習題 4.1

習題 4.1-1：

△ABC 中，若∠A＝30°，∠B＝60°，則△ABC 為________三角形。
（填銳角、直角、鈍角）

想法：(1) 三角形三內角和 180°

(2) 銳角、直角、鈍角三角形的判別

解：

敘述	理由
(1) ∠A＋∠B＋∠C＝180°	三角形內角和 180°
(2) ∠C＝180°－(∠A＋∠B)	由(1) 等量減法公理
(3) ∠C＝180°－(30°＋60°)＝90°	由(2) & 已知∠A＝30°，∠B＝60°
(4) △ABC 為直角三角形	由(3) ∠C＝90°　已證

習題 4.1-2：

△ABC 中，若∠A＝（3x－14）°，∠B＝95°，∠C＝（2x＋9）°，求∠A、∠C。

想法：三角形三內角和 180°

解：

敘述	理由
(1) ∠A＋∠B＋∠C＝180°	三角形內角和 180°
(2) （3x－14）°+95°＋（2x＋9）°=180°	由(1)&已知∠A＝（3x－14）°， ∠B＝95°，∠C＝（2x＋9）°
(3) x＝18	由(2)解一元一次方程式
(4) ∠A＝（3x－14）°=40°	由(3)&已知∠A＝（3x－14）°
(5) ∠C＝（2x＋9）°=45°	由(3)&已知∠C＝（2x＋9）°

習題 4.1-3：

$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 80°$，若 $\angle A$ 的度數是 $\angle B$ 的 3 倍，求 $\angle A$、$\angle B$。

想法：三角形內角和 180°

解：

敘述	理由
(1) $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$	三角形內角和 180°
(2) $\angle A + \angle B = 180° - \angle C = 100°$	由(1) 等量減法公理 & $\angle C = 80°$
(3) $\angle A = 3\angle B$	已知 $\angle A$ 的度數是 $\angle B$ 的 3 倍
(4) $3\angle B + \angle B = 100°$	將(3)代入(2)
(5) $\angle B = 25°$	由(4) 解一元一次方程式
(6) $\angle A = 3\angle B = 75°$	將(5)代入(3)

習題 4.1-4：

$\triangle ABC$ 中，若 $\angle A = 110°$，$2\angle B = 3\angle C$，求 $\angle B$、$\angle C$。

想法：三角形三內角和 180°

解：

敘述	理由
(1) $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$	三角形內角和 180°
(2) $\angle B + \angle C = 180° - \angle A = 70°$	由(1) 等量減法公理 & $\angle A = 110°$
(3) $\angle B = \frac{3}{2}\angle C$	已知 $2\angle B = 3\angle C$
(4) $\frac{3}{2}\angle C + \angle C = 70°$	將(3)代入(2)
(5) $\angle C = 28°$	由(4) 解一元一次方程式
(6) $\angle B = 42°$	將(5)代入(3)

習題 4.1-5：

已知一等腰三角形的頂角為 110 度，則底角為______________度。

想法：(1) 三角形三內角和 180°

(2) 等腰三角形兩底角相等

解：

敘述	理由
(1) 假設等腰三角形兩底角皆為 x°	等腰三角形的兩底角相等
(2) 110°＋x°＋x°＝180°	三角形內角和 180°
(3) x＝35	由(2)＆解一元一次方程式
(4) 底角為 35°	由(1)＆(3)

習題 4.1-6：

已知一等腰三角形的底角為 70 度，則頂角為______________度。

想法：(1) 三角形三內角和 180°

(2) 等腰三角形兩底角相等

解：

敘述	理由
(1) 假設頂角為 x°	假設
(2) 等腰三角形兩底角皆為 70°	等腰三角形的兩底角相等
(3) x°＋70°＋70°＝180°	三角形內角和 180°
(4) x＝40	由(3) ＆ 解一元一次方程式
(5) 頂角為 40°	由(1) ＆ (4)

習題 4.1-7：

已知一等腰三角形的頂角為 50 度，底角為（3x＋5）度，則 x＝_______，底角為______度。

想法：(1) 三角形內角和 180°

(2) 等腰三角形兩底角相等

解：

敘述	理由
(1) 三角形兩底角皆為（3x＋5）°	等腰三角形的兩底角相等
(2) 50°＋（3x＋5）°＋（3x＋5）°＝180°	三角形內角和 180°＆頂角為 50°，底角為（3x＋5）°
(3) x＝20	由(2)＆解一元一次方程式
(4) 底角為（3x＋5）°＝65°	由(3)＆底角為（3x＋5）°

習題 4.1-8：

一等腰三角形，已知其中一個內角為 50 度，則此三角形中大於 50 度的內角為______________度。

想法：(1) 等腰三角形中，頂角＝180°－2 倍底角

(2) 等腰三角形中，底角＝(180°－頂角)÷2

解：

敘述	理由
(1) 假設 50°為頂角	假設
(2) 兩底角皆為(180°－50°)÷2＝65°	等腰三角形的兩底角相等 ＆ 等腰三角形中，底角＝(180°－頂角)÷2
(3) 假設 50°為底角	假設
(4) 頂角＝180°－2×50°＝80°	等腰三角形中，頂角＝180°－2 倍底角
(5) 所以內角大於 50 度的角度為 65° 或 80°	由(2) ＆ (4)

習題 4.1-9：

如圖 4.1-34，△ABC 中，∠ABC 與∠ACB 的角平分線交於 P 點，若∠ABC＝38°，∠ACB＝72°，求：

(1)∠1、∠2。　　　　(2)∠BPC。

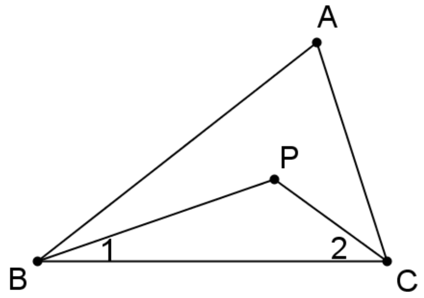


圖 4.1-34

想法：三角形三內角和 180°

解：

敘述	理由
(1) ∠1＝38°÷2＝19°	已知$\overline{BP}$為∠ABC 的角平分線
(2) ∠2＝72°÷2＝36°	已知$\overline{CP}$為∠ACB 的角平分線
(3) ∠BPC＋∠1＋∠2＝180°	三角形內角和 180°
(4) ∠BPC＝180°－(∠1＋∠2)＝125°	將(1)＆(2)代入(3)

習題 4.1-10：

如圖 4.1-35，△ABC ≅ △PQR，且 A 和 P、B 和 Q、C 和 R 是三組對應頂點。若∠B＝55°，∠C＝100°，$\overline{PR}$＝20 公分，求：

(1)∠A 及∠R。　　　　(2) $\overline{AC}$。

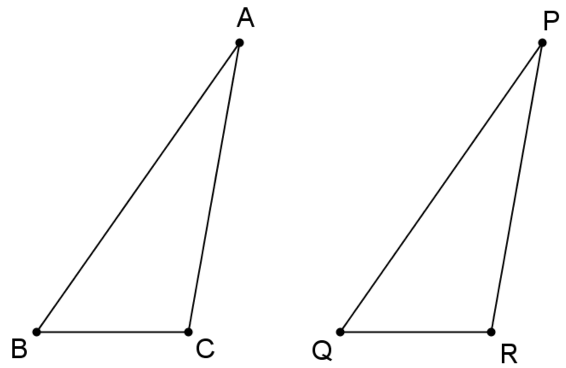


圖 4.1-35

想法：(1) 三角形三內角和 180°

(2) 兩三角形全等，則對應邊、對應角相等

解：

敘述	理由
(1) ∠A＝180°－(55°＋100°)＝25°	三角形之內角和 180° & 已知∠B＝55°，∠C＝100°
(2) ∠R＝∠C＝100°	已知△ABC ≅ △PQR，對應角相等
(3) $\overline{AC}$＝$\overline{PR}$＝20 公分	已知△ABC ≅ △PQR，對應邊相等

習題 4.1-11：

如圖 4.1-36，直線 $L \perp L_1$ 於 P 點，且交 L_2 於 Q 點，截線 M 分別交 L、L_1、L_2 於 A、B、C 三點，已知同位角∠1、∠2 均為 35°，

(1) 利用「三角形的內角和為 180°」，求∠3。

(2) 直線 L_1 與 L_2 是否平行？

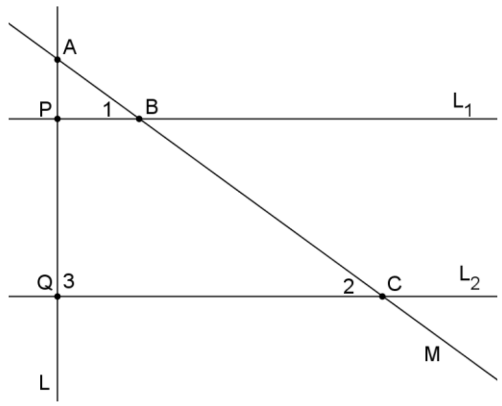


圖 4.1-36

想法：(1) 三角形三內角和 180°

(2) 若兩直線同時垂直另一直線，則此兩直線互相平行

解：

敘述	理由
(1) ∠APB＝90°	已知 $L \perp L_1$
(2) △APB 中，∠A＋∠1＋∠APB＝180°	三角形內角和 180°
(3) ∠A＝180°－(∠1＋∠APB)＝55°	由(2) & ∠APB＝90° & ∠1＝35°
(4) △AQC 中，∠3＋∠A＋∠2＝180°	三角形內角和 180°
(5) ∠3＝180°－(∠A＋∠2)＝90°	由(5) & ∠A＝55° & ∠2＝35°
(6) $L \perp L_2$	由(5) ∠3＝90° 已證
(7) $L_1 \parallel L_2$	$L \perp L_1$ & $L \perp L_2$

習題 4.1-12：

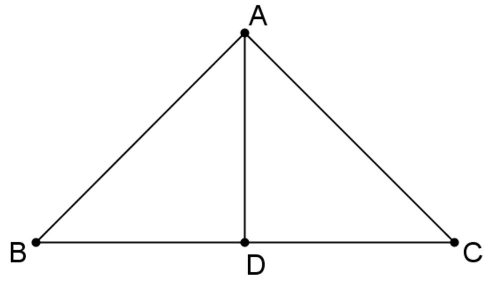


圖 4.1-37

已知：如圖 4.1-37，△ABC 中，∠B＝∠C，$\overline{AD}$平分∠BAC。

試證：$\overline{AD}\perp\overline{BC}$。

想法一：(1) 若證得∠ADB＝∠ADC＝90°，則可知$\overline{AD}\perp\overline{BC}$；

(2) 若證得△ADB ≅ △ADC，則可知∠ADB＝∠ADC；

(3) 已知判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱 A.A.S.三角形全等定理

證明一：

敘述	理由
(1) △ABC 為等腰三角形	已知∠B＝∠C ＆ 兩底角相等為等腰三角形
(2) $\overline{AB}$＝$\overline{AC}$	由(1) ＆ 等腰三角形兩腰等長
(3) △ADB 與△ADC 中， ∠B＝∠C $\overline{AB}$＝$\overline{AC}$ ∠BAD＝∠CAD	如圖 4.1-37 所示 已知∠B＝∠C 由(2) $\overline{AB}$＝$\overline{AC}$ 已證 已知$\overline{AD}$平分∠BAC
(4) △ADB ≅ △ADC	由(3) A.S.A.三角形全等定理
(5) ∠ADB＝∠ADC	由(4) ＆ 對應角相等
(6) ∠ADB＋∠ADC＝180°	如圖 4.1-37，∠BDC 為一平角
(7) ∠ADC＋∠ADC＝180° ∠ADC＝90°	將(5) 代入(6) 得 解一元一次方程式
(8) 所以∠ADB＝∠ADC＝90°	由(5) ＆ (7)
(9) 所以$\overline{AD}\perp\overline{BC}$	由(8)

想法二：等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊

證明二：

敘述	理由
(1) △ABC 為等腰三角形 (∠BAC 為頂角，$\overline{BC}$為底邊)	已知∠B＝∠C ＆ 兩底角相等為等腰三角形
(2) 所以$\overline{AD}\perp\overline{BC}$	由(1) ＆ 已知$\overline{AD}$平分∠BAC 等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊

