°$	由(2) ＆ 正 n 邊形的內角和為$(n-2)\times 180°$

習題 6.4

習題 6.4-1：

七邊形的內角和為______________度。

習題 6.4-2：

有一 n 邊形，其內角和為 720°，則 n＝______________。

習題 6.4-3：

有一個六邊形的內角分別為 120°、95°、130°、115°、100°、x°，則 x＝______________。

習題 6.4-4：

有一個五邊形的內角分別是 130°、150°、(x＋40)°、(2x＋15)°、115°，則 x＝______________。

例題 6.4-5：

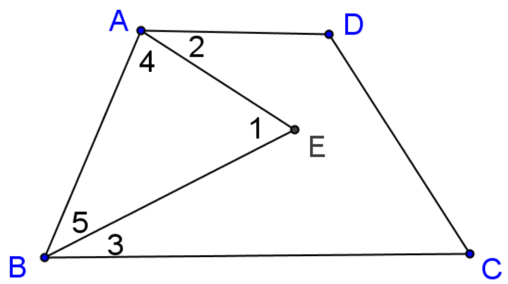
有一 n 邊形的一個內角為 100°，其餘內角皆為 110°，則 n＝__________。

例題 6.4-6：

已知某四邊形有兩個內角分別為 80°、90°，另外兩個內角相差 40°，則此四邊形的最大內角為______________度。

例題 6.4-7：

如下圖，∠1＝80°，則∠2＋∠3＋∠C＋∠D＝________度。



習題 6.4-8：

已知有一個正 n 邊形可分成 4 個三角形，則：

(1) n＝______________。

(2) 此正 n 邊形的內角和為______________度。

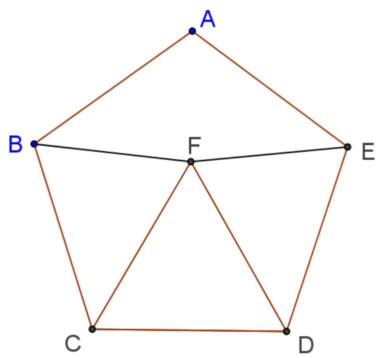
(3) 此正 n 邊形的一個內角為______________度。

習題 6.4-9：

有一正 n 邊形的每一個內角為 108°，求 n。

習題 6.4-10：

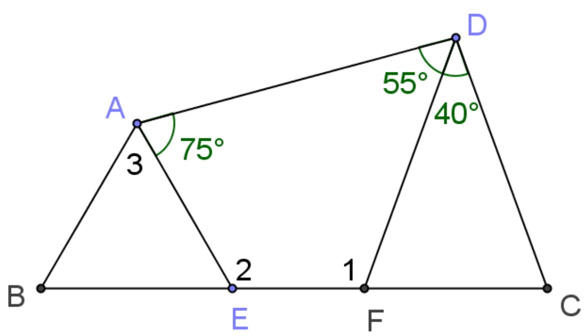
如下圖，正五邊形 ABCDE 中，F 為內部一點，使得△CDF 為正三角形，則∠BFC＝____度，∠BFE＝____度。



習題 6.4-11：

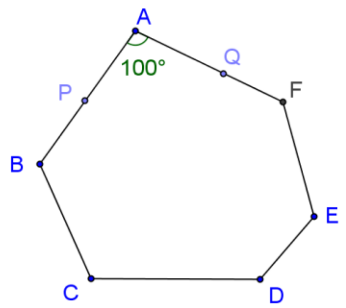
如下圖，四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=\overline{AE}$，$\overline{DC}=\overline{DF}$，求：

