目錄

第三章 垂直線與平行線

3.1 節　垂直線

有關垂直線的定義，在 1.4 節中已經提及。我們在此將定義 1.4-1 再提一次，如圖 3.1-1 所示，如果$\overline{CD}$和$\overline{AB}$所形成的交角是直角，則我們說$\overline{CD}$和$\overline{AB}$互相垂直。

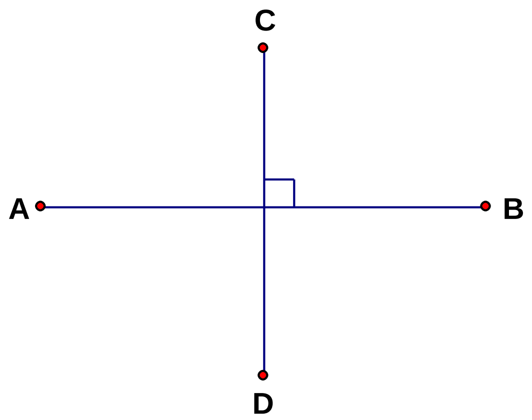
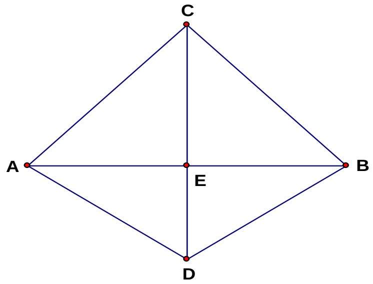


圖 3.1-1

我們一定好奇，在什麼情況之下，兩條直線會互相垂直呢？接下來，我們要給一個一連串的定理來說明此點：

定理：3.1-1　與兩端點相等距離的兩點連線與此兩端點連線垂直



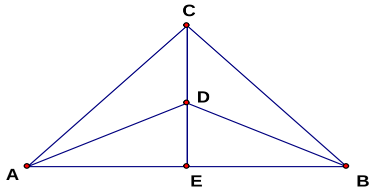


圖 3.1-2

已知： 如圖 3.1-2 所示，C 點及 D 點為不在$\overline{AB}$線段上的兩點，$\overline{AC}=\overline{BC}$，$\overline{AD}=\overline{BD}$

求證： $\overline{AB}\perp\overline{CD}$

想法：(1) 若可證得△ACE ≅ △BCE，則由全等三角形對應角相等
可得知∠CEA＝∠CEB＝90°；

(2) 已知判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理

證明：

敘述	理由
(1) 如圖 3.1-2，△ACD 及△BCD 中， $\overline{AC}=\overline{BC}$ $\overline{AD}=\overline{BD}$ $\overline{CD}=\overline{CD}$	 已知 已知 兩三角形共用此邊
(2) △ACD ≅ △BCD	由(1)　S.S.S.三角形全等定理
(3) ∠ACD＝∠BCD	由(2) 兩全等三角形的對應角相等
(4) $\overline{CD}$直線與$\overline{AB}$線相交於 E 點	兩直線交點公理
(5) △ACE 及△BCE 中， ∠ACE＝∠BCE $\overline{AC}=\overline{BC}$ $\overline{CE}=\overline{CE}$	 由(3) ∠ACD＝∠BCD 已知 兩三角形共用此邊
(6) △ACE ≅ △BCE	由(5)　S.A.S.三角形全等定理
(7) ∠CEA＝∠CEB	由(6) 兩全等三角形的對應角相等
(8) ∠CEA＋∠CEB＝180°	如圖 3.1-2（$\overline{AEB}$為一直線）
(9) ∠CEA＝∠CEB＝90°	由(7) ＆ (8)
(10) 所以$\overline{AB}\perp\overline{CD}$	由(9)

Q. E. D.

定理：3.1-2　與兩端點相等距離的兩點連線是兩端線連線之平分線

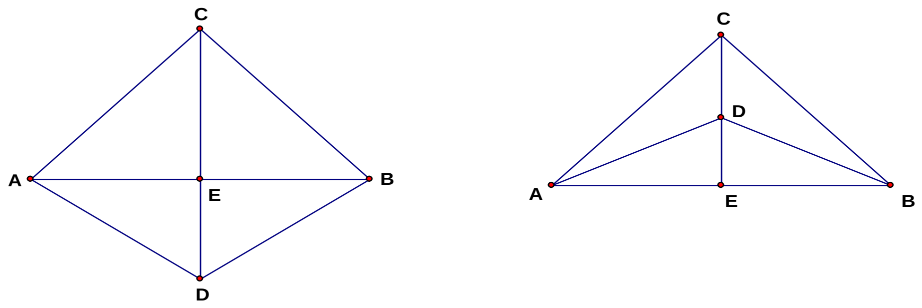


圖 3.1-3

已知：如圖 3.1-3 所示，C 點及 D 點為不在$\overline{AB}$線段上的兩點，$\overline{AC}=\overline{BC}$，$\overline{AD}=\overline{BD}$

求證：$\overline{AE}=\overline{BE}$

想法：(1) 若可證得△ACE ≅ △BCE，則由全等三角形對應邊相等可得知 $\overline{AE}=\overline{BE}$；

(2) 已知判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理

證明：

敘述	理由
(1) 如圖 3.1-3，△ACD 及△BCD 中， $\overline{AC}=\overline{BC}$ $\overline{AD}=\overline{BD}$ $\overline{CD}=\overline{CD}$	 已知 已知 兩三角形共用此邊
(2) △ACD ≅ △BCD	由(1)　S.S.S.三角形全等定理
(3) ∠ACD＝∠BCD	由(2) 兩全等三角形的對應角相等
(4) $\overline{CD}$直線與$\overline{AB}$線相交於 E 點	兩直線交點公理
(5) △ACE 及△BCE 中， ∠ACE＝∠BCE $\overline{AC}=\overline{BC}$ $\overline{CE}=\overline{CE}$	 由(3) ∠ACD＝∠BCD 已知 兩三角形共用此邊
(6) △ACE ≅ △BCE	由(5)　S.A.S.三角形全等定理
(7) $\overline{AE}=\overline{BE}$	由(6) 兩全等三角形的對應邊相等

Q. E. D.

定理：3.1-3　等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊

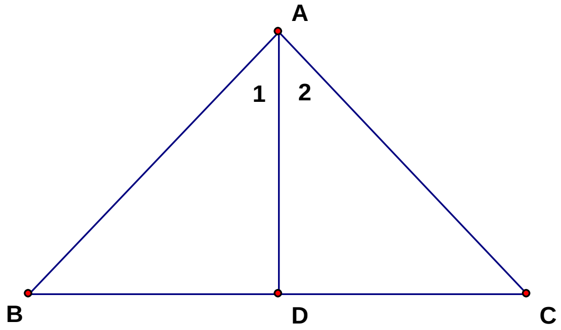


圖 3.1-4

已知： 如圖 3.1-4 所示，△ABC 中，若$\overline{AB}=\overline{AC}$，∠BAD＝∠CAD
(即∠1＝∠2)

求證： $\overline{AD}\perp\overline{BC}$ 且 $\overline{BD}=\overline{CD}$。

想法：(1) 若可證得△ABD ≅ △ACD，則由全等三角形對應角相等可得知∠ADB＝∠ADC＝90°，對應邊相等可得$\overline{BD}=\overline{CD}$

(2) 已知判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理

證明：

敘述	理由
(1) △ABD 及△ACD 中，	
∠1＝∠2	已知
$\overline{AB}=\overline{AC}$	已知
$\overline{AD}=\overline{AD}$	兩三角形共用此邊
(2) △ABD ≅ △ACD	由(1)　S.A.S.全等三角形定理
(3) ∠ADB＝∠ADC & $\overline{BD}=\overline{CD}$	由(2) 兩全等三角形的對應角 & 對應邊相等
(4) ∠ADB＋∠ADC＝180°	如圖 3.1-4（$\overline{BDC}$為一直線）
(5) ∠ADB＋∠ADB＝180° ∴ ∠ADB＝90°	由(3) ∠ADB＝∠ADC　&　(4)
(6) ∠ADB＝∠ADC＝90°。	由(3) ∠ADB＝∠ADC　& (5) ∠ADB＝90°
(7) $\overline{AD}\perp\overline{BC}$	由(6)

Q. E. D.

以下是另一個垂直線的例子。

例題 3.1-1

已知：如圖 3.1-5 所示，△ABC 中，若$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BD}=\overline{CD}$。

求證：$\overline{AD}\perp\overline{BC}$。

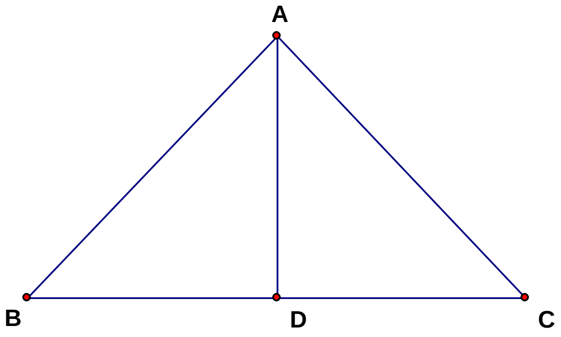


圖 3.1-5

想法：(1) 若可證得△ABD ≅ △ACD，則由全等三角形對應角相等可得知∠ADB＝∠ADC＝90°。

(2) 已知判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理

證明：

敘述	理由
(1) △ABD 及△ACD 中，	
$\overline{AB}=\overline{AC}$	已知
$\overline{BD}=\overline{CD}$	已知
$\overline{AD}=\overline{AD}$	兩三角形共用此邊
(2) △ABD ≅ △ACD	由(1) S.S.S.全等三角形定理
(3) ∠ADB＝∠ADC	由(2) 兩全等三角形對應角相等
(4) ∠ADB＋∠ADC＝180°	如圖 3.1-5（$\overline{BDC}$為一直線）
(5) ∠ADB＝∠ADC＝90°	由(3) & (4)
(6) $\overline{AD}\perp\overline{BC}$	由(5)

