目錄

第四章 更多三角形的性質

4.1 節 三角形三內角之和

在第三章，我們學會了很多有關平行線的定理，現在我們就要利用平行線來證明以下一個非常重要的定理。

定理：4.1-1　三角形三內角之和等於 180°

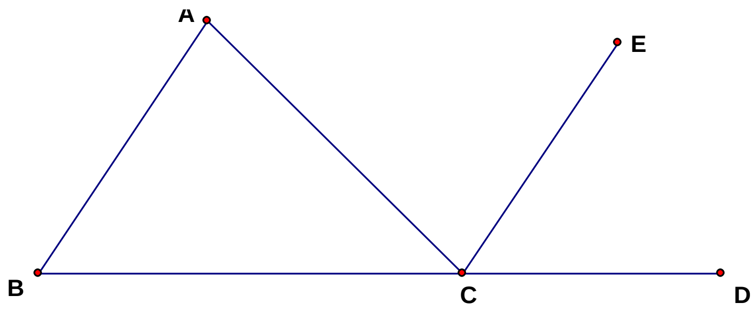


圖 4.1-1

已知：△ABC 中，∠A、∠B、∠C 為三角形的三內角

求證：∠A＋∠B＋∠ACB＝180°

想法：過 C 點作與$\overline{AB}$平行的直線，利用平行線的同位角相等∠B＝∠ECD，平行線的內錯角相等∠A＝∠ACE，∴∠A+∠B+∠ACB 為平角 180°

證明：

敘述	理由
(1) 如圖 4.1-1，延長$\overline{BC}$至 D，通過 C，作$\overline{CE} \parallel \overline{AB}$。	作圖
(2) ∠ECD＝∠ABC	由(1) $\overline{CE} \parallel \overline{AB}$，同位角相等
(3) ∠ECA＝∠CAB	由(1) $\overline{CE} \parallel \overline{AB}$，內錯角相等
(4) ∠ACB＋∠ECA＋∠ECD＝180°	如圖 4.1-1 所示，$\overline{BCD}$為一直線
(5) ∴∠ACB＋∠CAB＋∠ABC ＝∠A＋∠B＋∠ACB＝180°	將(2) ＆ (3) 代入(4)

Q. E. D.

例題 4.1-1：

試證明線外一點到直線的最短距離為垂直線段。

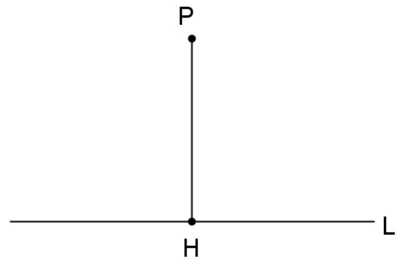
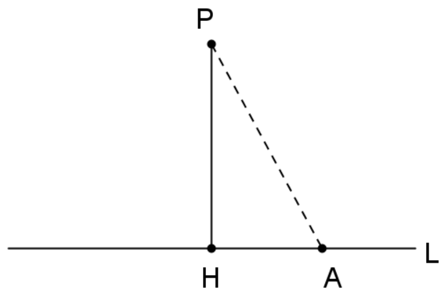


圖 4.1-2

已知：P 點為直線 L 外之一點，$\overline{PH}\perp$L

求證：$\overline{PH}$為 P 點到直線 L 的最短距離。

想法：(1) 三角形三內角和 180°　　　(2) 利用三角形大角對大邊性質



證明：

圖 4.1-2(a)

敘述	理由
(1) 在 L 上找一點異於 H 點的點 A，連接 P 點與 A 點，則$\overline{PA}$必不垂直 L，如圖 4.1-2(a)	作圖 ＆ 通過直線外一點，只有一條直線垂直此直線
(2) △PHA 中，∠PHA＝90°	已知$\overline{PH}\perp$L
(3) ∠P＋∠PAH＋∠PHA＝180°	三角形內角和 180°
(4) ∠P＋∠PAH＋90°＝180°	將(2) ∠PHA＝90° 代入(3)式中得
(5) ∠P＋∠PAH＝90°	由(4) 等量減法公理
(6) ∠PAH＝90°－∠PAH＜90°＝∠PHA	由(5) 全量大於分量 ＆ (2) ∠PHA＝90°
(7) △PHA 中，∠PAH＜∠PHA	由(6)
(8) $\overline{PH}$＜$\overline{PA}$	由(7) ＆ 三角形大角對大邊定理
(9) 所以$\overline{PH}$為 P 點到直線 L 的最短距離	由(1) ＆ (8)

例題 4.1-2：　試證明直角三角形中，直角為最大角。

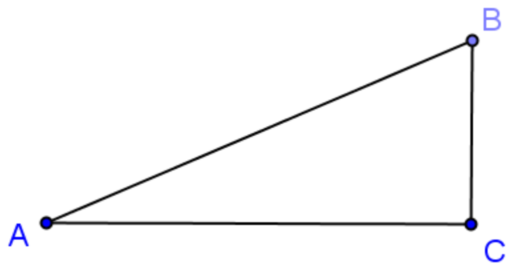


圖 4.1-3

已知：如圖 4.1-3，△ABC 為直角三角形，∠C＝90°
求證：∠C＞∠A 且∠C＞∠B

想法：三角形三內角和 180°
證明：

敘述	理由
(1) △ABC 中，∠A＋∠B＋∠C＝180°	三角形內角和 180°
(2) ∠A＋∠B＋90°＝180°	將已知∠C＝90° 代入(1)式中得
(3) ∠A＋∠B＝180°－90°＝90°	由(2) 等量減法公理
(4) ∠A＝90°－∠B＜90°＝∠C	由(3)全量大於分量 ＆已知∠C＝90°
(5) ∠B＝90°－∠A＜90°＝∠C	由(3)全量大於分量 ＆已知∠C＝90°
(6) 所以∠C＞∠A 且∠C＞∠B	由(4) ＆ (5)

例題 4.1-3：

△ABC 中，若∠A＝33°，∠B＝57°，則△ABC 為________三角形。
（填銳角、直角、鈍角）

想法：(1) 三角形三內角和 180°
(2) 銳角、直角、鈍角三角形的判別
解：

敘述	理由
(1) ∠A＋∠B＋∠C＝180°	三角形內角和 180°
(2) ∠C＝180°－(∠A＋∠B)	由(1) 等量減法公理
(3) ∠C＝180°－(33°＋57°)＝90°	由(2) ＆ 已知∠A＝33°，∠B＝57°
(4) △ABC 為直角三角形	由(3) ∠C＝90°　已證

例題 4.1-4：

△ABC 中，∠A＝（x＋10）°，∠B＝（2x＋3）°，∠C＝（4x－8）°，
則 x＝______，∠A＝______度，∠B＝______度，∠C＝______度。

想法：三角形三內角和 180°

解：

敘述	理由
(1) ∠A＋∠B＋∠C＝180°	三角形內角和 180°
(2) （x＋10）°＋（2x＋3）°＋（4x－8）°＝180°	由(1)＆已知∠A＝（x＋10）°，∠B＝（2x＋3）°，∠C＝（4x－8）°
(3) x＝25	由(2)解一元一次方程式
(4) ∠A＝（x＋10）°＝35°	由(3)＆已知∠A＝（x＋10）°
(5) ∠B＝（2x＋3）°＝53°	由(3)＆已知∠B＝（2x＋3）°
(6) ∠C＝（4x－8）°＝92°	由(3)＆已知∠C＝（4x－8）°

例題 4.1-5：

△ABC 中，若∠A＝65°，∠C 的度數比∠B 的 2 倍少 5 度，
則∠B＝______________度，∠C＝______________度。

想法：三角形三內角和 180°

解：

敘述	理由
(1) ∠A＋∠B＋∠C＝180°	三角形內角和 180°
(2) ∠B＋∠C＝180°－∠A＝115°	由(1) 等量減法公理 ＆∠A＝65°
(3) ∠C＝2∠B－5	已知∠C 的度數比∠B 的 2 倍少 5 度
(4) ∠B＋(2∠B－5)＝115°	將(3)代入(2)
(5) ∠B＝40°	由(4) 解一元一次方程式
(6) ∠C＝2×40－5＝75°	將(5)代入(3)

例題 4.1-6：

直角三角形 ABC 中，∠C 為最大角，且∠B＝4∠A，則∠A＝________度。

想法：三角形三內角和 180°

解：

敘述	理由
(1) ∠C＝90°	直角三角形 ABC 中，∠C 為最大角
(2) ∠A＋∠B＋∠C＝180°	三角形內角和 180°
(3) ∠A＋∠B＝180°－∠C＝90°	由(2) 等量減法公理 ＆∠C＝90°
(4) ∠A＋4∠A＝90°	將已知∠B＝4∠A 代入(3)
(5) ∠A＝18°	由(4) 解一元一次方程式

例題 4.1-7：

△ABC 中，若∠B＝54°，∠A 的度數是∠C 的 2 倍，則∠A＝_________度，∠C＝_________度。

想法：三角形三內角和 180°

解：

敘述	理由
(1) ∠A＋∠B＋∠C＝180°	三角形內角和 180°
(2) ∠A＋∠C＝180°－∠B＝126°	由(1) 等量減法公理 ＆∠B＝54°
(3) ∠A＝2∠C	已知∠A 的度數是∠C 的 2 倍
(4) 2∠C＋∠C＝126°	將(3)代入(2)
(5) ∠C＝42°	由(4) 解一元一次方程式
(6) ∠A＝2∠C＝84°	將(5)代入(3)

例題 4.1-8：

已知一等腰三角形的頂角為 100 度，則底角為_______________度。

想法：(1) 三角形三內角和 180°

(2) 等腰三角形兩底角相等

解：

敘述	理由
(1) 假設等腰三角形兩底角皆為 x°	等腰三角形的兩底角相等
(2) 100°＋x°＋x°＝180°	三角形內角和 180°
(3) x＝(180－100)÷2＝40	由(2) ＆ 解一元一次方程式
(4) 底角為 40°	由(1) ＆ (3)

由例題 4.1-8 中，我們可以得到一個結論：等腰三角形中，底角＝(180°－頂角)÷2

例題 4.1-9：

已知一等腰三角形的底角為 65 度，則頂角為_______________度。

想法：(1) 三角形三內角和 180°

(2) 等腰三角形兩底角相等

解：

敘述	理由
(1) 假設頂角為 x°	假設
(2) 等腰三角形兩底角皆為 65°	等腰三角形的兩底角相等
(3) x°＋65°＋65°＝180°	三角形內角和 180°
(4) x＝180－2×65＝50	由(3) ＆ 解一元一次方程式
(5) 頂角為 50°	由(1) ＆ (4)

由例題 4.1-9 中，我們得到一個結論：等腰三角形中，頂角＝180°－2 倍底角

例題 4.1-10：

已知一等腰三角形的頂角為 8x 度，底角為 5x 度，則 x＝___，頂角為___度。

想法：(1) 三角形三內角和 180°

(2) 等腰三角形兩底角相等

解：

敘述	理由
(1) 等腰三角形兩底角皆為 5x°	等腰三角形的兩底角相等
(2) 8x°＋5x°＋5x°＝180°	三角形內角和 180°＆頂角為 8x°，底角為 5x°
(3) x＝10	由(2)＆解一元一次方程式
(4) 頂角為 8x°＝80°	由(3)＆頂角為 8x°

例題 4.1-11：

已知一等腰三角形的其中一個內角為 70 度，則此三角形的頂角為_____度。

想法：(1) 等腰三角形中，頂角＝180°－2 倍底角

(2) 等腰三角形中，底角＝(180°－頂角)÷2

解：

敘述	理由
(1) 假設 70°為頂角	假設
(2) 兩底角皆為(180°－70°)÷2＝55°	等腰三角形的兩底角相等 ＆ 等腰三角形中，底角＝(180°－頂角)÷2
(3) 假設 70°為底角	假設
(4) 頂角＝180°－2×70°＝40°	等腰三角形中，頂角＝180°－2 倍底角
(5) 所以頂角為 70°或 40°	由(1) ＆ (4)

例題 4.1-12：

如圖 4.1-4，$\overline{AP}$、$\overline{BP}$分別為∠DAB、∠ABC 的角平分線，∠1＝86°，∠3＝100°，則∠APB＝______________度。

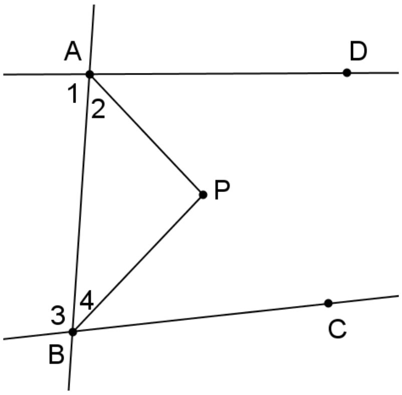


圖 4.1-4

想法：三角形三內角和 180°

解：

敘述	理由
(1) ∠DAB＝180°－∠1＝94°	如圖 4.1-4，∠1＋∠DAB＝180°
(2) ∠2＝94°÷2＝47°	已知$\overline{AP}$為∠DAB 的角平分線
(3) ∠CBA＝180°－∠3＝80°	如圖 4.1-4，∠3＋∠CBA＝180°
(4) ∠4＝80°÷2＝40°	已知$\overline{BP}$為∠ABC 的角平分線
(5) ∠2＋∠4＋∠APB＝180°	三角形內角和 180°
(6) ∠APB＝180°－(∠2＋∠4)＝93°	將(2)＆(4)代入(5)

例題 4.1-13：

如圖 4.1-5，△ABC 中，∠ABC＝48°，∠ACB＝66°，且∠ABC 和∠ACB 的角平分線交於一點 D，則∠BDC＝＿＿＿＿＿＿＿度。

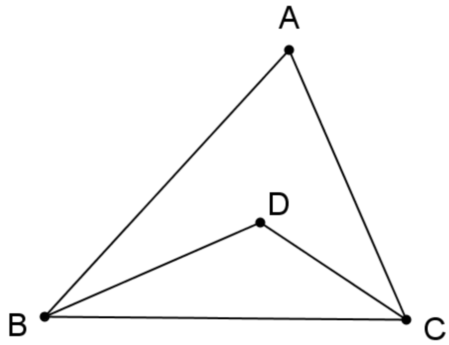


圖 4.1-5

想法：三角形三內角和 180°

解：

敘述	理由
(1) ∠DBC＝48°÷2＝24°	已知$\overline{BD}$為∠DAB 的角平分線
(2) ∠DCB＝66°÷2＝33°	已知$\overline{CD}$為∠ABC 的角平分線
(3) ∠DBC＋∠DCB＋∠BDC＝180°	三角形內角和 180°
(4) ∠BDC＝180°－(∠DBC＋∠DCB)＝123°	將(1)＆(2)代入(3)

例題 4.1-14：

如圖 4.1-6，$\overline{AB}=\overline{AC}$，且$\overline{BD}\perp\overline{AC}$，已知∠A＝66°，則∠DBC＝__________度。

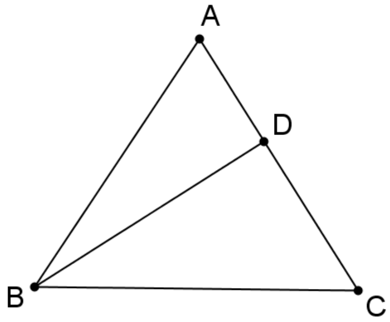


圖 4.1-6

想法：(1) 三角形三內角和 180°

(2) 等腰三角形底角與頂角關係(底角＝(180°－頂角)÷2)

解：

敘述	理由
(1) △ABC 為等腰三角形	已知$\overline{AB}=\overline{AC}$
(2) ∠C＝(180°－∠A)÷2＝57°	等腰三角形底角與頂角關係
(3) ∠BDC＝90°	已知$\overline{BD}\perp\overline{AC}$
(4) ∠DBC＋∠C＋∠BDC＝180°	三角形內角和 180°
(5) ∠DBC＝180°－(∠C＋∠BDC)＝33°	將(2)＆(3)代入(4)

例題 4.1-15：

如圖 4.1-7，△ABC 為等腰直角三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$，若$\overline{AD}$為$\overline{BC}$邊上的高，求∠1。

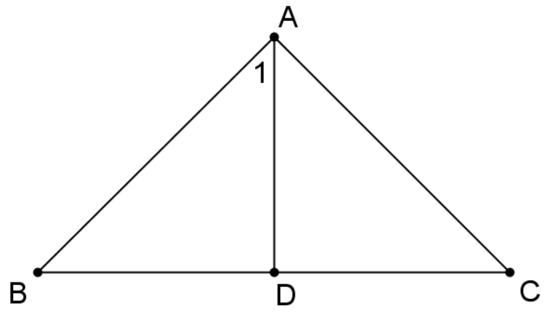


圖 4.1-7

想法：(1) 三角形三內角和 180°

(2) 等腰三角形底角與頂角關係(底角＝(180°－頂角)÷2)

解：

敘述	理由
(1) ∠BAC＝90°	△ABC 為等腰直角三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$
(2) ∠B＝(180°－∠BAC)÷2＝45°	等腰三角形底角與頂角關係
(3) $\overline{AD}\perp\overline{BC}$	已知$\overline{AD}$為$\overline{BC}$上的高
(4) ∠ADB＝90°	已知$\overline{AD}\perp\overline{BC}$
(5) ∠1＋∠B＋∠ADB＝180°	三角形內角和 180°
(6) ∠1＝180°－(∠B＋∠ADB)＝45°	將(2)＆(4)代入(5)

例題 4.1-16：

已知：如圖 4.1-8，△ABC 中，∠ABC＝90°，∠BDC＝90°，

試證：∠A＝∠DBC。

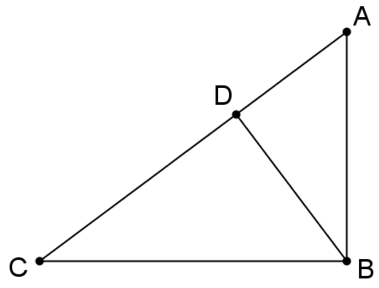


圖 4.1-8

想法：三角形三內角和 180°

證明：

敘述	理由
(1) ∠ABC＝90°	已知
(2) ∠A＋∠C＋∠ABC＝180°	三角形三內角之和等於 180°
(3) ∠A＋∠C＝90°	由(1) & (2)
(4) ∠A＝90°－∠C	由(3) 等量減法公理
(5) ∠DBC＋∠C＋∠BDC＝180°	三角形三內角之和等於 180°
(6) ∠BDC＝90°	已知
(7) ∠DBC＋∠C＝180°－90°＝90°	由(5) & (6)
(8) ∠DBC=90°－∠C	由(7) 等量減法公理
(9) ∠DBC＝∠A	由(4)及(8) 已證

例題 4.1-17：

如圖 4.1-9，$\triangle ABC \cong \triangle PQR$，且 A 和 P、B 和 Q、C 和 R 是三組對應頂點。若 $\angle B = 50°$，$\angle C = 105°$，$\overline{PR} = 18$ 公分，求：

(1) $\angle A$ 及 $\angle R$。　　(2) $\overline{AC}$。

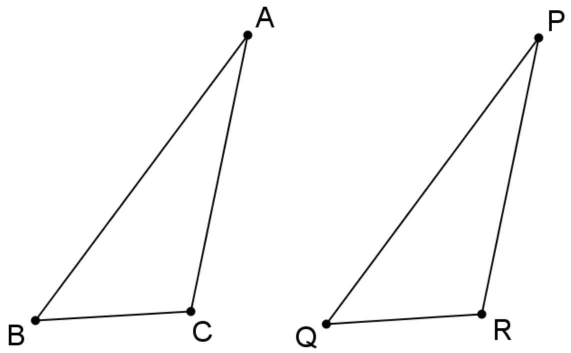


圖 4.1-9

想法：(1) 三角形三內角和 180°

(2) 兩三角形全等，則對應邊、對應角相等

解：

敘述	理由
(1) $\angle A = 180° - (50° + 105°) = 25°$	三角形之內角和 180° & 已知 $\angle B = 50°$，$\angle C = 105°$
(2) $\angle R = \angle C = 105°$	已知 $\triangle ABC \cong \triangle PQR$，對應角相等
(3) $\overline{AC} = \overline{PR} = 18$ 公分	已知 $\triangle ABC \cong \triangle PQR$，對應邊相等

例題 4.1-18：

如圖 4.1-10，直線 $L\perp L_1$ 於 P 點，且交 L_2 於 Q 點，截線 M 分別交 L、L_1、L_2 於 A、B、C 三點，已知同位角 $\angle 1$、$\angle 2$ 均為 $36°$，

(1) 利用「三角形的內角和為 $180°$」，求 $\angle 3$。

(2) 直線 L_1 與 L_2 是否平行？

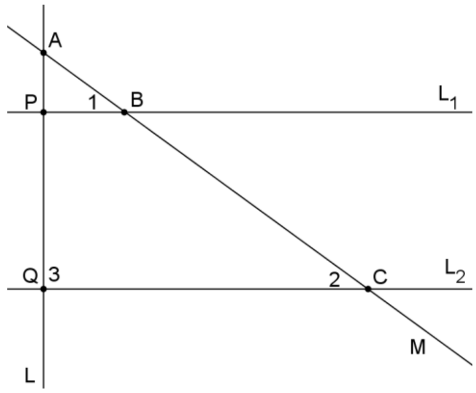


圖 4.1-10

想法：(1) 三角形三內角和 $180°$

(2) 若兩直線同時垂直另一直線，則此兩直線互相平行

解：

敘述	理由
(1) $\angle APB=90°$	已知 $L\perp L_1$
(2) △APB 中，$\angle A+\angle 1+\angle APB=180°$	三角形內角和 $180°$
(3) $\angle A=180°-(\angle 1+\angle APB)=54°$	由(2) & $\angle APB=90°$ & $\angle 1=36°$
(4) △AQC 中，$\angle 3+\angle A+\angle 2=180°$	三角形內角和 $180°$
(5) $\angle 3=180°-(\angle A+\angle 2)=90°$	由(5) & $\angle A=54°$ & $\angle 2=36°$
(6) $L\perp L_2$	由(5) $\angle 3=90°$ 已證
(7) $L_1 \parallel L_2$	已知 $L\perp L_1$ & (6) $L\perp L_2$ 垂直同一直線之兩線互相平行

例題 4.1-19：

已知： 如圖 4.1-11，$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，$\overline{EG}$平分∠BEF，$\overline{FG}$平分∠DFE，

試證： $\overline{EG} \perp \overline{FG}$。

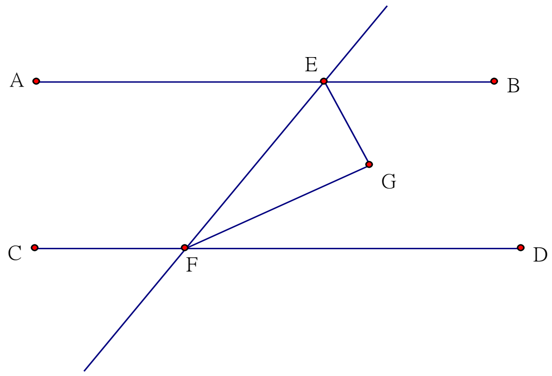


圖 4.1-11

想法：(1) 一截線與兩平行線相交，則：

1. 內錯角相等　2. 同位角相等　3. 同側內角互補

(2) 三角形三內角和為 180°

證明：

敘述	理由
(1) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	已知
(2) ∠BEF＋∠DFE＝180°	平行線的同側內角互為補角
(3) $\angle GEF = \frac{1}{2}\angle BEF$	已知$\overline{EG}$平分∠BEF
(4) $\angle GFE = \frac{1}{2}\angle DFE$	已知$\overline{FG}$平分∠DFE
(5) ∠GEF＋∠GFE $= \frac{1}{2}(\angle BEF + \angle DFE) = \frac{1}{2}(180°) = 90°$	由 (2)，(3) & (4)
(6) ∠GEF＋∠GFE＋∠EGF＝180°	三角形三內角之和等於 180°
(7) ∠EGF＝180°－(∠GEF＋∠GFE) ＝180°－90°＝90°	由(5) & (6)
(8) $\overline{EG} \perp \overline{FG}$	由(7) 已證