(1)∠1。 (2)∠2。 (3)∠3。



習題 6.4-12：

如下圖，有一個六邊形的公園，其中∠FAB＝100°，小明從 P 點依逆時針方向繞公園行走，最後到達 Q 點，則小明共轉了______________度。



習題 6.4-13：

有一個四邊形，其外角分別為 x°、(x＋5)°、(2x－7)°、42°，則 x＝__________，最大外角為__________度。

習題 6.4-14：

若某六邊形的一組外角成等差數列，且最小外角為 10°，則最小內角為？

習題 6.4-15：

若某 n 邊形的內角和為其一組外角和的 5 倍，則此 n 邊形的內角和為____度。

習題 6.4-16：

正十邊形的一個外角為______________度。

習題 6.4-17：

有一正 n 邊形，其每一個外角為 36°，則 n＝______________。

習題 6.4-18：

若有一正 n 邊形的一個內角為 108°，則 n＝______________。

習題 6.4-19：

有一正 n 邊形，其一個外角度數的 6 倍等於一個內角度數，則此正 n 邊形的內角和為______________度。

本章重點

本章介紹多邊形包含正方形、菱形、鳶形、平行四邊形、梯形、n 多邊形等，並介紹這些多邊形的一些性質，：

1. 平行四邊形的對邊相等及對角相等性質
2. 平行四邊形的對角線互相平分性質
3. 判別平行四邊形的方法：
   (1) 四邊形的一組對邊若平行且相等，則為平行四邊形。
   (2) 四邊形的兩組對邊若分別相等，則為平行四邊形。
   (3) 四邊形的對角線若互相平分，則為平行四邊形。
   (4) 四邊形的兩組對角相等，則為平行四邊形。
4. 平行四邊形全等定理：一平行四邊形的兩邊及其夾角若分別等於另一平行四邊形的兩邊及其夾角，則此二平行四邊形全等。
5. 三角形兩邊中點連線定理：三角形的兩中點連線必平行第三邊且等於第三邊的一半。
6. 梯形的兩腰中點連線必平行兩底且等於兩底和的一半。
7. 等腰梯形的兩底角相等。
8. 凸多邊形與凹多邊形。
9. n 多邊形的內角和為 $(n-2)\times180^\circ$。
10. n 多邊形外角和為 360°。
11. 正 n 多邊形的一個外角為 $360^\circ\div n$。
12. 正 n 多邊形的一個內角為 $(n-2)\times180^\circ\div n$ 或等於 $(180^\circ-360^\circ\div n)$。

歷年基測題目

1. 圖(一)、圖(二)、圖(三)分別表示甲、乙、丙三人由 A 地到 B 地的路線圖。
已知：

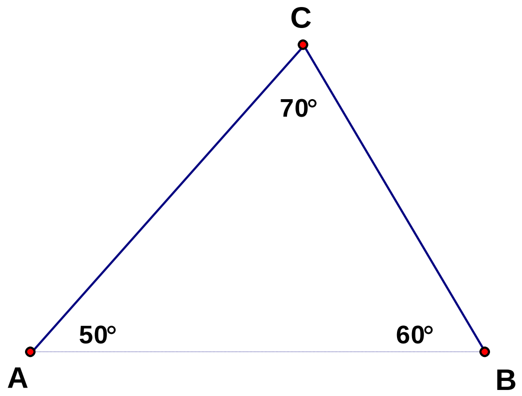
甲的路線為：A→C→B。

乙的路線為：A→D→E→F→B，其中 E 為$\overline{AB}$的中點。

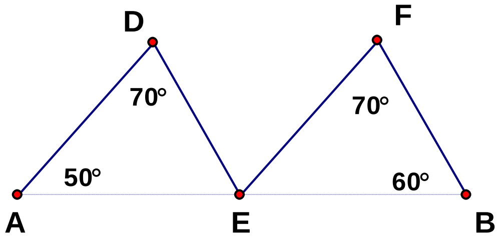
丙的路線為：A→I→J→K→B，其中 J 在$\overline{AB}$上，且$\overline{AJ}>\overline{JB}$。

符號「→」表示「直線前進」，則根據圖(一)、圖(二)、圖(三)的數據，判斷三人行進路線長度的大小關係為何？**(98-1)**

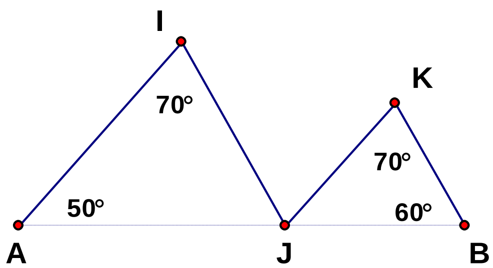
(A) 甲＝乙＝丙　(B) 甲<乙<丙　(C) 乙<丙<甲　(D) 丙<乙<甲



圖(一)