Q. E. D

在結束這一小節以前，我們要再討論兩個重要的定理。

定理：3.1-4　通過直線上一點，只有一條直線與此直線垂直

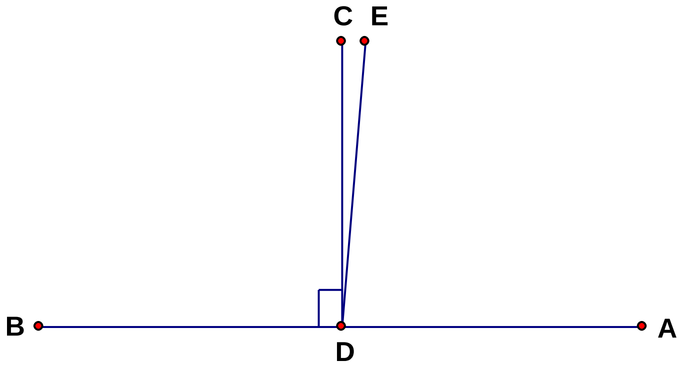


圖 3.1-6

已知：如圖 3.1-6 所示，D 為$\overline{AB}$上一點，$\overline{CD}\perp\overline{AB}$，假設$\overline{ED}\perp\overline{AB}$。
求證： $\overline{ED}$與$\overline{CD}$重合。
想法： 若證得∠EDB＝∠CDB，則可得知$\overline{ED}$與$\overline{CD}$重合
證明：

敘述	理由
(1) ∠EDB＝90°	假設$\overline{ED}\perp\overline{AB}$
(2) ∠CDB＝90°	已知$\overline{CD}\perp\overline{AB}$
(3) ∠EDB＝∠CDB	由(1) & (2)
(4) $\overline{ED}$與$\overline{CD}$重合	由(3)　& 等角定義

Q. E. D

定理：3.1-5　通過直線外一點，只有一條直線垂直此直線

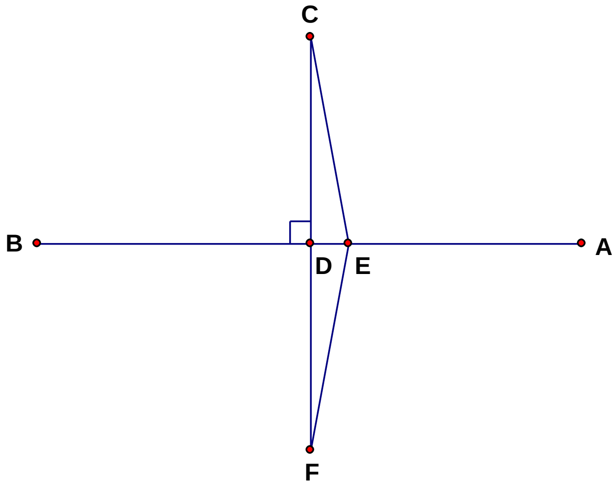


圖 3.1-7

已知： 如圖 3.1-7 所示，C 為$\overline{AB}$外一點，$\overline{CD}\perp\overline{AB}$，$\overline{CE}\perp\overline{AB}$

求證： $\overline{CD}$與$\overline{CE}$重合

想法： 若能證得$\overline{CDF}$與$\overline{CEF}$重合，即可知$\overline{CD}$與$\overline{CE}$重合

證明：

敘述	理由
(1) 延長$\overline{CD}$至 F，使$\overline{CD}=\overline{DF}$	延長線
(2) 連接$\overline{EF}$	兩點可作一直線(直線公理)
(3) $\angle$CDE＋$\angle$FDE＝180°	$\overline{CDF}$為一直線及平角定義
(4) △CDE 及△FDE 中，$\overline{CD}=\overline{DF}$， $\angle$CDE＝$\angle$FDE＝90°， $\overline{DE}=\overline{DE}$	由(1)的延長線作法， 已知$\overline{CD}\perp\overline{AB}$及垂直定義， 兩三角形共用此邊
(5) △CDE ≅ △FDE	由(4) 三角形 S.A.S.全等定理
(6) $\angle$CED＝$\angle$FED	由(5) 全等三角形之對應角相等
(7) $\angle$CED＝90°	已知$\overline{CE}\perp\overline{AB}$
(8) $\angle$CED＋$\angle$FED＝180°	由 (6) & (7)
(9) $\overline{CEF}$為一直線	平角的定義
(10) 故$\overline{CDF}$與$\overline{CEF}$重合，即$\overline{CD}$與$\overline{CE}$重合	過 C 與 F 兩點只有一直線

Q. E. D

習題 3.1

習題 3.1-1

圖 3.1-8 中，$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{AD}$，試證$\overline{AC}\perp\overline{BD}$。

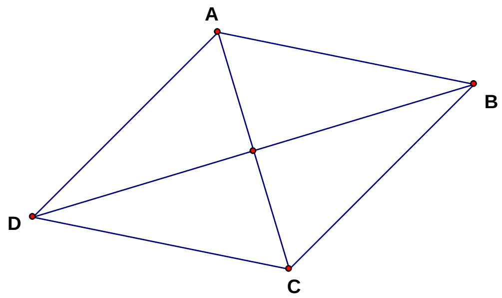


圖 3.1-8

習題 3.1-2

圖 3.1-9 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BD}=\overline{CD}$，試證$\overline{AE}\perp\overline{BC}$。

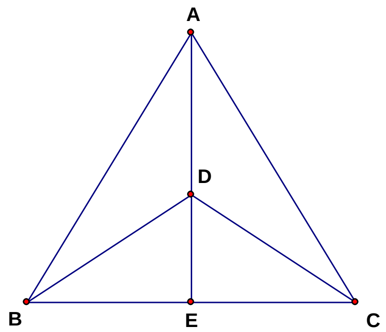


圖 3.1-9

習題 3.1-3

圖 3.1-10 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BD}$為∠ABC 的平分線，$\overline{CD}$為∠ACB 的平分線，$\overline{BD}$與$\overline{CD}$相交於 D，試證$\overline{AE}\perp\overline{BC}$。

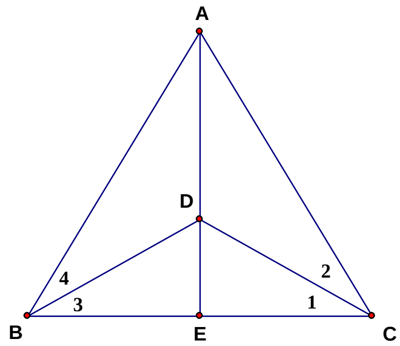


圖 3.1-10

習題 3.1-4

圖 3.1-11 中，$\overline{AB}\perp\overline{CD}$，$\overline{CD}$為∠ECF 的角平分線，試證∠ACE＝∠BCF。

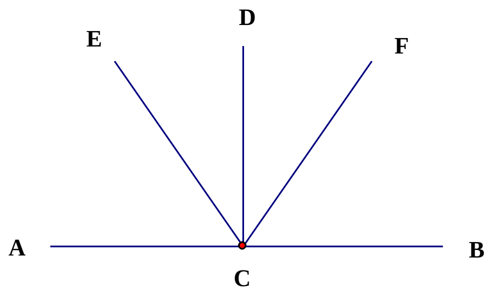


圖 3.1-11

習題 3.1-5

圖 3.1-12 中，∠BAC 與∠BCA 互為餘角，∠DEC 與∠DCE 互為餘角，試證∠BAC＝∠DEC。

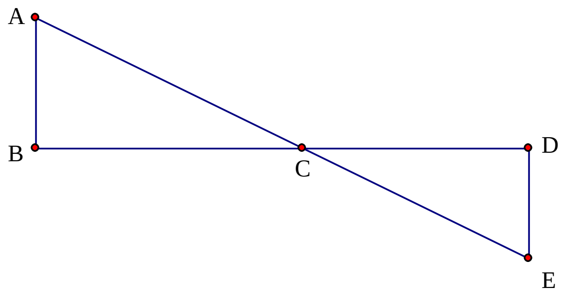


圖 3.1-12

3.2 節　平行線

在 1.4 節，我們已經給平行線下了定義，我們現在將定義 1.4-1 在此再敘述一遍。如圖 3.2-1 所示，兩直線如永不相交，則我們稱此兩直線互相平行。以 $\|$ 表示之，以圖 3.2-1 為例，我們說 $\overline{AB} \| \overline{CD}$。

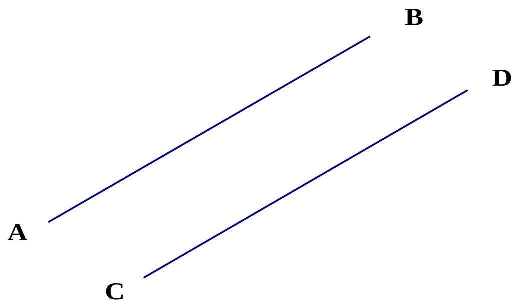


圖 3.2-1

在上一節，我們討論了很多有關垂直線的定理，在以下，我們將證明一個非常重要的定理。

定理 3.2-1　兩條直線如都與一直線垂直，則此二直線互相平行

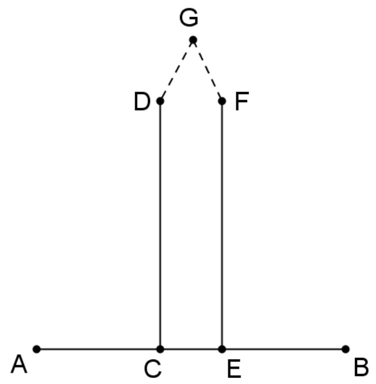


圖 3.2-2

已知：如圖 3.2-2 所示，$\overline{CD}\perp\overline{AB}$，$\overline{EF}\perp\overline{AB}$。

求證： $\overline{CD}\parallel\overline{EF}$。

想法：通過直線外一點，只有一條直線與此一直線垂直

證明：

敘述	理由
(1) 假設$\overline{CD}$與$\overline{EF}$為不互相平行的兩相異直線，則$\overline{CD}$與$\overline{EF}$必交於 G 點。	平行線永不相交
(2) $\overline{GC}\perp\overline{AB}$。	已知（因$\overline{GDC}$為一直線）
(3) $\overline{GE}\perp\overline{AB}$。	已知（因$\overline{GFE}$為一直線）
(4) $\overline{GDC}$與$\overline{GFE}$必為一直線。	過直線外一點，只有一條直線垂直此直線
(5) $\overline{CD}\parallel\overline{EF}$	由(4)與(1)的假設互相矛盾，所以$\overline{CD}\parallel\overline{EF}$