Q. E. D.

三角形三內角和為 180°是一個非常重要的定理，根據這個定理，我們可以證明以下的定理(A. A. S.三角形全等定理)。

定理：4.1-2　兩角一邊三角形全等定理，又稱 A.A.S.三角形全等定理

已知： 如圖 4.1-12，兩三角形△ABC 及△A’B’C’，∠A＝∠A'，∠B＝∠B'，$\overline{BC}=\overline{B'C'}$。

求證： △ABC ≅ △A'B'C'。

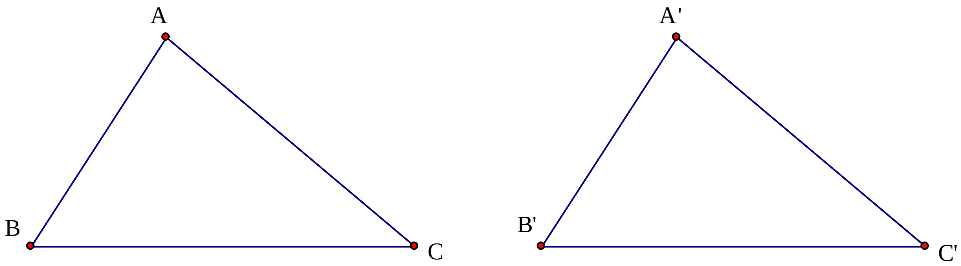


圖 4.1-12

想法：(1) 三角形三內角和 180°

(2) 已知判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理

證明：

敘述	理由
(1) ∠A＝∠A'，∠B＝∠B'	已知
(2) ∠C＋∠A＋∠B ＝180° ∠C'＋∠A'＋∠B' ＝180°	三角形內角和定理
(3) ∠C ＝180°－(∠A＋∠B) ∠C'＝180°－(∠A'＋∠B')	由(2) 等量減法公理
(4) 在△ABC 與△A'B'C'中 ∠C＝∠C' ∠B＝∠B' $\overline{BC}=\overline{B'C'}$	如圖 4.1-12 由(1) & (3) 已知 已知
(5) △ABC ≅ △A'B'C'	由 (4)　A.S.A.三角形全等定理

Q. E. D.

例題 4.1-20：

已知：如圖 4.1-13，$\overline{AF}$為∠BAC 的角平分線，且$\overline{FD}\perp\overline{AB}$，$\overline{FE}\perp\overline{AC}$

求證：△ADF ≅ △AEF

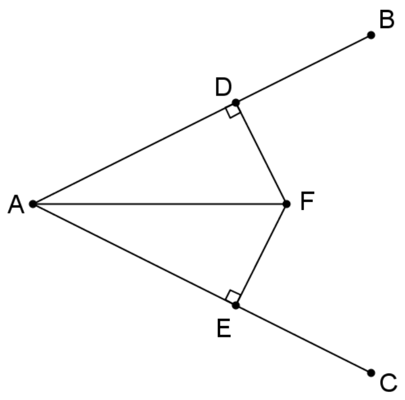


圖 4.1-13

想法：已知判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱 A.A.S.三角形全等定理

證明：

敘述	理由
(1) △ADF 與△AEF 中	如圖 4.1-13
∠ADF＝∠AEF＝90°	已知 $\overline{FD}\perp\overline{AB}$ & $\overline{FE}\perp\overline{AC}$
∠DAF＝∠EAF	已知 $\overline{AF}$為∠BAC 的角平分線
$\overline{AF}=\overline{AF}$	共同邊
(2) △ADF ≅ △AEF	由 (1) A.A.S.三角形全等定理

例題 4.1-21：

已知：如圖 4.1-14，∠B＝∠D，且 E 為$\overline{AC}$中點

求證：△ABE ≅ △CDE

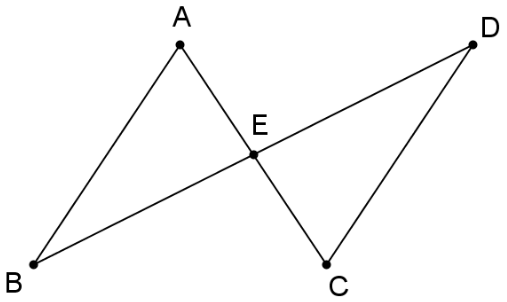


圖 4.1-14

想法：已知判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱 A.A.S.三角形全等定理

證明：

敘述	理由
(1) △ABE 與△CDE 中	如圖 4.1-14
∠B＝∠D	已知
∠AEB＝∠CED	對頂角相等
$\overline{AE}=\overline{CE}$	已知 E 為$\overline{AC}$中點
(2) △ABE ≅ △CDE	由 (1) A.A.S.三角形全等定理

例題 4.1-22：

如圖 4.1-15，△ABC 與△PQR 中，∠A＝∠P＝35°，∠B＝∠Q＝50°，$\overline{BC}$＝$\overline{QR}$＝9 公分，若$\overline{AC}$＝12 公分。求$\overline{PR}$＝？

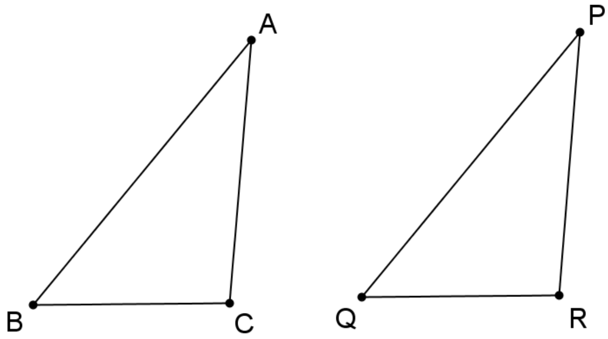


圖 4.1-15

想法：(1) 若可證得△ACE ≅ △PQR，則由全等三角形對應邊相等可求得$\overline{PR}$；

(2) 已知判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱 A.A.S.三角形全等定理

解：

敘述	理由
(1) △ABC 與△PQR 中	如圖 4.1-15
∠A＝∠P＝35°	已知
∠B＝∠Q＝50°	已知
$\overline{BC}$＝$\overline{QR}$	已知
(2) △ABC ≅ △PQR	由 (1) A.A.S.三角形全等定理
(3) $\overline{PR}$＝$\overline{AC}$＝12 公分	由(2) 對應邊相等 ＆ 已知$\overline{AC}$＝12 公分

例題 4.1-23：

已知：如圖 4.1-16，∠A＝∠E，∠B＝∠D，且$\overline{BF}=\overline{CD}$。

求證：$\overline{AC}=\overline{EF}$。

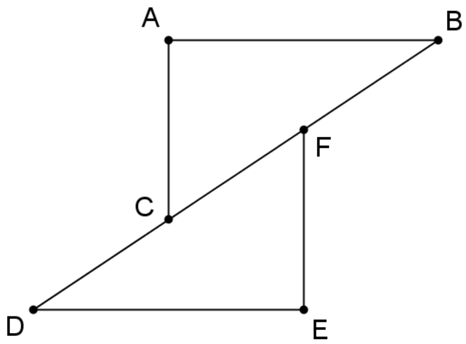


圖 4.1-16

想法：(1) 若可證得△ACE ≅ △PQR，則由全等三角形對應邊相等可得$\overline{AC}=\overline{EF}$；

(2) 已知判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱 A.A.S.三角形全等定理

證明：

敘述	理由
(1) $\overline{BF}+\overline{CF}=\overline{CD}+\overline{CF}$ (即$\overline{BC}=\overline{DF}$)	已知$\overline{BF}=\overline{CD}$ ＆ 等量加法公理 (全量等於分量之和)
(2)△ABC 與△EDF 中 ∠A＝∠E ∠B＝∠D $\overline{BC}=\overline{DF}$	如圖 4.1-16 已知 已知 由(1) $\overline{BC}=\overline{DF}$
(3) △ABC ≅ △EDF	由 (2) A.A.S.三角形全等定理
(4) $\overline{AC}=\overline{EF}$	由(3) 對應邊相等

定理：4.1-3　角平分線與兩邊距離定理。

(角平分線上任一點到角的兩邊等距離)

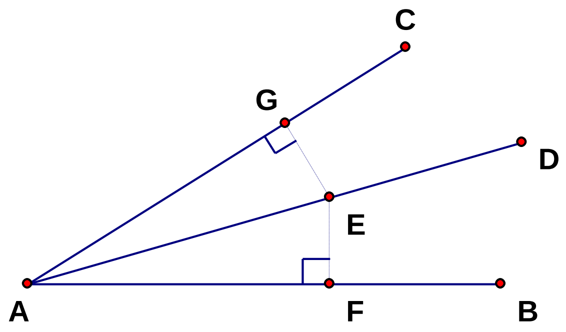


圖 4.1-17

已知：如圖 4.1-17，$\overline{AD}$為∠CAB 的角平分線。

求證： $\overline{AD}$線上一點 E 與$\overline{AB}$、$\overline{AC}$兩邊等距離。

想法：(1) 點 E 與$\overline{AB}$、$\overline{AC}$兩邊的距離就是點 E 與$\overline{AB}$、$\overline{AC}$兩邊的垂直線長度，即求證$\overline{EF}=\overline{EG}$。

(2) 利用 A.A.S 全等三角形定理及全等三角形對應邊相等來證明兩距離相等。

證明：

敘述	理由
(1) 在$\overline{AD}$線上取一點 E，過 E 點作$\overline{AB}$的垂直線交於 F 點，作$\overline{AC}$的垂直線交於 G 點	作圖
(2) 在△AEF 與△AEG 中 ∠AFE = ∠AGE = 90° ∠EAF = ∠EAG $\overline{AE}=\overline{AE}$	如圖 4.1-17 ∵$\overline{EF}$垂直$\overline{AB}$，$\overline{EG}$垂直$\overline{AC}$ 已知$\overline{AD}$為∠CAB 的角平分線 同線段相等
(3) △AEF ≅ △AEG	由 (2)　A.A.S 全等三角形定理
(4) $\overline{EF}=\overline{EG}$	由(3) 全等三角形對應邊相等
(5) 故得點 E 與$\overline{AB}$、$\overline{AC}$兩邊等距離	由(4) ＆ 點與線之距離定理

Q. E. D.

我們都知道等腰三角形底角相等。如果有一個三角形，它的兩個底角相等，這個三角形是否是等腰三角形呢？答案是對的，以下的定理就是根據定理 4.1-2(**A.A.S.三角形全等定理)**所得來的。

定理：4.1-4　等底角三角形亦為等腰三角形

已知： 如圖 4.1-18，三角形△ABC 中，∠B＝∠C

求證： $\overline{AB} = \overline{AC}$

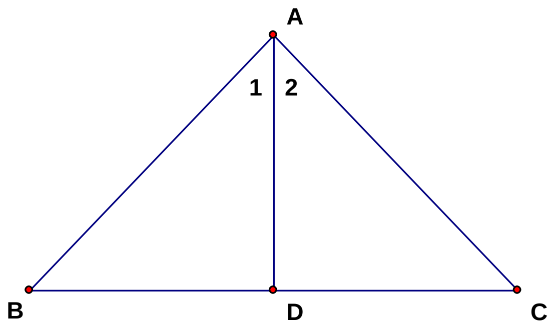


圖 4.1-18

想法：(1) 若可證得△ACE ≅ △PQR，則由全等三角形對應邊相等可得 $\overline{AB} = \overline{AC}$；

(2) 已知判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱 A.A.S.三角形全等定理

證明：

敘述	理由
(1) 如圖 4.1-18 所示，作∠A 的平分線，與$\overline{BC}$相交於 D	作圖
(2) 在△ABD 與△ACD 中	如圖 4.1-18
∠1＝∠2	角平分線定義
∠B＝∠C	已知
$\overline{AD} = \overline{AD}$	兩三角形之共用邊
(3) △ABD ≅ △ACD	由 (2)　A.A.S.三角形全等定理
(4) $\overline{AB} = \overline{AC}$	由(3) 全等三角形對應邊相等

Q. E. D.

有了三角形三內角和為 180°的定理，我們就可以很容易地證明以下的定理。

定理：4.1-5　等角三角形也是等邊三角形

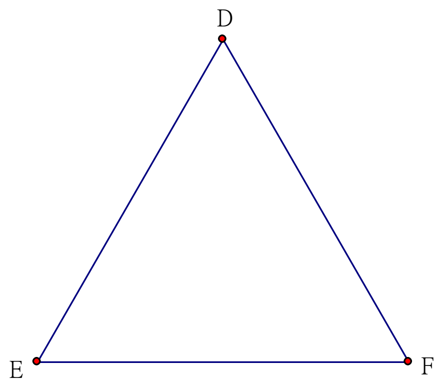


圖 4.1-19

已知：如圖 4.1-19 所示的△DEF，若∠D＝∠E＝∠F
求證：$\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{DF}$

想法：(1) 等腰三角形兩腰等長
(2) 兩底角相等為等腰三角形

證明：

敘述	理由
(1) △DEF 為等腰三角形 (以∠E 與∠F 為兩底角)	已知△DEF 中，∠E＝∠F ＆ 兩底角相等為等腰三角形
(2) $\overline{DE}=\overline{DF}$	由(1) ＆ 等腰三角形兩腰等長
(3) △DEF 為等腰三角形 (以∠E 與∠D 為兩底角)	已知△DEF 中，∠E＝∠D ＆ 兩底角相等為等腰三角形
(4) $\overline{EF}=\overline{DF}$	由(3) ＆ 等腰三角形兩腰等長
(5) 所以$\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{DF}$	由(2) ＆ (4) 遞移律

Q.E.D.

例題 4.1-24： 等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊

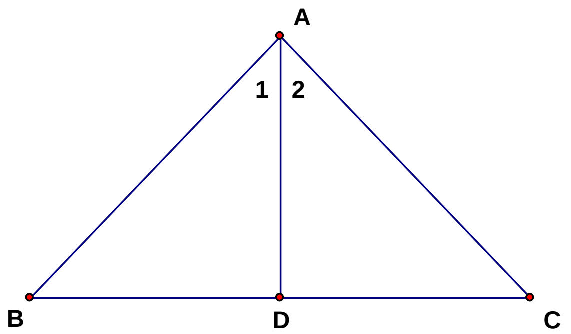


圖 4.1-20

已知：如圖 4.1-20，△ABC 為等腰三角形，∠B＝∠C，$\overline{AD}$平分∠A。
試證：$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，$\overline{BD}=\overline{CD}$。

想法：(1) 若可證得△ACE ≅ △PQR，則由全等三角形對應邊相等可得$\overline{BD}=\overline{CD}$，對應角相等可得∠ADB＝∠ADC＝90°

(2) 已知判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱 A.A.S.三角形全等定理

證明：

敘述	理由
(1) 在△ABD 與△ACD 中 ∠1＝∠2 ∠B＝∠C $\overline{AD}=\overline{AD}$	如圖 4.1-20 已知$\overline{AD}$平分∠A 已知 兩三角形的共同邊
(2) △ABD ≅ △ACD	由 (1) A.A.S.三角形全等定理
(3) $\overline{BD}=\overline{CD}$	由(2) 全等三角形對應邊相等
(4) ∠ADB＝∠ADC	由(2) 全等三角形對應角相等
(5) ∠ADB＋∠ADC＝180°	如圖 4.1-20 所示，$\overline{BC}$為一直線
(6) ∠ADB＝∠ADC＝90°	由(4) & (5)
(7) $\overline{AD}\perp\overline{BC}$	由(6) ∠ADB＝∠ADC＝90°
(8) 所以$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，$\overline{BD}=\overline{CD}$	由(7) & (3)

Q. E. D.

例題 4.1-25： 等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊

如圖 4.1-21，△ABC 為等腰三角形，∠B＝∠C，$\overline{AD}$平分∠A，若$\overline{BC}$＝10，則： ∠BDA＝？ (2) $\overline{BD}$＝？

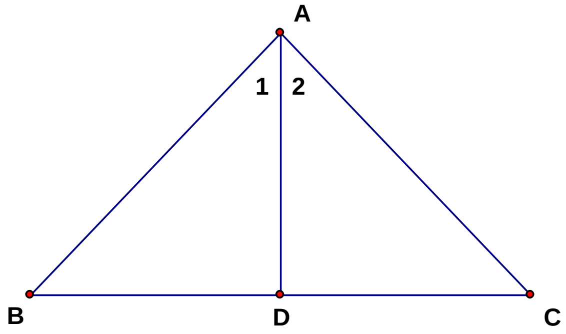


圖 4.1-21

想法：等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AD}\perp\overline{BC}$，$\overline{BD}=\overline{CD}$	已知△ABC 為等腰三角形，∠B＝∠C，$\overline{AD}$平分∠A ＆ 等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊
(2) ∠BDA＝90°	由(1) $\overline{AD}\perp\overline{BC}$
(3) $\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}$	全量等於分量之和
(4) $10=\overline{BD}+\overline{BD}$	由(3) ＆ 已知$\overline{BC}$＝10 ＆ (1) $\overline{BD}=\overline{CD}$
(5) $\overline{BD}=10\div2=5$	由(4) 解一元一次方程式

定理：4.1-6　三角形的任一外角等於兩個內對角和。

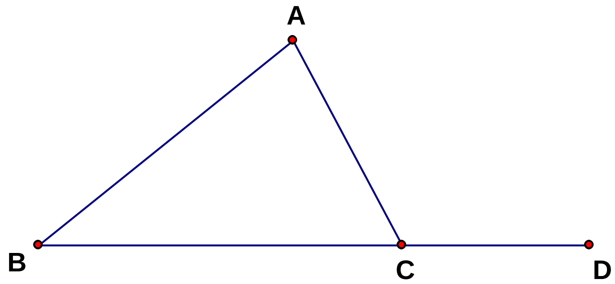


圖 4.1-22

已知： 如圖 4.1-22，△ABC 中，∠ACD 為∠ACB 的外角。

求證： ∠ACD＝∠A＋∠B。

想法： (1) 利用三角形三內角和等於 180°

(2) 三角形外角的定義。

證明：

敘述	理由
(1) ∠A＋∠B＋∠ACB＝180°	三角形三內角和定理。
(2) ∠ACD＋∠ACB＝180°	三角形外角的定義
(3) ∠ACD＋∠ACB＝∠A＋∠B＋∠ACB	由(1) & (2)
(4) ∠ACD＝∠A＋∠B	由(3) & 等量減法公理

Q.E.D.

例題 4.1-26：

[1.] 求圖 4.1-23(a)中，∠1＝______________度

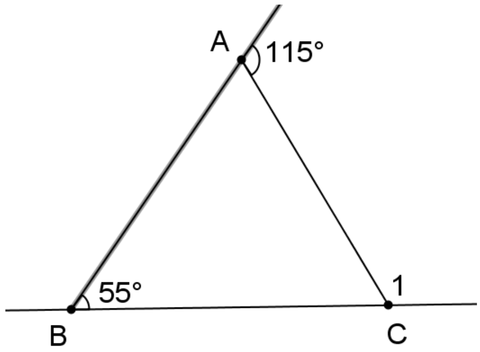


圖 4.1-23(a)

想法：(1) 三角形的任一外角等於兩個內對角和

(2) 三角形外角定義

解：

敘述	理由
(1) △ABC 中，115°＝∠BCA＋∠ABC	三角形的外角等於兩個內對角和
(2) ∠BCA＝115°－∠ABC＝60°	由(1) & ∠B＝55°
(3) ∠1＋∠BCA＝180°	三角形外角定義
(4) ∠1＝180°－∠BCA＝120°	由(3) & ∠BCA＝60°

[2.] 求圖 4.1-23(b)中，∠2＝______________度

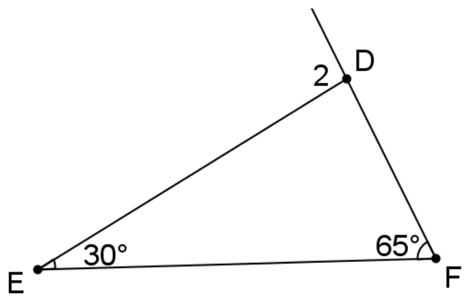


圖 4.1-23(b)

想法：三角形的任一外角等於兩個內對角和

解：

敘述	理由
(1) △DEF 中，∠2＝∠E＋∠F	三角形的外角等於兩個內對角和
(2) ∠2＝30°＋65°＝95°	由(1) & ∠E＝30° & ∠F＝65°

[3.] 圖 4.1-23(c)中，∠A＝40°，∠E＝25°，∠B＝46°，求∠3＝______________度

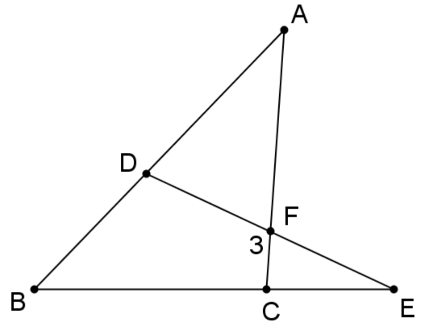


圖 4.1-23(c)

想法：三角形的任一外角等於兩個內對角和

解：

敘述	理由
(1) △ABC 中，∠FCE＝∠A＋∠B	三角形的外角等於兩個內對角和
(2) ∠FCE＝40°＋46°＝86°	由(1) & ∠A＝40° & ∠B＝46°
(3) △CEF 中，∠3＝∠FCE＋∠E	三角形的外角等於兩個內對角和
(4) ∠3＝86°＋25°＝111°	由(3) & ∠FCE＝86° & ∠E＝25°

[4.] 求圖 4.1-23(d)中，∠4＝______________度

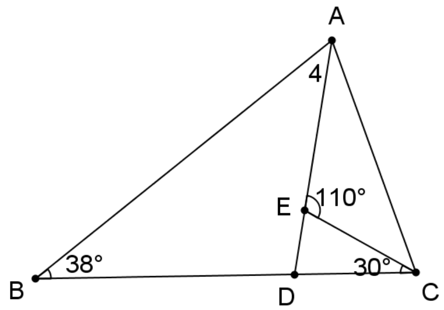


圖 4.1-23(d)

想法：(1) 三角形的任一外角等於兩個內對角和

(2) 三角形外角定義

解：

敘述	理由
(1) △CDE 中，∠CDE＋∠ECD＝∠AEC	三角形的外角等於兩個內對角和
(2) ∠CDE＝∠AEC－∠ECD＝80°	由(1) & ∠AEC＝110° & ∠ECD＝30°
(3) △ABD 中，∠CDE＝∠4＋∠B	三角形的外角等於兩個內對角和
(4) ∠4＝∠CDE－∠B＝42°	由(3) & ∠CDE＝80° & ∠B＝38°

例題 4.1-27：

如圖 4.1-24，△ABC 中，D、E 分別為$\overline{AB}$、$\overline{AC}$上的點，若∠BDC＝110°，∠AED＝80°，求：