習題 4.1-13：

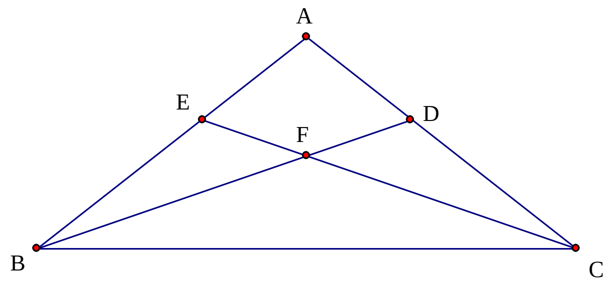


圖 4.1-38

已知：如圖 4.1-38，△ABC 中，∠ABC＝∠ACB，$\overline{BD}$平分∠ABC，$\overline{CE}$平分∠ACB。
試證：$\overline{BF}=\overline{CF}$。

想法：(1) 若證得△BCF 為等腰三角形，則可知$\overline{BF}=\overline{CF}$；

(2) 兩底角相等為等腰三角形。

證明：

敘述	理由
(1) $\angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC$	已知$\overline{BD}$平分∠ABC
(2) $\angle ECB=\frac{1}{2}\angle ACB$	已知$\overline{CE}$平分∠ACB
(3) 所以$\angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\angle ACB=\angle ECB$	由(1) ＆ (2) ＆ 已知∠ABC＝∠ACB
(4) 所以△BCF 為等腰三角形	由(3) ∠DBC＝∠ECB ＆ 兩底角相等為等腰三角形
(5) $\overline{BF}=\overline{CF}$	由(4) ＆ 等腰三角形兩腰等長

習題 4.1-14：

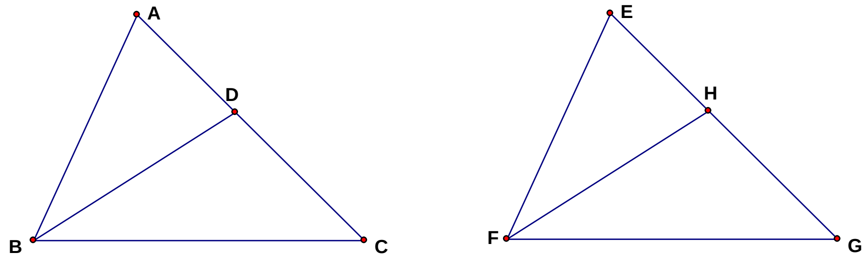


圖 4.1-39

已知：如圖 4.1-39，△ABC ≅ △EFG，∠ABC＝∠EFG，∠C＝∠G，$\overline{BD}$平分∠ABC，$\overline{FH}$平分∠EFG。

試證：$\overline{BD}$＝$\overline{FH}$。

想法：(1) 若證得△CDB ≅ △GHF，則可知$\overline{BD}$＝$\overline{FH}$；

(2) 已知判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱 A.A.S.三角形全等定理

證明：

敘述	理由
(1) △CDB 與△GHF 中 ∠C＝∠G $\overline{BC}$＝$\overline{FG}$ ∠DBC＝∠HFG	如圖 4.1-39 所示 已知∠C＝∠G 已知△ABC ≅ △EFG ＆ 對應邊相等 已知∠ABC＝∠EFG ＆ $\overline{BD}$平分∠ABC、$\overline{FH}$平分∠EFG，
(2) 所以△CDB ≅ △GHF	由(1) ＆ A.S.A.三角形全等定理
(3) $\overline{BD}$＝$\overline{FH}$	對應邊相等

習題 4.1-15：

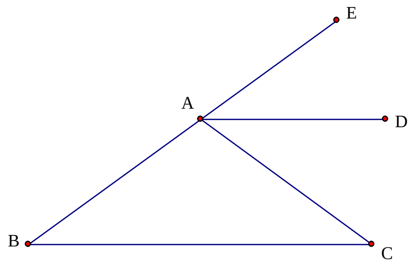


圖 4.1-40

已知：如圖 4.1-40，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AD}$平分∠EAC。

試證：$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$。

想法：判斷兩直線平行的方法有：

1. 內錯角相等的兩線平行
2. 同位角相等的兩線平行
3. 同側內角互補的兩線平行

解：

敘述	理由
(1) △ABC 為等腰三角形	已知$\overline{AB}=\overline{AC}$ & 兩腰等長為等腰三角形
(2) ∠B＝∠C	由(1) & 等腰三角形兩底角相等
(3) △ABC 中，∠EAC＝∠B＋∠C	三角形外角等於內對角的和
(4) 所以∠EAC＝∠C＋∠C＝2∠C	將(2) 代入 (3)
(5) $\angle DAC=\frac{1}{2}\angle EAC=\angle C$	已知$\overline{AD}$平分∠EAC & (4)∠EAC＝2∠C
(6) 所以$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	由(5) ∠DAC＝∠C & 內錯角相等，兩直線平行定理

習題 4.1-16：

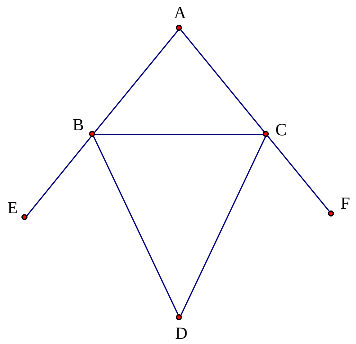


圖 4.1-41

已知：如圖 4.1-41，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BD}$平分∠CBE，$\overline{CD}$平分∠BCF。
試證：$\overline{BD}=\overline{CD}$。

想法：若證得△BCD 為等腰三角形，則可得知$\overline{BD}=\overline{CD}$

證明：

敘述	理由
(1) △ABC 為等腰三角形	已知$\overline{AB}=\overline{AC}$ & 兩腰等長為等腰三角形
(2) ∠ABC＝∠ACB	由(1) & 等腰三角形兩底角相等
(3) ∠CBE＝∠BCF	由(2) & 等角的補角相等
(4) ∠CBD＝$\frac{1}{2}$∠CBE	已知$\overline{BD}$平分∠CBE
(5) ∠BCD＝$\frac{1}{2}$∠BCF	已知$\overline{CD}$平分∠BCF
(6) 所以∠CBD＝∠BCD	由(3) & (4) & (5) 遞移律
(7) △BCD 為等腰三角形	由(6) & 兩底角相等為等腰三角形
(8) 所以$\overline{BD}=\overline{CD}$	由(7) & 等腰三角形兩腰等長

習題 4.1-17：

如圖 4.1-42，△ABC 與△PQR 中，∠A＝∠P＝40°，∠B＝∠Q＝45°，$\overline{BC}$＝$\overline{QR}$＝8 公分，若$\overline{AC}$＝9 公分。求$\overline{PR}$＝？

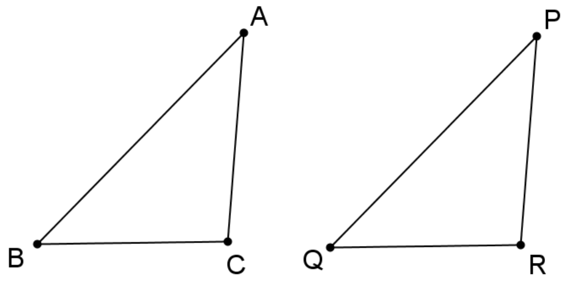


圖 4.1-42

想法： 已知判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱 A.A.S.三角形全等定理

解：

敘述	理由
(1) △ABC 與△PQR 中	如圖 4.1-42
∠A＝∠P＝40°	已知
∠B＝∠Q＝45°	已知
$\overline{BC}$＝$\overline{QR}$	已知
(2) △ABC ≅ △PQR	由(1)　A.A.S.三角形全等定理
(3) $\overline{PR}$＝$\overline{AC}$＝9 公分	對應邊相等 ＆ $\overline{AC}$＝9 公分

習題 4.1-18：

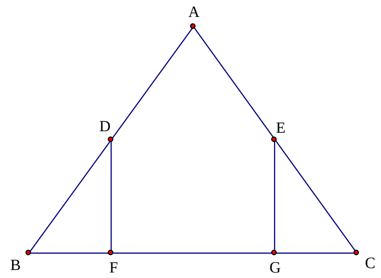


圖 4.1-43

已知：如圖 4.1-43，△ABC 中，∠B＝∠C，D 為$\overline{AB}$之中點，E 為$\overline{AC}$之中點，$\overline{DF}\perp\overline{BC}$，$\overline{EG}\perp\overline{BC}$。

試證：$\overline{DF}=\overline{EG}$。

想法：(1) 若證得△BDF ≅ △CEG，則可知$\overline{DF}=\overline{EG}$；

(2) 已知判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱 A.A.S.三角形全等定理

證明：

敘述	理由
(1) △ABC 為等腰三角形	已知∠B＝∠C & 兩底角相等為等腰三角形
(2) $\overline{AB}=\overline{AC}$	由(1) & 等腰三角形兩腰等長
(3) 所以$\overline{BD}=\overline{CE}$	已知 D 為$\overline{AB}$之中點，E 為$\overline{AC}$之中點 & (2) $\overline{AB}=\overline{AC}$
(4) 在△BDF 與△CEG 中 ∠DFB＝∠EGC＝90° ∠B＝∠C $\overline{BD}=\overline{CE}$	如圖 4.1-43 所示 已知$\overline{DF}\perp\overline{BC}$，$\overline{EG}\perp\overline{BC}$ 已知∠B＝∠C 由(3) $\overline{BD}=\overline{CE}$已證
(5) 所以△BDF ≅ △CEG	由(4) & A.A.S.三角形全等定理
(6) $\overline{DF}=\overline{EG}$	對應邊相等

習題 4.1-19：

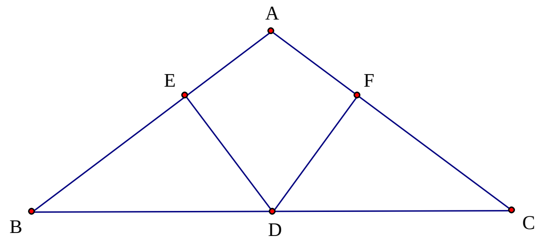


圖 4.1-44

已知：如圖 4.1-44，△ABC 中，$\overline{BD}=\overline{CD}$，∠B＝∠C，$\overline{DE}\perp\overline{AB}$，$\overline{DF}\perp\overline{AC}$。
試證：$\overline{DE}=\overline{DF}$。

想法：(1) 若證得△BDE ≅ △CDF，則可知$\overline{DE}=\overline{DF}$；

(2) 已知判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱 A.A.S.三角形全等定理

證明：

敘述	理由
(1) 在△BDE 與△CDF 中 ∠BED＝∠CFD＝90° ∠B＝∠C $\overline{BD}=\overline{CD}$	如圖 4.1-44 所示 已知$\overline{DE}\perp\overline{AB}$，$\overline{DF}\perp\overline{AC}$ 已知∠B＝∠C 已知$\overline{BD}=\overline{CD}$
(2) 所以△BDE ≅ △CDF	由(1) & A.A.S.三角形全等定理
(3) $\overline{DE}=\overline{DF}$	對應邊相等

習題 4.1-20：

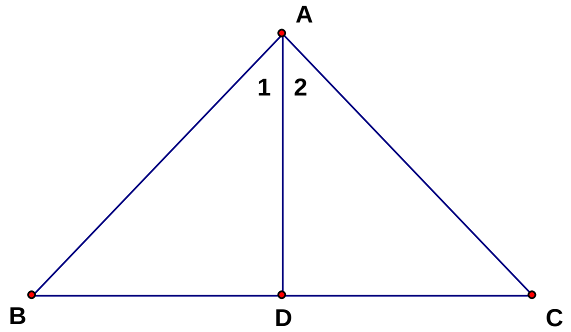


圖 4.1-45

如圖 4.1-45，已知△ABC 為等腰三角形，∠B＝∠C，$\overline{AD}$平分∠A，若$\overline{BC}$＝18，則：(1)∠BDA＝？　　(2) $\overline{BD}$＝？

想法：等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AD}\perp\overline{BC}$，$\overline{BD}=\overline{CD}$	已知△ABC 為等腰三角形，∠B＝∠C，$\overline{AD}$平分∠A ＆ 等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊
(2) ∠BDA＝90°	由(1) $\overline{AD}\perp\overline{BC}$
(3) $\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}$	全量等於分量之和
(4) 18＝$\overline{BD}+\overline{BD}$	由(3) ＆ 已知$\overline{BC}$＝18 ＆ (1) $\overline{BD}=\overline{CD}$
(5) $\overline{BD}$＝18÷2＝9	由(4) 解一元一次方程式