Q. E. D.

定理 3.2-2　與兩平行線中之一直線垂直之直線必定與另一直線垂直

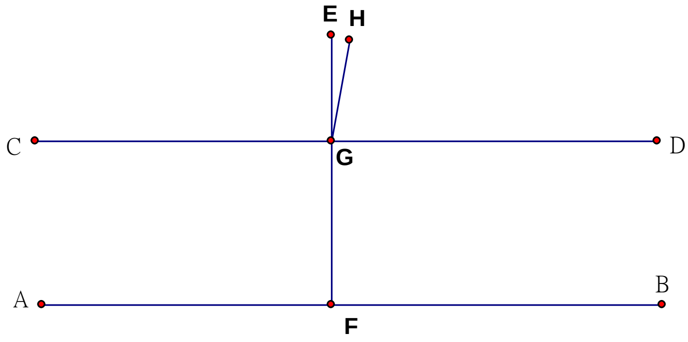


圖 3.2-3

已知： 如圖 3.2-3 所示，$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，$\overline{EF} \perp \overline{AB}$，$\overline{EF}$與$\overline{CD}$相交於 G。

求證： $\overline{EF} \perp \overline{CD}$。

想法：(1) 如兩直線都垂直某直線，則此兩直線必定平行

(2) 通過直線外一點，只有一條直線與此一直線平行

證明：

敘述	理由
(1) 通過 G 作$\overline{GH} \perp \overline{AB}$。	延長線畫法
(2) $\overline{AB} \perp \overline{EF}$。	已知
(3) $\overline{GH} \parallel \overline{EF}$。	如兩直線都垂直某直線，則此兩直線必定平行
(4) $\overline{GH}$和$\overline{GE}$重合。	通過直線外一點，只有一條直線與此一直線平行
(5) $\overline{CD} \perp \overline{EF}$。	$\overline{CGD}$為一直線。

Q. E. D.

以下，我們將再提出一個非常有用的定理。

定理 3.2-3　夾於兩平行直線之間且垂直於兩直線之兩線段相等。
(兩平行線間的距離不變，處處等長)

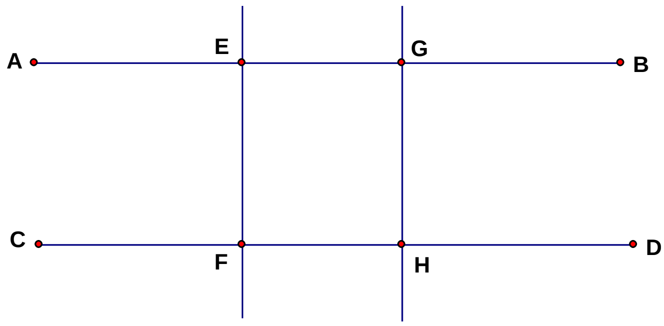


圖 3.2-4

已知：如圖 3.2-4 所示，$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，$\overline{EF} \perp \overline{AB}$，$\overline{EF} \perp \overline{CD}$，$\overline{GH} \perp \overline{AB}$，$\overline{GH} \perp \overline{CD}$
求證：$\overline{EF} = \overline{GH}$

想法：利用移形公理
證明：

敘述	理由
(1) 將$\overline{EF}$向右平移，使 E 點與 G 點重合	移形公理
(2) $\overline{EF} \perp \overline{CD}$ 且 $\overline{GH} \perp \overline{CD}$	已知$\overline{EF} \perp \overline{CD}$ 且 $\overline{GH} \perp \overline{CD}$
(3) $\overline{EF}$與$\overline{GH}$必為同一直線	由(1) E 點與 G 點重合 ＆ (2) $\overline{EF} \perp \overline{CD}$ 且 $\overline{GH} \perp \overline{CD}$過直線外一點，只有一條直線垂直此直線
(4) F 點與 H 點重合	由(1) E 點與 G 點重合 ＆ (3) $\overline{EF}$與$\overline{GH}$必為同一直線 ＆ F 點與 H 點皆在$\overline{CD}$上
(5) $\overline{EF} = \overline{GH}$	由(1) ＆ (4) 兩點間只有一條線段

Q. E. D.

定義 3.2-1 截線：

一線與多條直線相交，則稱此線為截線。

圖 3.2-5 中之$\overline{AB}$與$\overline{CD}$都稱為截線。

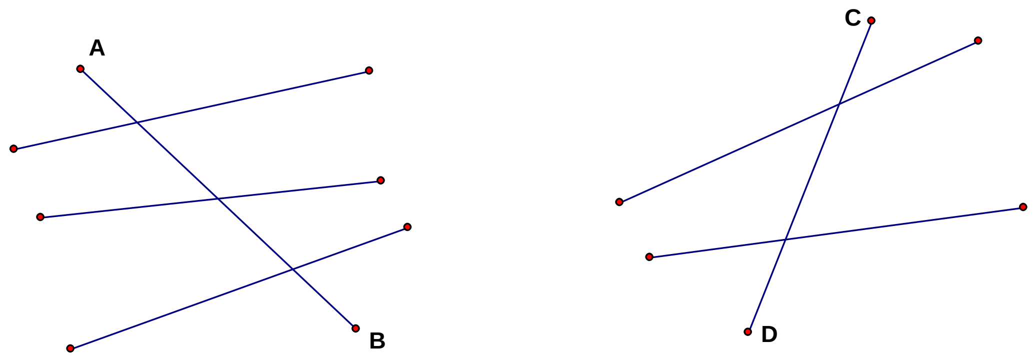


圖 3.2-5

不論兩直線平行與否，都可能有一截線和它們相交。相交的結果會產生各種的角。以下，我們就要給各種角下定義。

定義 3.2-2 內角：

在兩直線內側的角，叫做內角。

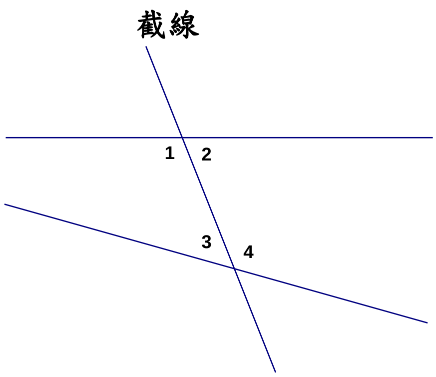


圖 3.2-6

圖 3.2-6 中，∠1，∠2，∠3，∠4，均為內角。

定義 3.2-3 外角：

在兩直線外側的角，叫做外角。

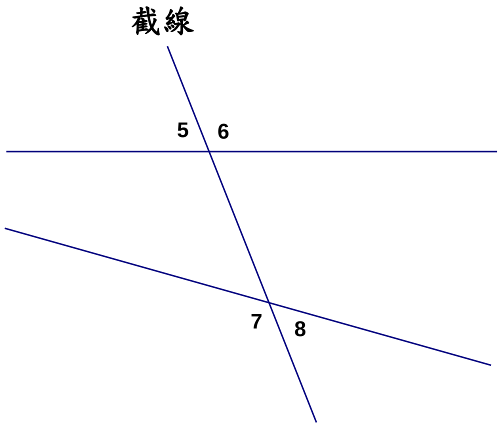


圖 3.2-7

圖 3.2-7 中，∠5，∠6，∠7，∠8，均為外角。

定義 3.2-4 內錯角：

位居於截線兩側且不相鄰的內角，叫做內錯角。

在圖 3.2-6 中，∠2 和∠3 互為內錯角，∠1 和∠4 是另一組內錯角。

定義 3.2-5 外錯角：

位居於截線兩側且不相鄰的外角，叫做外錯角。

在圖 3.2-7 中，∠5 和∠8 互為外錯角，∠6 和∠7 是另一組外錯角。

定義 3.2-6 同位角：

位居於截線同側且不相鄰的內角與外角，叫做同位角。

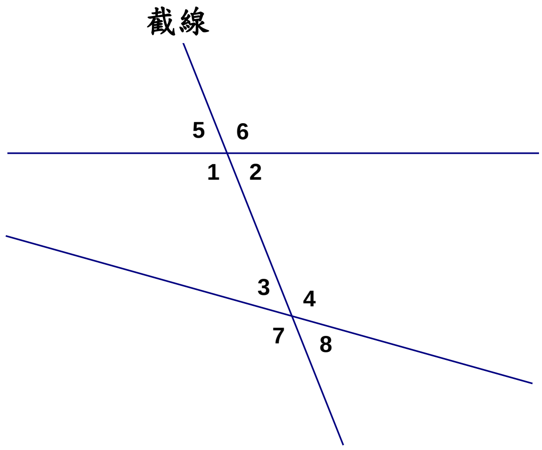


圖 3.2-8

在圖 3.2-8 中，∠1 和∠7 是一組同位角，∠2 與∠8，∠5 與∠3 以及∠6 與∠4 都是同位角。

定義 3.2-7 同側內角：

位於截線同側的內角，叫做同側內角。

在圖 3.2-6 中，∠1 和∠3 為一組同側內角，∠2 和∠4 為另一組同側內角。

定義 3.2-8 同側外角：

位於截線同側的外角，叫做同側外角。

在圖 3.2-7 中，∠5 和∠7 為一組同側外角，∠6 和∠8 為另一組同側外角。

例題 3.2-1：

如圖 3.2-9，L 是 L_1 和 L_2 的截線，則：

(1)∠2 的同位角為 ____________。

(2)∠4 的同側內角為 __________。

(3)∠5 的內錯角為 ____________。

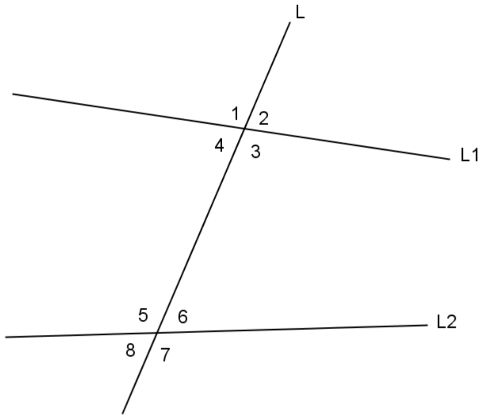


圖 3.2-9

想法：(1) 位於截線兩側且不相鄰的內角，叫做內錯角。

(2) 位於截線同側且不相鄰的內角與外角，叫做同位角。

(3) 位於截線同側的內角，叫做同側內角。

解：

敘述	理由
(1) ∠2 的同位角為∠6	同位角的定義
(2) ∠4 的同側內角為∠5	同側內角的定義
(3) ∠5 的內錯角為∠3	內錯角的定義

例題 3.2-2：

如圖 3.2-10，$\overline{PQ}$與四邊形 ABCD 交於 E、F 兩點。

(1)∠AEF 的同位角是哪一個角？

(2)∠AEF 的內錯角是哪一個角？

(3)∠AEF 的同側內角是哪一個角？

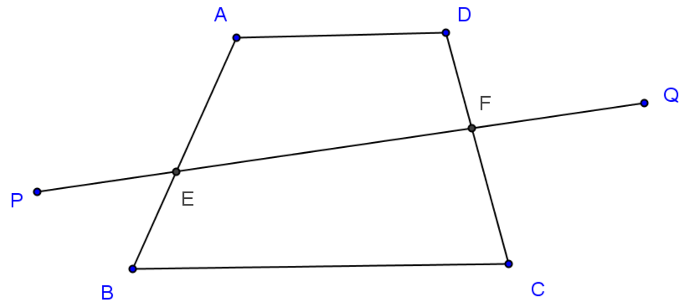


圖 3.2-10

想法：(1) 位於截線兩側且不相鄰的內角，叫做內錯角。

(2) 位於截線同側且不相鄰的內角與外角，叫做同位角。

(3) 位於截線同側的內角，叫做同側內角。

解：

敘述	理由
(1) ∠AEF 的同位角為∠DFQ	同位角的定義
(2) ∠AEF 的內錯角為∠CFE	內錯角的定義
(3) ∠AEF 的同側內角為∠DFE	同側內角的定義