(1)∠1＋∠3。　　(2)∠2＋∠3。　　(3)∠1－∠2。

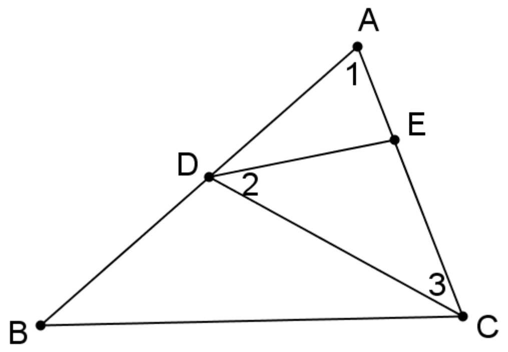


圖 4.1-24

想法：三角形的任一外角等於兩個內對角和

解：

敘述	理由
(1) △ACD 中，∠1＋∠3＝∠BDC	三角形的外角等於兩個內對角和
(2) ∠1＋∠3＝110°	由(1) & ∠BDC＝110°
(3) △DCE 中，∠2＋∠3＝∠AED	三角形的外角等於兩個內對角和
(4) ∠2＋∠3＝80°	由(3) & ∠AED＝80°
(5) ∠1－∠2＝30°	由(2)式－(4)式

例題 4.1-28：

圖 4.1-25 中，已知∠B＝40°，∠ADC＝70°，若∠2＝2∠1，則∠C＝______度。

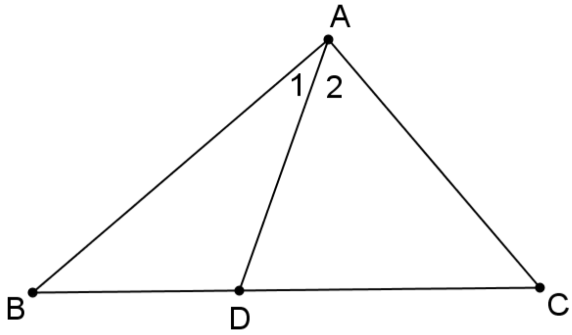


圖 4.1-25

想法：(1) 三角形三內角和等於 180°

(2) 三角形的任一外角等於兩個內對角和

解：

敘述	理由
(1) △ADB 中，∠ADC＝∠1＋∠B	三角形的外角等於兩個內對角和
(2) ∠1＝∠ADC－∠B＝30°	由(1)&∠ADC＝70°&∠B＝40°
(3) ∠2＝2∠1＝60°	已知
(4) ∠BAC＝∠1＋∠2＝90°	由(1) & (2)
(5) △ABC 中，∠B＋∠C＋∠BAC＝180°	三角形內角和定理
(6) ∠C＝180°－(∠B＋∠BAC)＝50°	由(5) &∠B＝40° &∠BAC＝90°

例題 4.1-29：

圖 4.1-26 中，已知 B、C、D、E 在同一直線上，若$\overline{AC}=\overline{BC}$，∠CAD＝50°，∠B＝30°，則：

(1) ∠ACD＝______________度。

(2) ∠ADE＝______________度。

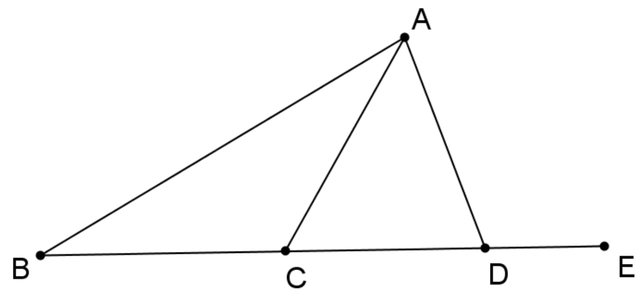


圖 4.1-26

想法：(1) 三角形三內角和等於 180°

(2) 三角形的任一外角等於兩個內對角和

解：

敘述	理由
(1) △ABC 為等腰三角形	已知$\overline{AC}=\overline{BC}$
(2) ∠BAC＝∠B＝30°	由(1) 等腰三角形兩底角相等
(3) △ABC 中， ∠ACD＝∠B＋∠BAC＝60°	如圖 4.1-26 三角形的外角等於兩個內對角和
(4) △ABD 中， ∠ADE＝∠B＋∠BAD ＝∠B＋(∠BAC＋∠CAD) ＝30°＋(30°＋50°)＝110°	如圖 4.1-26 三角形的外角等於兩個內對角和 如圖 4.1-26，∠BAD＝∠BAC＋∠CAD ∠B＝∠BAC＝30° & ∠CAD＝50°

例題 4.1-30：

圖 4.1-27 中，若∠A＝28°，∠D＝72°，∠AED＝120°，求∠B、∠C。

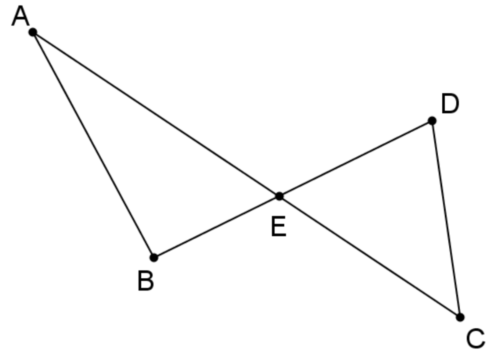


圖 4.1-27

想法：三角形的任一外角等於兩個內對角和

解：

敘述	理由
(1) △ABE 中，∠AED＝∠A＋∠B	三角形的外角等於兩個內對角和
(2) ∠B＝∠AED－∠A＝92°	由(1) & ∠AED＝120° & ∠A＝28°
(3) △CDE 中，∠AED＝∠C＋∠D	三角形的外角等於兩個內對角和
(4) ∠C＝∠AED－∠D＝48°	由(3) & ∠AED＝120° & ∠D＝72°

例題 4.1-31：

圖 4.1-28 中，已知$\overline{AB}$與$\overline{CD}$相交於 E 點，若∠A＝70°，∠B＝2x°，∠C＝(x＋10)°，∠D＝3x°，求 x。

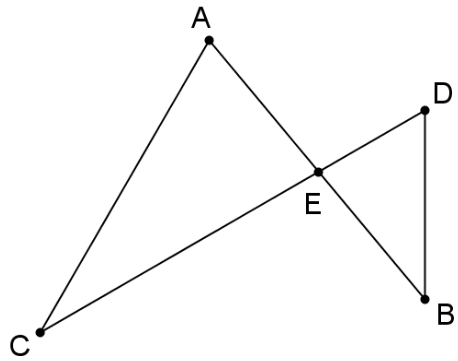


圖 4.1-28

想法：三角形的任一外角等於兩個內對角和

解：

敘述	理由
(1) △ACE 中，∠AED＝∠A＋∠C	三角形的外角等於兩個內對角和
(2) △BDE 中，∠AED＝∠B＋∠D	三角形的外角等於兩個內對角和
(3) ∠A＋∠C＝∠B＋∠D	由(1) & (2) 遞移律
(4) 70°＋(x＋10) °＝2x°＋3x°	由(3) & 已知∠B＝2x°，∠C＝(x＋10)°，∠D＝3x°，
(5) x＝20	由(4) 解一元一次方程式

例題 4.1-32：

如圖 4.1-29 所示，**求證：** ∠A＋∠B＋∠C＋∠D＋∠E＝180°

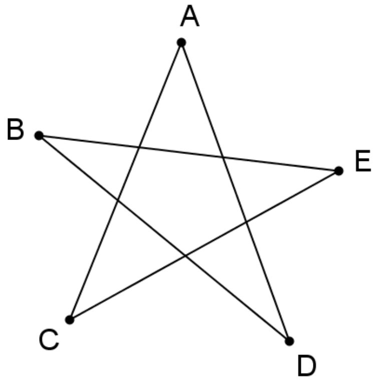


圖 4.1-29

想法：(1) 三角形三內角和等於 180°

(2) 三角形的任一外角等於兩個內對角和

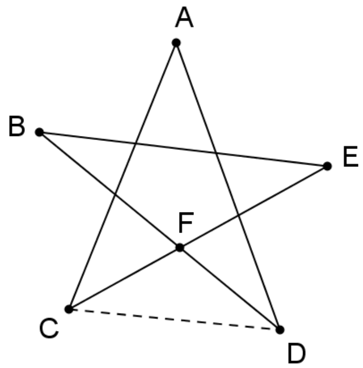


圖 4.1-29(a)

證明：

敘述	理由
(1) 連接 C 點與 D 點，如圖 4.1-29(a)所示	兩點可決定一直線
(2) △BEF 中，∠BFC＝∠B＋∠E	三角形的外角等於兩個內對角和
(3) △CDF 中，∠BFC＝∠FCD＋∠FDC	三角形的外角等於兩個內對角和
(4) ∠B＋∠E＝∠FCD＋∠FDC	由(2)＆(3) 遞移律
(5) △ACD 中， ∠A＋∠ACD＋∠ADC＝180°	如圖 4.1-29(a)所示 三角形內角和定理
(6) ∠A＋(∠ACE＋∠FCD)＋ (∠ADB＋∠FDC)＝180°	由(5)

(7) ∠A＋∠ACE＋∠ADB＋(∠FCD＋∠FDC)＝180°	由(6) & 加法交換律
(8) ∠A＋∠ACE＋∠ADB＋(∠B＋∠E)＝180°	由(7) & (4)
(9) ∠A＋∠B＋∠ACE＋∠ADB＋∠E＝180°	由(8)& 加法交換律

例題 4.1-33：

圖 4.1-30 中，已知∠B＝25°，∠C＝30°，∠D＝35°，∠E＝40°，則∠A＝__________度。

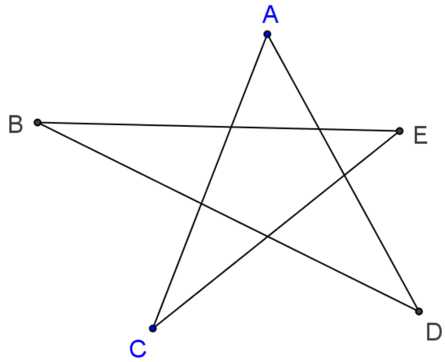


圖 4.1-30

想法：(1) 三角形三內角和等於 180°

(2) 三角形的任一外角等於兩個內對角和

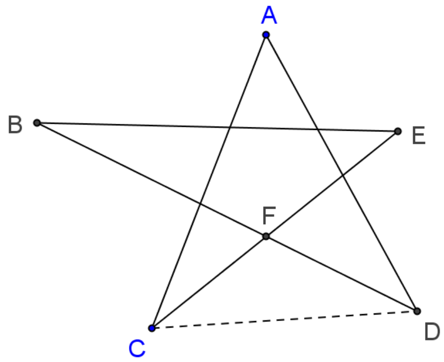


圖 4.1-30(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接 C 點與 D 點，如圖 4.1-30(a)所示	兩點可決定一直線
(2) $\triangle BEF$ 中，$\angle BFC = \angle B + \angle E$	三角形的外角等於兩個內對角和
(3) $\triangle CDF$ 中，$\angle BFC = \angle FCD + \angle FDC$	三角形的外角等於兩個內對角和
(4) $\angle B + \angle E = \angle FCD + \angle FDC$	由(2) & (3) 遞移律
(5) $\triangle ACD$ 中， $\angle A + \angle ACD + \angle ADC = 180°$	如圖 4.1-30(a)所示 三角形內角和定理
(6) $\angle A + (\angle ACE + \angle FCD) +$ $(\angle ADB + \angle FDC) = 180°$	由(5)
(7) $\angle A + \angle ACE + \angle ADB +$ $(\angle FCD + \angle FDC) = 180°$	由(6) & 加法交換律
(8) $\angle A + \angle ACE + \angle ADB + (\angle B + \angle E)$ $= 180°$	由(7) & (4)
(9) $\angle A$ $= 180° - (\angle ACE + \angle ADB + \angle B + \angle E)$ $= 50°$	由(8) & 已知

定理：4.1-7　三角形三個角的外角和等於 360°

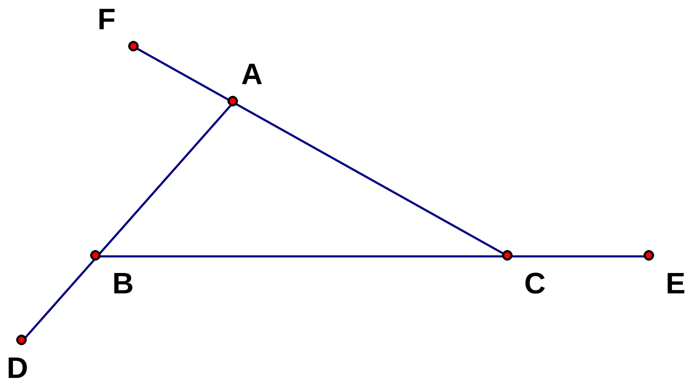


圖 4.1-31

已知： 如圖 4.1-31，△ABC 中∠BAF 為∠BAC 的外角，∠CBD 為∠ABC 的外角，∠ACE 為∠ACB 的外角。

求證：∠BAF＋∠CBD＋∠ACE＝360°。

想法：三角形的任一外角等於兩個內對角和定理及三角形內角和等於 180°定理。

證明：

敘述	理由
(1) ∠BAF＝∠ABC＋∠ACB	三角形的外角等於兩個內對角和定理
(2) ∠CBD＝∠BAC＋∠ACB	同(1)
(3) ∠ACE＝∠BAC＋∠ABC	同(1)
(4) ∠BAF＋∠CBD＋∠ACE ＝(∠ABC＋∠ACB)＋(∠BAC＋∠ACB)＋(∠BAC＋∠ABC) ＝2(∠BAC＋∠ABC＋∠ACB)＝2×180°＝360°	由 (1)+(2)+(3) 三角形內角和定理
(5) ∠BAF＋∠CBD＋∠ACE＝360°	由(4)

Q.E.D.

例題 4.1-34：

如圖 4.1-32，△ABC 中，∠1、∠2、∠3 分別為∠BAC、∠ABC、∠ACB 的外角，若∠1＝65°，∠2＝135°，求∠3。

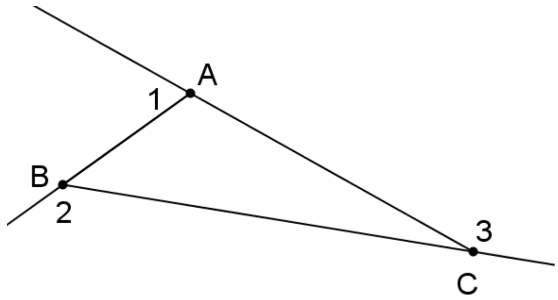


圖 4.1-32

想法：三角形三個角的外角和等於 360°

解：

敘述	理由
(1) △ABC 中，∠1＋∠2＋∠3＝360°	三角形的外角和定理
(2) ∠3＝360°－(∠1＋∠2)＝160°	由(1) ＆已知∠1＝65°，∠2＝135°

例題 4.1-35：

如圖 4.1-33，△ABC 中，∠1、∠2、∠3 分別為∠BAC、∠ABC、∠ACB 的一組外角，若∠ACB＝150°，求∠1＋∠2。

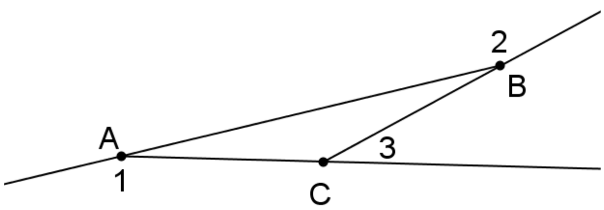


圖 4.1-33

想法：三角形三個角的外角和等於 360°

解：

敘述	理由
(1) △ABC 中，∠3＝180°－∠ACB＝30°	三角形外角定義 ＆∠ACB＝150°
(2) △ABC 中，∠1＋∠2＋∠3＝360°	三角形的外角和定理
(3) ∠1＋∠2＝360°－∠3 ＝360°－30° ＝330°	由(2) 等量減法公理 ＆ (1) ∠3＝30°

習題 4.1

習題 4.1-1：

△ABC 中，若∠A＝30°，∠B＝60°，則△ABC 為________三角形。
（填銳角、直角、鈍角）

習題 4.1-2：

△ABC 中，若∠A＝(3x－14)°，∠B＝95°，∠C＝(2x＋9)°，求∠A、∠C。

習題 4.1-3：

△ABC 中，∠C＝80°，若∠A 的度數是∠B 的 3 倍，求∠A、∠B

習題 4.1-4：

△ABC 中，若∠A＝110°，2∠B＝3∠C，求∠B、∠C。

習題 4.1-5：

已知一等腰三角形的頂角為 110 度，則底角為______________度。

習題 4.1-6：

已知一等腰三角形的底角為 70 度，則頂角為______________度。

習題 4.1-7：

已知一等腰三角形的頂角為 50 度，底角為（3x＋5）度，則 x＝_______，底角為______度。

習題 4.1-8：

一等腰三角形，已知其中一個內角為 50 度，則此三角形中大於 50 度的內角為______________度。

習題 4.1-9：

如圖 4.1-34，△ABC 中，∠ABC 與∠ACB 的角平分線交於 P 點，若∠ABC＝38°，∠ACB＝72°，求：

(1)∠1、∠2。　　　(2)∠BPC。

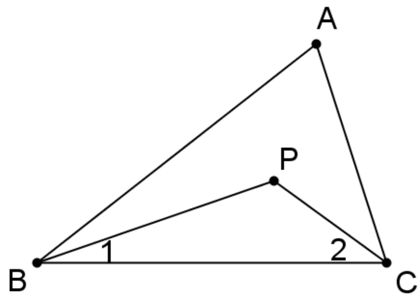


圖 4.1-34

習題 4.1-10：

如圖 4.1-35，△ABC ≅ △PQR，且 A 和 P、B 和 Q、C 和 R 是三組對應頂點。若∠B＝55°，∠C＝100°，$\overline{PR}$＝20 公分，求：

(1)∠A 及∠R。　　　(2) $\overline{AC}$。

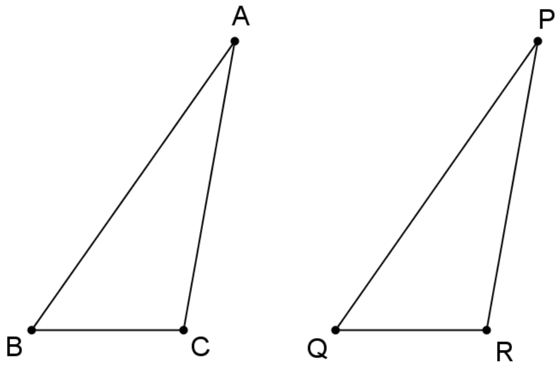


圖 4.1-35

習題 4.1-11：

如圖 4.1-36，直線 $L \perp L_1$ 於 P 點，且交 L_2 於 Q 點，截線 M 分別交 L、L_1、L_2 於 A、B、C 三點，已知同位角∠1、∠2 均為 35°，

(1) 利用「三角形的內角和為 180°」，求∠3。

(2) 直線 L_1 與 L_2 是否平行？

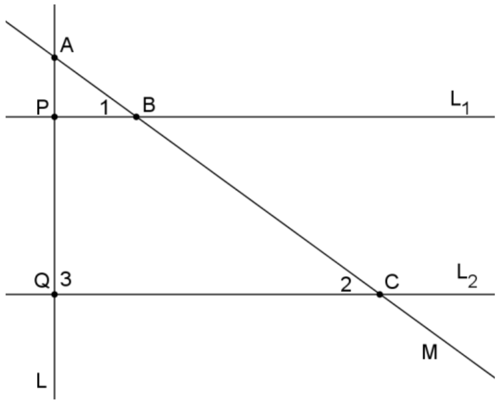


圖 4.1-36

習題 4.1-12：

已知：如圖 4.1-37，△ABC 中，∠B＝∠C，$\overline{AD}$平分∠BAC。

試證：$\overline{AD} \perp \overline{BC}$。

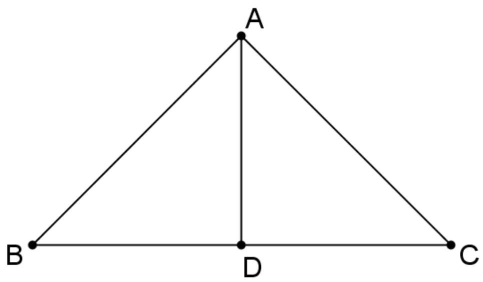


圖 4.1-37

習題 4.1-13：

已知：如圖 4.1-38，△ABC 中，∠ABC＝∠ACB，$\overline{BD}$平分∠ABC，$\overline{CE}$平分∠ACB。

試證：$\overline{BF}=\overline{CF}$。

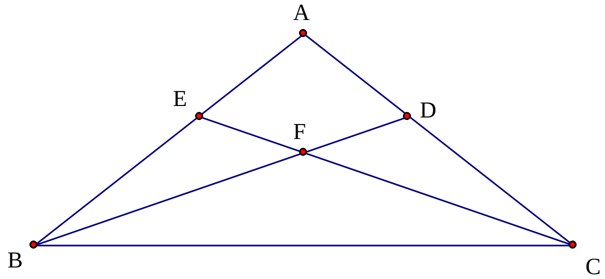


圖 4.1-38

習題 4.1-14：

已知：如圖 4.1-39，$\triangle ABC \cong \triangle EFG$，$\angle ABC = \angle EFG$，$\angle C = \angle G$，$\overline{BD}$平分$\angle ABC$，$\overline{FH}$平分$\angle EFG$。

試證：$\overline{BD} = \overline{FH}$。

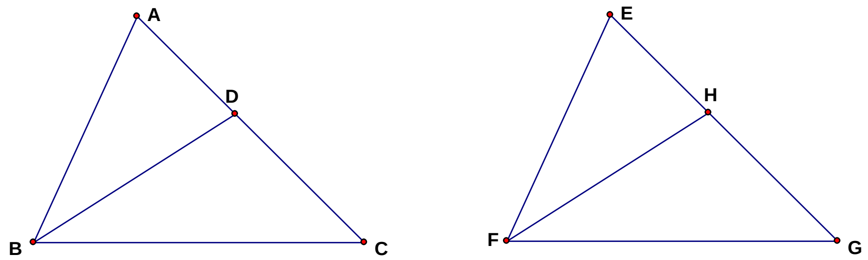


圖 4.1-39

習題 4.1-15：

已知：如圖 4.1-40，$\overline{AB} = \overline{AC}$，$\overline{AD}$平分$\angle EAC$。

試證：$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$。

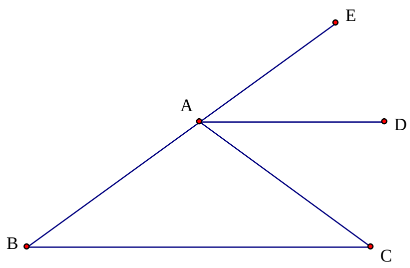


圖 4.1-40

習題 4.1-16：

已知：如圖 4.1-41，$\overline{AB} = \overline{AC}$，$\overline{BD}$平分$\angle CBE$，$\overline{CD}$平分$\angle BCF$。