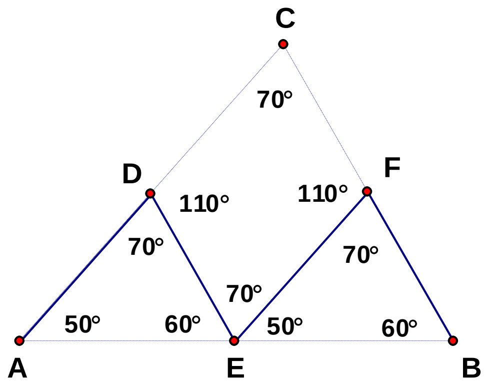
圖(二)

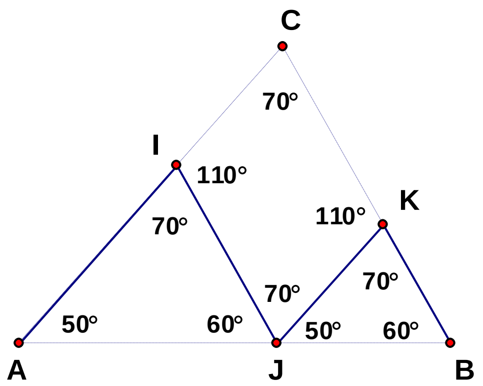


圖(三)

解答：(A) 甲＝乙＝丙

想法：平行四邊形之對邊相等



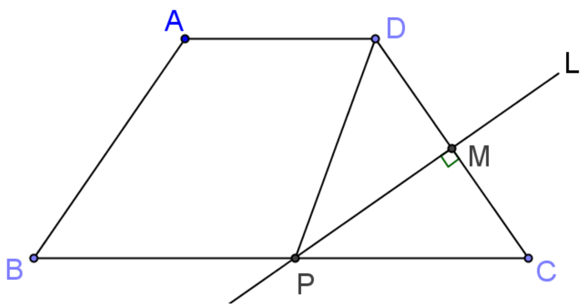


解答說明：

敘述	理由
(1) 甲路線長度＝$\overline{AC}+\overline{CB}$	已知甲的路線為：A→C→B
(2) 延長$\overline{AD}$及$\overline{BF}$，兩延長線交於 C 點	作延長線，不平行兩線交於一點
(3) 四邊形 CDEF 為平行四邊形	如圖 ＆ 兩組對角相等為平行四邊形
(4) $\overline{DE}=\overline{CF}$，$\overline{DC}=\overline{EF}$	由(3) ＆ 平行四邊形的對邊相等
(5) 乙路線長度＝$\overline{AD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FB}$	已知乙的路線為：A→D→E→F→B
＝$\overline{AD}+\overline{CF}+\overline{DC}+\overline{FB}$	將(4) $\overline{DE}=\overline{CF}$，$\overline{DC}=\overline{EF}$ 代入
＝$\overline{AD}+\overline{DC}+\overline{CF}+\overline{FB}$	加法交換律
＝$(\overline{AD}+\overline{DC})+(\overline{CF}+\overline{FB})$	加法結合律
＝$\overline{AC}+\overline{CB}$	全量等於分量之和
(6) 延長$\overline{AI}$及$\overline{BK}$，兩延長線交於 C 點	作延長線，不平行兩線交於一點
(7) 四邊形 CIJK 為平行四邊形	如圖 ＆ 兩組對角相等為平行四邊形
(8) $\overline{IJ}=\overline{CK}$，$\overline{IC}=\overline{JK}$	由(7) ＆ 平行四邊形的對邊相等等
(9) 丙路線長度＝$\overline{AI}+\overline{IJ}+\overline{JK}+\overline{KB}$	已知丙的路線為：A→I→J→K→B
＝$\overline{AI}+\overline{CK}+\overline{IC}+\overline{KB}$	將(8) $\overline{IJ}=\overline{CK}$，$\overline{IC}=\overline{JK}$ 代入
＝$\overline{AI}+\overline{IC}+\overline{CK}+\overline{KB}$	加法交換律
＝$(\overline{AI}+\overline{IC})+(\overline{CK}+\overline{KB})$	加法結合律
＝$\overline{AC}+\overline{CB}$	全量等於分量之和
(10) 所以甲的路線長度	由(1)、(5) & (9) 遞移律
＝乙的路線長度	
＝丙的路線長度＝$\overline{AC}+\overline{CB}$	
(11) 所以本題選(A) 甲＝乙＝丙	由(10)