定理 3.2-4　平行線的內錯角相等定理

一截線與兩平行線相交所造成的一組內錯角相等

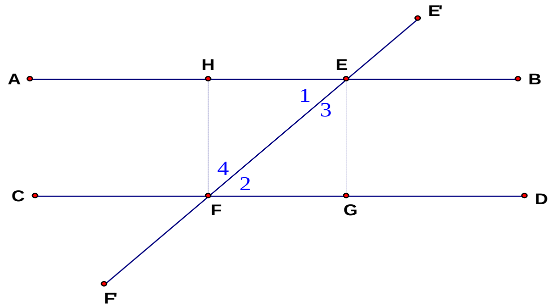


圖 3.2-11

已知：如圖 3.2-11 中，$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，$\overline{EF}$為截線

求證：　$\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$

想法：利用兩全等三角形對應角相等的性質

證明：

敘述	理由
(1) 通過 F 及 E，畫$\overline{FH}$及$\overline{GE}$垂直於$\overline{AB}$之直線，分別與$\overline{AB}$及$\overline{CD}$交於 H 及 G。	延長線作圖
(2) $\overline{HF} \perp \overline{CD}$，$\overline{EG} \perp \overline{CD}$。	與兩平行線($\overline{AB}$與$\overline{CD}$)中之一直線($\overline{AB}$)垂直，必定與另一直線($\overline{CD}$)垂直
(3) $\overline{HF} = \overline{EG}$。	夾於兩平行直線($\overline{AB}$與$\overline{CD}$)且垂直於兩直線($\overline{AB}$與$\overline{CD}$)之兩線段($\overline{HF}$與$\overline{EG}$)相等
(4) $\overline{HF} \parallel \overline{EG}$。	兩條直線($\overline{HF}$與$\overline{EG}$)如都與一直線($\overline{AB}$)垂直，則此兩直線平行
(5) $\overline{HE} \perp \overline{HF}$，$\overline{HE} \perp \overline{EG}$，$\overline{FG} \perp \overline{HF}$，$\overline{FG} \perp \overline{EG}$。	如圖 3.2-11 所示
(6) $\overline{HE} = \overline{FG}$。	夾於兩平行線($\overline{HF}$與$\overline{EG}$)之間且垂直於兩直線之兩線段($\overline{HE}$與$\overline{FG}$)相等
(7) $\triangle$HEF 及$\triangle$GFE 中，$\overline{HF} = \overline{GE}$，$\overline{HE} = \overline{GF}$，$\overline{EF} = \overline{FE}$。	如圖 3.2-11 由(3)&(6)已證　&　共同邊
(8) $\triangle$HEF $\cong$ $\triangle$GFE。	由(7) S.S.S.三角形全等定理
(9) $\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$。	對應角相等

例題 3.2-3：

如圖 2.3-12，$L_1//L_2$，L 為截線，∠3＝80°，則：

(1)∠5＝＿＿＿＿度　　　　(2)∠6＝＿＿＿＿度

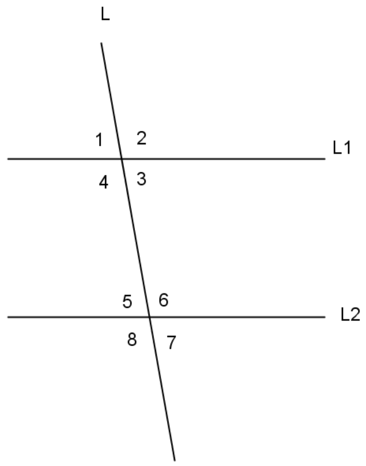


圖 3.2-12

想法：一截線與兩平行線相交所造成的一組內錯角相等

解：

敘述	理由
(1) ∠5 與∠3 互為內錯角	已知 L 為截線
(2) ∠5＝∠3＝80°	已知 $L_1//L_2$，內錯角相等 ＆ ∠3＝80°
(3) ∠6＋∠5＝180°	∠5＋∠6 為平角 180°
(4) ∠6＝180°－80°＝100°	由(3) 等量減法公理 ＆ 由(2) ∠5＝80° 已證

例題 3.2-4：

如圖 3.2-13，$L_1 // L_2$，L 為截線，求：

(1) x＝____________。

(2)∠1＝____________度。

(3)∠2＝____________度。

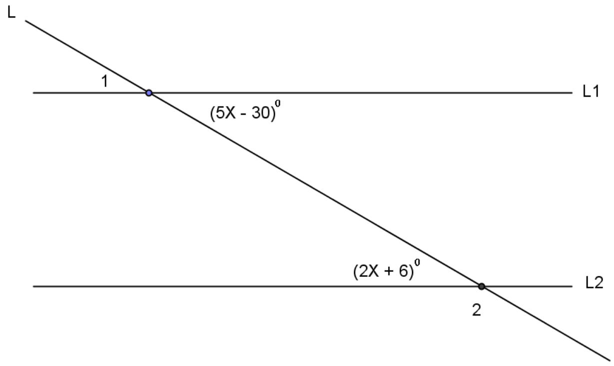


圖 3.2-13

想法：一截線與兩平行線相交所造成的一組內錯角相等

解：

敘述	理由
(1) $(5x-30)^\circ=(2x+6)^\circ$	已知 $L_1 // L_2$ ＆ 內錯角相等
(2) $x=12$	由(1) 解一元一次方程式
(3) $\angle 1=(5x-30)^\circ=30^\circ$	對頂角相等 ＆ 由(2) $x=12$ 已證
(4) $\angle 2=180^\circ-(2x+6)^\circ=150^\circ$	$\angle 2$ 與$(2x+6)^\circ$互補 ＆ 由(2) $x=12$ 已證

例題 3.2-5：

如圖 3.2-14，已知 $L_1//L_2$，若∠1＝∠2，∠4＝∠5，則：

(1)∠1 與∠5 是否相等？

(2)∠3 與∠6 是否相等？

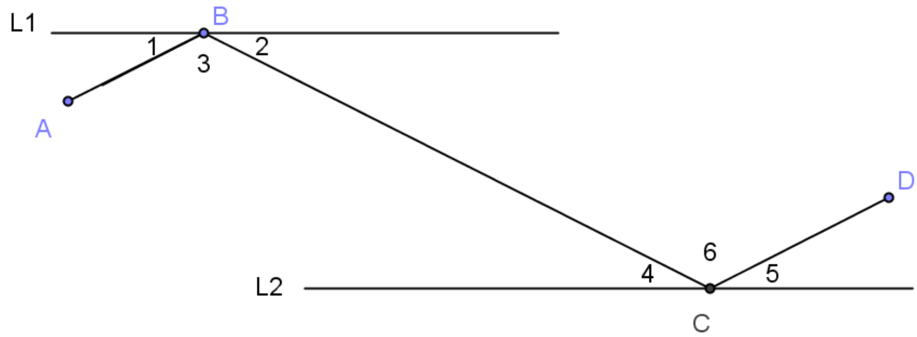


圖 3.2-14

想法：一截線與兩平行線相交所造成的一組內錯角相等

解：

敘述	理由
(1) ∠2＝∠4	$L_1//L_2$，內錯角相等
(2) ∠1＝∠2＝∠4＝∠5	已知∠1＝∠2，∠4＝∠5 ＆ (1)遞移律
(3) ∠1＝∠5	由(2)
(4) ∠1＋∠2＝∠4＋∠5	由(1)式 ＋ (3)式
(5) ∠3＝180°－(∠1＋∠2)	∠1＋∠2＋∠3＝180°
(6) ∠6＝180°－(∠4＋∠5)	∠4＋∠5＋∠6＝180°
(7) ∠3＝∠6	由(4) ＆ (5) ＆ (6)

有了平行線的內錯角相等的定理，我們可以很容易地證明平行線的外錯角相等，理由很簡單，內錯角和外錯角相等。

定理 3.2-5　平行線的外錯角相等定理

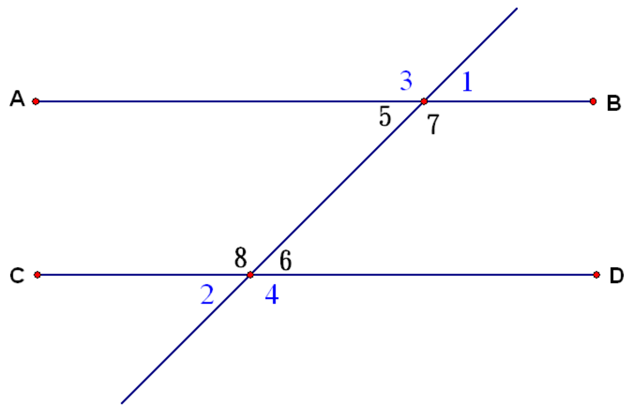


圖 3.2-15

已知：如圖 3.2-15 中，$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

求證：$\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$。

想法：兩線段互相平行，則內錯角相等

證明：

敘述	理由
(1) $\angle 5 = \angle 6$	已知$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，內錯角相等
(2) $\angle 5 = \angle 1$	如圖 3.2-15 所示，對頂角相等
(3) $\angle 6 = \angle 2$	如圖 3.2-15 所示，對頂角相等
(4) 所以 $\angle 1 = \angle 2$	將(2)&(3)代入(1)
(5) $\angle 7 = \angle 8$	已知$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，內錯角相等
(6) $\angle 7 = \angle 3$	如圖 3.2-15 所示，對頂角相等
(7) $\angle 8 = \angle 4$	如圖 3.2-15 所示，對頂角相等
(8) 所以 $\angle 3 = \angle 4$	將(6)&(7)代入(5)