試證：$\overline{BD} = \overline{CD}$。

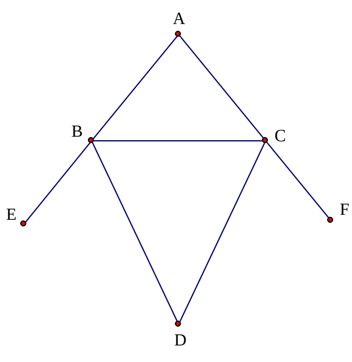


圖 4.1-41

習題 4.1-17：

如圖 4.1-42，△ABC 與△PQR 中，∠A＝∠P＝40°，∠B＝∠Q＝45°，$\overline{BC}$＝$\overline{QR}$＝8 公分，若$\overline{AC}$＝9 公分。求$\overline{PR}$＝？

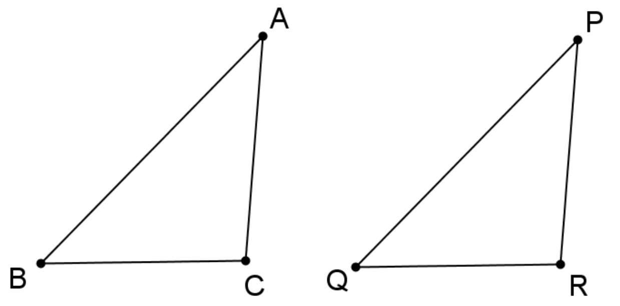


圖 4.1-42

習題 4.1-18：

已知：如圖 4.1-43，△ABC 中，∠B＝∠C，D 為$\overline{AB}$之中點，E 為$\overline{AC}$之中點，$\overline{DF}\perp\overline{BC}$，$\overline{EG}\perp\overline{BC}$。

試證：$\overline{DF}$＝$\overline{EG}$。

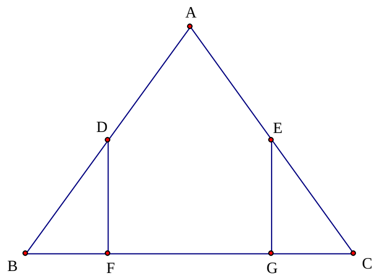


圖 4.1-43

習題 4.1-19：

已知：如圖 4.1-44，△ABC 中，$\overline{BD}$＝$\overline{CD}$，∠B＝∠C，$\overline{DE}\perp\overline{AB}$，$\overline{DF}\perp\overline{AC}$。

試證：$\overline{DE}$＝$\overline{DF}$。

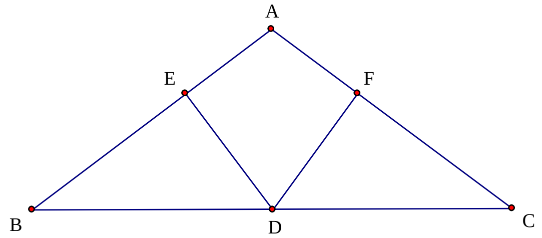


圖 4.1-44

習題 4.1-20：

如圖 4.1-45，△ABC 為等腰三角形，∠B＝∠C，$\overline{AD}$平分∠A，若$\overline{BC}$＝18，則：(1)∠BDA＝？　　　(2) $\overline{BD}$＝？

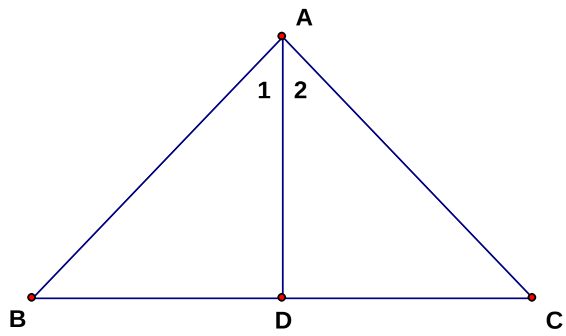


圖 4.1-45

習題 4.1-21：

如圖 4.1-46，△ABC 中，∠B＝50°，∠C＝60°，若$\overline{AD}$為∠BAC 的角平分線，求∠1。

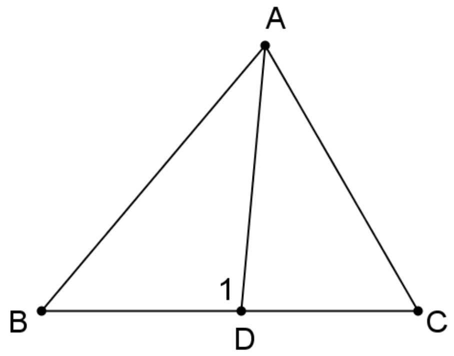


圖 4.1-46

習題 4.1-22：

如圖 4.1-47，已知∠B＝36°，∠ACD＝100°，∠D＝27°，則∠1＝_____度，∠2＝______度。

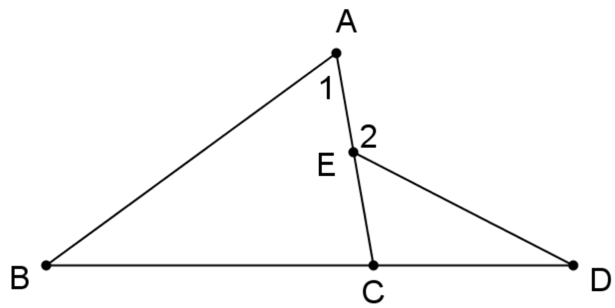


圖 4.1-47

習題 4.1-23：

如圖 4.1-48，已知∠A＝55°，∠ABD＝42°，∠DCE＝38°，則∠1＝______度，∠2＝______度。

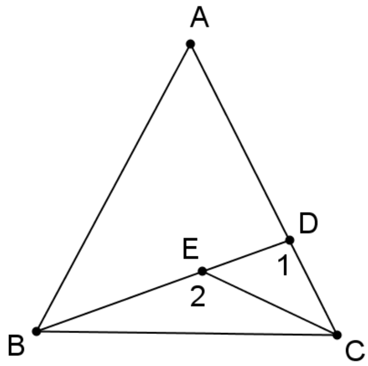


圖 4.1-48

習題 4.1-24：

如圖 4.1-49，已知$\overline{AD}$、$\overline{BC}$交於 E 點，∠A＝40°，∠B＝45°，∠D＝55°，則∠C＝_____度。

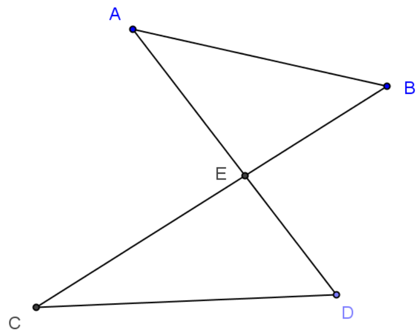


圖 4.1-49

習題 4.1-25：

如圖 4.1-50，已知$\overline{AB}$與$\overline{CD}$相交於 E 點，若∠A＝70°，∠B＝4x°，∠C＝(x＋10)°，∠D＝2x°，求 x。

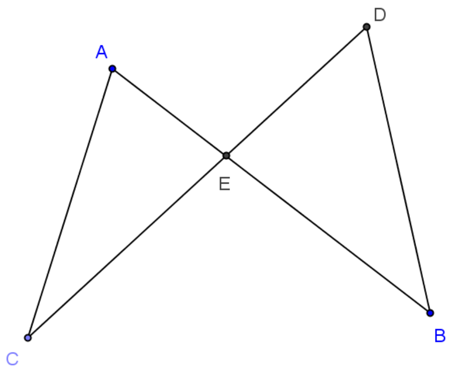


圖 4.1-50

習題 4.1-26：

如圖 4.1-51，已知∠B＝24°，∠C＝32°，∠D＝36°，∠E＝38°，則∠A＝_度。

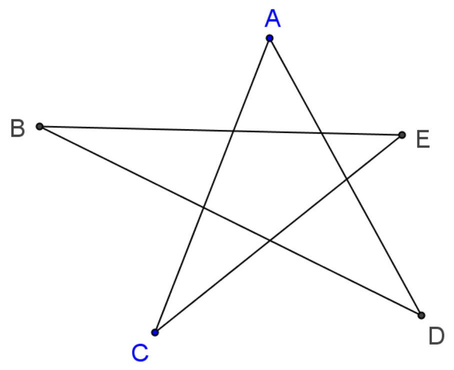


圖 4.1-51

習題 4.1-27：

如圖 4.1-52，△ABC 中，∠1、∠2、∠3 分別為∠BAC、∠ABC、∠ACB 的外角，若∠1＝68°，∠2＝134°，求∠3。

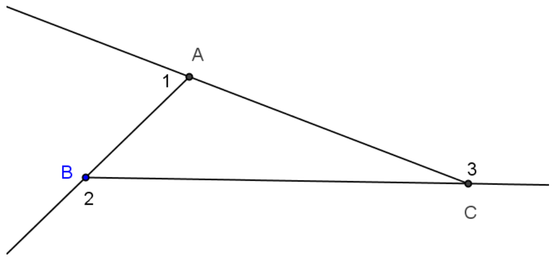


圖 4.1-52

習題 4.1-28：

如圖 4.1-53，△ABC 中，∠1、∠2、∠3 分別為∠BAC、∠ABC、∠ACB 的一組外角，若∠ACB＝160°，求∠1＋∠2。

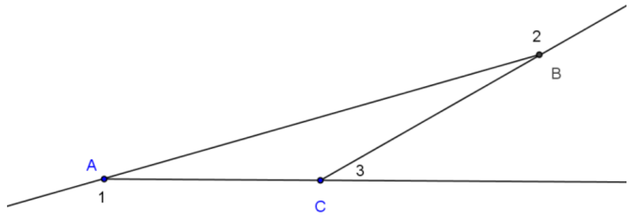


圖 4.1-53

4.2 節　有關直角三角形的定理

圖 4.2-1 中的三角形為一直角三角形，其中直角($\angle$B)之對邊($\overline{AC}$)稱為斜邊，直角($\angle$B)之鄰邊($\overline{AB}$及$\overline{BC}$)稱為股。

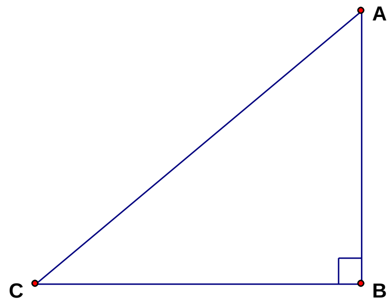


圖 4.2-1

因為直角三角形中有一內角為直角，因此直角三角形有其特別的性質。

定理：4.2-1　R. H. S.直角三角形全等定理

如一直角三角形的斜邊及直角的一股等於另一直角三角形的斜邊及直角的一股，則此二直角三角形全等。

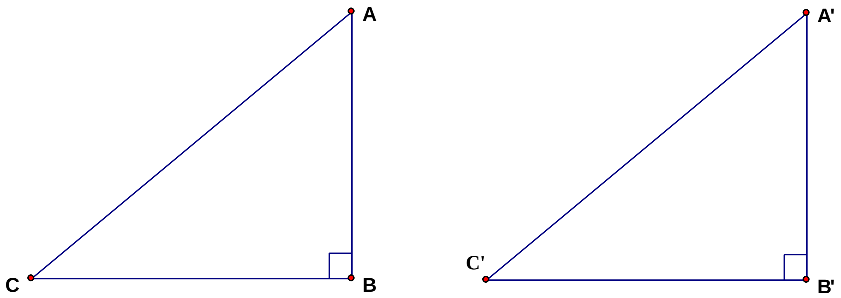


圖 4.2-2

已知：$\triangle$ABC 與$\triangle$A'B'C'中，若$\angle$B＝$\angle$B'＝90°，$\overline{AB}=\overline{A'B'}$，$\overline{AC}=\overline{A'C'}$，如圖 4.2-2 所示。

求證：$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$。

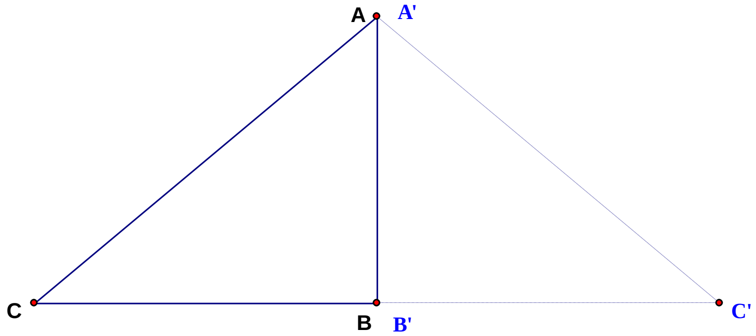


圖 4.2-2(a)

想法： 已知判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱 A.A.S.三角形全等定理

證明：

敘述	理由
(1) 將△A'B'C'移至△ABC，使 A 點與 A'重合，B 點與 B'重合，令 C 和 C' 不在$\overline{AB}$的同一側，如圖 4.2-3(a)。	已知$\overline{AB}=\overline{A'B'}$
(2) ∠CBA＝90°	已知
(3) ∠C'BA＝90°	已知
(4) ∠CBC'＝∠CBA＋∠C'BA＝180°	由(2) & (3)
(5) $\overline{CBC'}$為一直線	由(4) 平角定義
(6) △ACC'為等腰三角形，$\overline{AC}=\overline{A'C'}$	已知$\overline{AC}=\overline{A'C'}$ 及(1) 之證明 A 點與 A'重合
(7) ∠C＝∠C'	由(6) 等腰三角形兩底角相等
(8) △ABC 及△A'B'C'中，$\overline{AC}=\overline{A'C'}$，∠C＝∠C'，∠ABC＝∠A'B'C'	已知及(7) 之證明
(9) △ABC ≅ △A'B'C'	由(8) 三角形 A. A. S.全等定理

Q. E. D.

例題 4.2-1：

如圖 4.2-3，直角△ABC 與直角△PQR 是否全等？為什麼？

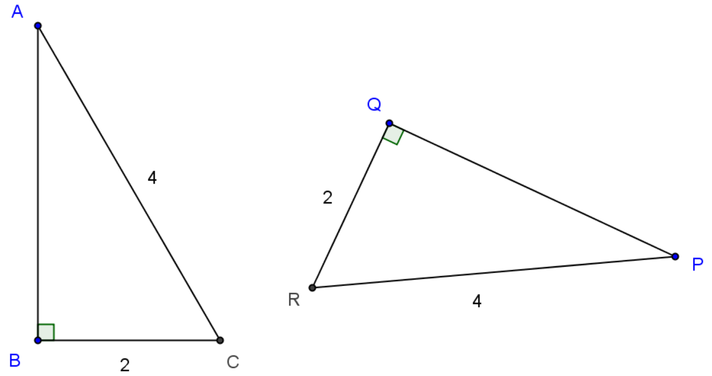


圖 4.2-3

想法：判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱 A.A.S.三角形全等定理
5. 直角三角形斜邊及一股全等定理，又稱 R. H. S.三角形全等定理

解：

敘述	理由
(1) △ABC 與△PQR 中	如圖 4.2-3
$\angle B = \angle Q = 90°$	如圖 4.2-3
$\overline{BC} = \overline{QR}$	如圖 4.2-3
$\overline{AC} = \overline{PR}$	如圖 4.2-3
(2) △ABC ≅ △PQR	由(1)　R. H. S.三角形全等定理

例題 4.2-2：

已知：如圖 4.2-4，$\overline{BD} \perp \overline{AC}$，$\overline{CE} \perp \overline{AB}$，$\overline{CD} = \overline{BE}$

求證：$\triangle BCD \cong \triangle CBE$

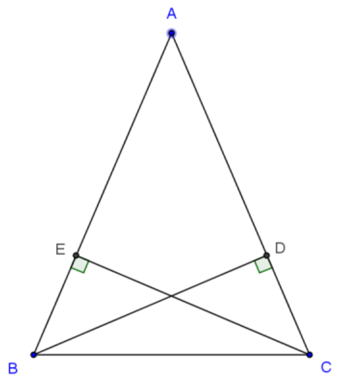


圖 4.2-4

想法：判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱 A.A.S.三角形全等定理
5. 直角三角形斜邊及一股全等定理，又稱 R. H. S.三角形全等定理

證明：

敘述	理由
(1) $\triangle BCD$ 與 $\triangle CBE$ 中	如圖 4.2-4
$\angle CDB = \angle BEC = 90°$	已知 $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ & $\overline{CE} \perp \overline{AB}$
$\overline{CD} = \overline{BE}$	已知
$\overline{BC} = \overline{CB}$	共同邊
(2) $\triangle BCD \cong \triangle CBE$	由(1) R. H. S.三角形全等定理

例題 4.2-3：

已知：如圖 4.2-5，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，且$\overline{AB}=\overline{AC}$。

求證：$\overline{AD}$平分∠BAC。

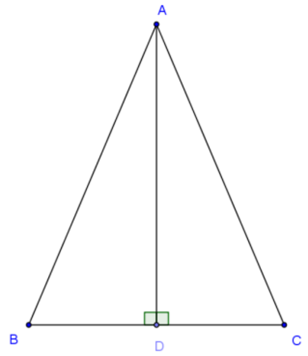


圖 4.2-5

想法：判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱 A.A.S.三角形全等定理
5. 直角三角形斜邊及一股全等定理，又稱 R. H. S.三角形全等定理

證明：

敘述	理由
(1) △ABD 與△ACD 中 ∠ADB＝∠ADC＝90° $\overline{AB}=\overline{AC}$ $\overline{AD}=\overline{AD}$	如圖 4.2-5 已知$\overline{AD}\perp\overline{BC}$ 已知 共同邊
(2) △ABD ≅ △ACD	由(1)　R. H. S.三角形全等定理
(3) ∠BAD＝∠CAD	由(2) 對應角相等
(4) $\overline{AD}$平分∠BAC	由(3) ∠BAD＝∠CAD ＆ 角平分線定義

例題 4.2-4：

已知：如圖 4.2-6，△ABC 為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$，∠D＝∠E＝90°，$\overline{AD}=\overline{AE}$

求證：△ADB ≅ △AEC

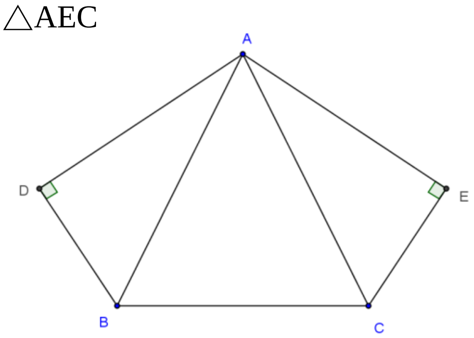


圖 4.2-6

想法：判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱 A.A.S.三角形全等定理
5. 直角三角形斜邊及一股全等定理，又稱 R. H. S.三角形全等定理

證明：

敘述	理由
(1) △ADB 與△AEC 中	如圖 4.2-6
∠D＝∠E＝90°	已知
$\overline{AD}=\overline{AE}$	已知
$\overline{AB}=\overline{AC}$	已知
(2) △ADB ≅ △AEC	由(1)　R. H. S.三角形全等定理

例題 4.2-5：

已知：如圖 4.2-7，$\overline{AB}\perp\overline{PQ}$，$\overline{AC}\perp\overline{QR}$，若$\overline{AB}=\overline{AC}$，

求證：A 點在∠BQC 的角平分線上

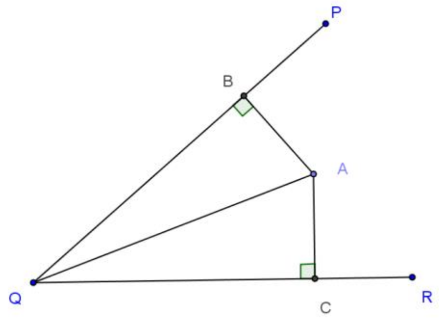


圖 4.2-7

想法：判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱 A.A.S.三角形全等定理
5. 直角三角形斜邊及一股全等定理，又稱 R. H. S.三角形全等定理

證明：

敘述	理由
(1) △AQB 與△AQC 中 ∠ABQ＝∠ACQ＝90° $\overline{AB}=\overline{AC}$ $\overline{AQ}=\overline{AQ}$	如圖(五) 已知$\overline{AB}\perp\overline{PQ}$ & $\overline{AC}\perp\overline{QR}$ 已知 共同邊
(2) △AQB ≅ △AQC	由(1) R. H. S.三角形全等定理
(3) ∠BAQ＝∠CAQ	由(2) 兩全等三角形對應角相等
(4) 所以 A 點在∠BQC 的角平分線上	由(3) & 角平分線定義

直角三角形有另一非常有趣的特性，如以下的定理所述。

定理：4.2-2　若直角三角形的某一內角為 30°，則其對邊為斜邊的一半。

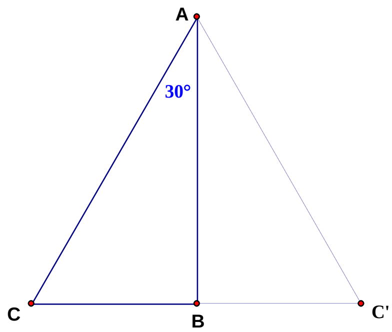


圖 4.2-8

已知： △ABC 為直角三角形，∠ABC＝90°，∠BAC＝30°。

求證： $\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AC}$

想法：若兩個直角三角形合成一個等邊三角形，則 30°角對邊為斜邊的一半

證明：

敘述	理由
(1) 延長$\overline{CB}$至 C'，使$\overline{BC'}=\overline{BC}$，如圖 4.2-8 所示。	延長線作圖
(2) ∠ABC＋∠ABC'＝180°	$\overline{CBC'}$為一直線及平角定義
(3) ∠ABC＝90°	已知
(4) ∠ABC'＝90°	由 (2) & (3)
(5) 在△ABC 與△ABC'中 $\overline{AB}=\overline{AB}$ $\overline{BC}=\overline{BC'}$ ∠ABC＝∠ABC'＝90°	如圖 4.2-8 $\overline{AB}$為△ABC 及△ABC'的共用邊 由(1) 作圖 由 (2) & (3)
(6) △ABC ≅ △ABC'	由 (5)　S.A.S.三角形全等定理
(7) ∠C'AB＝∠CAB＝30°	由(6) 全等三角形對應角相等 & 已知∠BAC＝30°
(8) ∠CAC'＝∠CAB＋∠C'AB ＝30°＋30° ＝60°	全量等於分量之和 & (7) ∠C'AB＝∠CAB＝30°

(9) $\angle C = 180° - 90° - 30° = 60°$	三角形 ABC 三內角和為 180°
(10) $\angle C' = 180° - 90° - 30° = 60°$	三角形 ABC'三內角和為 180°
(11) △ACC'為一等角三角形。	由 (8) & (9)＆(10) △ACC'三內角皆為 60°
(12) △ACC'為一等邊三角形	等角三角形亦為等邊三角形
(13) $\overline{AC} = \overline{CC'} = 2\overline{BC}$	由(14)等邊三角形三邊等長 ＆ (1) $\overline{BC'} = \overline{BC}$
(14) $\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{AC}$	由(13) $\overline{AC} = 2\overline{BC}$ ＆ 等量除法公理

Q. E. D.

例題 4.2-6：

如圖 4.2-9，直角三角形 ABC 中，∠ABC＝90°，∠BAC＝30°，若$\overline{AC} = 10$，則$\overline{BC} =$？

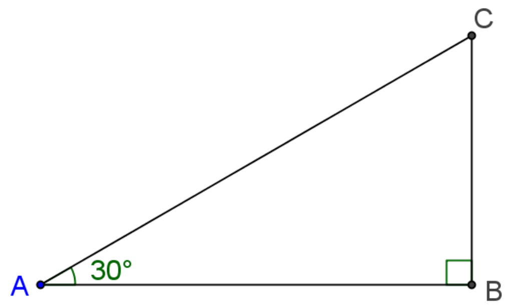


圖 4.2-9

想法：利用定理：4.2-2　若直角三角形的某一內角為 30°，則其對邊為斜邊的一半。

解：

敘述	理由
(1) $\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2} \times 10 = 5$	已知直角三角形 ABC 中，∠ABC＝90°，∠BAC＝30° ＆ 定理：4.2-2　若直角三角形的某一內角為 30°，則其對邊為斜邊的一半 ＆ 已知$\overline{AC} = 10$