習題 4.1-21：

如圖 4.1-46，△ABC 中，∠B＝50°，∠C＝60°，若$\overline{AD}$為∠BAC 的角平分線，求∠1。

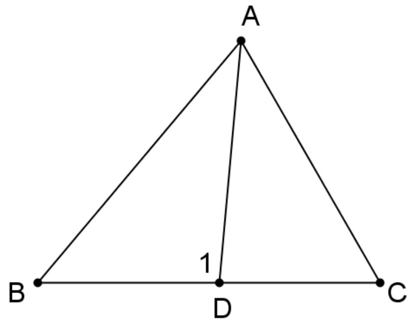


圖 4.1-46

想法：(1) 三角形三內角和等於 180°

(2) 三角形的任一外角等於兩個內對角和

解：

敘述	理由
(6) △ABC 中，∠BAC＋∠B＋∠C＝180°	三角形內角和定理
(7) ∠BAC＝180°−(∠B＋∠C)＝70°	由(2) & ∠B＝50° & ∠C＝60°
(8) ∠DAC＝70°÷2＝35°	已知$\overline{AD}$為∠BAC 的角平分線
(9) △ABC 中，∠1＝∠C＋∠DAC	三角形的外角等於兩個內對角和
(10) ∠1＝60°＋35°＝95°	由(4) & ∠C＝60° & ∠DAC＝35°

習題 4.1-22：

如圖 4.1-47，已知$\angle B=36°$，$\angle ACD=100°$，$\angle D=27°$，則$\angle 1=$_____度，$\angle 2=$______度。

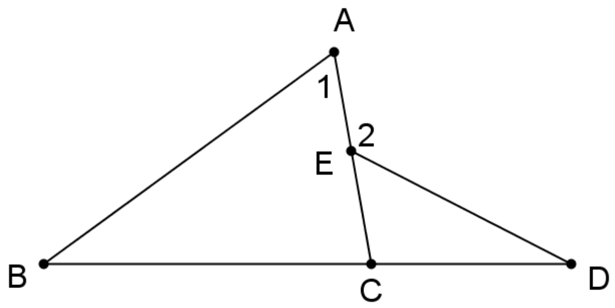


圖 4.1-47

想法：三角形的任一外角等於兩個內對角和

解：

敘述	理由
(1) $\triangle ABC$ 中，$\angle ACD=\angle 1+\angle B$	三角形的外角等於兩個內對角和
(2) $\angle 1=\angle ACD-\angle B=64°$	由(1) & $\angle ACD=100°$ & $\angle B=36°$
(3) $\triangle CDE$ 中，$\angle 2=\angle ACD+\angle D$	三角形的外角等於兩個內對角和
(4) $\angle 2=100°+27°=127°$	由(3) & $\angle ACD=100°$ & $\angle D=27°$

習題 4.1-23：

如圖 4.1-48，已知$\angle A = 55°$，$\angle ABD = 42°$，$\angle DCE = 38°$，則$\angle 1 =$ _____ 度，$\angle 2 =$ _____ 度。

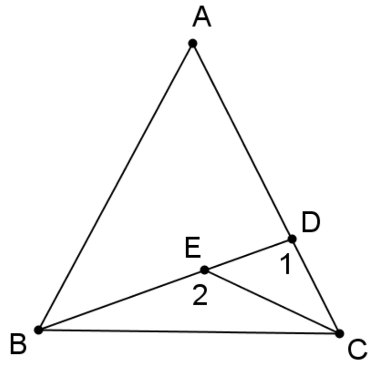


圖 4.1-48

想法：三角形的任一外角等於兩個內對角和

解：

敘述	理由
(1) $\triangle ABD$ 中，$\angle 1 = \angle A + \angle ABD$	三角形的外角等於兩個內對角和
(2) $\angle 1 = 55° + 42° = 97°$	由(1) & $\angle A = 55°$ & $\angle ABD = 42°$
(3) $\triangle CDE$ 中，$\angle 2 = \angle 1 + \angle DCE$	三角形的外角等於兩個內對角和
(4) $\angle 2 = 97° + 38° = 135°$	由(3) & $\angle 1 = 97°$ & $\angle DCE = 38°$

習題 4.1-24：

如圖 4.1-49，已知$\overline{AD}$、$\overline{BC}$交於 E 點，∠A＝40°，∠B＝45°，∠D＝55°，則∠C＝____度。

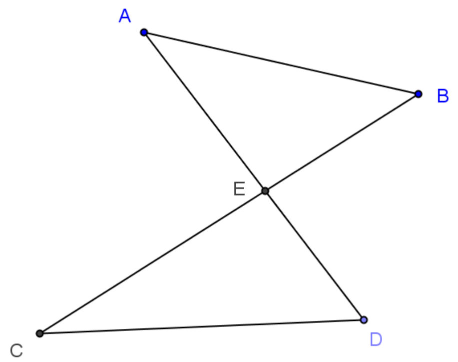


圖 4.1-49

想法：三角形的任一外角等於兩個內對角和

解：

敘述	理由
(1) △ABE 中，∠AEC＝∠A＋∠B	三角形的外角等於兩個內對角和
(2) △CDE 中，∠AEC＝∠C＋∠D	三角形的外角等於兩個內對角和
(3) ∠A＋∠B＝∠C＋∠D	由(1) & (2)遞移律
(4) ∠C＝∠A＋∠B－∠D＝30°	由(3) & ∠A＝40°，∠B＝45°，∠D＝55°

習題 4.1-25：

如圖 4.1-50，已知$\overline{AB}$與$\overline{CD}$相交於 E 點，若∠A＝70°，∠B＝4x°，∠C＝(x＋10)°，∠D＝2x°，求 x。

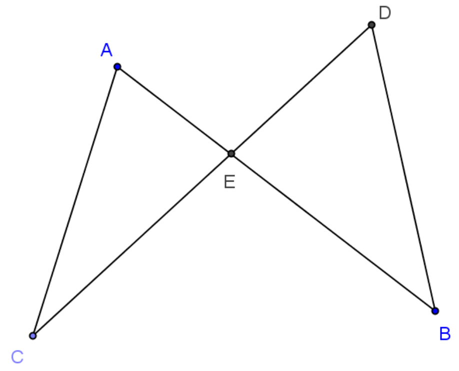


圖 4.1-50

想法：三角形的任一外角等於兩個內對角和

解：

敘述	理由
(1) △ACE 中，∠AED＝∠A＋∠C	三角形的外角等於兩個內對角和
(2) △BDE 中，∠AED＝∠B＋∠D	三角形的外角等於兩個內對角和
(3) ∠A＋∠C＝∠B＋∠D	由(1) & (2)遞移律
(4) 70°＋(x＋10) °＝4x°＋2x°	由(3) & 已知∠B＝4x°，∠C＝(x＋10)°，∠D＝2x°，
(5) x＝16	由(4) 解一元一次方程式

習題 4.1-26：

如圖 4.1-51，已知∠B＝24°，∠C＝32°，∠D＝36°，∠E＝38°，則∠A＝__度。

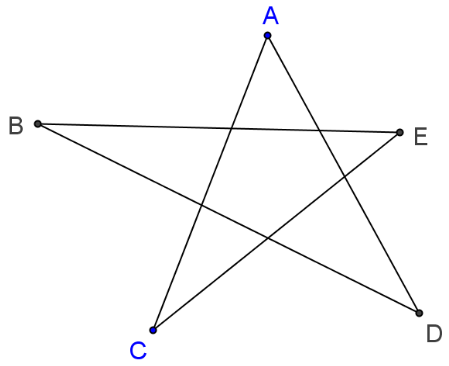


圖 4.1-51

想法：(1) 三角形三內角和等於 180°

(2) 三角形的任一外角等於兩個內對角和

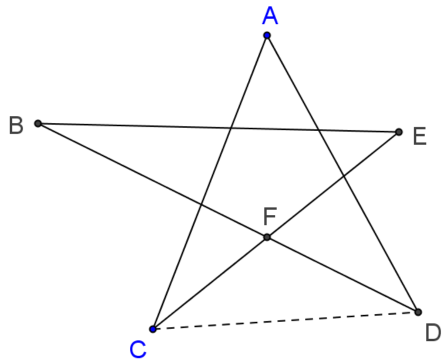


圖 4.1-51(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接 C 點與 D 點，如圖 4.1-51(a)所示	兩點可決定一直線
(2) △BEF 中，∠BFC＝∠B＋∠E	三角形的外角等於兩個內對角和
(3) △CDF 中，∠BFC＝∠FCD＋∠FDC	三角形的外角等於兩個內對角和
(4) ∠B＋∠E＝∠FCD＋∠FDC	由(2) & (3) 遞移律
(5) △ACD 中， ∠A＋∠ACD＋∠ADC＝180°	如圖 4.1-51(a)所示 三角形內角和定理
(6) ∠A＋(∠ACE＋∠FCD)＋ (∠ADB＋∠FDC)＝180°	由(5)

(7) $\angle A+\angle ACE+\angle ADB+(\angle FCD+\angle FDC)=180°$	由(6) & 加法交換律
(8) $\angle A+\angle ACE+\angle ADB+(\angle B+\angle E)=180°$	由(7) & (4)
(9) $\angle A=180°-(\angle ACE+\angle ADB+\angle B+\angle E)=50°$	由(8) & 已知

習題 4.1-27：

如圖 4.1-52，△ABC 中，∠1、∠2、∠3 分別為∠BAC、∠ABC、∠ACB 的外角，若∠1＝68°，∠2＝134°，求∠3。

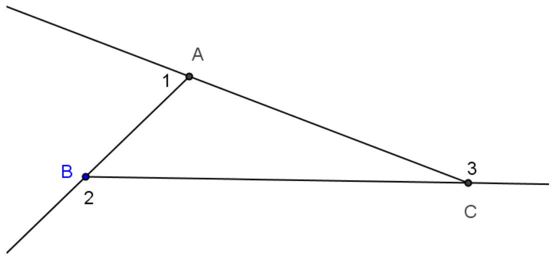


圖 4.1-52

想法：三角形三個角的外角和等於 360°

解：

敘述	理由
(1) △ABC 中，$\angle 1+\angle 2+\angle 3=360°$	三角形的外角和定理
(2) $\angle 3=360°-(\angle 1+\angle 2)=158°$	由(1) & 已知$\angle 1=68°$，$\angle 2=134°$

習題 4.1-28：

如圖 4.1-53，△ABC 中，∠1、∠2、∠3 分別為∠BAC、∠ABC、∠ACB 的一組外角，若∠ACB＝160°，求∠1＋∠2。

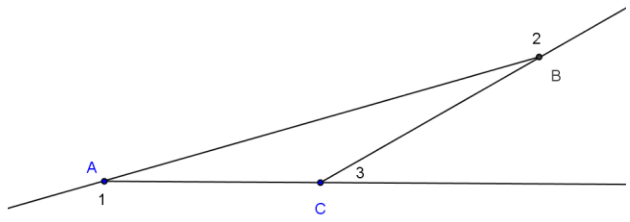


圖 4.1-53

想法：三角形三個角的外角和等於 360°

解：

敘述	理由
(1) △ABC 中，∠3＝180°－∠ACB＝20°	三角形外角定義 & ∠ACB＝160°
(2) △ABC 中，∠1＋∠2＋∠3＝360°	三角形的外角和定理
(3) ∠1＋∠2＝360°－∠3 ＝360°－20° ＝340°	由(2) 等量減法公理 & (1) ∠3＝20°

習題 4.2

習題 4.2-1

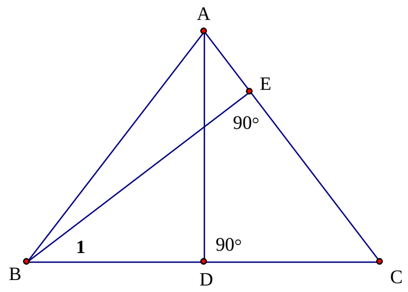


圖 4.2-14

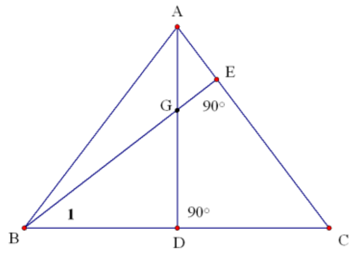
已知： 如圖 4.2-14，△ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，$\overline{BE}\perp\overline{AC}$。