2. 如下圖，等腰梯形 ABCD 中，$\overline{AD}=5$，$\overline{CD}=7$，$\overline{BC}=13$，且$\overline{CD}$之中垂線 L 交$\overline{BC}$於 P 點，連接$\overline{PD}$。求$\overline{AB}+\overline{BP}+\overline{PD}+\overline{AD}=$？**(98-1)**

(A)24　(B) 25　(C) 26　(D) 27



解答：(B) 25

想法： (1) 等腰梯形兩腰等長

(2) 中垂線上任一點到線段兩端等距離

解答說明：

敘述	理由
(1) $\overline{PD}=\overline{PC}$	已知$\overline{CD}$之中垂線 L 交$\overline{BC}$於 P 點 & 中垂線上任一點到線段兩端等距離
(2) $\overline{AB}=\overline{CD}=7$	已知 ABCD 為等腰梯形 & 等腰梯形兩腰等長 & 已知$\overline{CD}=7$
(3) $\overline{AB}+\overline{BP}+\overline{PD}+\overline{AD}$	題目所求
$=\overline{AB}+\overline{BP}+\overline{PC}+\overline{AD}$	將(1) $\overline{PD}=\overline{PC}$ 代入
$=\overline{AB}+(\overline{BP}+\overline{PC})+\overline{AD}$	加法結合律
$=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AD}$	全量等於分量之和($\overline{BC}=\overline{BP}+\overline{PC}$)
$=7+13+5=25$	將(2) $\overline{AB}=7$ & 已知$\overline{BC}=13$、$\overline{AD}=5$ 代入
(4) 所以本題選(B) 25	由(3)

3. 在五邊形 ABCDE 中，若∠A＝100°，且其餘四個內角度數相等，則∠C＝？ **(97-1)**

(A) 65°　　(B) 100°　　(C) 108°　　(D) 110°

解答：(D) 110°

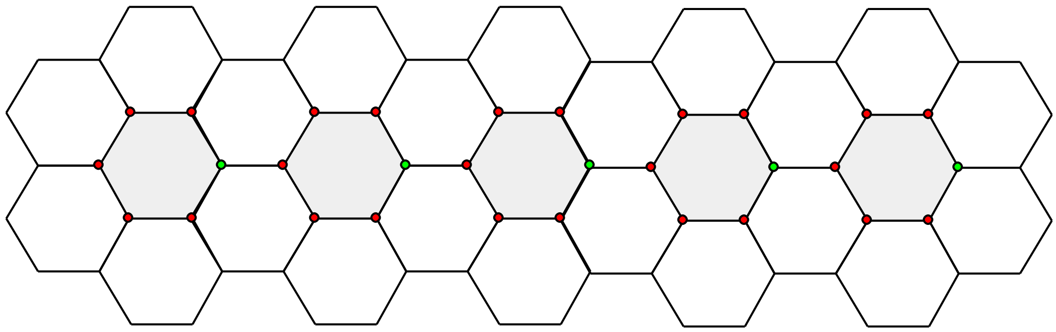
想法： n 多邊形內角和為 $(n-2)\times180°$

解答說明：

敘述	理由
(1) 五邊形 ABCDE 內角和 $=(5-2)\times180°=3\times180°=540°$	n 多邊形內角和為 $(n-2)\times180°$
(2) $\angle C=(540°-100°)\div4=110°$	由(1) & 已知∠A＝100°，其餘四個角相等
(3) 所以本題選(D) 110°	由(2)