定理：4.2-3　若三角形兩頂點至其對邊的距離相等，則此三角形為等腰三角形。

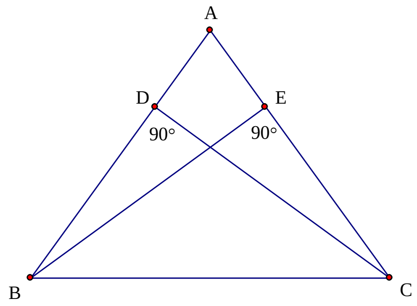


圖 4.2-10

已知： 圖 4.2-10 的三角形△ABC 中，$\overline{CD}\perp\overline{AB}$，$\overline{BE}\perp\overline{AC}$，$\overline{CD}=\overline{BE}$，

求證： △ABC 為等腰三角形。

想法：利用全等三角形對應角相等及等腰三角形性質來證明。

證明：

敘述	理由
(1) △BDC 和△CEB 中，	如圖 4.2-10 所示
$\overline{BC}=\overline{CB}$	兩三角形共用邊
$\overline{CD}=\overline{BE}$	已知
∠BDC＝∠CEB＝90°	已知$\overline{CD}\perp\overline{AB}$ & $\overline{BE}\perp\overline{AC}$
(2) △BDC ≅ △CEB	由(1)　R.H.S.三角形全等定理
(3) ∠ABC＝∠ACB	由(2) 全等三角形對應角相等
(4) △ABC 為等腰三角形	由(3) & 等底角三角形也是等腰三角形

Q. E. D.

例題 4.2-7：

如圖 4.2-11，△ABC 中，已知$\overline{CD}\perp\overline{AB}$，$\overline{BE}\perp\overline{AC}$且$\overline{CD}=\overline{BE}$，若∠ABC＝50°，$\overline{AC}$＝10，則：

(1) ∠ACB＝？　　　　(2) $\overline{AB}$＝？

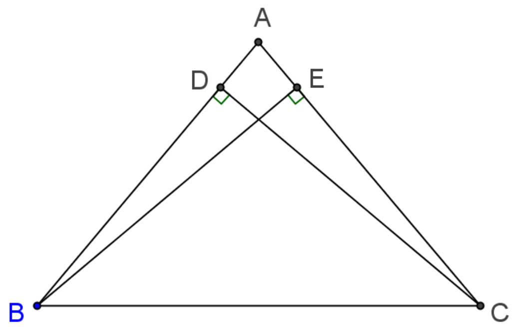


圖 4.2-11

想法：(1) 定理：4.2-3　若三角形兩頂點至其對邊的距離相等，則此三角形為等腰三角形。

(2) 等腰三角形的性質：兩腰等長且兩底角相等

解：

敘述	理由
(1) △ABC 為等腰三角形	已知$\overline{CD}\perp\overline{AB}$，$\overline{BE}\perp\overline{AC}$且$\overline{CD}=\overline{BE}$ & 定理：4.2-3 若三角形兩頂點至其對邊的距離相等，則此三角形為等腰三角形
(2) ∠ACB＝∠ABC＝50°	由(1) 等腰三角形兩底角相等 & 已知∠ABC＝50°
(3) $\overline{AB}=\overline{AC}$＝10	由(1) 等腰三角形兩腰等長 & 已知$\overline{AC}$＝10

定理：4.2-4 等腰三角形兩腰上的高與底邊所造成的三角形亦為等腰三角形。

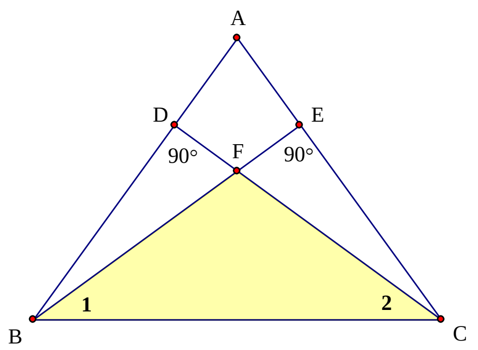


圖 4.2-12

已知：圖 4.2-12 中，△ABC 為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BE}\perp\overline{AC}$，$\overline{CD}\perp\overline{AB}$

求證： △BFC 為等腰三角形。

證明：

敘述	理由
(1) △ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$	已知
(2) ∠ABC＝∠ACB	由(1) & 等腰三角形兩底角相等
(3) △BDC 及△CEB 中	如圖 4.2-12 所示
$\overline{BC}=\overline{CB}$	兩三角形共用邊
∠BDC＝∠CEB＝90°	已知 $\overline{BE}\perp\overline{AC}$ & $\overline{CD}\perp\overline{AB}$
∠ABC＝∠ACB	由(2) 已證
(4) △BDC ≅ △CEB	由(3) A.A.S.三角形全等定理
(5) △CEB 中，	如圖 4.2-12 所示
∠1＝180°－∠CEB－∠ECB	三角形三內角之和等於 180°
＝180°－90°－∠ECB	將∠CEB＝90°代入
＝90°－∠ACB	如圖 4.2-12，∠ECB＝∠ACB
(6) △CDB 中，	如圖 4.2-12 所示
∠2＝180°－∠CDB－∠DBC	三角形三內角之和等於 180°
＝180°－90°－∠DBC	將∠CDB＝90°代入
＝90°－∠ABC	如圖 4.2-12，∠ABC＝∠DBC
＝90°－∠ACB	由(2) ∠ACB＝∠ABC 已證
(7) ∠1＝∠2	由(5)&(6) 遞移律
(8) △BFC 為等腰三角形	三角形兩底角相等為等腰三角形

Q. E. D.

例題 4.2-8：

如圖 4.2-13，已知△ABC 為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$，若$\overline{BE}\perp\overline{AC}$，$\overline{CD}\perp\overline{AB}$，且∠FBC＝40°，$\overline{FC}=10$，則：

(1) ∠FCB＝？　　　　(2) $\overline{FB}$＝？

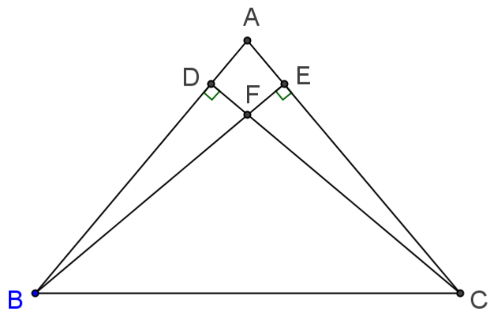


圖 4.2-13

想法：(1) 定理：4.2-4 等腰三角形兩腰上的高與底邊所造成的三角形亦為等腰三角形。

(2) 等腰三角形的性質：兩腰等長且兩底角相等

解：

敘述	理由
(1) △FBC 為等腰三角形	已知△ABC 為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$，若$\overline{BE}\perp\overline{AC}$，$\overline{CD}\perp\overline{AB}$ ＆ 定理：4.2-4 等腰三角形兩腰上的高與底邊所造成的三角形亦為等腰三角形
(2) ∠FCB＝∠FBC＝40°	由(1) 等腰三角形兩底角相等 ＆ 已知∠FBC＝40°
(3) $\overline{FB}=\overline{FC}=10$	由(1) 等腰三角形兩腰等長 ＆ 已知$\overline{FC}=10$

習題 4.2

習題 4.2-1

已知： 如圖 4.2-14，△ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，$\overline{BE}\perp\overline{AC}$，

試證： $\angle 1=\dfrac{1}{2}\angle \mathrm{BAC}$。

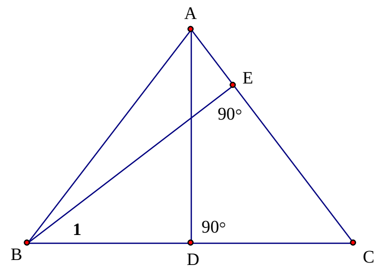


圖 4.2-14

習題 4.2-2

已知： 如圖 4.2-15，△ABC 中，$\overline{BD}=\overline{CD}$，$\overline{DE}\perp\overline{AB}$，$\overline{DF}\perp\overline{AC}$，$\overline{DE}=\overline{DF}$，

試證： $\overline{AB}=\overline{AC}$。

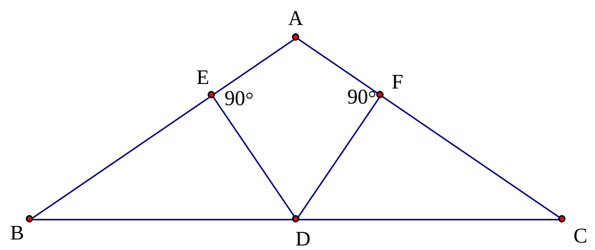


圖 4.2-15

習題 4.2-3

已知： 如圖 4.2-16，$\overline{AB} \perp \overline{BC}$，$\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{AC}$，

試證： $\angle CAB = 30°$。

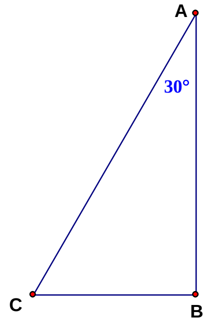


圖 4.2-16

習題 4.2-4

如圖 4.2-17，直角三角形 ABC 中，$\angle ABC = 90°$，$\angle BAC = 30°$，若$\overline{AC} = 20$，則$\overline{BC} = ?$

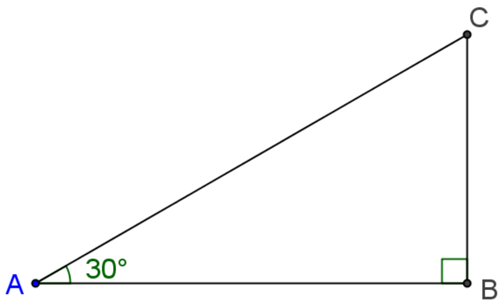


圖 4.2-17

習題 4.2-5

已知： 如圖 4.2-18，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB} = \overline{AC}$，$\overline{AD} = \overline{DB}$，$\overline{AE} = \overline{EC}$，

試證： $\overline{BF} = \overline{CF}$。

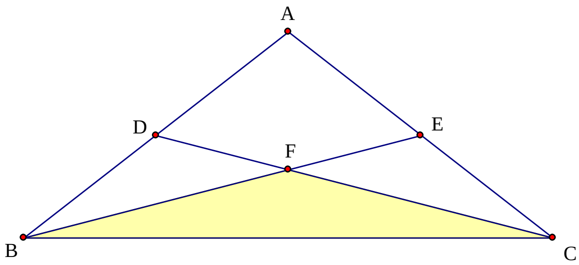


圖 4.2-18

習題 4.2-6

如圖 4.2-19，△ABC 中，已知$\overline{CD}\perp\overline{AB}$，$\overline{BE}\perp\overline{AC}$且$\overline{CD}=\overline{BE}$，若∠ABC＝55°，$\overline{AC}$＝15，則：

(1) ∠ACB＝？　　(2) $\overline{AB}$＝？

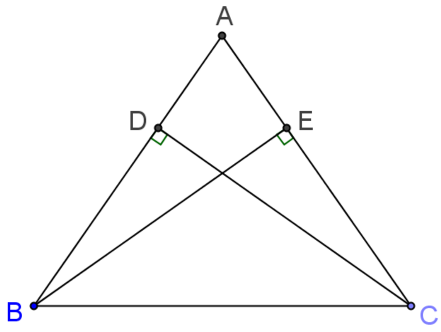


圖 4.2-19

習題 4.2-7

如圖 4.2-20，已知△ABC 為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$，若$\overline{BE}\perp\overline{AC}$，$\overline{CD}\perp\overline{AB}$，且∠FBC＝35°，$\overline{FC}$＝12，則：

(1) ∠FCB＝？　　(2) $\overline{FB}$＝？

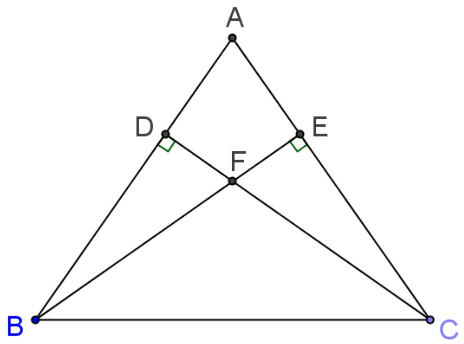


圖 4.2-20

4.3 節　三角形的心

本節介紹三角形的內心、外心、重心、垂心及傍心等五心與其性質。

定理：4.3-1 三角形的內角平分線相交定理

三角形三內角的平分線相交於一點，此點與三邊的距離相等。
(三角形三內角平分線的交點到三角形的三邊等距離)

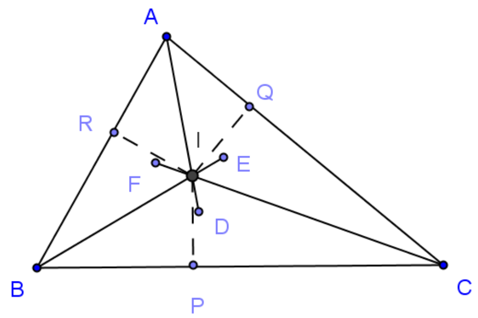


圖 4.3-1

已知： 圖 4.3-1 中，△ABC 中，$\overline{AD}$為∠BAC 的角平分線，$\overline{BE}$為∠ABC 的角平分線，$\overline{CF}$為∠ACB 的角平分線。

求證：(1) $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$三線相交於一點 I。

(2) I 點與三角形的三邊等距離。

想法： 先證明兩個角的平分線會相交，再證明此交點會在第三個角平分線上，故三個角的平分線交於一點。

證明：

敘述	理由
(1) $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BAC < \angle BAC$	$\overline{AD}$為∠BAC 的平分線，∠BAD 為∠BAC 的一半。
(2) $\angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABC < \angle ABC$	$\overline{BE}$為∠ABC 的平分線，∠ABE 為∠ABC 的一半。
(3) $\angle BAD + \angle ABE < \angle BAC + \angle ABC$	由(1)&(2)
(4) $\angle BAD + \angle ABE < \angle BAC + \angle ABC + \angle BCA$	由(3)
(5) $\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = 180°$	三角形的內角和為 180°

(6) ∠BAD＋∠ABE < 180°	由(4) & (5)
(7) $\overline{AD}$與$\overline{BE}$不平行必相交於一點，設此點為 I。	同側內角和不等於 180°的兩線不平行，不平行的兩線必有交點。
(8) 作$\overline{IP}\perp\overline{BC}$於 P，$\overline{IQ}\perp\overline{AC}$於 Q，$\overline{IR}\perp\overline{AB}$於 R。	過一點必有一垂直線
(9) $\overline{IP}=\overline{IQ}=\overline{IR}$	角平分線上的任一點與兩邊距離相等。
(10) 點 I 在∠BCA 的分角線$\overline{CF}$上。	與二邊相等的點必在角平分線上
(11) 故三個內角平分線$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$相交於點 I。	由(7) & (10)
(12) 點 I 與$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$三邊等距離	由(9) 已證

Q. E. D.

定義：4.3-1 三角形的內心

三角形三內角的平分線交點為三角形的內心。

因內心與三邊的距離相等，$\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}$，故以 I 點為圓心，$\overline{ID}$為半徑作一圓，此圓必在△ABC 內部，且分別與三邊相交於 D、E、F 三點。

所以我們說內心(I)即是三角形的內切圓的圓心，如圖 4.3-2。

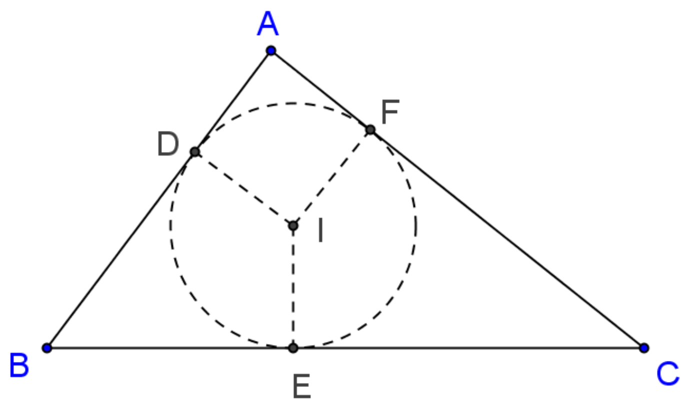


圖 4.3-2 三角形的內心

例題 4.3-1

如圖 4.3-3，I 點為△ABC 的內心，若 I 點到$\overline{AB}$的距離為 8，則：

(1) I 點到$\overline{BC}$的距離為何？

(2) I 點到$\overline{AC}$的距離為何？

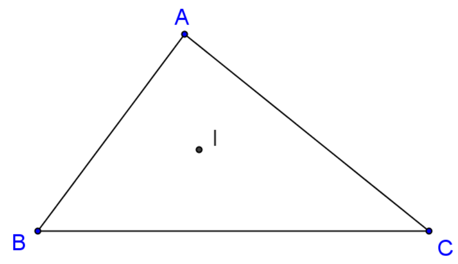


圖 4.3-3

想法：三角形的內心到此三角形的三邊等距離

解：

敘述	理由
(1) I 點到$\overline{BC}$的距離＝I 點到$\overline{AC}$的距離＝I 點到$\overline{AB}$的距離＝8	已知 I 點為△ABC 的內心 & 三角形的內心到此三角形的三邊等距離 & 已知 I 點到$\overline{AB}$的距離為 8

例題 4.3-2

已知：如圖 4.3-4，I 點為△ABC 的內心

求證：$\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC$

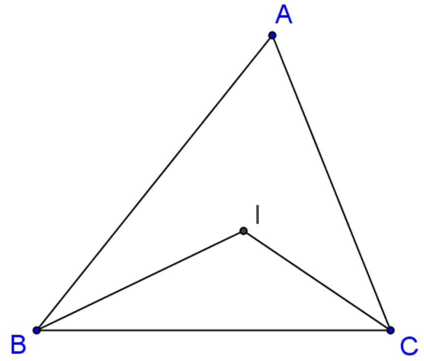


圖 4.3-4

想法：(1) 三角形的內心為三角形三內角的平分線交點

(2) 三角形三內角和為 180°

(3) 三角形任一外角等於其兩內對角的和

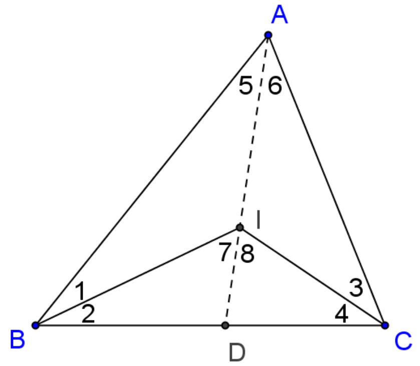


圖 4.3-4(a)

證明：

敘述	理由
(1) 作$\overrightarrow{AI}$交$\overline{BC}$於 D 點，如圖 4.3-4(a)所示	作圖
(2) $\overline{AD}$為$\angle BAC$ 的角平分線，$\angle 5 = \angle 6 = \frac{1}{2}\angle BAC$	已知 I 點為△ABC 的內心 ＆ 三角形的內心為三角形三內角的平分線交點
(3) $\overline{BI}$為$\angle ABC$ 的角平分線，$\angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2}\angle ABC$	已知 I 點為△ABC 的內心 ＆ 三角形的內心為三角形三內角的平分線交點

(4) $\overline{CI}$為$\angle BCA$ 的角平分線，$\angle 3 = \angle 4 = \frac{1}{2}\angle BCA$	已知 I 點為$\triangle ABC$ 的內心 & 三角形的內心為三角形三內角的平分線交點
(5) $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = 180°$	如圖 4.3-4(a)所示 三角形三內角和為 180°
(6) $\frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BCA + \angle BAC) = \frac{1}{2} \times 180°$	由(5) 等量乘法公理(等式兩邊同$\times\frac{1}{2}$)
(7) $\frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle BCA + \frac{1}{2}\angle BAC = 90°$	由(6) 分配律展開
(8) $\angle 1 + \angle 3 + \angle 5 = 90°$	由(7) & (3) $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle ABC$、(4) $\angle 3 = \frac{1}{2}\angle BCA$、(2) $\angle 5 = \frac{1}{2}\angle BAC$
(9) $\triangle ABI$ 中，$\angle 7 = \angle 1 + \angle 5$	三角形任一外角等於其兩內對角的和
(10) $\triangle ACI$ 中，$\angle 8 = \angle 3 + \angle 6$	三角形任一外角等於其兩內對角的和
(11) $\angle BIC = \angle 7 + \angle 8$ $= (\angle 1 + \angle 5) + (\angle 3 + \angle 6)$ $= (\angle 1 + \angle 3 + \angle 5) + \angle 6$ $= 90° + \frac{1}{2}\angle BAC$	如圖 4.3-4(a) & 全量等於分量之和 &(9) $\angle 7 = \angle 1 + \angle 5$、(10) $\angle 8 = \angle 3 + \angle 6$ 加法交換律 & 結合律 由(8) $\angle 1 + \angle 3 + \angle 5 = 90°$ 已證 & (2) $\angle 6 = \frac{1}{2}\angle BAC$
(12) 所以$\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC$	由(11)

Q. E. D.

例題 4.3-3

如圖 4.3-5，已知 I 點為△ABC 的內心、$\angle A=60°$，則$\angle BIC=$？

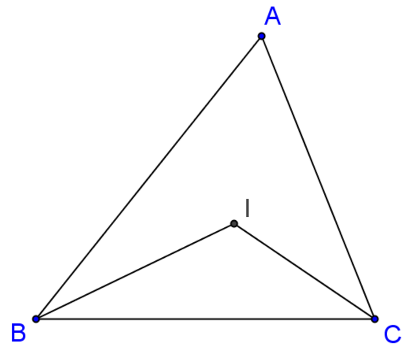


圖 4.3-5

想法：利用例題 4.3-2 結論：若 I 點為△ABC 的內心，則$\angle BIC=90°+\frac{1}{2}\angle BAC$

解：

敘述	理由
(1) $\angle BIC=90°+\frac{1}{2}\angle BAC$ $=90°+\frac{1}{2}\times60°$ $=90°+30°$ $=120°$	已知 I 點為△ABC 的內心、$\angle A=60°$ & 例題 4.3-2 結論：若 I 點為△ABC 的內心，則$\angle BIC=90°+\frac{1}{2}\angle BAC$

定理：4.3-2 三角形三邊的垂直平分線相交定理

三角形三邊的垂直平分線相交於一點，此點與三頂點的距離相等。

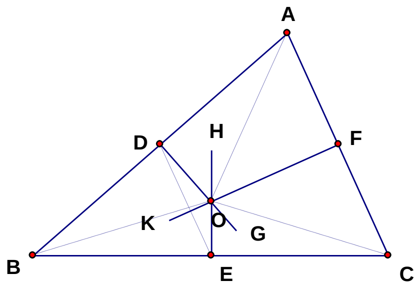


圖 4.3-6

已知： 圖 4.3-6 中，△ABC 中，$\overline{DG}$為$\overline{AB}$的垂直平分線，$\overline{EH}$為$\overline{BC}$的垂直平分線，$\overline{FK}$為$\overline{AC}$的垂直平分線。