試證： $\angle 1=\frac{1}{2}\angle BAC$。

想法： 判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱 A.A.S.三角形全等定理
5. 直角三角形斜邊及一股全等定理，又稱 R. H. S.三角形全等定理

證明：

敘述	理由
(1) 令$\overline{AD}$交$\overline{BE}$於 G 點，如圖 4.2-14(a)所示	不互相平行的兩直線必有一交點  **圖 4.2-14(a)**
(2) △AGE 中，$\angle AGB=\angle DAC+\angle AEB$ $=\angle DAC+90°$	三角形外角等於內對角的和 已知$\overline{BE}\perp\overline{AC}$，$\angle AEB=90°$
(3) △BGD 中，$\angle AGB=\angle 1+\angle ADB$ $=\angle 1+90°$	三角形外角等於內對角的和 已知$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，$\angle ADB=90°$

(4) 所以∠1＋90°＝∠DAC＋90° 所以∠1＝∠DAC	由(2) ＆ (3) 遞移律 等式兩邊同減 90°
(5) 在△BDA 與△CDA 中 ∠BDA＝∠CDA＝90° $\overline{AD}=\overline{AD}$ $\overline{AB}=\overline{AC}$	如圖 4.2-14(a)所示 已知$\overline{AD}\perp\overline{BC}$ 共同邊 已知$\overline{AB}=\overline{AC}$
(6) 所以△BDA ≅ △CDA	由(5) ＆ R. H. S.三角形全等定理
(7) ∠DAB＝∠DAC	對應角相等
(8) 所以∠DAC＝$\frac{1}{2}$∠BAC	由(7) ∠DAB＝∠DAC ＆ ∠DAB＋∠DAC＝∠BAC
(9) ∠1＝$\frac{1}{2}$∠BAC	由(4) ∠1＝∠DAC ＆ (8) ∠DAC＝$\frac{1}{2}$∠BAC 遞移律

習題 4.2-2

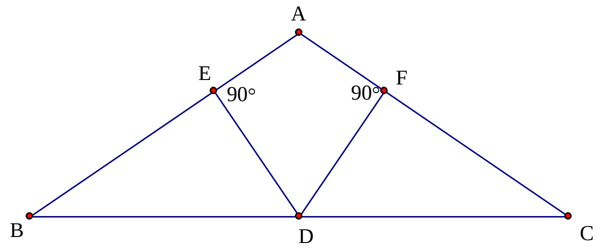


圖 4.2-15

已知：如圖 4.2-15，△ABC 中，$\overline{BD}=\overline{CD}$，$\overline{DE}\perp\overline{AB}$，$\overline{DF}\perp\overline{AC}$，$\overline{DE}=\overline{DF}$。
試證：$\overline{AB}=\overline{AC}$。

想法：(1) 若證得△ABC 為等腰三角形，則可得知$\overline{AB}=\overline{AC}$；

(2) 若證得∠B＝∠C，則可得知△ABC 為等腰三角形；

(3) 若證得△BDE ≅ △CDF，則可得知∠B＝∠C；

(4) 判斷兩個三角形全等的方法有：
1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱 A.A.S.三角形全等定理
5. 直角三角形斜邊及一股全等定理，又稱 R. H. S.三角形全等定理

證明：

敘述	理由
(1) 在△BDE 與△CDF 中 ∠BED＝∠CFD＝90° $\overline{DE}=\overline{DF}$ $\overline{BD}=\overline{CD}$	如圖 4.2-15 所示 已知$\overline{DE}\perp\overline{AB}$，$\overline{DF}\perp\overline{AC}$ 已知$\overline{DE}=\overline{DF}$ 已知$\overline{BD}=\overline{CD}$
(2) 所以△BDE ≅ △CDF	由(1) & R. H. S.三角形全等定理
(3) ∠B＝∠C	對應角相等
(4) △ABC 為等腰三角形	由(3) ∠B＝∠C & 兩底角相等為等腰三角形
(5) 所以$\overline{AB}=\overline{AC}$	由(4) △ABC 為等腰三角形 & 等腰三角形兩腰等長

習題 4.2-3

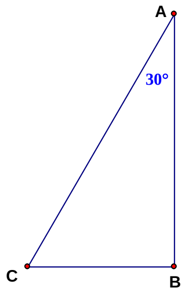
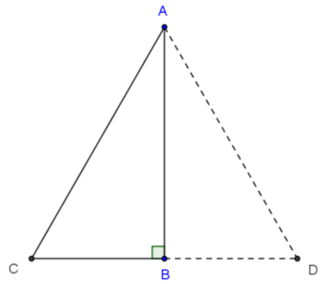


圖 4.2-16

已知： 如圖 4.2-16，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$，$\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}$。

試證： ∠CAB＝30°。

證明：

敘述	理由
(1) 延長$\overline{CB}$至 D 點，使$\overline{BD}=\overline{CB}$，，如圖 4.2-16(a)所示，所以$\overline{CBD}$為一線段	作圖  **圖 4.2-16(a)**
(2) $\overline{CD}=\overline{CB}+\overline{BD}=2\overline{CB}$	由(1)作圖 ＆ 全量等於分量和
(3) $\overline{AC}=2\overline{CB}$	已知$\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}$
(4) 所以$\overline{CD}=\overline{AC}$	由(2) ＆ (3) 遞移律
(6) 在△ACB 與△ADB 中 ∠ABC＝∠ABD＝90° $\overline{CB}=\overline{DB}$ $\overline{AB}=\overline{AB}$	 如圖 4.2-16(a)所示 已知$\overline{AB}\perp\overline{BC}$ ＆ (1) $\overline{CBD}$為一線段 由(1)作圖 共同邊
(7) 所以△ACB ≅ △ADB	由(6) ＆ S.A.S.三角形全等定理
(8) $\overline{AC}=\overline{AD}$ ＆ ∠CAB＝∠DAB	對應邊相等 ＆ 對應角相等
(9) △ACD 中，$\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{CD}$	由(4) $\overline{CD}=\overline{AC}$ ＆ (8) $\overline{AC}=\overline{AD}$ 遞移律
(10) △ACD 為正三角形	由(9) ＆ 等邊三角形為正三角形
(11) ∠CAD＝60°	由(10) ＆ 正三角形三內角皆為 60°

(12) 所以∠CAB＝$\frac{1}{2}$∠CAD＝30°	由(8) ∠CAB＝∠DAB ＆ (11) ∠CAD＝60°

習題 4.2-4

如圖 4.2-17，直角三角形 ABC 中，∠ABC＝90°，∠BAC＝30°，若$\overline{AC}$＝20，則$\overline{BC}$＝？

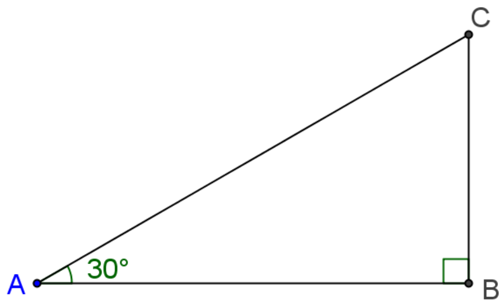


圖 4.2-17

想法：利用定理：4.2-2　若直角三角形的某一內角為 30°，則其對邊為斜邊的一半。

解：

敘述	理由
(1) $\overline{BC}$＝$\frac{1}{2}\overline{AC}$＝$\frac{1}{2}$×20＝10	已知直角三角形 ABC 中，∠ABC＝90°，∠BAC＝30° ＆ 定理：4.2-2　若直角三角形的某一內角為 30°，則其對邊為斜邊的一半 ＆ 已知$\overline{AC}$＝20

習題 4.2-5

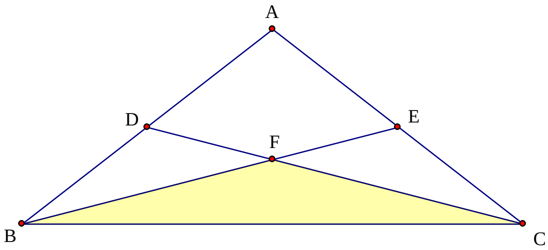


圖 4.2-18

已知：如圖 4.2-18，△ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AD}=\overline{DB}$，$\overline{AE}=\overline{EC}$。
試證：$\overline{BF}=\overline{CF}$。

想法：(1) 若證得△BCF 為等腰三角形，則可得知$\overline{BF}=\overline{CF}$；

(2) 若證得∠EBC＝∠DCB，則可得知△BCF 為等腰三角形；

(3) 若證得△EBC ≅ △DCB，則可得知∠EBC＝∠DCB

(4) 判斷兩個三角形全等的方法有：
1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱 A.A.S.三角形全等定理
5. 直角三角形斜邊及一股全等定理，又稱 R. H. S.三角形全等定理

證明：

敘述	理由
(1) $\overline{EC}=\overline{AE}=\frac{1}{2}\overline{AC}$	已知$\overline{AE}=\overline{EC}$ & $\overline{AC}=\overline{EC}+\overline{AE}$
(2) $\overline{DB}=\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AB}$	已知$\overline{AD}=\overline{DB}$ & $\overline{AB}=\overline{DB}+\overline{AD}$
(3) 所以$\overline{EC}=\overline{DB}$	由(1)&(2)&已知$\overline{AB}=\overline{AC}$ 遞移律
(4) △ABC 為等腰三角形	已知$\overline{AB}=\overline{AC}$ & 兩腰等長為等腰三角形
(5) ∠DBC＝∠ECB	由(4) & 等腰三角形兩底角相等
(6) 在△EBC 與△DCB 中 $\overline{EC}=\overline{DB}$ ∠ECB＝∠DBC $\overline{CB}=\overline{BC}$	如圖 4.2-18 所示 由(3) $\overline{EC}=\overline{DB}$ 已證 由(5) ∠DBC＝∠ECB 已證 共同邊
(7) 所以△EBC ≅ △DCB	由(6) & S. A. S.三角形全等定理

(8) ∠EBC＝∠DCB	對應角相等
(9) △BCF 為等腰三角形	由(8) ∠EBC＝∠DCB ＆兩底角相等為等腰三角形
(10) 所以$\overline{BF}=\overline{CF}$	由(9) △BCF 為等腰三角形 ＆等腰三角形兩腰等長

習題 4.2-6

如圖 4.2-19，△ABC 中，已知$\overline{CD}\perp\overline{AB}$，$\overline{BE}\perp\overline{AC}$且$\overline{CD}=\overline{BE}$，若∠ABC＝55°，$\overline{AC}=15$，則：

(1) ∠ACB＝？　　(2) $\overline{AB}$＝？

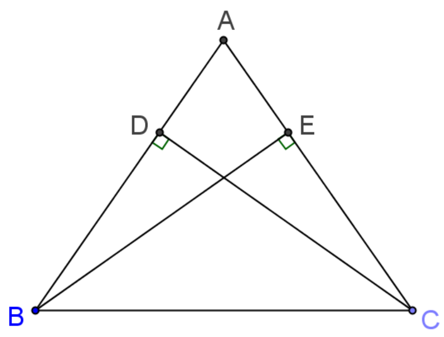


圖 4.2-19

想法：(1) 定理：4.2-3　若三角形兩頂點至其對邊的距離相等，則此三角形為等腰三角形。

(2) 等腰三角形的性質：兩腰等長且兩底角相等

解：

敘述	理由
(1) △ABC 為等腰三角形	已知$\overline{CD}\perp\overline{AB}$，$\overline{BE}\perp\overline{AC}$且$\overline{CD}=\overline{BE}$ ＆ 定理：4.2-3 若三角形兩頂點至其對邊的距離相等，則此三角形為等腰三角形
(2) ∠ACB＝∠ABC＝55°	由(1) 等腰三角形兩底角相等 ＆ 已知∠ABC＝55°
(3) $\overline{AB}=\overline{AC}=15$	由(1) 等腰三角形兩腰等長 ＆ 已知$\overline{AC}=15$

習題 4.2-7

如圖 4.2-20，已知△ABC 為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$，若$\overline{BE}\perp\overline{AC}$，