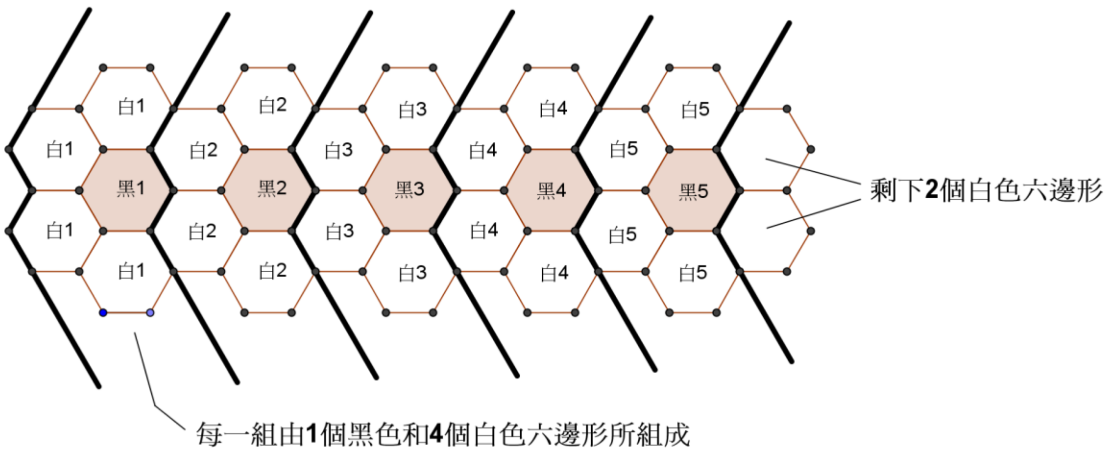
4. 有一長條型鏈子，其外型由邊長為 1 公分的正六邊形排列而成。下圖表示此鏈之任一段花紋，其中每個黑色六邊形與 6 個白色六邊形相鄰。若鏈子上有 35 個黑色六邊形，則此鏈子共有幾個白色六邊形？**(97-1)**

(A) 140　　(B) 142　　(C) 210　　(D) 212



解答：(B) 142

想法： 觀查鏈子圖形，其組成方式是由黑色六邊形與左邊兩個及上、下兩個共 4 個白色六邊形為一組，一組一組串接，在最右邊在加上兩個白色六邊形組成，所以白色六邊形的個數就是黑色六邊形的個數的四倍再加二個。

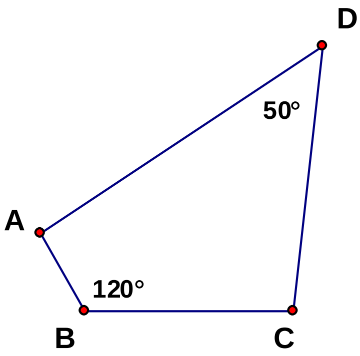


解答說明：

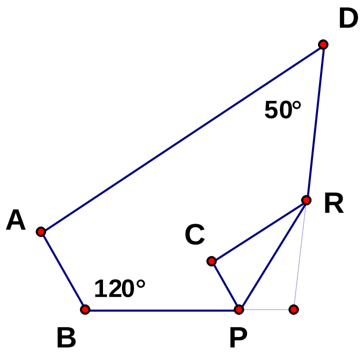
敘述	理由
(1) 白色的六邊形個數為 $35 \times 4 + 2 = 142$ 個	如上圖，鏈子由 35 組六邊形組成再加二個白色的六邊形，每組由 1 個黑色和 4 個白色的六邊形所組成
(2) 所以本題選(B) 142	由(1)

5. 下圖(一)是四邊形紙片 ABCD，其中∠B＝120°，∠D＝50°。若將其右下角向內摺出一△PCR，恰使$\overline{CP} \parallel \overline{AB}$、$\overline{RC} \parallel \overline{AD}$，如下圖(二)所示，則∠PCR＝？**(96-1)**

(A) 80°　　(B) 85°　　(C) 95°　　(D) 110°



圖(一)