求證： (1) $\overline{DG}$、$\overline{EH}$、$\overline{FK}$三線相交於一點 O。

(2) O 點與三角形的三頂點等距離。

想法： 先證明兩個垂直平分線會相交，再證明此交點會在第三個邊的垂直平分線上，故三個邊的垂直平分線交於一點。

證明：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{DE}$	兩點可作一直線
(2) $\angle$GDE < $\angle$BDG＝90° $\angle$HED < $\angle$BEH＝90°	全量大於其部分量，且已知$\overline{DG}\perp\overline{AB}$，$\overline{EH}\perp\overline{BC}$
(3) $\angle$GDE＋$\angle$HED < 180°	由(2)及不等量相加公理
(4) $\overline{AB}$的垂直平分線$\overline{DG}$與$\overline{BC}$的垂直平分線$\overline{EH}$不平行，$\overline{DG}$、$\overline{EH}$二線必相交於一點，設此點為 O 點	同側內角和不等於 180°的兩線不平行，不平行的兩線必有交點。
(5) 連接$\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$	兩點可作一直線
(6) $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$	一線段的垂直平分線上的任一點與兩端點等距離。
(7) 點 O 在$\overline{AC}$的垂直平分線上。	由(6)及與線段兩端等距離的點必在垂直平分線上。
(8) 故三角形三邊的垂直平分線$\overline{DG}$、$\overline{EH}$、$\overline{FK}$三線相交於 O 點	由(4) & (7)
(9) 點 O 與三頂點距離相等	由(6)

定義：4.3-2 三角形的外心

三角形三邊的垂直平分線交點為三角形的外心。

因外心到三頂點的距離相等，$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$，故以 O 點為圓心，$\overline{OA}$為半徑作一圓，此圓必通過△ABC 的三個頂點。

所以我們說外心(O)即是三角形的外接圓的圓心，如圖 4.3-7。

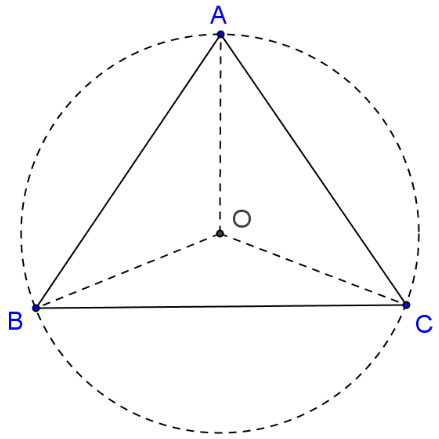


圖 4.3-7 三角形的外心

例題 4.3-4

如圖 4.3-8，O 點為△ABC 的外心，若$\overline{AO}=12$，則：

(1) $\overline{BO}=$？ (2) $\overline{CO}=$？

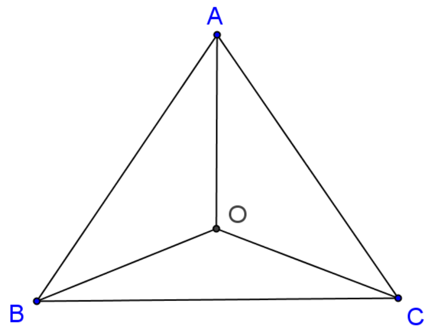


圖 4.3-8

想法：三角形的外心到此三角形的三頂點等距離

解：

敘述	理由
(1) $\overline{BO}=\overline{CO}=\overline{AO}=12$	已知 O 點為△ABC 的外心 & 三角形的外心到此三角形的三頂點等距離 & 已知$\overline{AO}=12$

例題 4.3-5

試證直角三角形斜邊中點為此三角形的外心。

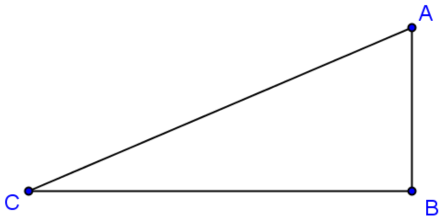


圖 4.3-9

已知：如圖 4.3-9，△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90°

求證：$\overline{AC}$中點為△ABC 的外心

想法：三角形外心的定義

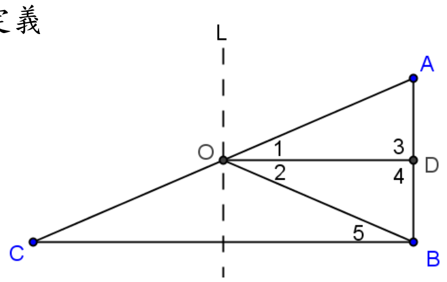


圖 4.3-9(a)

證明：

敘述	理由
(1) 作$\overline{BC}$中垂線 L 交$\overline{AC}$於 O 點， 作$\overline{OB}$，則$\overline{OC}=\overline{OB}$， 作$\overline{OD}\perp\overline{AB}$，則∠3＝∠4＝90° 如圖 4.3-9(a)所示	作圖 & 不平行的兩直線相交於一點 中垂線上任一點到線段兩端等距離
(2) △OBC 為等腰三角形	由(1) $\overline{OC}=\overline{OB}$ & 兩腰等長為等腰三角形
(3) ∠C＝∠5	由(2) & 等腰三角形兩底角相等
(4) $\overline{BC}\perp\overline{AB}$	已知∠ABC＝90°
(5) $\overline{OD} \parallel \overline{BC}$	由(1) $\overline{OD}\perp\overline{AB}$ & (2) $\overline{BC}\perp\overline{AB}$ 垂直同一線段的兩直線互相垂直定理
(6) ∠C＝∠1	由(5) & 兩線平行則同位角相等
(7) ∠5＝∠2	由(5) & 兩線平行則內錯角相等
(8) ∠1＝∠2	由(3) & (6) & (7) 遞移律
(9) 在△OAD 與△OBD 中 ∠1＝∠2 $\overline{OD}=\overline{OD}$ ∠3＝∠4	如圖 4.3-9(a)所示 由(8) 已證 共同邊 由(1)

(10) $\triangle OAD \cong \triangle OBD$	由(9) ＆ 根據 A.S.A.三角形全等定理
(11) $\overline{OA}=\overline{OB}$ ＆ $\overline{DA}=\overline{DB}$	由(10) ＆ 對應邊相等
(12) $\overline{OD}$為$\overline{AB}$的中垂線	由(1) $\overline{OD}\perp\overline{AB}$ ＆ (11) $\overline{DA}=\overline{DB}$
(13) O 點為△ABC 的外心	由(1) 作$\overline{BC}$中垂線 L 交$\overline{AC}$於 O 點 ＆ (12) ＆ 三角形兩邊中垂線的交點為外心
(14) $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$	由(11) $\overline{OA}=\overline{OB}$ ＆ (1) $\overline{OC}=\overline{OB}$ 遞移律
(15) O 點為$\overline{AC}$的中點	由(14) $\overline{OA}=\overline{OC}$
(16) $\overline{AC}$中點 O 為△ABC 的外心	由(13) ＆ (15)

例題 4.3-5 的結論也可寫成：直角三角形斜邊中點到三頂點等距離。

(例題 4.3-5 證明步驟(14) $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$)

例題 4.3-6

如圖 4.3-10，△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90°，若 O 點為$\overline{AC}$的中點且$\overline{AC}$＝10，則$\overline{OC}$＝？

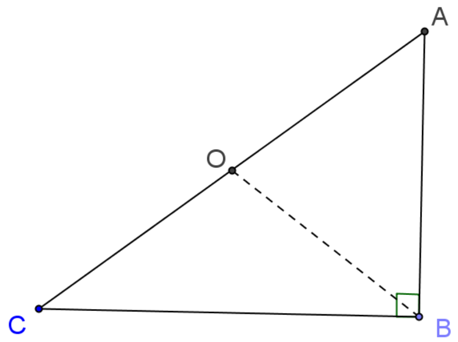


圖 4.3-10

想法：(1) 直角三角形斜邊中點為此三角形的外心

(2) 三角形的外心到此三角形的三頂點等距離

解：

敘述	理由
(1) $\overline{OA}=\overline{OC}$	已知 O 點為$\overline{AC}$的中點
(2) $\overline{AC}=\overline{OA}+\overline{OC}$	全量等於分量之和
(3) $10=\overline{OA}+\overline{OA}$	由(2) & (1) & 已知$\overline{AC}$＝10
(4) $\overline{OA}=10\div 2=5$	由(3) 解一元一次方程式
(5) O 點為△ABC 的外心	已知△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90°，若 O 點為$\overline{AC}$的中點 & 直角三角形斜邊中點為此三角形的外心
(6) $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$	由(5) & 三角形的外心到此三角形的三頂點等距離
(7) 所以$\overline{OC}$＝5	由(6) & (4) 遞移律

定理：4.3-3 三角形的三中線相交定理

三角形三中線相交於一點，此點與三頂點的距離分別等於各中線的三分之二。(此題的證明過程會運用到第六章部份定理)

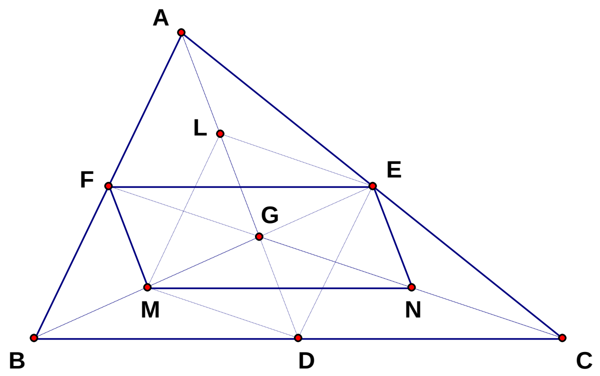


圖 4.3-11

已知： 圖 4.3-11 中，△ABC 中，D、E、F 分別為$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$邊的中點，$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$為△ABC 的三中線。

求證： (1) $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$三中線相交於一點 G。

(2) $\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AD}$，$\overline{BG}=\frac{2}{3}\overline{BE}$，$\overline{CG}=\frac{2}{3}\overline{CF}$

想法： 先證明兩個中線會相交，交點在中線的三分之二處，再證明與第三中線的交點也是在中線的三分之二處，三中線都是相交於中線的三分之二處。

證明：

敘述	理由
(1) ∠EBC＋∠FCB＜ ∠ABC＋∠ACB ＜∠ABC＋∠ACB＋∠BAC ＝180°	不等量相加公理及三角形內角和等於 180°
(2) $\overline{BE}$與$\overline{CF}$相交於一點，設此點為 G 點。	同側內角不互補則不平行，不平行的兩線必有一交點。
(3) 取$\overline{BG}$的中點 M，$\overline{CG}$的中點 N，連接$\overline{MN}$。	一線段只有一中點，二點可作一線段。
(4) $\overline{MN}\parallel\overline{BC}$且$\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$	三角形的兩邊中點的連線平行第三邊且等於第三邊的一半。(第六章會詳細證明)
(5) 連接$\overline{EF}$，$\overline{EF}\parallel\overline{BC}$且$\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{BC}$	同(4)
(6) $\overline{EF}=\overline{MN}$且$\overline{EF}\parallel\overline{MN}$	由(4) & (5)

(7) EFMN 為平行四邊形	由(6) & 一組對邊平行且相等為平行四邊形判別定理(第六章會詳細證明)
(8) $\overline{MG}=\overline{EG}$，$\overline{NG}=\overline{GF}$	平行四邊形的對角線互相平分(第六章會詳細證明)
(9) $\overline{BM}=\overline{MG}$，$\overline{CN}=\overline{NG}$	由(3)，M、N 為線段中點的性質
(10) $\overline{BE}=\overline{BM}+\overline{MG}+\overline{EG}=3\overline{BM}$	由(8) & (9) 全量等於其部分量的和
(11) $\overline{BG}=\overline{BM}+\overline{MG}=\frac{2}{3}\overline{BE}$	由(10)及代換
(12) 同理可證 $\overline{CG}=\frac{2}{3}\overline{CF}$	由(8)~(11)
(13) 同理亦可證 EDML 為平行四邊形	由(3)~(7)
(14) $\overline{AD}$與$\overline{BE}$也相交在 $\overline{BG}=\frac{2}{3}\overline{BE}$ 的 G 點，且 $\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AD}$。	由(8)~(12)
(15) 故得 AD、BE、CF 相交於一點，且 $\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AD}$，$\overline{BG}=\frac{2}{3}\overline{BE}$，$\overline{CG}=\frac{2}{3}\overline{CF}$	由(2) & (11) & (12) & (14)

Q. E. D.

定義：4.3-3 三角形的重心

三角形三中線交點(G)為三角形的重心，如圖 4.3-12。

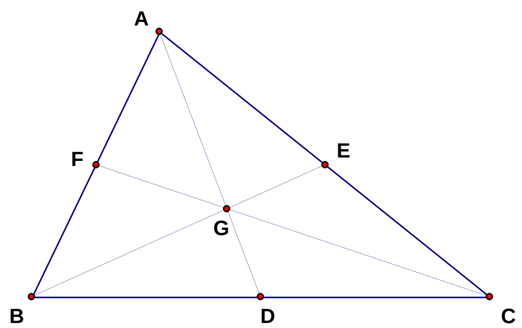


圖 4.3-12 三角形的重心

例題 4.3-7

如圖 4.3-13，△ABC 的三中線$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$相交於 G 點，若$\overline{AG}=3$，$\overline{BG}=2$，$\overline{CG}=4$，求各中線的長。

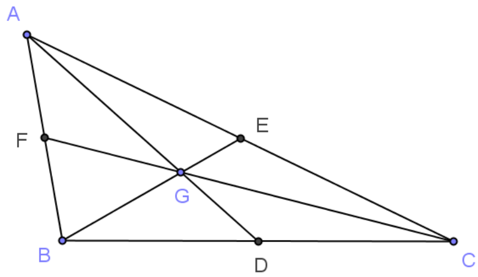


圖 4.3-13

想法：(1) 三角形三中線的交點為三角形的重心

(2) 三角形重心與頂點的距離為中線的三分之二

解：

敘述	理由
(1) G 點△ABC 的重心	已知△ABC 的三中線$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$相交於 G 點 & 三角形三中線的交點為三角形的重心
(2) $\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AD}$	由(1)& 重心與頂點的距離($\overline{AG}$)為中線($\overline{AD}$)的三分之二
$3=\frac{2}{3}\overline{AD}$	將已知$\overline{AG}=3$ 代入
$\overline{AD}=3\div\frac{2}{3}=\frac{9}{2}$	等式兩邊同除以$\frac{3}{2}$
(3) $\overline{BG}=\frac{2}{3}\overline{BE}$	由(1)& 重心與頂點的距離($\overline{BG}$)為中線($\overline{BE}$)的三分之二
$2=\frac{2}{3}\overline{BE}$	將已知$\overline{BG}=2$ 代入
$\overline{BE}=2\div\frac{2}{3}=3$	等式兩邊同除以$\frac{3}{2}$
(4) $\overline{CG}=\frac{2}{3}\overline{CF}$	由(1)& 重心與頂點的距離($\overline{CG}$)為中線($\overline{CF}$)的三分之二
$4=\frac{2}{3}\overline{CF}$	將已知$\overline{CG}=4$ 代入
$\overline{CF}=4\div\frac{2}{3}=6$	等式兩邊同除以$\frac{3}{2}$
(5) 所以 $\overline{AD}=\frac{9}{2}$、$\overline{BE}=3$、$\overline{CF}=6$。	由(2) & (3) & (4)

定理：4.3-4 三角形的三高線相交定理

三角形三個高線相交於一點。

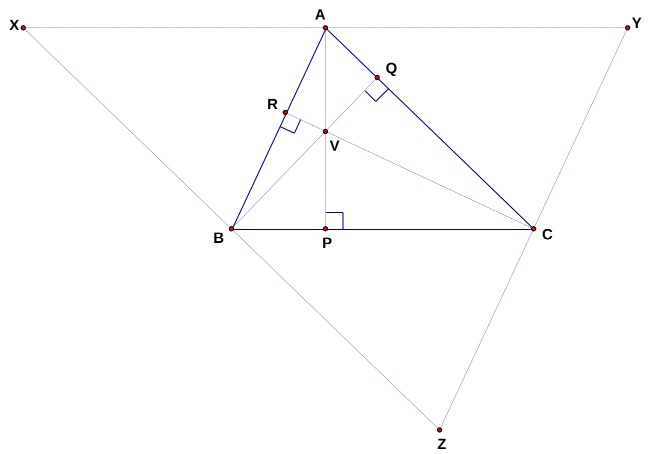


圖 4.3-14

已知：圖 4.3-14 中，△ABC 中，$\overline{AP} \perp \overline{BC}$，$\overline{BQ} \perp \overline{AC}$，$\overline{CR} \perp \overline{AB}$

求證：$\overline{AP}$、$\overline{BQ}$、$\overline{CR}$三線交於一點。

證明：

敘述	理由
(1) 過 A 點作平行$\overline{BC}$的直線，過 B 點作平行$\overline{AC}$的直線，過 C 點作平$\overline{AB}$的直線，三線的交點分別為 X、Y、Z 三點。 ∴ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$，$\overline{XZ} \parallel \overline{AC}$，$\overline{YZ} \parallel \overline{AB}$	過線外一點可作一平行線。
(2) ABCY 為平行四邊形	$\overline{AB} \parallel \overline{YC}$，$\overline{AY} \parallel \overline{BC}$及平行四邊形的定義。(第六章會定義)
(3) XBCA 為平行四邊形	$\overline{XB} \parallel \overline{AC}$，$\overline{XA} \parallel \overline{BC}$及平行四邊形的定義。(第六章會定義)
(4) $\overline{XA}=\overline{BC}=\overline{AY}$	平行四邊形的對邊等長(第六章會詳細證明)
(5) A 為$\overline{XY}$的中點	由(4) $\overline{XA}=\overline{AY}$
(6) $\overline{AP} \perp \overline{XY}$	由已知$\overline{AP} \perp \overline{BC}$及(1)，兩平行線垂直同一直線
(7) $\overline{AP}$為$\overline{XY}$的垂直平分線	由(5) & (6)

(8) 同理可證，$\overline{BQ}$為$\overline{XZ}$的垂直平分線，$\overline{CR}$為$\overline{YZ}$的垂直平分線	由(2)~(7)
(9) $\overline{AP}$、$\overline{BQ}$、$\overline{CR}$三線交於一點	△XYZ 中$\overline{AP}$、$\overline{BQ}$、$\overline{CR}$為三邊的垂直平分線及三角形三邊的垂直平分線相交於一點**(定理 4.3-2)**

Q. E. D.

定義：4.3-4 三角形的垂心

三角形三高線交點(V)為三角形的垂心，如圖 4.3-15。

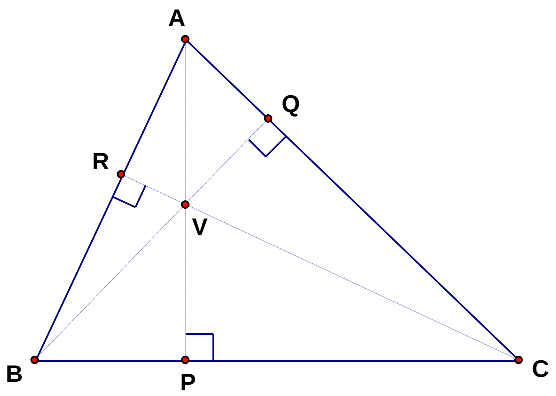


圖 4.3-15 三角形的垂心

定理：4.3-5 三角形的內角平分線與二外角平分線相交定理

三角形任一角的內角平分線與另二外角的平分線相交於一點(如圖 4.3-16)，此點與三邊的距離相等。

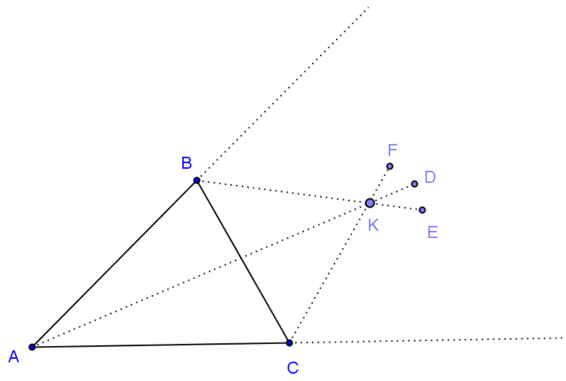


圖 4.3-16

已知：△ABC 中，$\overline{AD}$平分∠BAC，$\overline{BE}$與$\overline{CF}$分別為∠ABC 與∠ACB 的外角平分線。

求證：(1) $\overline{AD}$、$\overline{BE}$與$\overline{CF}$相交於一點 K。

(2) K 點與三邊的距離相等。

想法： 先證明∠ABC 與∠ACB 的外角平分線$\overline{BE}$與$\overline{CF}$會相交於一點，再證明此交點會在∠BAC 的角平分線上。

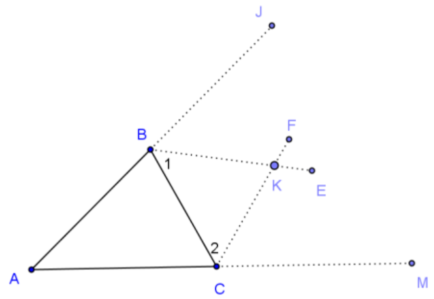


圖 4.3-16(a)

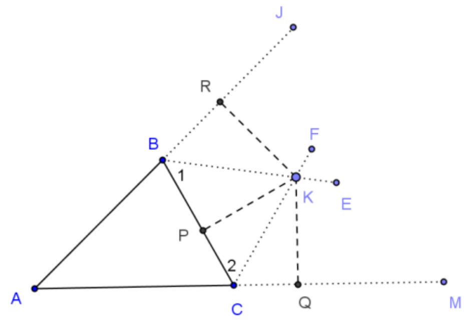


圖 4.3-16(b)

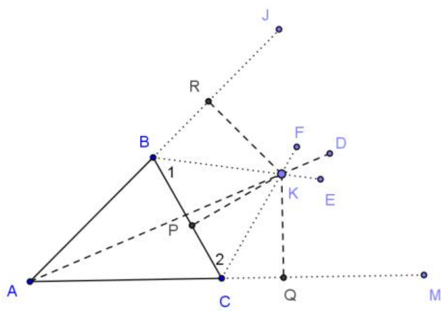


圖 4.3-16(c)