$\overline{CD}\perp\overline{AB}$，且∠FBC＝35°，$\overline{FC}=12$，則：

(1) ∠FCB＝？　　　　(2) $\overline{FB}=$？

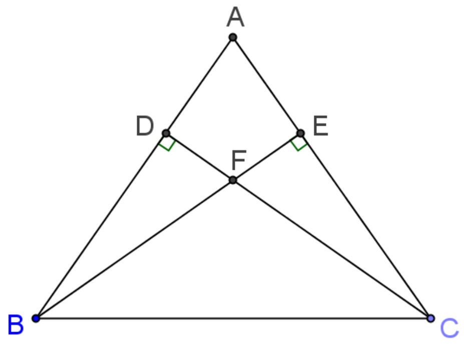


圖 4.2-20

想法：(1) 定理：4.2-4 等腰三角形兩腰上的高與底邊所造成的三角形亦為等腰三角形。

(2) 等腰三角形的性質：兩腰等長且兩底角相等

解：

敘述	理由
(1) △FBC 為等腰三角形	已知△ABC 為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$，若$\overline{BE}\perp\overline{AC}$，$\overline{CD}\perp\overline{AB}$ & 定理：4.2-4 等腰三角形兩腰上的高與底邊所造成的三角形亦為等腰三角形
(2) ∠FCB＝∠FBC＝35°	由(1) 等腰三角形兩底角相等 & 已知∠FBC＝35°
(3) $\overline{FB}=\overline{FC}=12$	由(1) 等腰三角形兩腰等長 & 已知$\overline{FC}=12$

習題 4.3

習題 4.3-1

如圖 4.3-18，I 點為△ABC 的內心，若 I 點到$\overline{AB}$的距離為 5，則：

(1) I 點到$\overline{BC}$的距離為何？

(2) I 點到$\overline{AC}$的距離為何？

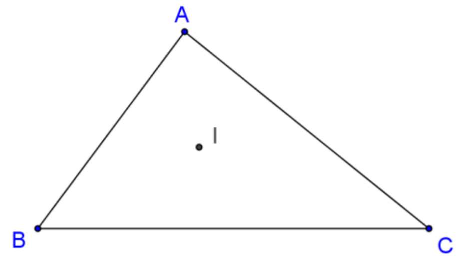


圖 4.3-18

想法：三角形的內心到此三角形的三邊等距離

解：

敘述	理由
(1) I 點到$\overline{BC}$的距離＝I 點到$\overline{AC}$的距離＝I 點到$\overline{AB}$的距離＝5	已知 I 點為△ABC 的內心 & 三角形的內心到此三角形的三邊等距離 & 已知 I 點到$\overline{AB}$的距離為 5

習題 4.3-2

如圖 4.3-19，已知 I 點為△ABC 的內心、∠BIC＝120°，則∠BAC＝？

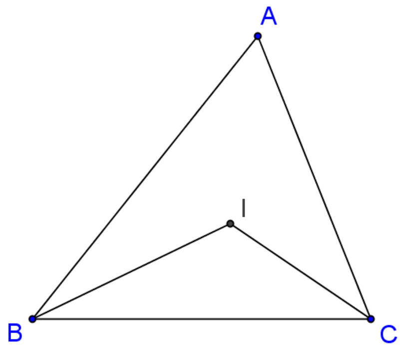


圖 4.3-19

想法：利用例題 4.3-2 結論：若 I 點為△ABC 的內心，則$\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC$

解：

敘述	理由
(1) $\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC$	已知 I 點為△ABC 的內心 & 例題 4.3-2 結論：若 I 點為△ABC 的內心， 則$\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC$
(2) $120° = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC$	由(1) & 已知∠BIC＝120°
(3) $\angle BAC = (120° - 90°) \times 2 = 60°$	由(2) 求∠BAC 之值

習題 4.3-3

如圖 4.3-20，O 點為△ABC 的外心，若$\overline{AO}=10$，則：

(1) $\overline{BO}=$？　　　(2) $\overline{CO}=$？

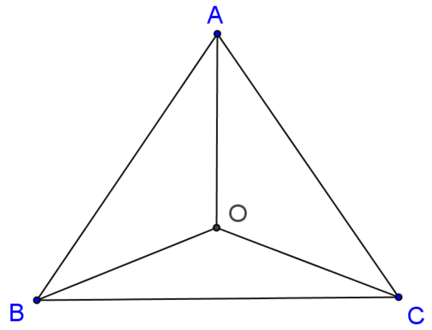


圖 4.3-20

想法：三角形的外心到此三角形的三頂點等距離

解：

敘述	理由
(1) $\overline{BO}=\overline{CO}=\overline{AO}=10$	已知 O 點為△ABC 的外心 & 三角形的外心到此三角形的三頂點等距離 & 已知$\overline{AO}=10$

習題 4.3-4

如圖 4.3-21，△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90°，若 O 點為$\overline{AC}$的中點且$\overline{AC}$＝20，則$\overline{OC}$＝？

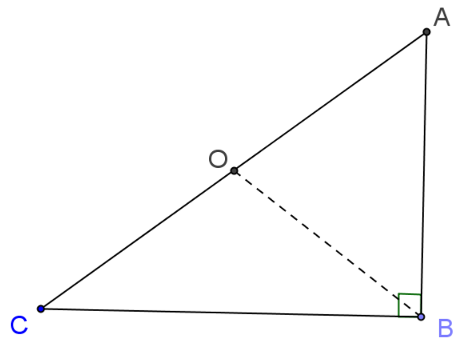


圖 4.3-21

想法：(1) 直角三角形斜邊中點為此三角形的外心

(2) 三角形的外心到此三角形的三頂點等距離

解：

敘述	理由
(1) $\overline{OA}=\overline{OC}$	已知 O 點為$\overline{AC}$的中點
(2) $\overline{AC}=\overline{OA}+\overline{OC}$	全量等於分量之和
(3) $20=\overline{OA}+\overline{OA}$	由(2) & (1) & 已知$\overline{AC}$＝20
(4) $\overline{OA}=20\div2=10$	由(3) 解一元一次方程式
(5) O 點為△ABC 的外心	已知△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90°，若 O 點為$\overline{AC}$的中點 & 直角三角形斜邊中點為此三角形的外心
(6) $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$	由(5) & 三角形的外心到此三角形的三頂點等距離
(7) 所以$\overline{OC}$＝10	由(6) & (4) 遞移律

習題 4.3-5

試證正三角形的內心與外心為同一點。

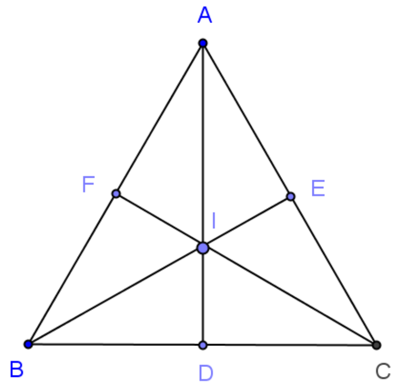


圖 4.3-23

已知：△ABC 為正三角形，I 點為△ABC 內心，

求證：I 點也是△ABC 外心。

想法：(1) 三角形內心為三內角平分線的交點；

(2) 三角形外心為三邊中垂線的交點；

(3) 若證得正三角形三邊中垂線就是三內角平分線，即可證得正三角形的外心與內心為同一點

證明：

敘述	理由
(1) △ABC 中，$\overline{AD}$為∠BAC 的角平分線，$\overline{BE}$為∠ABC 的角平分線，$\overline{CF}$為∠ACB 的角平分線	如圖 4.3-23 所示 & 已知 I 點為△ABC 內心 & 三角形內心為三內角平分線的交點
(2) △ABC 為等腰三角形 ($\overline{AB}=\overline{AC}$為其兩腰，∠BAC 為頂角)	已知△ABC 為正三角形 & 正三角形為等邊三角形
(3) 所以$\overline{AD}$為$\overline{BC}$的中垂線	由(2) △ABC 為等腰三角形，∠BAC 為頂角 & (1) $\overline{AD}$為∠BAC 的角平分線 & 等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊
(4) 同理可證，$\overline{BE}$為$\overline{AC}$的中垂線；$\overline{CF}$為$\overline{AB}$的中垂線	由(2) & (3)同理可證
(5) 所以 I 點也是△ABC 外心	由(3)&(4)&三角形三邊中垂線的交點為三角形的外心

習題 4.3-6

設△ABC 的三中線相交於 G 點，若$\overline{AG}=6$，$\overline{BG}=4$，$\overline{CG}=8$，求各中線的長。

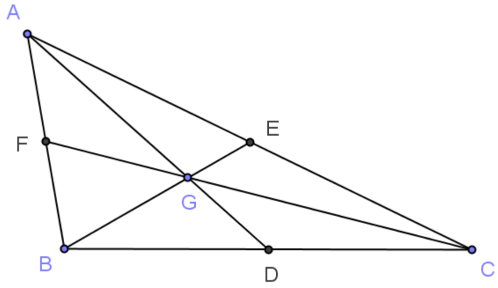


圖 4.3-24

已知：△ABC 的三中線$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$相交於 G 點，若$\overline{AG}=6$，$\overline{BG}=4$，$\overline{CG}=8$，
求：$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$各為多少？

想法：(1) 三角形三中線的交點為三角形的重心

(2) 三角形重心與頂點的距離為中線的三分之二

解：

敘述	理由
(1) G 點△ABC 的重心	已知△ABC 的三中線$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$相交於 G 點 & 三角形三中線的交點為三角形的重心
(2) $\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AD}$	由(1)& 重心與頂點的距離($\overline{AG}$)為中線($\overline{AD}$)的三分之二
$6=\frac{2}{3}\overline{AD}$	將已知$\overline{AG}=6$ 代入
$\overline{AD}=6\div\frac{2}{3}=9$	等式兩邊同除以$\frac{3}{2}$
(3) $\overline{BG}=\frac{2}{3}\overline{BE}$	由(1)& 重心與頂點的距離($\overline{BG}$)為中線($\overline{BE}$)的三分之二
$4=\frac{2}{3}\overline{BE}$	將已知$\overline{BG}=4$ 代入
$\overline{BE}=4\div\frac{2}{3}=6$	等式兩邊同除以$\frac{3}{2}$
(4) $\overline{CG}=\frac{2}{3}\overline{CF}$	由(1)& 重心與頂點的距離($\overline{CG}$)為中線($\overline{CF}$)的三分之二
$8=\frac{2}{3}\overline{CF}$	將已知$\overline{CG}=8$ 代入
$\overline{CF}=8\div\frac{2}{3}=12$	等式兩邊同除以$\frac{3}{2}$

習題 4.3-7

試證明三角形若兩中線相等，則為等腰三角形。

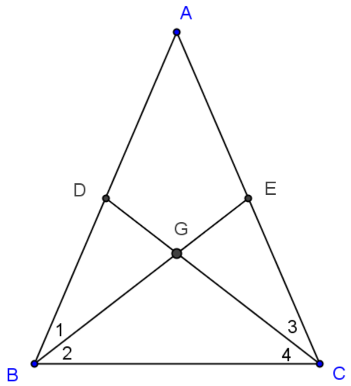


圖 4.3-25

已知：$\overline{CD}$、$\overline{BE}$為△ABC 的中線，$\overline{CD}$、$\overline{BE}$交於 G 點，且$\overline{CD}=\overline{BE}$；
求證：△ABC 為等腰三角形。

想法：(1) 若證得∠ABC＝∠ACB (即∠1＋∠2＝∠3＋∠4)，則可得知△ABC 為等腰三角形；

(2) 若證得∠1＝∠3 且∠2＝∠4，則可得知∠1＋∠2＝∠3＋∠4；

(3) 若證得△BCG 為等腰三角形，則可得知∠2＝∠4；

(4) 若證得$\overline{BG}=\overline{CG}$，則可得知△BCG 為等腰三角形；

(5) 若證得△BDG ≅ △CEG，則可得知∠1＝∠3

(6) 判斷兩個三角形全等的方法有：
1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱 A.A.S.三角形全等定理
5. 直角三角形斜邊及一股全等定理，又稱 R. H. S.三角形全等定理

證明：

敘述	理由
(1) G 點為△ABC 的重心	已知$\overline{CD}$、$\overline{BE}$為△ABC 的中線，$\overline{CD}$、$\overline{BE}$交於 G 點 & 三角形兩中線的交點為重心
(2) $\overline{BG}=\frac{2}{3}\overline{BE}$ & $\overline{GE}=\frac{1}{3}\overline{BE}$	由(1) & 重心與頂點的距離為中線的三分之二