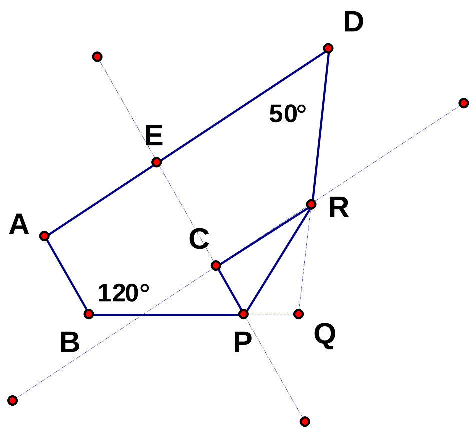
圖(二)

解答：(C) 95°

想法：(1) 全等三角形

(2) 平行線之同位角相等

(3) n 多邊形的內角和為 (n－2)×180°



圖(三)

解答說明：

敘述	理由
(1) 延長$\overline{PC}$交$\overline{AD}$於 E 點，如上圖(三)	兩不平行直線必相交於一點
(2) △PCR ≅ △PQR	已知四邊形紙片 ABCD，將其右下角向內摺出一△PCR，則兩三角形完全疊合 & 根據三角形 S.S.S. 全等定理

(3) $\angle PCR = \angle Q$	由(2) ＆ 全等三角形之對應角相等
(4) $\angle PCR = \angle PED$	已知$\overline{RC} \parallel \overline{AD}$ ＆ 同位角相等
(5) $\angle A = \angle PED$	已知$\overline{CP} \parallel \overline{AB}$ ＆ 同位角相等
(6) 所以$\angle A = \angle Q$	由(3)、(4) ＆ (5) 遞移律
(7) $\angle A + \angle B + \angle Q + \angle D = 360°$	四邊形內角和為$(4-2) \times 180°$
(8) $\angle A + \angle Q = 360° - \angle B - \angle D$ $= 360° - 120° - 50°$ $= 190°$	由(7) 移項 ＆ 已知$\angle B = 120°$，$\angle D = 50°$ 減法
(9) $\angle Q + \angle Q = 190°$	由(8) ＆ (6) $\angle A = \angle Q$
(10) $\angle Q = 95°$	由(9) ＆ 解一元一次方程式
(11) 所以$\angle PCR = \angle Q = 95°$	由(10)$\angle Q = 95°$ ＆(3)$\angle PCR = \angle Q$ 遞移律
(12) 所以本題選(C) 95°	由(11)

6. 已知小娟家的地板全由同一形狀且大小相同的地磚緊密地舖成。若此地磚的形狀是一正多邊形，則下列何者不可能是此地磚的形狀？**(96-1)**

(A) 正三角形　(B) 正方形　(C) 正五邊形　(D) 正六邊形

解答：(C) 正五邊形

想法：(1) 正 n 多邊形的一個內角為 $(n-2)\times180°\div n$

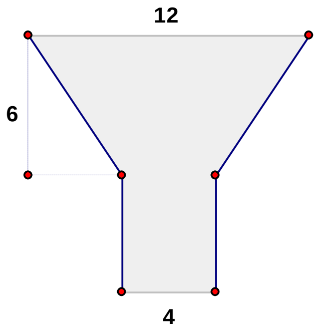
(2) 正 n 多邊形一個內角度數的倍數為 360°的正多邊形才能緊密地結合

解答說明：

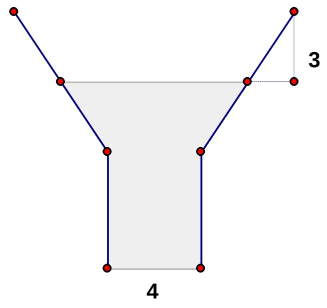
敘述	理由
(1) 正三角形一個內角 $=(3-2)\times180°\div3=60°$，可以	正 n 多邊形的一個內角為 $(n-2)\times180°\div n$ $360°\div60°=6$，6 個正三角形可緊密圍成一圈
(2) 正方形一個內角 $=(4-2)\times180°\div4=90°$，可以	正 n 多邊形的一個內角為 $(n-2)\times180°\div n$ $360°\div90°=4$，4 個正方形可緊密圍成一圈
(3) 正五邊形一個內角 $=(5-2)\times180°\div5=108°$，不可以	正 n 多邊形的一個內角為 $(n-2)\times180°\div n$ 360° 不能被 108° 整除，正五邊形不可緊密圍成一圈
(4) 正六邊形一個內角 $=(6-2)\times180°\div6=120°$，可以	正 n 多邊形的一個內角為 $(n-2)\times180°\div n$ $360°\div120°=3$，3 個正六邊形可緊密圍成一圈
(5) 所以本題選(C) 正五邊形	由(4)