證明：

敘述	理由
(1) 作∠ABC 與∠ACB 的外角平分線$\overline{BE}$與$\overline{CF}$，如上圖 4.3-16(a)所示；	尺規作圖
(2) $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle JBC < \angle JBC = 180° - \angle ABC$	$\overline{BE}$為∠ABC 的外角平分線，∠1 為∠JBC 的一半 ＆ 外角定義
(3) $\angle 2 = \frac{1}{2}\angle MCB < \angle MCB = 180° - \angle ACB$	$\overline{CF}$為∠ACB 的外角平分線，∠2 為∠MCB 的一半 ＆ 外角定義
(4) $\angle 1 + \angle 2 < 360° - (\angle ABC + \angle ACB)$	由(2)式＋(3)式
(5) $\angle 1 + \angle 2 <$ $360° - (\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC)$	由(4)
(6) $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180°$	三角形的三內角和為 180°
(7) $\angle 1 + \angle 2 < 360° - 180° = 180°$	將(6)代入(5)
(8) $\overline{BE}$與$\overline{CF}$不平行，必相交於一點，設此點為 K。	同側內角和不等於 180°的兩線不互相平行，不互相平行的兩線必有交點。
(9) 作$\overline{KP}\perp\overline{BC}$於 P，$\overline{KQ}\perp\overline{AC}$於 Q，$\overline{KR}\perp\overline{AB}$於 R。如上圖 4.3-16(b)所示。	過直線外一點只有一直線垂直此直線
(10) $\overline{KP}=\overline{KQ}=\overline{KR}$	由(1)作圖 ＆ 角平分線上任一點到兩邊等距離
(11) 點 K 必在∠BAC 的角平分線$\overline{AD}$上。如上圖 4.3-16(c)所示。	由(10) $\overline{KQ}=\overline{KR}$ ＆ 到二邊距離相等的點必在角平分線上。
(12) 所以三角形任一內角(∠BAC)平分線($\overline{AD}$)與另兩外角(∠ABC 與∠ACB)的平分線($\overline{BE}$與$\overline{CF}$)相交於一點 K。	由(8) $\overline{BE}$與$\overline{CF}$不平行，必相交於一點，設此點為 K ＆ (11) 點 K 必在∠BAC 的角平分線$\overline{AD}$上
(13) 點 K 與$\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$三邊等距離	由(10) $\overline{KP}=\overline{KQ}=\overline{KR}$ 已證

Q. E. D.

定義：4.3-5 三角形的傍心

三角形的內角平分線與另二外角的平分線的交點(K)為三角形的傍心，如圖 4.3-17。

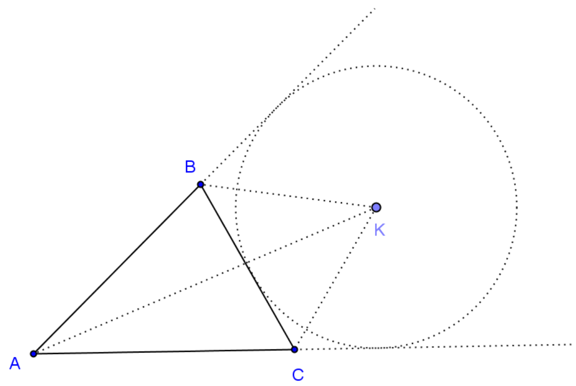


圖 4.3-17 三角形的傍心

習題 4.3

習題 4.3-1

如圖 4.3-18，I 點為△ABC 的內心，若 I 點到$\overline{AB}$的距離為 5，則：

(1) I 點到$\overline{BC}$的距離為何？

(2) I 點到$\overline{AC}$的距離為何？

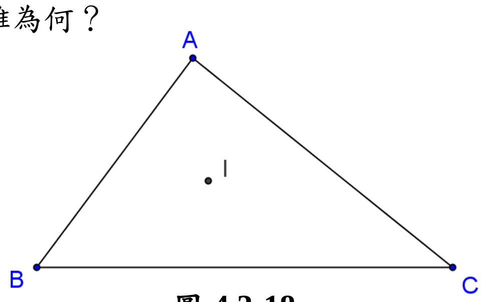


圖 4.3-18

習題 4.3-2

如圖 4.3-19，已知 I 點為△ABC 的內心、∠BIC＝120°，則∠BAC＝？

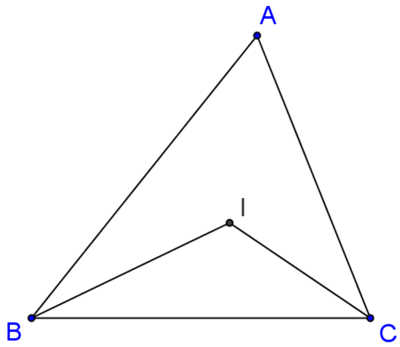


圖 4.3-19

習題 4.3-3

如圖 4.3-20，O 點為△ABC 的外心，若$\overline{AO}$＝10，則：

(1) $\overline{BO}$＝？　　(2) $\overline{CO}$＝？

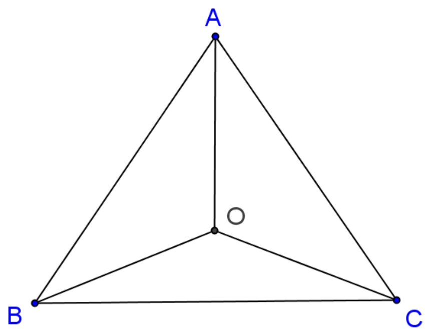


圖 4.3-20

習題 4.3-4

如圖 4.3-21，△ABC 為直角三角形，∠ABC＝90°，若 O 點為$\overline{AC}$的中點且$\overline{AC}$＝20，則$\overline{OC}$＝？

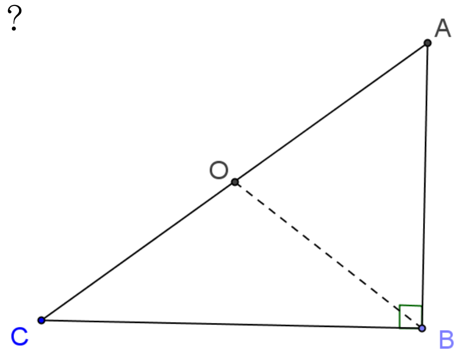


圖 4.3-21

習題 4.3-5

試證正三角形的內心與外心為同一點。

習題 4.3-6

設△ABC 的三中線相交於 G 點，若$\overline{AG}$＝6，$\overline{BG}$＝4，$\overline{CG}$＝8，求各中線的長。

習題 4.3-7

試證明三角形若兩中線相等，則為等腰三角形。

習題 4.3-8

如圖 4.3-22 的△ABC 中，D、E、F 三點將$\overline{BC}$四等分，$\overline{AC}$＝3$\overline{AG}$，H 為$\overline{AB}$的中點。 圖中的哪一點為△ABC 的重心？

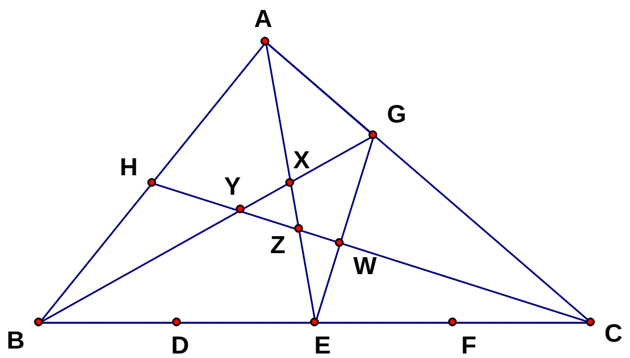


圖 4.3-22

本章重點

在第二章介紹三角形的一些性質，本章介紹更多有關三角形的性質，這些性質需要利用第三章垂直或平行的定理。

1. 三角形內角和等於 180°。
2. 點到直線的最短距離為垂直線段。
3. A.A.S.三角形全等定理。
4. 角平分線定理：角平分線上任一點到角的兩邊等距離。
5. 等腰三角形的兩底角相等。
6. 等腰三角形中，頂角＝180°－2 倍底角；
等腰三角形中，底角＝(180°－頂角)÷2
7. 正三角形的三邊相等，三內角也相等。
8. 三角形的外角等兩內對角和。
9. 三角形的一組外角和為 360°。
10. R.H.S.全等三角形定理。
11. 直角三角形的某一內角為 30°，則其對邊為斜邊的一半。
12. 三角形的五心：內心、外心、重心、垂心、傍心。
    (1) 內心：三角形三內角平分線的交點，內心到三邊等距離，並可在三角形內部作一內切圓。
    (2) 外心：三角形三邊中垂線的交點，外心到三頂點等距離，並可在三角形外部作一外接圓。
    (3) 重心：三角形三中線的交點，重心到頂點的距離為中線長的三分之二。
    (4) 垂心：三角形三高的交點。
    (5) 傍心：三角形一內角平分線與其他兩外角平分線的交點，傍心到三邊等距離。
13. 直角三角形的外心落在斜邊中點。
(即直角三角形斜邊中點為此三角形的外心。)
(亦即直角三角形斜邊中點到三頂點等距離。)

進階思考題

1. 若△ABC 的三內角的角度成等差數列，其公差為 15 度，則三內角中最大角是____________度，最小角是____________度。

2. **已知**：如圖 4.1，$\overline{AB} \parallel \overline{EF}$，$\overline{BC} \perp \overline{DE}$，$\overline{BC}$分別與$\overline{DE}$、$\overline{EF}$交於 G、H 兩點。

證明：$\angle B + \angle E = 90°$。

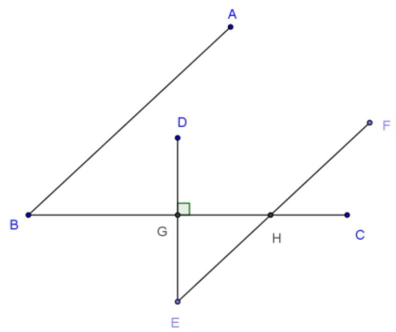


圖 4.1

3. 如圖 4.2，$\overline{AB} \parallel \overline{DE}$，$\overline{EF} \perp \overline{BC}$，$\angle B = 40°$，則$\angle E =$________度。

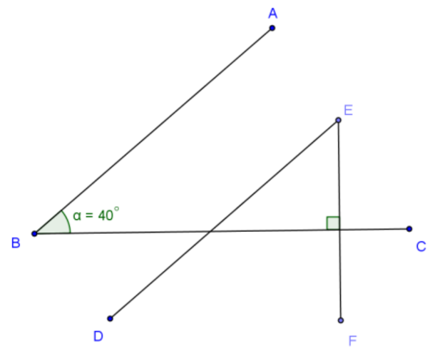


圖 4.2

4. 如圖 4.3，$\overline{AB} \parallel \overline{EF}$，$\overline{DE} \perp \overline{BC}$，∠B＝40°，則∠E＝_________度。

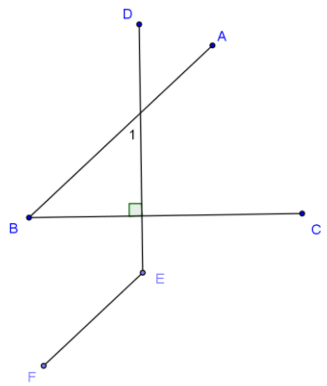


圖 4.3

5. 如圖 4.4，$\overline{AB} \perp \overline{DE}$，$\overline{EF} \parallel \overline{BC}$，∠E＝130°，則∠B＝_________度。

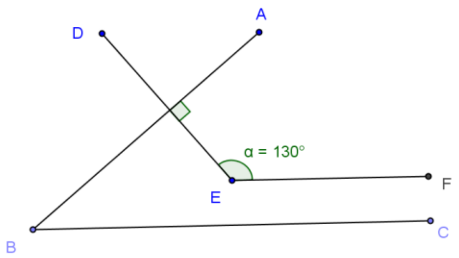


圖 4.4

6. 如圖 4.5，$L_1 \perp L_2$，已知∠1＝∠2，∠4＝∠5，

(1)求∠1＋∠5。

(2)求∠3＋∠6。

(3) $\overleftrightarrow{AB}$與$\overleftrightarrow{CD}$是否平行？

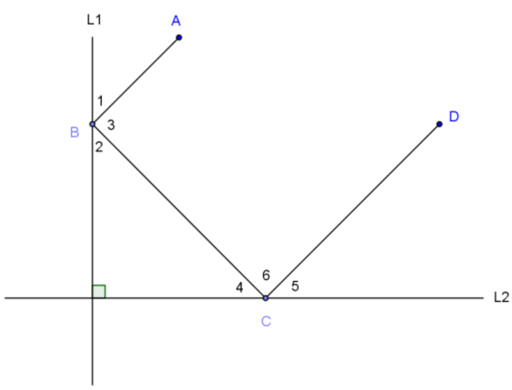


圖 4.5

7. 如圖 4.6，$L_1 \parallel L_2$，M 及 N 都是 L_1、L_2 的截線，$\angle 1=85°$，$\angle 2=65°$，求 $\angle 3$。

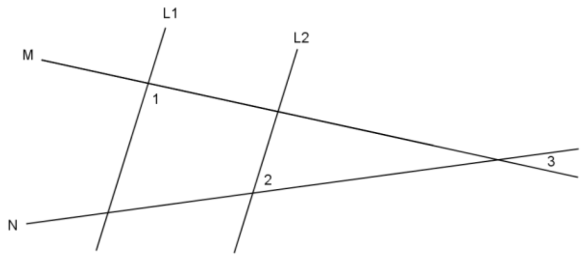


圖 4.6

8. 已知： 如圖 4.7，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BD}\perp\overline{AC}$。

證明： $\angle CBD=\dfrac{1}{2}\angle BAC$。

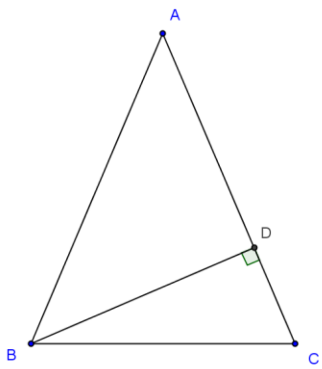


圖 4.7

9. 已知： $\angle 1+\angle 2+\angle 3=360°$。

證明： $L_1 \parallel L_2$。

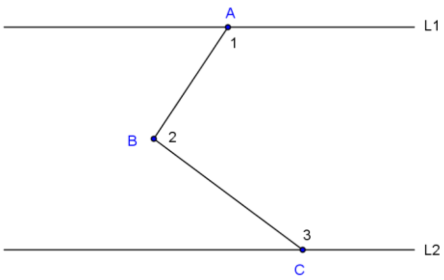


圖 4.8

10. 已知：如圖 4.9，∠ABC＝∠1＋∠2。

證明：$\overline{AD} \parallel \overline{CE}$。

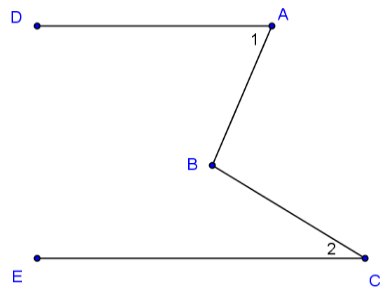


圖 4.9

11. 已知：如圖 4.10，四邊形 ABCD 中，∠DAB＝∠CBA，$\overline{AD}=\overline{BC}$。

證明：$\overline{AC}=\overline{BD}$。

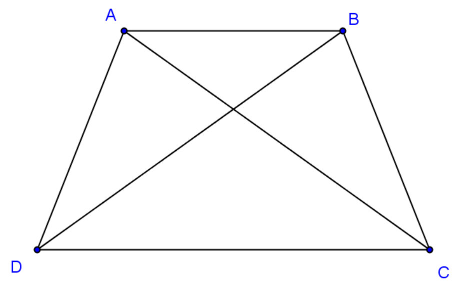


圖 4.10

12. 已知：如圖 4.11，∠D＝∠E＝90°，△ABC 為等腰直角三角形，$\overline{AB}=\overline{BC}$。

證明：$\overline{DE}=\overline{AD}+\overline{CE}$。

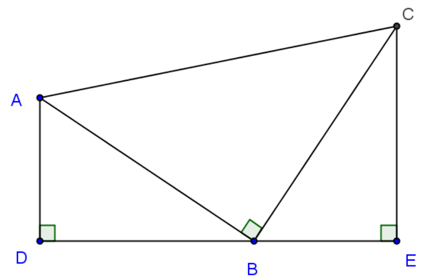


圖 4.11

13. 如圖 4.12，△ABC 和△BDE 都是正三角形，∠BCE=25°
求∠ADC 之角度

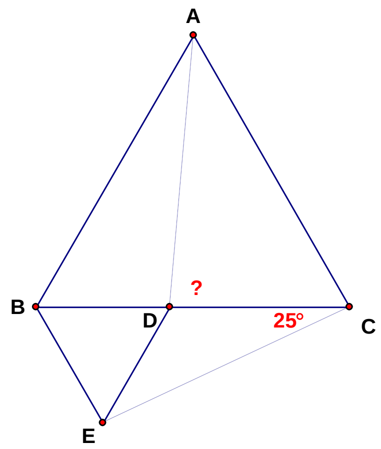


圖 4.12

14. 如圖 4.13，已知 $\overline{AP}$為∠BAC 的平分線，$\overline{BP}=\overline{CP}$，∠PCA＝120°，
$\overline{AC}$＝12，$\overline{AB}$＝16，求：$\overline{BP}$＝？

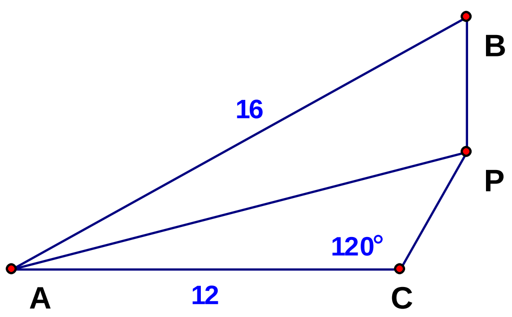


圖 4.13

歷年基測題目

1. 如圖 4.14，△ABC 中，D、E 兩點分別在$\overline{AC}$、$\overline{BC}$上，且$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{CD}=\overline{DE}$。若∠A＝40°， 3∠DBC＝4∠ABD，則∠BDE＝？**(97-1)**

   (A) 25°　　(B) 30°　　(C) 35°　　(D) 40°

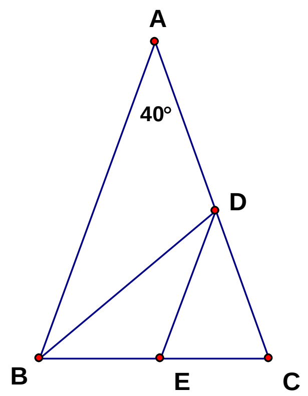


圖 4.14

解答：(B) 30°

想法：(1) 等腰三角形兩底角相等

(2) 三角形內角和定理

(3) 平行線的同位角相等

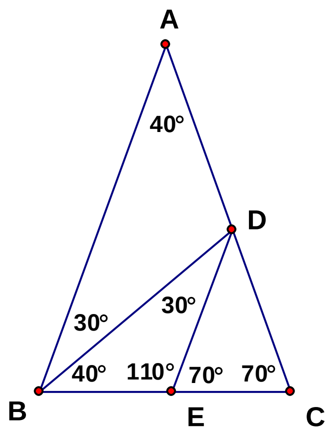


圖 4.14(a)

解：

敘述	理由
(1) ∠ABC＝∠C	已知$\overline{AB}=\overline{AC}$，△ABC 為等腰三角形，等腰三角形兩底角相等。
(2) ∠DEC＝∠C	已知$\overline{CD}=\overline{DE}$，△DEC 為等腰三角形，等腰三角形兩底角相等。

(3) $\angle A+\angle ABC+\angle C=180°$ $40°+\angle ABC+\angle C=180°$ $\therefore \angle ABC+\angle C=140°$	$\triangle ABC$，三角形內角和定理 已知$\angle A=40°$
(4) $\angle ABC+\angle ABC=140°$ $\therefore \angle ABC=70°$	由(2) & (3)
(5) $\angle ABD=\frac{3}{4}\times\angle DBC$	已知 $3\angle DBC=4\angle ABD$
(6) $\angle ABD+\angle DBC=\angle B=70°$ $\frac{3}{4}\times\angle DBC+\angle DBC=70°$ $\angle DBC=40°$	由(4) & (5)
(7) $\angle DEC=\angle C=\angle ABC=70°$	由(1)、(2) & (4)
(8) $\angle DEB+\angle DEC=180°$ $\therefore \angle DEB=110°$	已知 E 在$\overline{BC}$線上
(9) $\angle DBC+\angle DEB+\angle BDE=180°$ $40°+110°+\angle BDE=180°$ $\angle BDE=30°$	$\triangle BDE$，三角形內角和定理 由(6) & (8)

2. 如圖 4.15，△ABC 中，∠ABC＝30°，∠ACB＝50°，且 D、E 兩點分別在$\overline{BC}$、$\overline{AB}$上。若$\overline{AD}$為∠BAC 的平分線，$\overline{AD}$＝$\overline{AE}$，則∠AED＝？**(96-1)**

(A) 50° (B) 60° (C) 65° (D) 80°

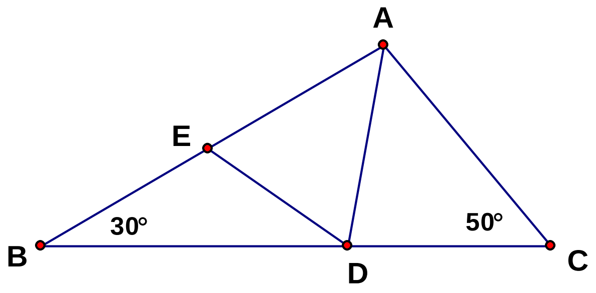


圖 4.15

解答：(C) 65°

想法： (1) 三角形內角和為 180°

(2) 等腰三角形的兩底角相等

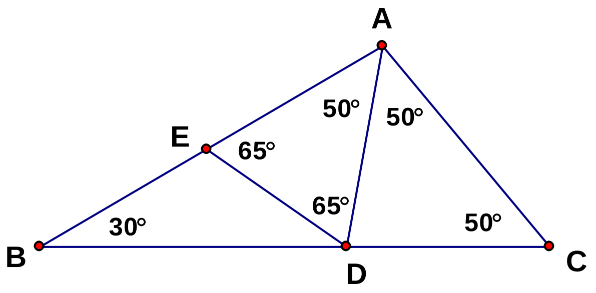


圖 4.15(a)

解：

敘述	理由
(1) ∠BAC＝180°－(50°＋30°) ＝100°	三角形內角和為 180°，已知 ∠ABC＝30°，∠ACB＝50°
(2) ∠BAD＝100°÷2＝50°	$\overline{AD}$為∠BAC 的平分線
(3) △AED 為等腰三角形。	已知$\overline{AD}$＝$\overline{AE}$
(4) ∠AED＝(180°－50°)÷2＝65°	等腰三角形底角與頂角的關係

3. 如圖 4.16，$\overline{AB}=\overline{BC}$，$\overline{BC}>\overline{AC}$，P、Q 兩點在$\overline{AM}$上，其中$\overline{AP}=\overline{PQ}$，且 Q 為△ABC 的重心。若兩線段$\overline{BP}$、$\overline{BQ}$的延長線與$\overline{AC}$分別交於 S、R 兩點，則下列關係何者正確？(95-1)

(A) $\overline{AS}=\overline{SR}$　(B) $\overline{AR}=\overline{RC}$　(C) $\overline{QB}=\overline{QC}$　(D) $\overline{QR}=2\overline{PS}$

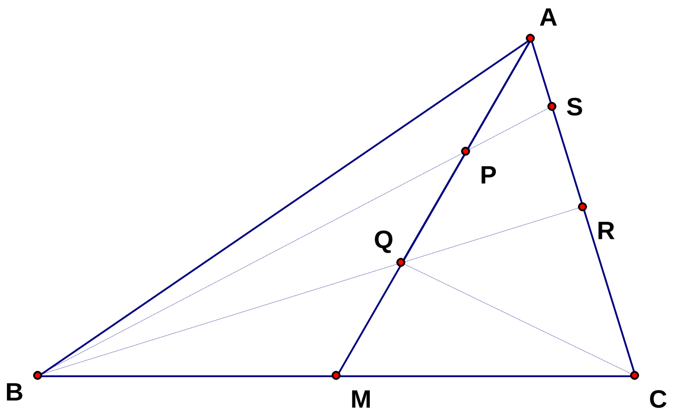


圖 4.16

解答：(B) $\overline{AR}=\overline{RC}$

想法：(1) 三角形重心定義

(2) 基測為單選題，所以只要能夠從幾個選項中找到一個正確解就可以。

(3) 題目所給的條件，有些條件不一定都會要用到，例如本題只用到 Q 為△ABC 的重心，就可以找到解答。

解：

敘述	理由
(1) R 為$\overline{AC}$的中點。	因為 Q 為△ABC 的重心，過頂點與重心的直線與邊的交點必為邊的中點。
(2) $\overline{AR}=\overline{RC}$	中點的定義