(3) $\overline{CG}=\frac{2}{3}\overline{CD}$ & $\overline{GD}=\frac{1}{3}\overline{CD}$	由(1) & 重心與頂點的距離為中線的三分之二
(4) 所以$\overline{BG}=\overline{CG}$ & $\overline{GE}=\overline{GD}$	由(2) & (3) & 已知$\overline{CD}=\overline{BE}$ 遞移律
(5) △BCG 為等腰三角形	由(4) $\overline{BG}=\overline{CG}$ & 兩腰等長為等腰三角形
(6) 所以∠2＝∠4	由(5) & 等腰三角形兩底角相等
(7) △BDG 與△CEG 中 $\overline{GD}=\overline{GE}$ ∠BGD＝∠CGE $\overline{BG}=\overline{CG}$	如圖 4.3-25 所示 由(4) $\overline{GD}=\overline{GE}$ 已證 對頂角相等 由(4) $\overline{BG}=\overline{CG}$ 已證
(8) 所以△BDG ≅ △CEG	由(7) & S.A.S.三角形全等定理
(9) 所以∠1＝∠3	對應角相等
(10) ∠1＋∠2＝∠3＋∠4	由(9)式＋(6)式
(11) 所以∠ABC＝∠ACB	∠ABC＝∠1＋∠2、∠ACB＝∠3＋∠4 & (10) ∠1＋∠2＝∠3＋∠4
(12) 所以△ABC 為等腰三角形	由(10) ∠ABC＝∠ACB & 兩底角相等為等腰三角形

習題 4.3-8

如圖 4.3-22 的△ABC 中，D、E、F 三點將$\overline{BC}$四等分，$\overline{AC}=3\overline{AG}$，H 為$\overline{AB}$的中點。圖中的哪一點為△ABC 的重心？

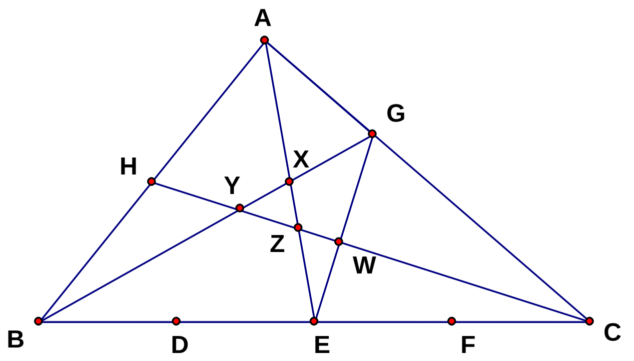


圖 4.3-22

想法：三角形三中線的交點為三角形的重心

解：

敘述	理由
(1) Z 點為△ABC 的重心	已知 D、E、F 三點將$\overline{BC}$四等分，E 點為$\overline{BC}$中點 & 已知 H 為$\overline{AB}$的中點 & 三角形兩中線的交點為三角形重心

進階思考題

1： 若△ABC 的三內角的角度成等差數列，其公差為 15 度，則三內角中最大角是______________度，最小角是______________度。

想法： 三角形內角和 180°

解：

敘述	理由
(1) 假設三角形三內角分別為 $(x-15)^\circ$、x°、$(x+15)^\circ$	已知△ABC 的三內角的角度成等差數列，其公差為 15 度
(2) $(x-15)^\circ+x^\circ+(x+15)^\circ=180^\circ$	由(1) ＆ 三角形內角和 180°
(3) $3x=180$ $x=60$	由(2)化簡 等式兩邊同除以 3
(4) 所以三內角分別為 $(x-15)^\circ=(60-15)^\circ=45^\circ$ $x^\circ=60^\circ$ $(x+15)^\circ=(60+15)^\circ=75^\circ$	將(3) $x=60$ 已證 代入(1)
(5) 所以三內角中最大角是 75° 最小角是 45°	由(4)

2：

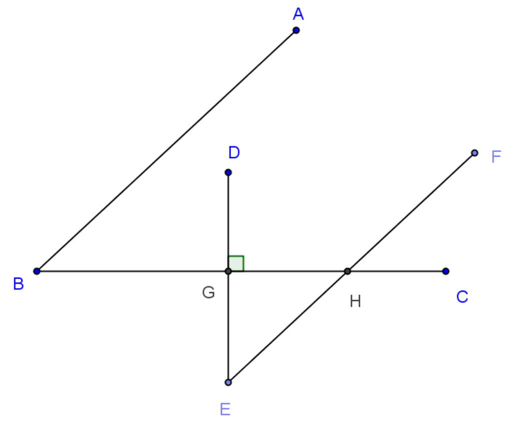


圖 4.1

已知：如圖 4.1，$\overline{AB} \parallel \overline{EF}$，$\overline{BC} \perp \overline{DE}$，$\overline{BC}$分別與$\overline{DE}$、$\overline{EF}$交於 G、H 兩點。

證明：$\angle$B＋$\angle$E＝90°。

想法：(1) 三角形內角和 180°

(2) 一截線與兩平行線相交，則：

1. 內錯角相等
2. 同位角相等
3. 同側內角互補

證明：

敘述	理由
(1) $\angle$EHG＝$\angle$B	已知$\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ ＆ 內錯角相等
(2) $\angle$EGH＝90°	已知$\overline{BC} \perp \overline{DE}$
(3) △EGH 中， $\angle$EGH＋$\angle$EHG＋$\angle$E＝180°	如圖 4.1 所示 三角形三內角和為 180°
(4) 90°＋$\angle$B＋$\angle$E＝180°	將(2) $\angle$EGH＝90° ＆ (1) $\angle$EHG＝$\angle$B 代入(3) $\angle$EGH＋$\angle$EHG＋$\angle$E＝180°
(5) 所以$\angle$B＋$\angle$E＝90°	由(4) 等量減法公理

3：如圖 4.2，$\overline{AB} \parallel \overline{DE}$，$\overline{EF} \perp \overline{BC}$，$\angle B = 40°$，則$\angle E =$＿＿＿＿＿度。

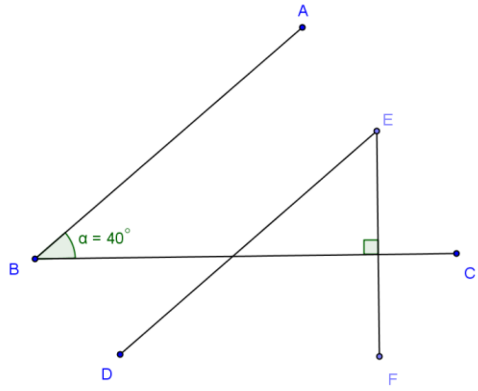
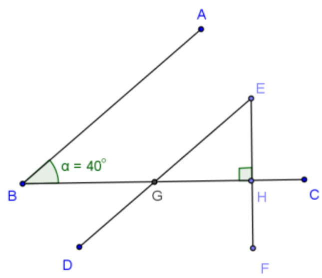


圖 4.2

想法：(1) 三角形內角和 180°

(2) 一截線與兩平行線相交，則：
1. 內錯角相等
2. 同位角相等
3. 同側內角互補

解：

敘述	理由
(1) 令$\overline{BC}$交$\overline{DE}$於 G 點， $\overline{BC}$交$\overline{EF}$於 H 點， 如圖 4.2(a)所示	不平行的兩直線必交於一點  **圖 4.2(a)**
(2) $\angle EGH = \angle B = 40°$	已知$\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ & 同位角相等
(3) $\angle EHG = 90°$	已知$\overline{EF} \perp \overline{BC}$
(4) $\triangle EGH$ 中， $\angle EGH + \angle EHG + \angle E = 180°$	如圖 4.2(a)所示 三角形三內角和為 180°
(5) $40° + 90° + \angle E = 180°$	將(2) $\angle EGH = 40°$ & (3) $\angle EHG = 90°$ 代入(4) $\angle EGH + \angle EHG + \angle E = 180°$
(6) 所以$\angle E = 180° - 40° - 90°$ $\angle E = 50°$	由(5) 等量減法公理

4：如圖 4.3，$\overline{AB} \parallel \overline{EF}$，$\overline{DE} \perp \overline{BC}$，$\angle$B＝40°，則$\angle$E＝＿＿＿＿＿度。

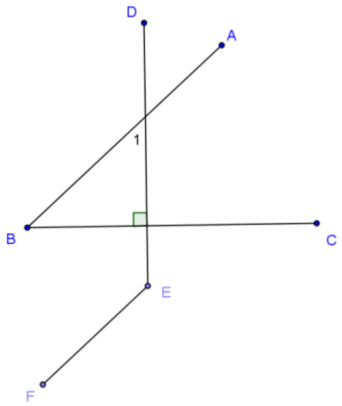
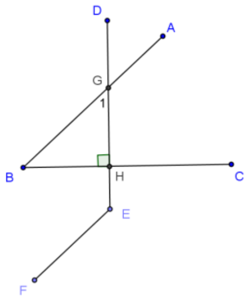


圖 4.3

想法：(1) 三角形內角和 180°

(2) 一截線與兩平行線相交，則：
1. 內錯角相等　2. 同位角相等　3. 同側內角互補

解：

敘述	理由
(1) 令$\overline{BC}$交$\overline{DE}$於 H 點，$\overline{AB}$交$\overline{DE}$於 G 點，如圖 4.3(a)所示	不平行的兩直線必交於一點  **圖 4.3(a)**
(2) $\angle$BHG＝90°	已知$\overline{DE} \perp \overline{BC}$
(3) △BGH 中，$\angle$1＋$\angle$BHG＋$\angle$B＝180°	如圖 4.3(a)所示 三角形三內角和為 180°
(4) $\angle$1＋90°＋40°＝180°	將(2) $\angle$BHG＝90° ＆ 已知$\angle$B＝40° 代入(3) $\angle$1＋$\angle$BHG＋$\angle$B＝180°
(5) 所以$\angle$1＝180°－40°－90° $\angle$1＝50°	由(4) 等量減法公理
(6) $\angle$E＋$\angle$1＝180°	已知$\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ ＆ 同側內角互補
(7) 所以$\angle$E＝180°－$\angle$1 ＝180°－50°＝130°	由(6)等量減法公理 ＆ 將(5)$\angle$1＝50°代入

5：如圖 4.4，$\overline{AB}\perp\overline{DE}$，$\overline{EF}\parallel\overline{BC}$，∠E＝130°，則∠B＝__________度。

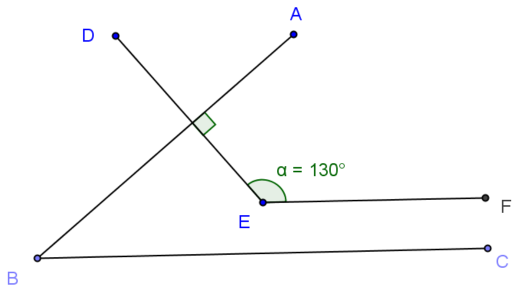


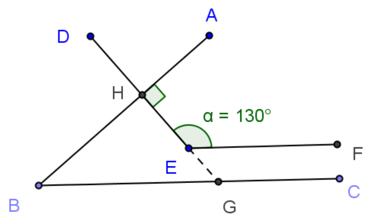
圖 4.4

想法：(1) 三角形內角和 180°

(2) 一截線與兩平行線相交，則：

1. 內錯角相等
2. 同位角相等
3. 同側內角互補

解：

敘述	理由
(1) 令$\overline{AB}$交$\overline{DE}$於 H 點； 延長$\overline{DE}$交$\overline{BC}$於 G 點， 如圖 4.4(a)所示	作圖，不平行的兩直線必交於一點  **圖 4.4(a)**
(2) ∠HGC＝∠DE F＝130°	已知$\overline{EF}$∠3＋∠6$\overline{BC}$ & 同位角相等 & 已知∠E＝130°
(3) ∠HGB＝180°－130°＝50°	由(2) ∠HGC＝130° & 補角定義
(4) ∠BHG＝90°	已知$\overline{AB}\perp\overline{DE}$
(5) △BGH 中， ∠HGB＋∠BHG＋∠B＝180°	如圖 4.4(a)所示 三角形三內角和為 180°
(6) 50°＋90°＋∠B＝180°	將(3)∠HGB＝50°&(4)∠BHG＝90°代入(5)
(7) ∠B＝180°－50°－90°＝40°	由(6) 等量減法公理