7. 如下圖(一)，四線段構成一漏斗的剖面圖，其中管子的內部寬度為 4 公分。已知水滿時，水面到漏斗頸的高為 6 公分，水面寬度為 12 公分。若水位下降 3 公分，如圖(二)，則水面的寬度為多少公分？ **(94-1)**

(A) 6　　(B) 7　　(C) 8　　(D) 9



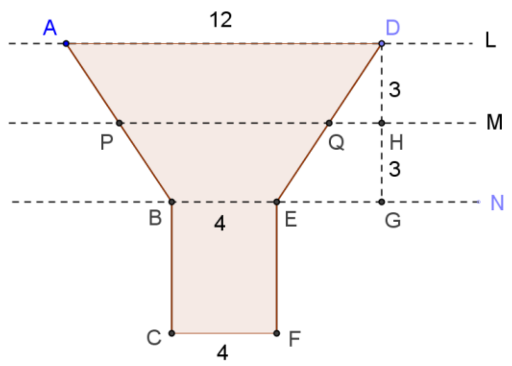
圖(一)



圖(二)

解答：(C) 8

想法：(1) 平行線截等線段定理　　(2) 梯形中線長為兩底和的一半



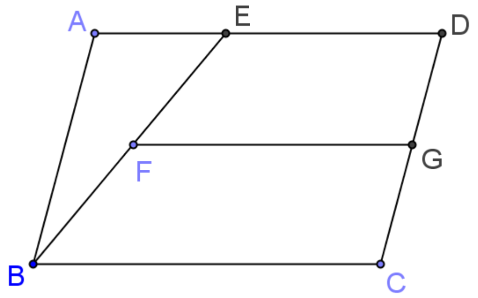
圖(三)

解答說明：

敘述	理由
(1) 依題意作圖，如圖(三)所示 L // M // N 且 $\overline{DH}=\overline{HG}=3$	作圖 水平線互相平行 & 已知敘述
(2) $\overline{DQ}=\overline{QE}$ 且 $\overline{AP}=\overline{PB}$	由(1) & 平行線截等線段定理
(3) 四邊形 ADEB 為梯形	由(1) L // N & 一組對邊平行為梯形
(4) $\overline{PQ}$為梯形 ADEB 的中線，且 $\overline{PQ}=(\overline{AD}+\overline{BE})\div 2$ $=(12+4)\div 2=8$	由(2)、(3) & 梯形中線長為兩底和的一半 已知$\overline{AD}=12$ & $\overline{BE}=4$
(5) 所以本題選(C) 8	由(4)

8.　如下圖，四邊形 ABCD 為平行四邊形，$\overline{ED} \parallel \overline{FG}$，∠D＝75°，∠ABE＝25°。求∠GFB＋∠GCB＝？　**(93-1)**