4. 如圖 4.17，四邊形 ABCD 中，∠B＝60°、∠DCB＝80°、∠D＝100°。若 P、Q 兩點分別為△ABC 及△ACD 的內心，則∠PAQ＝？**(94-1)**

(A) 60°　　(B) 70°　　(C) 80°　　(D) 90°

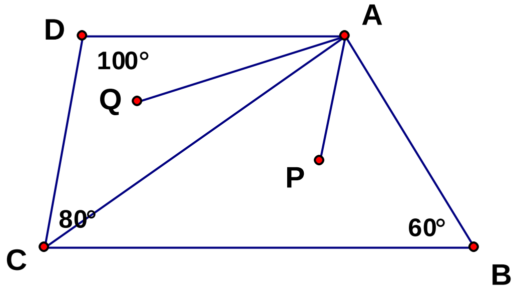


圖 4.17

解答：(A) 60°

想法：(1) 多邊形內角和定理　　(2) 內心定義

解：

敘述	理由
(1) ∠PAQ＝∠QAC+∠PAC	如圖 4.17 所示
(2) ∠QAC＝$\frac{1}{2}$∠DAC	已知 Q 為△ACD 的內心，$\overline{QA}$為∠DAC 的角平分線。
(3) ∠PAC＝$\frac{1}{2}$∠BAC	已知 P 為△BAC 的內心，$\overline{PA}$為∠BAC 的角平分線。
(4) ∠BAD＝∠DAC＋∠BAC	如圖 4.17 所示
(5) ∠BAD＋∠ADC＋∠BCD＋∠ABC ＝360° ∠BAD＋100°＋80°＋60°＝360° ∠BAD＝120°	四邊形內角和等於 360° (第六章會證明)
(6) ∠PAQ＝∠QAC＋∠PAC	由(1)
＝$\frac{1}{2}$∠DAC＋$\frac{1}{2}$∠BAC	由(2) & (3)
＝$\frac{1}{2}$(∠DAC＋∠BAC)＝$\frac{1}{2}$∠BAD	由(4)
＝$\frac{1}{2}$(120°)＝60°	由(5)

5. 如圖 4.18，$\overline{BD}$為圓 O 的直徑，弦$\overline{AC}$未過圓心 O，則下列哪一個敘述正確？

(A) O 是△PCD 的外心　　(B) O 是△APD 的外心

(C) O 是△ACD 的外心　　(D) O 是△BCP 的外心　　**(93-1)**

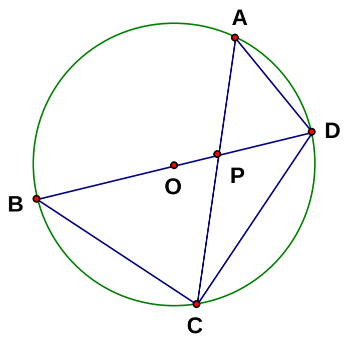


圖 4.18

解答：(C) O 是△ACD 的外心

想法： 外心是三角形外接圓的圓心，為三角形三邊的垂直平分線之交點

解：

敘述	理由
(1) 圓 O 是三角形的外接圓有：△ACD 及△BCD，但△BCD 不在四個選項中。	外接圓定義

6. 如圖 4.19，△ABC、△BDE 皆為直角三角形，三內角分別為 30°－60°－90°、45°－45°－90°。已知$\overline{BD}=\overline{BC}$，求∠DEC＝？**(93-1)**

(A) 90°　　(B) 105°　　(C) 135°　　(D) 150°

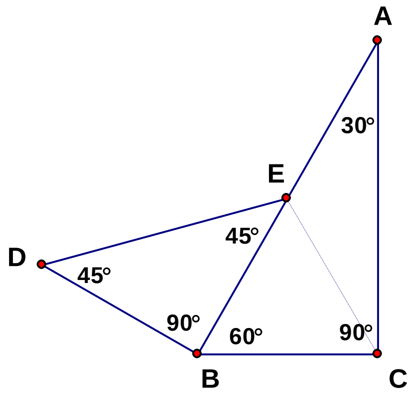


圖 4.19

解答：(B) 105°

想法：兩底角相等之三角形為等腰三角形定理

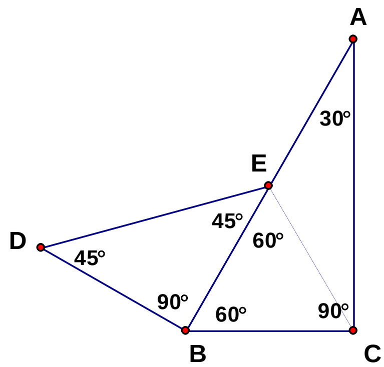


圖 4.19(a)

解：

敘述	理由
(1) △BDE 為等腰三角形	已知△BDE 有兩角相等，兩底角相等之三角形為等腰三角形定理
(2) $\overline{BD}=\overline{BE}$	等腰三角形之兩邊相等
(3) $\overline{BD}=\overline{BC}=\overline{BE}$	已知$\overline{BD}=\overline{BC}$ & (2)
(4) △CBE 為等腰三角形 ∠CEB＝(180°－60°)÷2＝60°	由(3) $\overline{BC}=\overline{BE}$ 等腰三角形底角與頂角的關係
(5) ∠DEC＝∠DEB＋∠BEC ＝45°＋60°＝105°	已知∠DEB=45° & (4)

7. 甲、乙、丙、丁四位同學分別想依下列的條件作出一個與△ABC 全等的三角形，如圖 4.20 所示。已知四人所用的條件如下：

甲：$\overline{AB}=\sqrt{3}$ 公分，$\overline{AC}=1$ 公分，∠B＝30°

乙：$\overline{AB}=\sqrt{3}$ 公分，$\overline{BC}=2$ 公分，∠B＝30°

丙：$\overline{AB}=\sqrt{3}$ 公分，$\overline{AC}=1$ 公分，BC＝2 公分

丁：$\overline{AB}=\sqrt{3}$ 公分，$\overline{BC}=2$ 公分，∠A＝90°

若發現其中一人作出的三角形沒有與圖△ABC 全等，則此人是誰？**(93-1)**

(A) 甲　(B) 乙　(C) 丙　(D) 丁

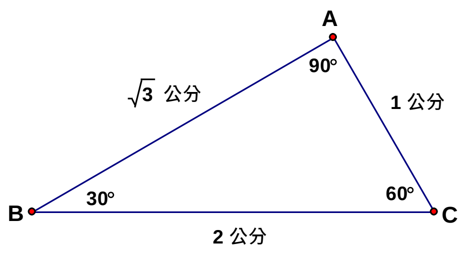


圖 4.20

解答：(A) 甲

想法：全等三角形定理

解：

敘述	理由
(1) **(A)** 甲　(沒有全等)	
(2) **(B)** 乙　(全等)	S.A.S.全等三角形定理
(3) **(C)** 丙　(全等)	S.S.S.全等三角形定理
(4) **(D)** 丁　(全等)	R.H.S.全等三角形定理

8. 圖 4.21 是 A、B 兩片木板放在地面上的情形。圖中∠1、∠2 分別為 A、B 兩木板與地面的夾角，∠3 是兩木板間的夾角。若∠3＝110°，則∠2－∠1＝？**(92-1)**

(A) 55°　　(B) 70°　　(C) 90°　　(D) 110°

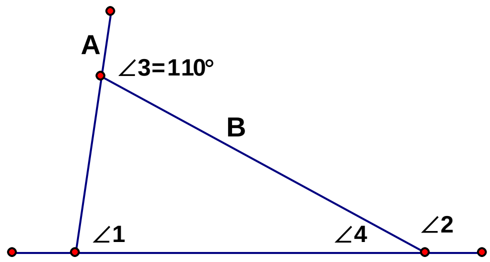


圖 4.21

解答： (B) 70°

想法： (1) 三角形外角定理

(2) 補角定義

解：

敘述	理由
(1) ∠3＝∠1＋∠4 ∠4＝∠3－∠1	三角形外角定理 等量減法公理
(2) ∠2＝180－∠4＝180－(∠3－∠1)	補角定義 & (1) ∠4＝∠3－∠1
(3) ∠2－∠1＝180－(∠3－∠1)－∠1 ＝180－∠3＝180－110＝70	由(2) 等式兩邊同減 ∠1 & 已知∠3＝110°

9. 如圖 4.22(a)，有一質地均勻的三角形鐵片，其中一中線$\overline{AD}$長 24 公分。若阿龍想用食指撐住此鐵片，如圖 4.22(b)，則支撐點應設在$\overline{AD}$上的何處最恰當？**(91-1)**

(A) 距離 D 點 6 公分　　(B) 距離 D 點 8 公分
(C) 距離 D 點 12 公分　　(D) 距離 D 點 16 公分

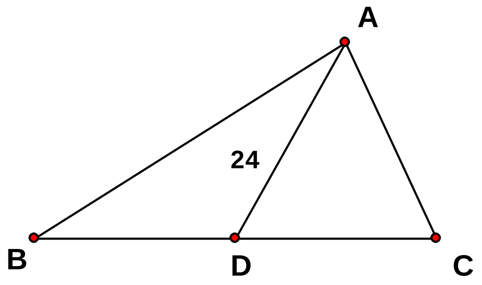


圖 4.22(a)

解答：(B) 距離 D 點 8 公分

想法： (1) 一指撐住此鐵片的位置為重心

(2) 重心位置定理

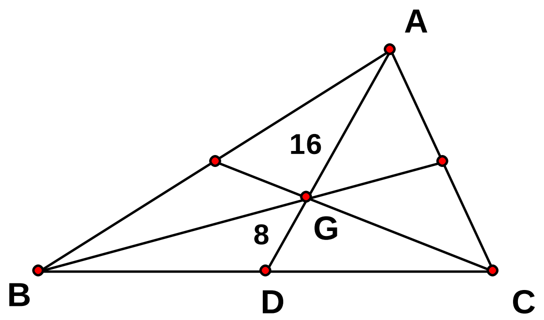


圖 4.22(b)

解：

敘述	理由
(1) 重心的位置為中線距頂點三分之二 $\overline{AG}=24\times\frac{2}{3}=16$	重心位置定理
(2) $\overline{DG}=24-16=8$	

10. 如圖 4.23，△ABC 中，D、E、F 三點將$\overline{BC}$四等分，$\overline{AC}=3\overline{AG}$，H 為$\overline{AB}$的中點。 圖中的哪一點為△ABC 的重心？ **(90-1)**

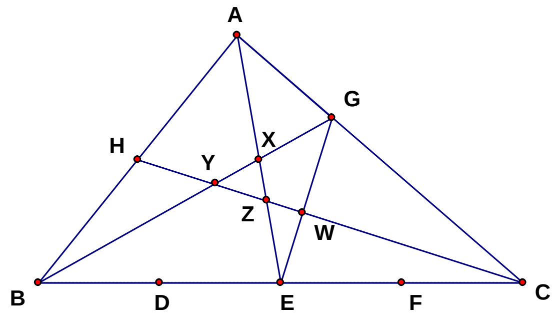


圖 4.23

解答：Z 點為△ABC 的重心

想法：△ABC 的重心為三邊中線的交點，而二線可以決定一交點，所以三角形兩中線的交點就是其重心。

解答說明：

敘述	理由
(1) $\overline{CH}$為$\overline{AB}$邊的中線	H 為$\overline{AB}$的中點。
(2) $\overline{AE}$為$\overline{BC}$邊的中線。	D、E、F 三點將$\overline{BC}$四等分， ∴ E 為$\overline{BC}$的中點。
(3) Z 為△ABC 的重心	Z 點為$\overline{CH}$與$\overline{AE}$兩中線的交點

11. 如圖 4.24，直線 L_1 平行直線 L_2，若 $\angle 1=80°$，$\angle 2=60°$，且$\overline{BZ}$平分 $\angle DBC$，則 $\angle 3=?$ **(90-1)**

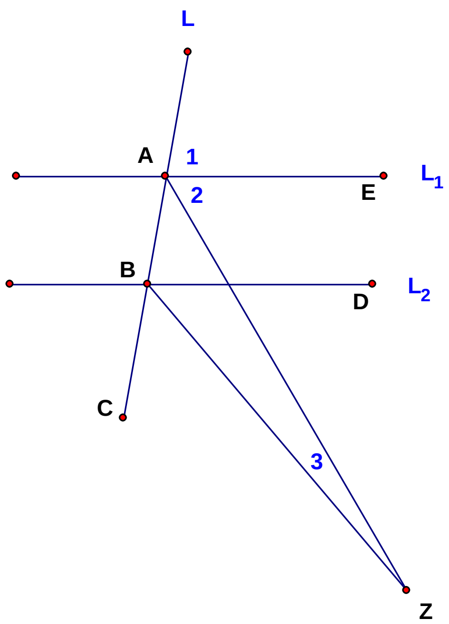


圖 4.24

解答：$\angle 3=10°$

想法：利用三角形內角和為 180°解題

解：

敘述	理由
(1) $\angle BAZ=180°-(\angle 1+\angle 2)$ $=180°-(80°+60°)=40°$	$\angle BAZ+\angle 1+\angle 2$ 為平角
(2) $\angle BAE=\angle BAZ+\angle 2=40°+60°=100°$。	二角和
(3) $\angle ABD+\angle BAE=180°$	二平行線的同側內角和為 180°
(4) $\angle ABD=180°-\angle BAE=180°-100°=80°$	等量同減一數仍相等
(5) $\angle DBC=\angle BAE$	同位角相等
(6) $\angle ZBD=\dfrac{1}{2}\angle DBC=\dfrac{1}{2}\angle BAE$ $=\dfrac{1}{2}\times 100°=50°$	已知$\overline{BZ}$平分 $\angle DBC$ & (5)
(7) $\angle 3=180°-(\angle BAZ+\angle ABD+ZBD)$ $=180°-(40°+80°+50°)$ $=180°-170°=10°$	三角形內角和為 180°

12. 如圖 4.25，已知在△ABC 中，∠ACB＝90°且$\overline{BC}>\overline{AC}$。求作：一圓與$\overline{AC}$、$\overline{BC}$相切，且圓心 O 在$\overline{AB}$上。下列四個取得圓心 O 的作圖方法，何者正確？**(90-1)**

(A) 取$\overline{AB}$中點為 O　　(B) 作$\overline{AC}$中垂線交$\overline{AB}$於 O

(C) 作$\overline{BC}$中垂線交$\overline{AB}$於 O　　(D) 作 ∠ACB 平分線交$\overline{AB}$於 O

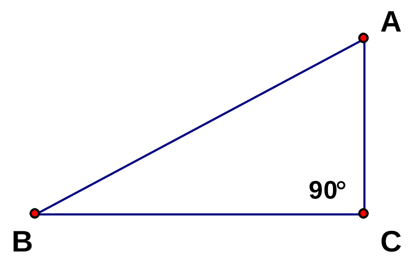
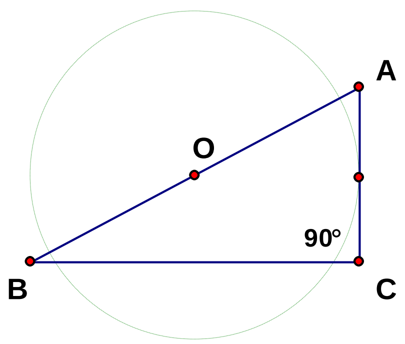
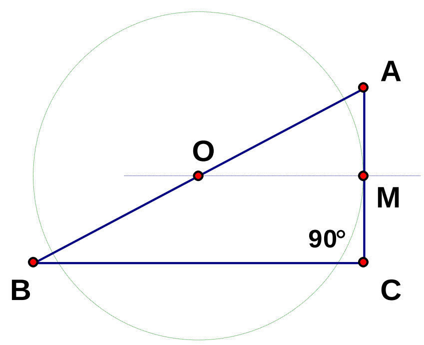


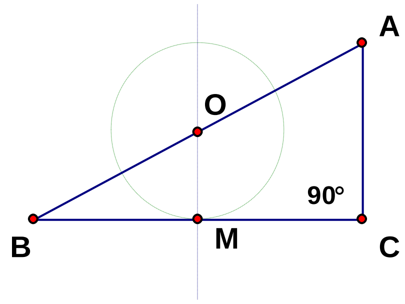
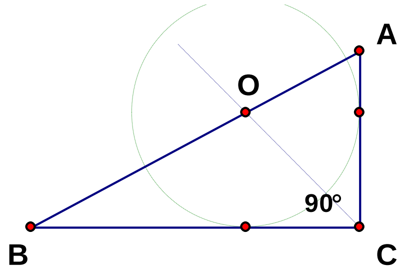
圖 4.25

解答：(D) 作 ∠ACB 平分線交$\overline{AB}$於 O

想法： 角平分線上的點與角的兩邊等距離

解：

敘述	理由
(1) (A) 錯誤  **圖 4.25(a)**	圓並沒有與$\overline{AC}$、$\overline{BC}$相切
(2) (B) 錯誤  **圖 4.25(b)**	圓並沒有與$\overline{AC}$、$\overline{BC}$相切

(3) (C) 錯誤  圖 4.25(c)	圓並沒有與$\overline{AC}$、$\overline{BC}$相切
(4) (D) 正確  圖 4.25(d)	圓與$\overline{AC}$、$\overline{BC}$相切，角(∠ACB)平分線上的點(O)與角的兩邊($\overline{CA}$與$\overline{CB}$)等距離，O 點在 ∠ACB 之角平分線上。

13. 如圖 4.26，已知 ABCD 是正方形，A 在 L 上，$\overline{DE}\perp$L，$\overline{BF}\perp$L，垂足分別為 E、F （$\overline{AE}\neq\overline{AF}$）。

求證：△ADE ≅ △BAF

證明：1.∵ABCD 是正方形，∴$\overline{AB}=\overline{AD}$，∠7＝90°

2.又∵$\overline{DE}\perp$L，$\overline{BF}\perp$L，∴∠5＝∠6＝90°

3. ＿＿＿＿＿＿(甲)＿＿＿＿＿＿

4. ∴△ADE ≅ △BAF

從下列選項中，選出可填入(甲)中的正確證明過程。 **(90-1)**

(A) ∵$\overline{DE}\perp$L、$\overline{BF}\perp$L，∠7=90°，∴$\overline{DE}=\overline{BF}$

(B) ∵$\overline{DE}\perp$L、$\overline{BF}\perp$L，∠7=90°，∴∠1＝∠4

(C) ∠7＝90°，∠5＝∠6＝90°，∴∠2＝∠3

(D) ∠7＝∠5＝90°，∠1＋∠2＝∠2＋∠3，∴∠1＝∠3

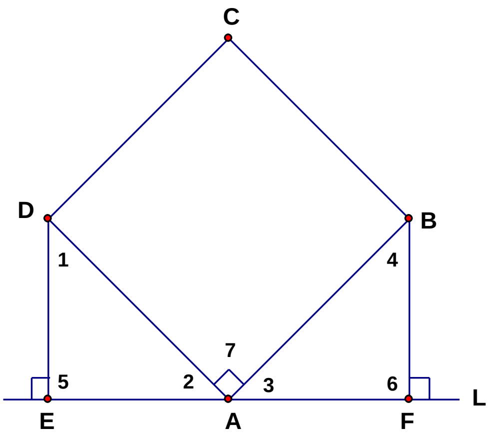


圖 4.26

解答：(D)

解：

敘述	理由
(1) ∵ABCD 是正方形，∴$\overline{AB}=\overline{AD}$，∠7＝90°	已知 ABCD 是正方形
(2) ∵$\overline{DE}\perp$L、$\overline{BF}\perp$L，∠7=90°，∴∠5＝∠6＝90°	已知$\overline{DE}\perp$L、$\overline{BF}\perp$L
(3) ∠7＝∠5＝90°，∠1＋∠2＝∠2＋∠3，∴∠1＝∠3	如圖 4.26 所示
(4) ∴△ADE ≅ △BAF	由(1)(2)(3) A.A.S.三角形全等定理
(5) 所以答案選**(D)** ∠7＝∠5＝90°，∠1＋∠2＝∠2＋∠3，∴∠1＝∠3	由(3)

14. 如圖 4.27，△ABC 中，∠ACB＝90°，D 在$\overline{BC}$上，E 為$\overline{AB}$之中點，$\overline{AD}$、$\overline{CE}$相交於 F，且$\overline{AD}$＝$\overline{DB}$。若∠ABC＝20°，則∠DFE＝？(96-1)

(A) 40°　(B) 50°　(C) 60°　(D) 70°

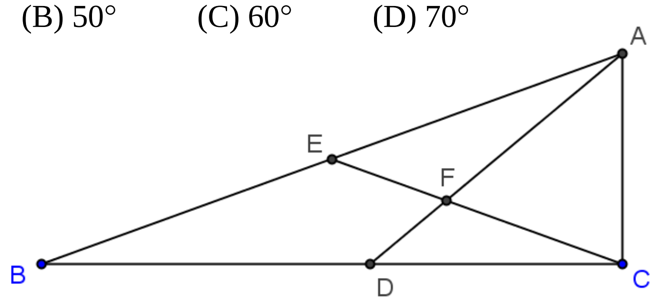


圖 4.27

解答：(C) 60°

想法：(1) 直角三角形的斜邊中點與三頂點等距離

(2) 等腰三角形的兩底角相等

(3) 三角形內角和 180°定理

(4) 三角形外角等於兩內對角的和

解：

敘述	理由
(1) ∠BAD＝∠ABC＝20°	已知$\overline{AD}$＝$\overline{DB}$，等腰三角形 DAB 的兩底角相等 & 已知∠ABC＝20°
(2) ∠BAC＋∠ABC＋∠BCA＝180° ∠BAC＋20°＋90°＝180° ∠BAC＝180°－20°－90°＝70°	△ABC 內角和為 180° 將已知∠ABC＝20° & ∠ACB＝90° 代入 等量減法公理
(3) $\overline{EA}$＝$\overline{EB}$＝$\overline{EC}$	已知 E 為$\overline{AB}$之中點 & 直角三角形的斜邊中點與三頂點等距離
(4) △EAC 為等腰三角形	由(3) $\overline{EA}$＝$\overline{EC}$ & 等腰三角形定義
(5) ∠AEC＝180°－2∠EAC ＝180°－2×∠BAC ＝180°－2×70° ＝40°	由(4) & 等腰三角形頂角與底角之關係 如圖 4.27，∠EAC＝∠BAC 將(2) ∠BAC＝70° 代入得
(6) △AEF 中， ∠DFE＝∠EAF＋∠AEF ＝∠BAD＋∠AEC ＝20°＋40°＝60°	如圖 4.27 所示 外角等於兩內對角之和 ∠EAF＝∠BAD & ∠AEF＝∠AEC 將(1) ∠BAD＝20° & (5) ∠AEC＝40°代入
(7) 所以本題答案選(C) 60°	由(6) ∠DFE＝60°