6： 如圖 4.5，$L_1 \perp L_2$，已知$\angle 1 = \angle 2$，$\angle 4 = \angle 5$，

(1) 求$\angle 1 + \angle 5$。

(2) 求$\angle 3 + \angle 6$。

(3) $\overleftrightarrow{AB}$與$\overleftrightarrow{CD}$是否平行？

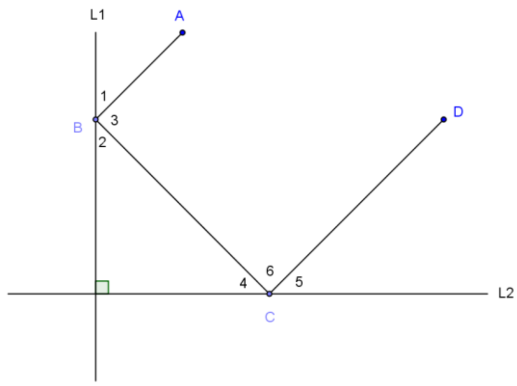


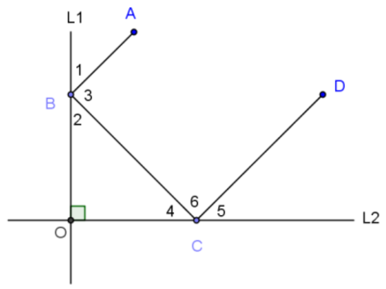
圖 4.5

想法：(1) 利用三角形三內角和 180° & 平角為 180° ，求得$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$、$\angle 5$、$\angle 6$ 的關係，再判斷$\overleftrightarrow{AB}$與$\overleftrightarrow{CD}$是否平行？

(2) 判斷兩直線平行的方法有：

1. 內錯角相等的兩線平行
2. 同位角相等的兩線平行
3. 同側內角互補的兩線平行

解：

敘述	理由
(1) 令 L_1 交 L_2 於 O 點，如圖 4.5(a)所示	已知 $L_1 \perp L_2$，不平行的兩直線必交於一點  **圖 4.5(a)**
(2) $\angle BOC = 90°$	已知 $L_1 \perp L_2$
(3) $\triangle BOC$ 中， $\angle BOC + \angle 2 + \angle 4 = 180°$	如圖 4.5(a)所示 三角形三內角和為 180°
(4) $90° + \angle 2 + \angle 4 = 180°$	將(2) $\angle BOC = 90°$ 代入(3) $\angle BOC + \angle 2 + \angle 4 = 180°$

(5) $\angle 2+\angle 4=180°-90°=90°$	由(4) 等量減法公理
(6) 所以$\angle 1+\angle 5=90°$	將已知$\angle 1=\angle 2$，$\angle 4=\angle 5$代入(4)
(7) $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$	如圖 4.5(a)所示， L_1為一直線
(8) $\angle 4+\angle 5+\angle 6=180°$	如圖 4.5(a)所示， L_2為一直線
(9) $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6$ $=180°+180°$	由(7)式＋(8)式
(10) $(\angle 1+\angle 5)+(\angle 2+\angle 4)+\angle 3+\angle 6=$ $360°$	由(9)加法交換律
(11) $90°+90°+\angle 3+\angle 6=360°$	將(6) $\angle 1+\angle 5=90°$ & (5) $\angle 2+\angle 4=90°$ 代入(10)
(12) 所以$\angle 3+\angle 6=360°-90°-90°$ $=180°$	由(11) 等量減法公理
(13) $\overline{BC}$為$\overline{AB}$與$\overline{CD}$的截線 & $\angle 3$與$\angle 6$為同側內角	如圖 4.5(a)所示
(14) 所以$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$	由(12) & (13) 同側內角互補，則兩直線互相平行

7：如圖 4.6，$L_1 \parallel L_2$，M 及 N 都是 L_1、L_2 的截線，$\angle 1=85°$，$\angle 2=65°$，求$\angle 3$。

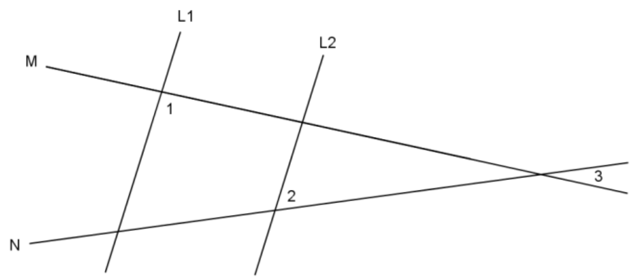


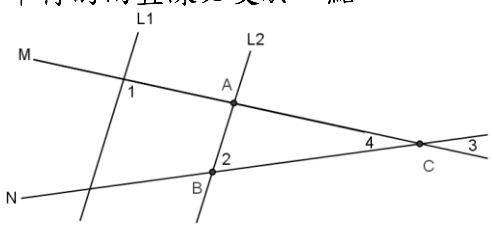
圖 4.6

想法：(1) 利用 $L_1 \parallel L_2$ ＆ 三角形三內角和 180°的性質，求$\angle 3$ 的度數。

(2) 一截線與兩平行線相交，則：

1. 內錯角相等
2. 同位角相等
3. 同側內角互補

解：

敘述	理由
(1) 令 M 交 L_2 於 A 點； N 交 L_2 於 B 點； M 交 N 於 C 點，如圖 4.6(a)所示	已知 M 及 N 都是 L_1、L_2 的截線 ＆ 不平行的兩直線必交於一點  **圖 4.6(a)**
(2) $\angle BAC=\angle 1=85°$	已知 $L_1 \parallel L_2$ ＆ 同位角相等 ＆ 已知$\angle 1=85°$
(3) △ABC 中， $\angle BAC+\angle 2+\angle 4=180°$	如圖 4.6(a)所示 三角形三內角和為 180°
(4) $85°+65°+\angle 4=180°$ $\angle 4=180°-85°-65°=30°$	將(2) ＆ 已知$\angle 2=65°$ 代入 (3) 等量減法公理
(5) 所以$\angle 3=\angle 4=30°$	如圖 4.6(a)，對頂角相等 ＆ (4) $\angle 4=30°$

8：已知：如圖 4.7，△ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BD}\perp\overline{AC}$。

證明：$\angle CBD=\dfrac{1}{2}\angle BAC$。

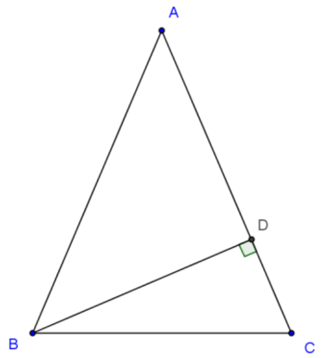


圖 4.7

想法：(1) 利用三角形三內角和 180°

(2) 等腰三角形頂角與底角的關係

證明：

敘述	理由
(1) $\angle CDB=90°$	已知$\overline{BD}\perp\overline{AC}$
(2) △BCD 中， $\angle CBD+\angle C+\angle CDB=180°$	如圖 4.7 所示 三角形三內角和為 180°
(3) $\angle CBD+\angle C+90°=180°$ $\angle CBD=180°-\angle C-90°$ $=90°-\angle C$	將(1) $\angle CDB=90°$代入(2) 等量減法公理 化簡
(4) △ABC 為等腰三角形	已知$\overline{AB}=\overline{AC}$ & 兩腰等長為等腰三角形
(5) $\angle BAC=180°-2\angle C$	由(4) & 等腰三角形頂角與底角的關係
(6) 所以$\angle BAC=2(90°-\angle C)$	由(5) 提出公因數 2
(7) $\angle BAC=2\angle CBD$	將(3) $90°-\angle C=\angle CBD$ 代入 (6)
(8) 所以$\angle CBD=\dfrac{1}{2}\angle BAC$	由(7) 等式兩邊同除以 2

9：

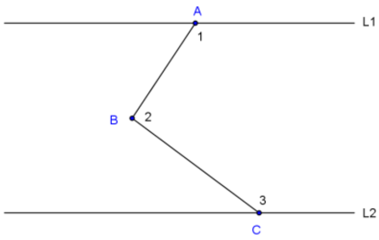


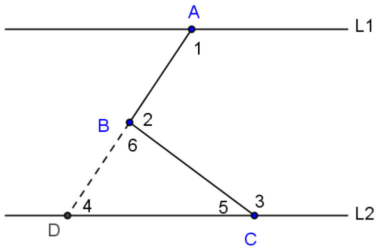
圖 4.8

已知：$\angle 1+\angle 2+\angle 3=360°$

證明：$L_1 \parallel L_2$

想法：判斷兩直線平行的方法有：
1. 內錯角相等的兩線平行　2. 同位角相等的兩線平行
2. 同側內角互補的兩線平行

證明：

敘述	理由
(1) 延長$\overline{AB}$與 L_2 交於 D 點， 如圖 4.8(a)	作圖，不互相平行的兩直線必有一交點  **圖 4.8(a)**
(2) $\angle 5=180°-\angle 3$	如圖 4.8(a) ＆ 補角定義
(3) $\angle 6=180°-\angle 2$	如圖 4.8(a) ＆ 補角定義
(4) $\triangle BCD$ 中， $\angle 4+\angle 5+\angle 6=180°$	如圖 4.8(a)所示 三角形三內角和為 180°
(5) $\angle 4+(180°-\angle 3)+(180°-\angle 2)=180°$	將(2) $\angle 5=180°-\angle 3$ ＆ (3) $\angle 6=180°-\angle 2$ 代入(4) $\angle 4+\angle 5+\angle 6=180°$
(6) $\angle 4=\angle 2+\angle 3-180°$	由(5) 移項
(7) $\angle 1+\angle 2+\angle 3=360°$	已知$\angle 1+\angle 2+\angle 3=360°$
(8) $\angle 1=360°-\angle 2-\angle 3$	由(7) 等量減法公理
(9) $\angle 1+\angle 4=(360°-\angle 2-\angle 3)+(\angle 2+\angle 3-180°)=180°$	由(8)式＋(6)式 化簡
(10) 所以$\angle 1+\angle 4=180°$	由(9)
(11) $L_1 \parallel L_2$	由(10) ＆ 同側內角互補的兩線平行定理

10：

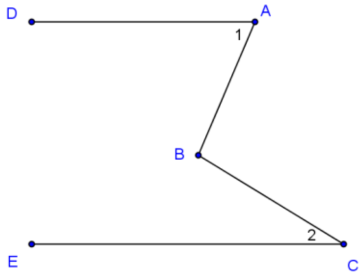


圖 4.9

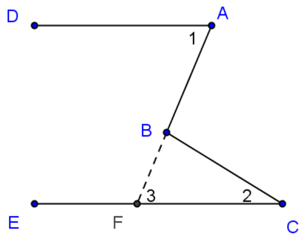
已知：如圖 4.9，∠ABC＝∠1＋∠2。

證明：$\overline{AD} \parallel \overline{CE}$。

想法：判斷兩直線平行的方法有：

1. 內錯角相等的兩線平行
2. 同位角相等的兩線平行
3. 同側內角互補的兩線平行

證明：

敘述	理由
(1) 延長$\overline{AB}$與$\overline{CE}$交於 F 點，如圖 4.9(a)	作圖，不互相平行的兩直線必有一交點  **圖 4.9(a)**
(2) △BCF 中，∠ABC＝∠3＋∠2	三角形外角等於內對角的和
(3) 所以∠3＝∠ABC－∠2	由(2) 等量減法公理
(4) ∠ABC＝∠1＋∠2	已知∠ABC＝∠1＋∠2
(5) 所以∠1＝∠ABC－∠2	由(4) 等量減法公理
(6) ∠1＝∠ABC－∠2＝∠3	由(5) ＆ (3) 遞移律
(7) 所以$\overline{AD} \parallel \overline{CE}$	由(6) ∠1＝∠3 ＆ 內錯角相等的兩線平行定理

11：

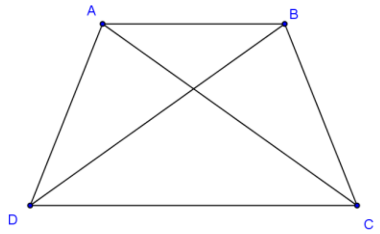


圖 4.10

已知：如圖 4.10，四邊形 ABCD 中，∠DAB＝∠CBA，$\overline{AD}$＝$\overline{BC}$。

證明：$\overline{AC}$＝$\overline{BD}$。

想法：(1) 若證得△BAC ≅ △ABD，則可得知$\overline{AC}$＝$\overline{BD}$

(2) 判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱 A.A.S.三角形全等定理
5. 直角三角形斜邊及一股全等定理，又稱 R. H. S.三角形全等定理