Q. E. D.

根據以上的定理，我們還可以證明下面的定理。

定理 3.2-6　平行線的同位角相等定理

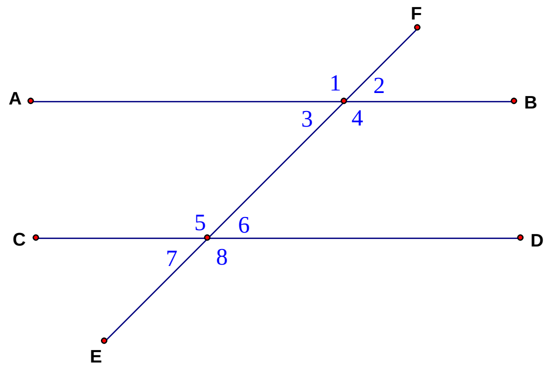


圖 3.2-16

已知： 如圖 3.2-16 所示，$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

求證： ∠1＝∠5，∠3＝∠7，∠2＝∠6，∠4＝∠8

想法： 兩線段互相平行，則內錯角相等

證明：

敘述	理由
(1) ∠3＝∠6	已知$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，內錯角相等
(2) ∠3＝∠2	如圖 3.2-16 所示，對頂角相等
(3) 所以∠2＝∠6	由(1)＆(2)遞移律
(4) 同理可證∠1＝∠5，∠3＝∠7，∠4＝∠8	由(1)＆(2)＆(3)

Q. E. D.

例題 3.2-6：

如圖 3.2-17，$L_1 \parallel L_2$，M 是 L_1、L_2 的一條截線，若$\angle 1 = 50°$，求$\angle 2$。

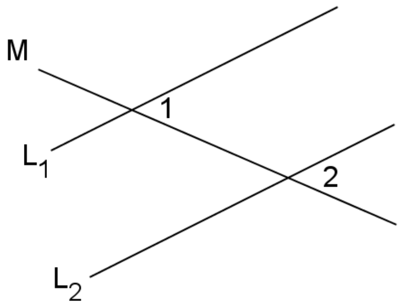


圖 3.2-17

想法：已知一截線與兩平行線相交，則：

1. 內錯角相等
2. 同位角相等

解：

敘述	理由
(1) $\angle 1$ 的同位角為$\angle 2$	已知 M 是 L_1、L_2 的一條截線
(2) $\angle 2 = \angle 1$	已知 $L_1 \parallel L_2$ ＆ 同位角相等
(3) $\angle 2 = 50°$	由(2) ＆ 已知$\angle 1 = 50°$

例題 3.2-7：

小明觀察百葉窗的結構，發現各葉片是互相平行，且中央軸線是一條貫穿各葉片的直線。圖 3.2-18 是百葉窗側面的部分示意圖，已知∠1＝65°，求∠2。

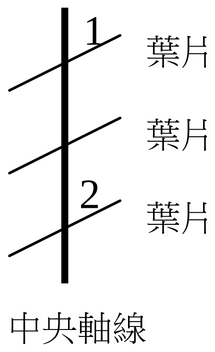


圖 3.2-18

想法：已知一截線與兩平行線相交，則：

1. 內錯角相等
2. 同位角相等

解：

敘述	理由
(1) ∠1 的同位角為∠2	中央軸線是葉片的截線
(2) ∠2＝∠1	各葉片互相平行，同位角相等
(3) ∠2＝65°	由(2) & ∠1＝65°

例題 3.2-8：

如圖 3.2-19，$L_1 \parallel L_2$，M 是 L_1、L_2 的一條截線，$\angle 1 = 31°$，求$\angle 2$。

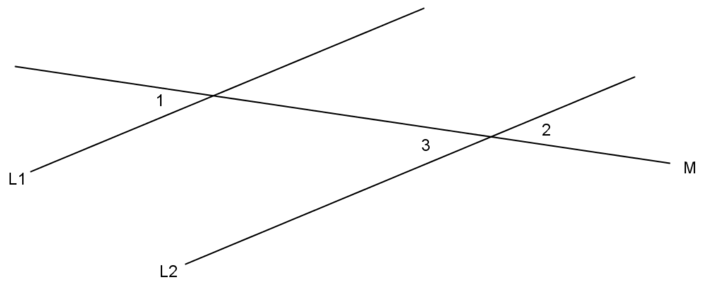


圖 3.2-19

想法：已知一截線與兩平行線相交，則：

1. 內錯角相等
2. 同位角相等

解：

敘述	理由
(1) $\angle 1$ 的同位角為$\angle 3$	M 是 L_1、L_2 的一條截線
(2) $\angle 3 = \angle 1$	$L_1 \parallel L_2$，同位角相等
(3) $\angle 3 = 31°$	由(2) & $\angle 1 = 31°$
(4) $\angle 2 = \angle 3 = 31°$	對頂角相等
(5) $\angle 2 = 31°$	由(4)

例題 3.2-9：

如圖 3.2-20，一棵原本筆直的椰子樹遭雷擊斷裂成三段，頭尾兩段剛好互相平行，已知∠1＝120°，求：

(1) ∠2。

(2) 樹頂從 P 點到 Q 點共轉了幾度？

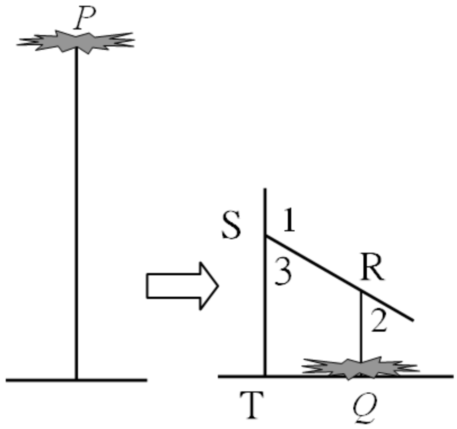


圖 3.2-20

想法：已知一截線與兩平行線相交，則：

1. 內錯角相等
2. 同位角相等

解：

敘述	理由
(1) ∠2 的同位角為∠3	$\overline{SR}$是$\overline{ST}$與$\overline{RQ}$的一條截線
(2) ∠3＝∠2	$\overline{ST}$與$\overline{RQ}$互相平行，同位角相等
(3) ∠3＝180°－∠1	∠3＋∠1＝180°
(4) ∠3＝180°－120°＝60°	由(3) ＆ ∠1＝120°
(5) ∠2＝∠3＝60°	由(2) ＆ (4)
(6) ∠1＋∠2＝120°＋60°＝180°	樹頂從 P 點到 Q 點共轉了∠1＋∠2

例題 3.2-10：

如圖 3.2-21，$L_1 \parallel L_2$，M 及 N 都是 L_1、L_2 的截線，且交點在 L_1 上，$\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$，求$\angle 4$。

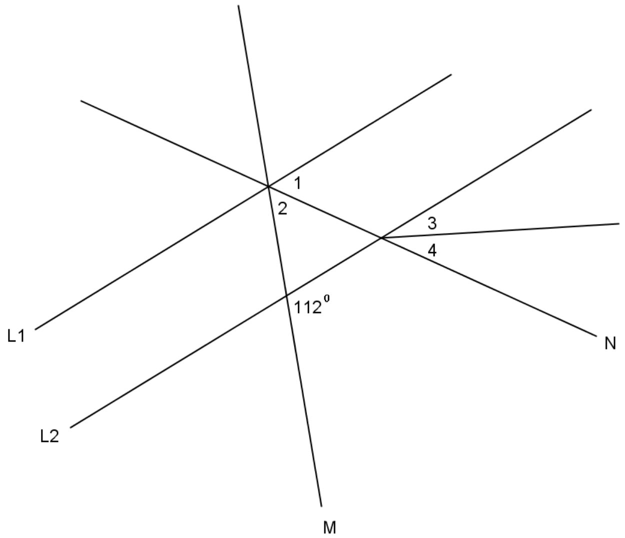


圖 3.2-21

想法：已知一截線與兩平行線相交，則：

1. 內錯角相等
2. 同位角相等

解：

敘述	理由
(1) $\angle 1$ 的同位角為$\angle 3 + \angle 4$	N 是 L_1、L_2 的一條截線
(2) $\angle 1 = \angle 3 + \angle 4$	$L_1 \parallel L_2$，同位角相等
(3) $\angle 1 + \angle 2$ 的同位角為 112°	M 是 L_1、L_2 的一條截線
(4) $\angle 1 + \angle 2 = 112°$	$L_1 \parallel L_2$，同位角相等
(5) $\angle 1 = \angle 2 = 56°$	由(4) & $\angle 1 = \angle 2$
(6) $\angle 3 + \angle 4 = \angle 1 = 56°$	由(2) & (5)
(7) $\angle 4 = \angle 3 = 28°$	由(6) & $\angle 3 = \angle 4$

例題 3.2-11：

如圖 3.2-22，$L_1 \parallel L_2$，$L_3 \parallel L_4$，則：

(1)$\angle 1$＝____________度。 (2)$\angle 2$＝____________度。

(3)$\angle 3$＝____________度。 (4)$\angle 4$＝____________度。

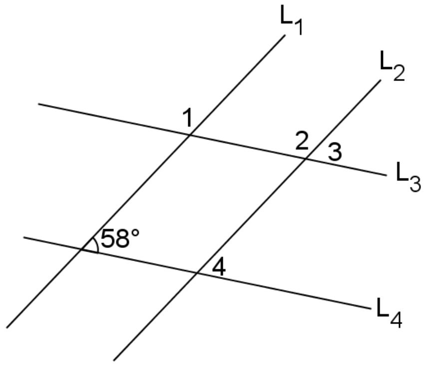


圖 3.2-22

想法：已知一截線與兩平行線相交，則：

1. 內錯角相等
2. 同位角相等

解：

敘述	理由
(1) $\angle 4 = 58°$	$L_1 \parallel L_2$，同位角相等
(2) $\angle 3 = \angle 4 = 58°$	$L_3 \parallel L_4$，同位角相等 & $\angle 4 = 58°$
(3) $\angle 2 = 180° - \angle 3$	$\angle 3$ 與 $\angle 2$ 互補，$\angle 3 + \angle 2 = 180°$
(4) $\angle 2 = 180° - \angle 3 = 122°$	由(3) & $\angle 3 = 58°$
(5) $\angle 1 = \angle 2 = 122°$	$L_1 \parallel L_2$，同位角相等 & $\angle 2 = 122°$