(A) 155°　　(B) 210°　　(C) 235°　　(D) 270°



解答：(C) 235°

想法： (1)　n 多邊形內角和為(n－2)×180°

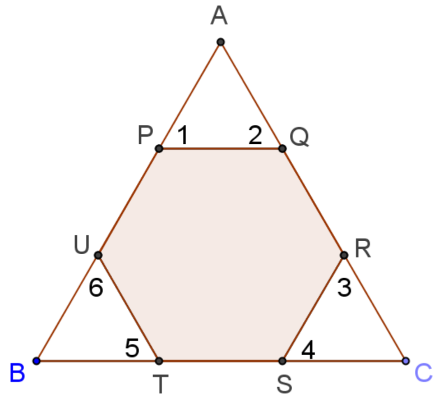
(2)　平行四邊形的對角相等

解答說明：

敘述	理由
(1) ∠FGC＝∠D＝75°	已知$\overline{ED} \parallel \overline{FG}$ & 同位角相等 & 已知∠D＝75°
(2) ∠ABC＝∠D＝75°	已知四邊形 ABCD 為平行四邊形 & 平行四邊形之對角相等
(3) ∠ABC＝∠ABE＋∠FBC	全量等於分量之和
(4) ∠FBC＝∠ABC－∠ABE ＝75°－25°＝50°	由(3) 移項 & (2) ∠ABC & 已知 ∠ABE＝25°
(5) 四邊形 BCGF 內角和(4－2)×180°＝360°	n 多邊形內角和為(n－2)×180°
(6) 360°＝∠FGC＋∠FBC＋∠GCB＋∠GFB	由(5) & 全量等於分量之和
(7) ∠GFB＋∠GCB＝360°－∠FGC－∠FBC ＝360°－75°－50° ＝235°	由(6) 移項 & (1) ∠FGC＝75° & (4) ∠FBC＝50°
(8) 所以本題選(C)　235°	由(7)

9. 如下圖，ABC 是邊長為 a 的正三角形紙張，今在各角剪去一個三角形，使得剩下的六邊形 PQRSTU 為正六邊形，則$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{ST}+\overline{UT}+\overline{PU}=$？

(A) 2a　(B) 3a　(C) $\frac{3}{2}a$　(D) $\frac{9}{4}a$　**(92-1)**



解答：(A) 2a

想法：(1)　正 n 多邊形每一個內角皆為$(n-2)\times180°\div n$

(2)　正 n 多邊形每一個外角皆為 $360°\div n$

(2)　正 n 多邊形 n 邊等長且 n 個角皆相等

解答說明：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=a$	已知 ABC 是邊長為 a 的正三角形 & 正三角形三邊等長
(2) $\angle A=\angle B=\angle C$ $=(3-2)\times180°\div3=60°$	已知 ABC 為正三角 & 正 n 多邊形每一個內角皆為$(n-2)\times180°\div n$
(3) $\angle1=\angle2=\angle3=\angle4=\angle5=\angle6$ $=360°\div6=60°$	已知 PQRSTU 為正六邊形 & 正 n 多邊形每一個外角皆為 $360°\div n$
(4) $\triangle APQ$ 為正三角形	由(2) $\angle A=60°$、(3) $\angle1=\angle2=60°$ & 等角三角形為正三角形
(5) $\overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{AQ}$	由(4) & 正三角形三邊等長
(6) $\triangle BUT$ 為正三角形	由(2) $\angle B=60°$、(3) $\angle5=\angle6=60°$ & 等角三角形為正三角形
(7) $\overline{BU}=\overline{BT}=\overline{TU}$	由(6) & 正三角形三邊等長

(8) △CRS 為正三角形	由(2) ∠C＝60°、(3) ∠3＝∠4＝60° ＆ 等角三角形為正三角形
(9) $\overline{CR}=\overline{RS}=\overline{CS}$	由(8) ＆ 正三角形三邊等長
(10) $\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RS}=\overline{ST}=\overline{UT}=\overline{PU}$	已知 PQRSTU 為正六邊形 ＆ 正六邊形 6 個邊皆等長
(11) $\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RS}=\overline{ST}=\overline{UT}$ $=\overline{PU}=\overline{AP}=\overline{AQ}=\overline{BU}=\overline{BT}$ $=\overline{CR}=\overline{CS}$	由(5)、(7)、(9) ＆ (10) 遞移律
(12) $\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{ST}+\overline{UT}+\overline{PU}$ $=\overline{AQ}+\overline{QR}+\overline{RC}+\overline{ST}+\overline{BT}+\overline{SC}$ $=(\overline{AQ}+\overline{QR}+\overline{RC})+(\overline{ST}+\overline{BT}+\overline{SC})$ $=\overline{AC}+\overline{BC}$ $=a+a=2a$	題目所求 由(11) $\overline{PQ}=\overline{AQ}$、$\overline{RS}=\overline{RC}$、$\overline{UT}=\overline{BT}$ 、$\overline{PU}=\overline{SC}$ ＆ 加法結合律 全量等於分量之和 由(1) $\overline{BC}=\overline{CA}=a$
(13) 所以本題選(A)　2a	由(12)