證明：

敘述	理由
(1) △BAC 與△ABD 中	如圖 4.10 所示
$\overline{BC}$＝$\overline{AD}$	已知$\overline{AD}$＝$\overline{BC}$
∠CBA＝∠DAB	已知∠DAB＝∠CBA
$\overline{BA}$＝$\overline{AB}$	共同邊
(2) 所以△BAC ≅ △ABD	由(1) ＆ S.A.S.三角形全等定理
(3) $\overline{AC}$＝$\overline{BD}$	對應邊相等

12：

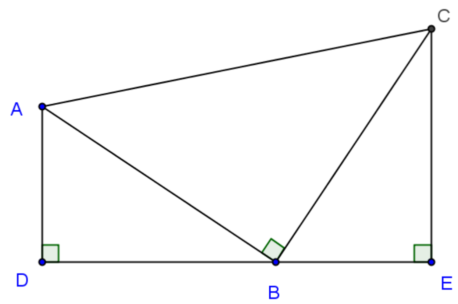


圖 4.11

已知：如圖 4.11，∠D＝∠E＝90°，△ABC 為等腰直角三角形，$\overline{AB}=\overline{BC}$。

證明：$\overline{DE}=\overline{AD}+\overline{CE}$。

想法：(1) 如圖所示，因為$\overline{DE}=\overline{BE}+\overline{BD}$；

(2) 若證得$\overline{AD}=\overline{BE}$ & $\overline{CE}=\overline{BD}$ ，則可得知$\overline{DE}=\overline{AD}+\overline{CE}$；

(3) 若證得△ADB ≅ △BEC，則可得知$\overline{AD}=\overline{BE}$ & $\overline{CE}=\overline{BD}$

(4) 判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱 A.A.S.三角形全等定理
5. 直角三角形斜邊及一股全等定理，又稱 R. H. S.三角形全等定理

證明：

敘述	理由
(1) △ADB 中， ∠D＋∠DAB＋∠ABD＝180°	如圖 4.11 三角形三內角和為 180°
(2) 90°＋∠DAB＋∠ABD＝180° ∠DAB＝180°－90°－∠ABD ＝90°－∠ABD	將已知∠D＝90° 代入 (1) 等量減法公理 化簡
(3) ∠ABC＝90°	已知△ABC 為等腰直角三角形 & $\overline{AB}=\overline{BC}$
(4) ∠ABD＋∠ABC＋∠EBC＝180°	如圖 4.11，D、B、E 三點共線
(5) ∠ABD＋90°＋∠EBC＝180° ∠EBC＝180°－∠ABD－90° ＝90°－∠ABD	將(3) ∠ABC＝90°代入(4) 等量減法公理 化簡

(6) ∠DAB＝90°－∠ABD＝∠EBC	由(2) ∠DAB＝90°－∠ABD ＆ (5) ∠EBC＝90°－∠ABD　遞移律
(7) △ADB 與△BEC 中 ∠D＝∠E ∠DAB＝∠EBC $\overline{AB}=\overline{BC}$	如圖 4.11 已知∠D＝∠E＝90° 由(6) ∠DAB＝∠EBC 已證 已知$\overline{AB}=\overline{BC}$
(8) 所以△ADB ≅ △BEC	由(7) ＆ A.A.S.三角形全等定理
(9) $\overline{AD}=\overline{BE}$ ＆ $\overline{BD}=\overline{CE}$	對應邊相等
(10) $\overline{DE}=\overline{BE}+\overline{BD}$	如圖 4.11，全量等於分量之和
(11) 所以$\overline{DE}=\overline{AD}+\overline{CE}$	將(9) $\overline{BE}=\overline{AD}$ ＆$\overline{BD}=\overline{CE}$ 代入(10) $\overline{DE}=\overline{BE}+\overline{BD}$

13：如圖 4.12，△ABC 和△BDE 都是正三角形，∠BCE=25°
求∠ADC 之角度

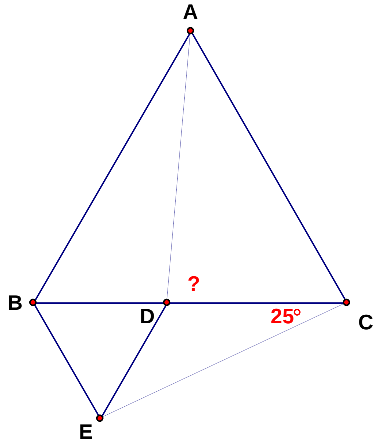


圖 4.12

想法：(1) 利用三角形內角和 180°定理，計算△DEC 之各角
(2) 在△ABD 內作一正三角形△FBD，利用 S.A.S.全等三角形定理證明 △AFD ≅ △CDE
(3) 利用全等三角形對應角相等，求得∠ADF。
(4) 利用平角性質，求∠ADC

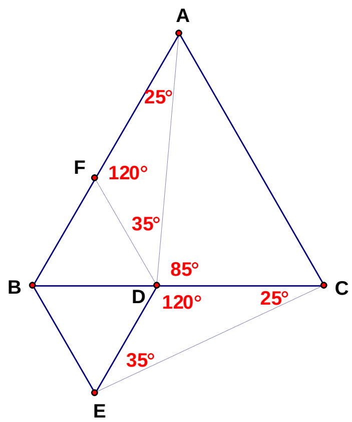


圖 4.12(a)

解：

敘述	理由
(1) ∠CDE＝180°－∠BDE＝180°－60° ＝120°	正三角形之各內角等於 60°
(2) ∠CED＝180°－∠CDE－∠DCE ＝180°－60°－25°＝35°	三角形內角和 180°及已知 & (1)

(3) 在$\overline{AB}$線上取一點 F，使得$\overline{BF}=\overline{BD}$，則 △FBD 為正三角形。如圖 4.12(a)	$\overline{BF}=\overline{BD}$，△FBD 為等腰三角形， ∴∠BFD＝∠FDB，又已知△ABC 為正三角形，故∠ABD＝60°， ∴∠BFD＝∠FDB ＝60°， 三角相等之三角形為正三角形。
(4) ∠AFD＝180°－∠BFD ＝180°－60°＝120°	同(1)
(5) $\overline{FD}=\overline{BD}=\overline{DE}$	正三角形的三邊相等
(6) $\overline{AF}=(\overline{AB}-\overline{BF})=(\overline{BC}-\overline{BD})=\overline{CD}$	∵△ABC 和△FBD 都是正三角形 ∴$\overline{AB}=\overline{BC}$ 且 $\overline{BF}=\overline{BD}$
(7) △AFD ≅ △CDE	由(4)(5)(6)，SAS 全等三角形定理
(8) ∠ADF＝∠CED＝35°	全等三角形對應角相等
(9) ∠ADC＋∠FDB＋∠ADF ＝180°	平角等於 180°
(10) ∠ADC＝180°－60°－25°＝85°	由(9) 等量減法公理

13 題：另解：

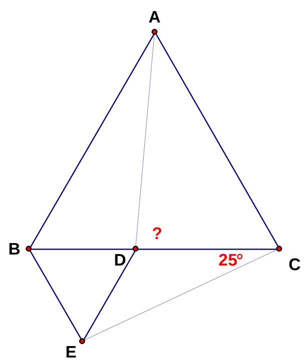


圖 4.12(b)

想法：(1) 若△ABD ≅ △CBE，則∠BAD＝∠BCE＝25°，再利用外角求得∠ADC

(2) 判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱 A.A.S.三角形全等定理
5. 直角三角形斜邊及一股全等定理，又稱 R. H. S.三角形全等定理

(3) 三角形的任一外角等於兩個內對角和

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{AD}$與$\overline{CE}$，如圖 4.12(b)所示	作圖
(2) 在△ABD 與△CBE 中， $\overline{BD}=\overline{BE}$ ∠ABD＝∠CBE＝60° $\overline{AB}=\overline{BC}$	如圖 4.12(b)所示 已知△ABC 和△BDE 都是正三角形，所以$\overline{BD}=\overline{BE}$、$\overline{AB}=\overline{BC}$、∠ABD＝∠CBE＝60°
(3) △ABD ≅ △CBE (SAS)	由(2)　S.A.S.三角形全等定理
(4) ∠BAD＝∠BCE＝25°	對應角相等 ＆ 已知∠BCE＝25°
(5) 在△ABD 中， ∠ADC＝∠ABD＋∠ BAD ＝60°＋25°＝85°	如圖 4.12(b)所示，∠ADC 為∠ADB 的外角，外角等於內對角的和

14： 如圖 4.13，$\overline{AP}$為∠BAC 的平分線，$\overline{BP}=\overline{CP}$，∠PCA＝120°，$\overline{AC}$＝12，$\overline{AB}$＝16，求$\overline{BP}$＝？

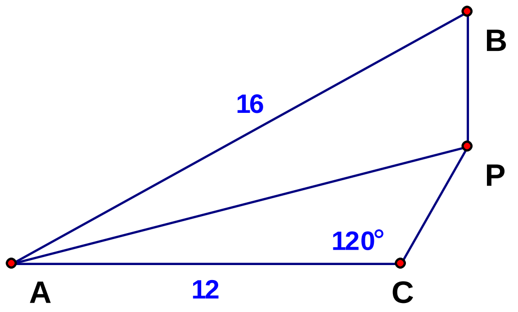


圖 4.13

想法：(1) 在$\overline{AB}$ 線上取一點 D，使$\overline{AD}=\overline{AC}$，證明△APC ≅ △APC，則$\overline{DP}=\overline{CP}$，$\overline{AC}=\overline{AD}$

(2) 再證明△BDP 為正三角形，則$\overline{BP}=\overline{DP}=\overline{DB}$

(3) ∴ $\overline{BP}=\overline{AB}-\overline{AD}=\overline{AB}-\overline{AC}$

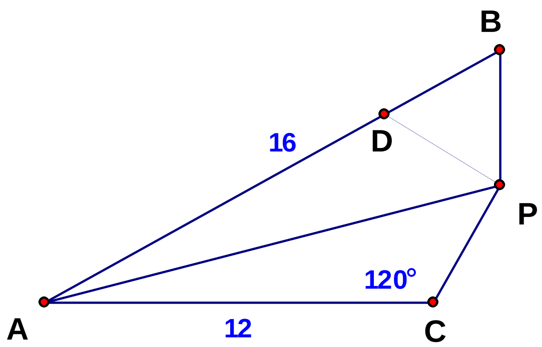


圖 4.13(a)

解：

敘述	理由
(1) 在$\overline{AB}$ 線上取一點 D，使$\overline{AD}=\overline{AC}$，如圖 4.13(a)。	等線段作圖
(2) 在△APC 與△APC 中 $\overline{AD}=\overline{AC}$ ∠PAD＝∠PAC $\overline{AP}=\overline{AP}$	如圖 4.13(a) 由(1) $\overline{AD}=\overline{AC}$ 已知 $\overline{AP}$為∠BAC 的平分線 同線段相等
(3) △APD ≅ △APC	由(2) S.A.S.三角形全等定理
(4) $\overline{DP}=\overline{CP}$，$\overline{AC}=\overline{AD}$	由(3) 全等三角形之對應邊相等

(5) ∠PDA＝∠PCA＝120°	由(3) 全等三角形之對應角相等 & 已知∠PCA＝120°
(6) ∠BDP＝180°－∠PDA＝60°	補角定義
(7) $\overline{BP}=\overline{DP}$， ∴ △BDP 為等腰三角形	由(4) $\overline{DP}=\overline{CP}$ & 已知 $\overline{BP}=\overline{CP}$ 等腰三角形定義
(8) ∠DBP＝∠BDP＝60°	等腰三角形兩等角相等
(9) ∠BPD＋∠DBP＋∠BDP＝180° ∴ ∠BPD ＝180°－60°－60°＝60°	三角形三內角和 180° 由（8）
(10) △BDP 為正三角形	由(8) & (9)，正三角形的各角相等
(11) $\overline{BP}=\overline{DP}=\overline{DB}$	正三角形的各邊相等
(12) $\overline{BP}=\overline{DB}=\overline{AB}-\overline{AD}$ $=\overline{AB}-\overline{AC}$ ＝16－12 ＝4	由(11) $\overline{BP}=\overline{DB}$ & 全量等於分量之和 由(4) $\overline{AC}=\overline{AD}$ & 已知$\overline{AC}$＝12，$\overline{AB}$＝16