例題 3.2-12：

已知：如圖 3.2-23 所示，$\overline{AD}=\overline{AE}$，$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$。

證明：△ABC 為等腰三角形。

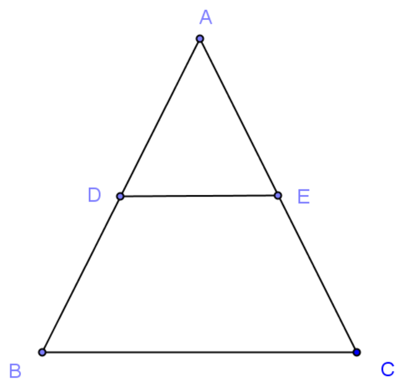


圖 3.2-23

想法：(1) 兩底角相等為等腰三角形

(2) 已知一截線與兩平行線相交，則：

1. 內錯角相等
2. 同位角相等

證明：

敘述	理由
(1) △ADE 為等腰三角形	$\overline{AD}=\overline{AE}$
(2) ∠ADE＝∠AED	等腰三角形兩底角相等
(3) ∠ADE＝∠B	$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$，同位角相等
(4) ∠AED＝∠C	$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$，同位角相等
(5) ∠B＝∠C	由(2)＆(3)＆(4)
(6) △ABC 為等腰三角形	∠B＝∠C，兩底角相等為等腰三角形

Q.E.D.

定理 3.2-7　平行線的同側內角互為補角定理

一線與兩平行線相交，其同側的兩內角會互為補角。

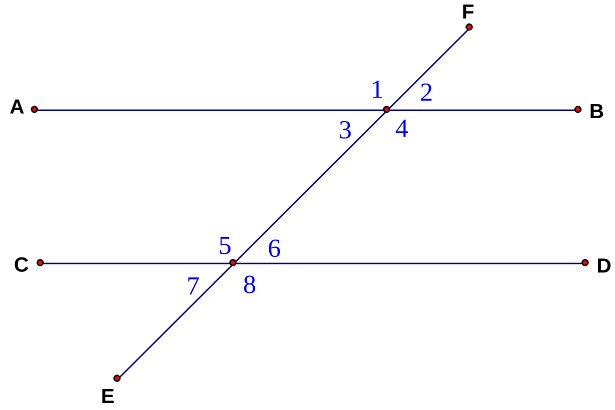


圖 3.2-24

已知：圖 3.2-24 中，$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
求證：$\angle 3 + \angle 5 = 180°$，$\angle 4 + \angle 6 = 180°$

想法一：兩線段互相平行，則內錯角相等
證明一：

敘述	理由
(1) $\angle 6 = \angle 3$	已知$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，內錯角相等
(2) $\angle 5 + \angle 6 = 180°$	如圖 3.2-24 所示，$\overline{CD}$為一線段
(3) 所以$\angle 5 + \angle 3 = 180°$	將(1) $\angle 6 = \angle 3$ 代入(2)
(4) 同理可證$\angle 4 + \angle 6 = 180°$	由(1)&(2)&(3)

Q.E.D.

想法二：兩線段互相平行，則同位角相等
證明二：

敘述	理由
(1) $\angle 1 = \angle 5$	已知$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，同位角相等
(2) $\angle 1 + \angle 3 = 180°$	如圖 3.2-24 所示，$\overline{EF}$為一線段
(3) 所以$\angle 5 + \angle 3 = 180°$	將(1) $\angle 1 = \angle 5$ 代入(2)
(4) 同理可證$\angle 4 + \angle 6 = 180°$	由(1)&(2)&(3)

Q.E.D.

例題 3.2-13：

圖 3.2-25 是美工刀的一部分。小美測量其刀尖的角度∠1＝62°，若刀片上下兩側互相平行，求∠2。

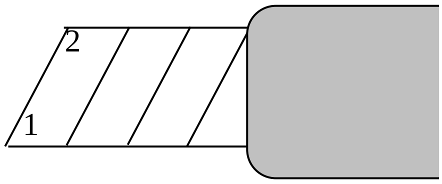


圖 3.2-25

想法：一截線與兩平行線相交，則：

1. 內錯角相等
2. 同位角相等
3. 同側內角互補

解：

敘述	理由
(1) ∠2 與∠1 互為同側內角	如圖 3.2-25 所示
(2) ∠2＋∠1＝180°	刀片上下兩側互相平行，同側內角互補
(3) ∠2＝180°－∠1	由(2)
(4) ∠2＝118°	由(3) ＆∠1＝62°

例題 3.2-14：

如圖 3.2-26，$L_1 \parallel L_2$，M 是 L_1、L_2 的一條截線，若∠1＝47°，求∠2、∠3。

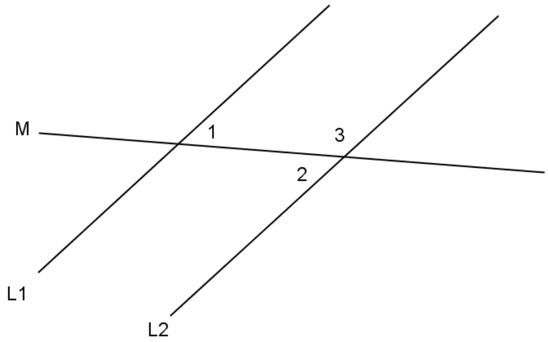


圖 3.2-26

想法：一截線與兩平行線相交，則：

1. 內錯角相等
2. 同位角相等
3. 同側內角互補

解：

敘述	理由
(1) ∠3 與∠1 互為同側內角	M 是 L_1、L_2 的一條截線
(2) ∠3＋∠1＝180°	$L_1 \parallel L_2$，同側內角互補
(3) ∠3＝180°－∠1	由(2)
(4) ∠3＝180°－47°＝133°	由(3) ＆ ∠1＝47°
(5) ∠2 與∠1 互為內錯角	M 是 L_1、L_2 的一條截線
(6) ∠2＝∠1＝47°	$L_1 \parallel L_2$，內錯角相等 ＆ ∠1＝47°

例題 3.2-15：

如圖 3.2-27，$L_1 \parallel L_2$，M 是 L_1、L_2 的一條截線，$\angle 1 = 123°$，求$\angle 2$。

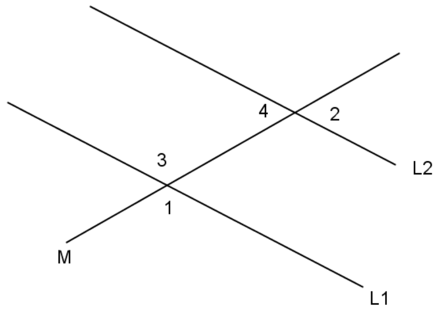


圖 3.2-27

想法：一截線與兩平行線相交，則：

1. 內錯角相等
2. 同位角相等
3. 同側內角互補

解：

敘述	理由
(1) $\angle 3 = \angle 1 = 123°$	對頂角相等
(2) $\angle 3 + \angle 4 = 180°$	$L_1 \parallel L_2$，同側內角互補
(3) $\angle 4 = 180° - \angle 3 = 180° - \angle 1$	由(2)＆(1)
(4) $\angle 4 = 180° - 123° = 57°$	由(3)＆(1)
(5) $\angle 2 = \angle 4 = 57°$	對頂角相等

定理 3.2-8　內錯角相等的兩線平行定理

一截線與兩直線相交，所造成的任一組內錯角相等，則這兩線平行。

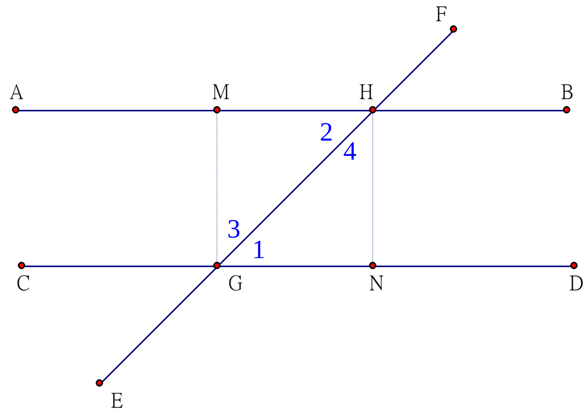


圖 3.2-28

已知：如圖 3.2-28 中，$\overline{AB}$及$\overline{CD}$兩直線與$\overline{EF}$相交，且$\angle 1=\angle 2$。

求證： $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

想法： 利用垂直於同一直線的兩線平行定理。

證明：

敘述	理由
(1) 過 G 畫$\overline{GM}$垂直$\overline{CD}$，交$\overline{AB}$於 M。	通過直線上一點，只有一條直線與此直線垂直
(2) 過 H 畫$\overline{HN}$垂直$\overline{CD}$，交$\overline{CD}$於 N。	通過直線外上一點，只有一條直線與此直線垂直
(3) ∵ $\overline{GM} \perp \overline{CD}$ 且 $\overline{NH} \perp \overline{CD}$， ∴ $\overline{GM} \parallel \overline{NH}$。	垂直於同一直線的兩線平行定理
(4) $\angle 3=\angle 4$	平行線的內錯角相等
(5) $\angle 1=\angle 2$	已知
(6) $\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$	由(4) & (5) 等量相加
(7) $\angle 1+\angle 3=90^{\circ}$	由(1)，$\overline{GM} \perp \overline{CD}$
(8) $\angle 2+\angle 4=90^{\circ}$	由(6) & (7)
(9) $\overline{NH} \perp \overline{AB}$	由(8) & 垂直定義
(10) $\overline{NH} \perp \overline{CD}$ 且 $\overline{NH} \perp \overline{AB}$	由(2) & (9)
(11) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	垂直於同一直線的兩線平行定理

Q. E. D.

例題 3.2-16：

如圖 3.2-29，小惠利用直尺及麥克筆，在海報紙上寫了一個很大的英文字母「N」，她量得∠1 和∠2 的度數相同，則這個「N」字的左右兩邊是否平行？為什麼？

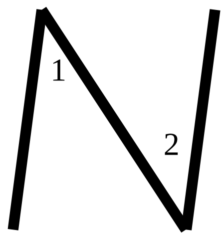


圖 3.2-29

想法：內錯角相等的兩線平行

解：

敘述	理由
(1) 這個「N」字的左右兩邊互相平行	∠1＝∠2，內錯角相等的兩線平行定理

有了內錯角相等的兩線平行定理之後，很容易就可以證明下面三個定理。

定理 3.2-9　外錯角相等的兩線平行定理

一截線與兩直線相交，所造成的任一組外錯角相等，則這兩線平行。

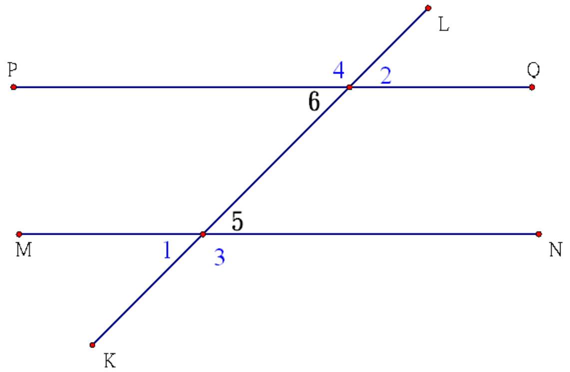


圖 3.2-30

已知：如圖 3.2-30 中，$\angle 1 = \angle 2$ 或 $\angle 3 = \angle 4$
求證：$\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$

想法：利用內錯角相等，則兩線互相平行的定理

證明：

敘述	理由
(1) $\angle 5$ 與 $\angle 6$ 為一組內錯角	如 3.2-30 圖，$\overline{KL}$為$\overline{MN}$與$\overline{PQ}$的截線
(2) $\angle 5 = \angle 1$	如圖 3.2-30 所示，對頂角相等
(3) $\angle 6 = \angle 2$	如圖 3.2-30 所示，對頂角相等
(4) $\angle 5 = \angle 1 = \angle 2 = \angle 6$	由(2) & (3) & 已知$\angle 1 = \angle 2$
(5) 所以$\angle 5 = \angle 6$	由(4)
(6) 所以$\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$	由(5) $\angle 5 = \angle 6$ 已證 & 內錯角相等，兩直線互相平行定理
(7) 同理可證，若$\angle 3 = \angle 4$，則$\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$	由(1)~(6)

Q.E.D.

定理 3.2-10　同位角相等的兩線平行定理

一截線與兩直線相交，所造成的任一組同位角相等，則這兩線平行。

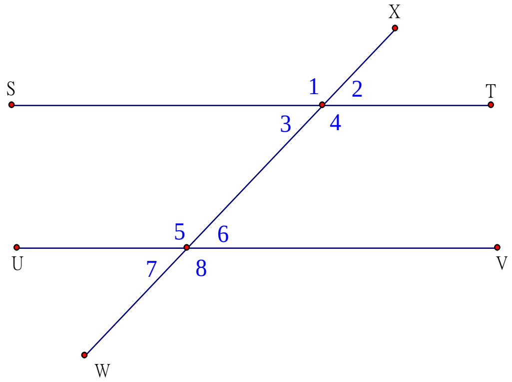


圖 3.2-31

已知：如圖 3.2-31 中，$\angle 1=\angle 5$ 或 $\angle 3=\angle 7$ 或 $\angle 2=\angle 6$ 或 $\angle 4=\angle 8$
求證：$\overline{ST} \parallel \overline{UV}$

想法：利用內錯角相等，則兩線互相平行的定理

證明：

敘述	理由
(1) $\angle 4$ 與 $\angle 5$ 為一組內錯角	如圖 3.2-31，$\overline{XW}$ 為 $\overline{ST}$ 與 $\overline{UV}$ 的截線
(2) $\angle 4=\angle 1$	如圖 3.2-31 所示，對頂角相等
(3) $\angle 4=\angle 1=\angle 5$	由(2) & 已知 $\angle 1=\angle 5$
(4) 所以 $\angle 4=\angle 5$	由(3)
(5) 所以 $\overline{ST} \parallel \overline{UV}$	由(4) $\angle 4=\angle 5$ 已證 & 內錯角相等，兩直線互相平行定理
(6) 同理可證，若 $\angle 3=\angle 7$ 或 $\angle 2=\angle 6$ 或 $\angle 4=\angle 8$，則 $\overline{ST} \parallel \overline{UV}$	由(1)~(5)

Q.E.D.

例題 3.2-17：

如圖 3.2-32，M 為 L_1、L_2 的截線，且$\angle 1=\angle 2=105°$，則 L_1、L_2 是否平行？

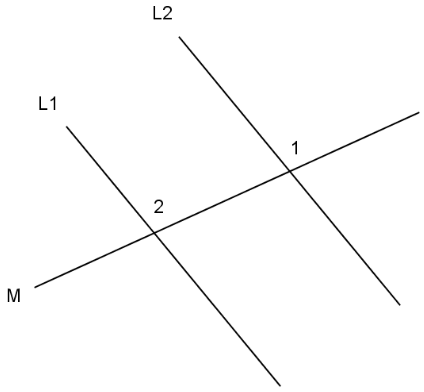


圖 3.2-32

想法： 已知判斷兩直線平行的方法有：

1. 內錯角相等的兩線平行
2. 同位角相等的兩線平行

解：

敘述	理由
(1) $L_1 \parallel L_2$	$\angle 1=\angle 2$，同位角相等的兩線平行定理

例題 3.2-18：

圖 3.2-33(a)為量販店裡購物手推車的側面簡圖。設粗線段稱為「頂邊」，
圖 3.2-33(b)為<u>小華</u>將兩台相同的手推車收納在一起的情形，此時兩條「頂邊」
是否平行？

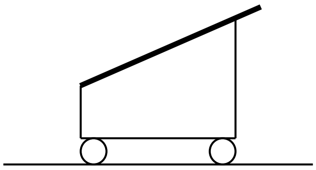


圖 3.2-33(a)

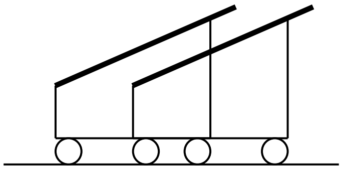
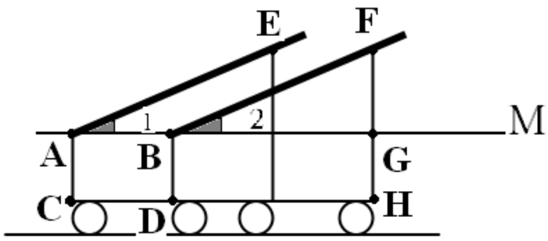


圖 3.2-33(b)

想法：已知判斷兩直線平行的方法有：

1. 內錯角相等的兩線平行
2. 同位角相等的兩線平行

解：

敘述	理由
(1) 作 $M \parallel \overline{CH}$ 分別交兩頂邊於 A、B 兩點，如圖 3.2-33(c)所示	 **圖 3.2-33(c)**
(2) $\angle ACH=\angle BDH$ 且 $\angle CAE=\angle DBF$	圖 3.2-33 為兩台相同手推車
(3) $\angle ACH+\angle CAG=180°$	由(1) $M \parallel \overline{CH}$ ＆ 同側內角互補
(4) $\angle CAG=180°-\angle ACH$	由(3) 等量減法公理
(5) $\angle BDH+\angle DBG=180°$	由(1) $M \parallel \overline{CH}$ ＆ 同側內角互補
(6) $\angle DBG=180°-\angle BDH$ $=180°-\angle ACH$ $=\angle CAG$	由(5) 等量減法公理 由(2) $\angle BDH=\angle ACH$ 代換 由(4) $\angle CAG=180°-\angle ACH$ 代換
(7) $\angle CAE=\angle CAG+\angle 1$	如圖 3.2-33(c) 全量等於分量之和
(8) $\angle DBF=\angle DBG+\angle 2$	如圖 3.2-33(c) 全量等於分量之和
(9) $\angle CAG+\angle 1=\angle DBG+\angle 2$	由(2) $\angle CAE=\angle DBF$ ＆ (7)、(8)

(10) ∠CAG＋∠1＝∠CAG＋∠2	由(9) ＆ (6) ∠DBG＝∠CAG 代換
(11) ∠1＝∠2	由(10) 等量減法公理
(12) 兩條頂邊互相平行	由(11) ∠1＝∠2，同位角相等的兩線平行定理

定理 3.2-11　同側內角互補的兩線平行定理

一截線與兩直線相交，所造成的任一組同側內角互補，則這兩線平行。

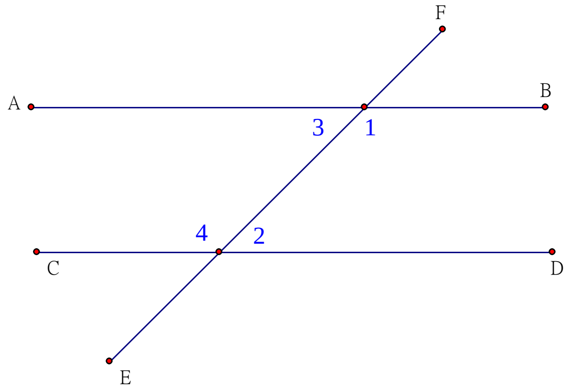


圖 3.2-34

已知：如圖 3.2-34 中，$\angle 1+\angle 2=180^\circ$ 或 $\angle 3+\angle 4=180^\circ$
求證：$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

想法：利用內錯角相等，則兩線互相平行的定理

證明：

敘述	理由
(1) $\angle 1$ 與 $\angle 4$ 為一組內錯角	如圖 3.2-34，$\overline{EF}$為$\overline{AB}$與$\overline{CD}$的截線
(2) $\angle 2+\angle 4=180^\circ$	如圖 3.2-34 所示，$\overline{CD}$為一線段
(3) $\angle 1+\angle 2=180^\circ$	已知$\angle 1+\angle 2=180^\circ$
(4) $\angle 2+\angle 4=\angle 1+\angle 2$	由(2) & (3)遞移律
(5) 所以$\angle 4=\angle 1$	由(4) 等量減法公理
(6) 所以$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	由(5) $\angle 4=\angle 1$ 已證 & 內錯角相等，兩直線互相平行定理
(7) 同理可證，若$\angle 3+\angle 4=180^\circ$ ，則$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	由(1)~(6)

Q.E.D.

例題 3.2-19：

如圖 3.2-35，L 為 L_1、L_2 的截線，且∠1＝41°，∠2＝141°，則 L_1 與 L_2 是否平行？

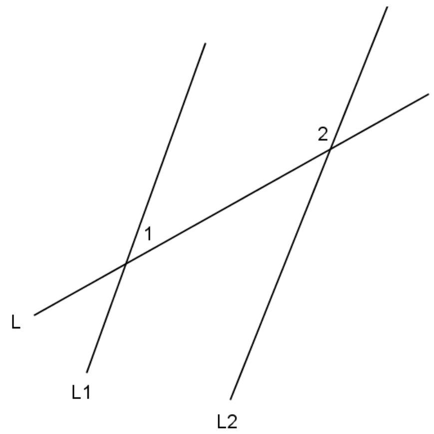


圖 3.2-35

想法：判斷兩直線平行的方法有：

1. 內錯角相等的兩線平行
2. 同位角相等的兩線平行
3. 同側內角互補的兩線平行

解：

敘述	理由
(1) ∠1＋∠2＝182°	已知∠1＝41° & ∠2＝141°
(2) L_1 與 L_2 不平行	同側內角不互補，則 L_1 與 L_2 不平行

例題 3.2-20：

如圖 3.2-36，直角△ABC 中，∠C＝90°，L 為$\overline{BC}$的中垂線。試檢查 L 與$\overline{AC}$是否互相平行。

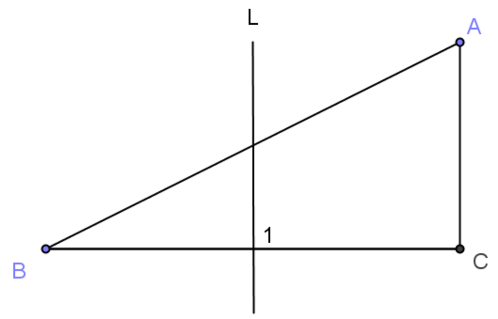


圖 3.2-36

想法：判斷兩直線平行的方法有：

1. 內錯角相等的兩線平行
2. 同位角相等的兩線平行
3. 同側內角互補的兩線平行

解：

敘述	理由
(1) ∠1＝90°	L 為$\overline{BC}$的中垂線
(2) ∠C＝90°	已知直角△ABC 中，∠C＝90°
(3) ∠1＋∠C＝180°	由(1) & (2)
(4) L ∥ $\overline{AC}$	∠1＋∠C＝180°，同側內角互補的兩線平行定理

例題 3.2-21：

下列各小題中的直線 L_1、L_2 是否平行？說明理由。

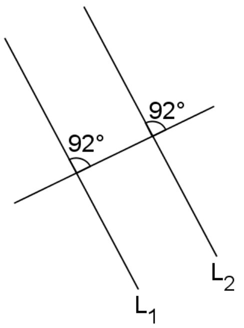
(1) 

圖 3.2-37(a)

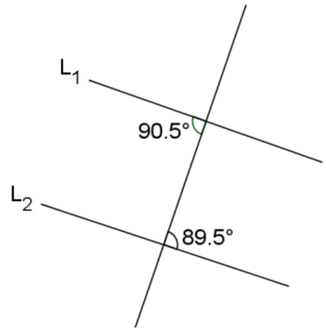
(2) 

圖 3.2-37(b)

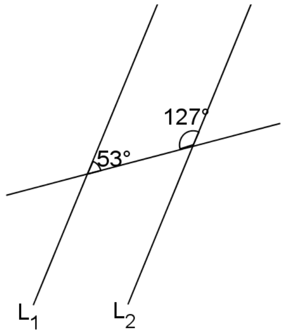
(3) 

圖 3.2-37(c)

想法：判斷兩直線平行的方法有：

1. 內錯角相等的兩線平行
2. 同位角相等的兩線平行
3. 同側內角互補的兩線平行

解：

敘述	理由
(1) 圖 3.2-37(a)中，$L_1 \parallel L_2$	92°＝92°，同位角相等的兩線平行定理
(2) 圖 3.2-37(b)中，L_1 與 L_2 不平行	90.5°≠89.5°，內錯角不相等
(3) 圖 3.2-37(c)中，$L_1 \parallel L_2$	53°＋127°＝180°，同側內角互補的兩線互相平行

在練習完內錯角、同位角、同側內角的基本題型之後，接下來，讓我們來練習一些變化的題型。

例題 3.2-22：

已知：圖 3.2-38 中，$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，∠C＝∠D，

試證：∠A＝∠B。

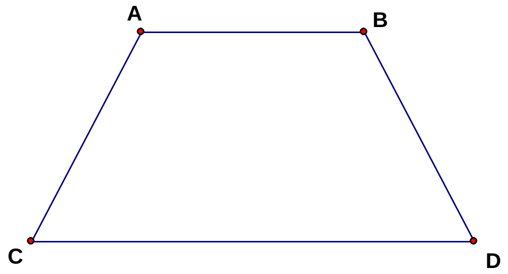


圖 3.2-38

想法：一截線與兩平行線相交，則：

1. 內錯角相等
2. 同位角相等
3. 同側內角互補

證明：

敘述	理由
(1) ∠A＋∠C＝180°	已知$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，同側內角互補
(2) ∠A＝180°－∠C	由(1) 等量減法公理
(3) ∠B＋∠D＝180°	已知$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，同側內角互補
(4) ∠B＝180°－∠D	由(3) 等量減法公理
(5) ∠A＝180°－∠C＝180°－∠D＝∠B	由(2) ＆ (4) ＆ 已知∠C＝∠D

例題 3.2-23：

已知：圖 3.2-39 中，$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，

試證：∠1＋∠2＋∠3＝∠3＋∠4＋∠5。

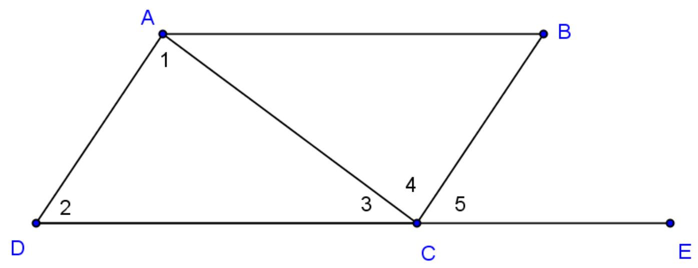


圖 3.2-39

想法：一截線與兩平行線相交，則：

1. 內錯角相等
2. 同位角相等
3. 同側內角互補

證明：

敘述	理由
(1) ∠2＝∠5	已知$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，∠2 與∠5 為同位角 & 同位角相等
(2) ∠1＝∠4	已知$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，∠1 與∠4 為內錯角 & 內錯角相等
(3) ∠1＋∠2＝∠4＋∠5	由(1)式 ＋ (2)式
(4) ∠1＋∠2＋∠3＝∠3＋∠4＋∠5	由(3) & 等量加法公理 (等式兩邊同加∠3)

由例題 3.2-23 中，我們可以得知另一個重要的定理：**(三角形三內角和 180°)**

∠1＋∠2＋∠3 為△ACD 的三個內角和，且∠3＋∠4＋∠5 為平角 180°，所以我們得知△ACD 的三個內角和∠1＋∠2＋∠3＝∠3＋∠4＋∠5＝180°。(三角形三內角和 180°的定理在第四章會再介紹一次)

例題 3.2-24：

已知：圖 3.2-40 中，$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$，

試證：$\overline{AB}=\overline{CD}$，$\overline{AC}=\overline{BD}$。

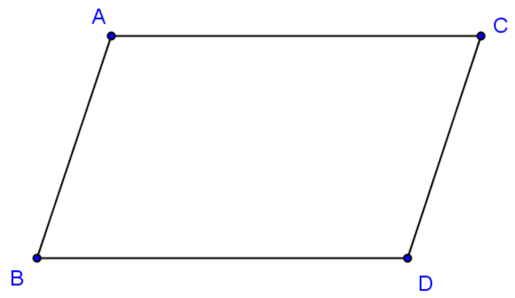


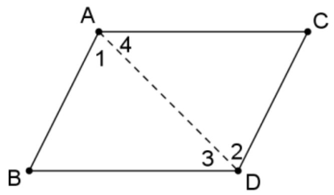
圖 3.2-40

想法：(1) 利用兩全等三角形對應邊相等性質證明兩線段相等

(2) 一截線與兩平行線相交，則：
1. 內錯角相等
2. 同位角相等
3. 同側內角互補

(3) 判斷兩個三角形全等的方法有：
1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理

證明：

敘述	理由
(1) 連接 A 點與 D 點， 如圖 3.2-40(a)所示	作圖，兩點決定一直線  **圖 3.2-40(a)**
(2) △DBA 與△ACD 中 $\angle 1=\angle 2$ $\overline{AD}=\overline{DA}$ $\angle 3=\angle 4$	如圖 3.2-40(a)所示 已知$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，內錯角相等 共同邊 已知$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$，內錯角相等
(3) △DBA ≅ △ACD	由(2) A.S.A.三角形全等定理
(4) $\overline{AB}=\overline{DC}$，$\overline{AC}=\overline{DB}$	由(3) 對應邊相等

例題 3.2-25：

已知：圖 3.2-41 中，$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$，

試證：$\overline{AE}=\overline{DE}$，$\overline{BE}=\overline{CE}$。

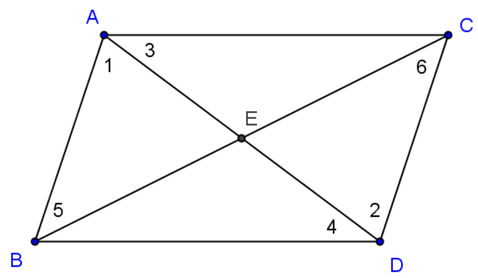


圖 3.2-41

想法：(1) 一截線與兩平行線相交，則：

1. 內錯角相等
2. 同位角相等
3. 同側內角互補

(2) 判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理

證明：

敘述	理由
(1) △DBA 與△ACD 中	如圖 3.2-41 所示
$\angle 1=\angle 2$	已知$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，內錯角相等
$\overline{AD}=\overline{DA}$	共同邊
$\angle 3=\angle 4$	已知$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$，內錯角相等
(2) △DBA ≅ △ACD	由(1) A.S.A.三角形全等定理
(3) $\overline{AB}=\overline{CD}$，$\overline{AC}=\overline{BD}$	由(2) 對應邊相等
(4) △ABE 與△DCE 中	如圖 3.2-41 所示
$\angle 1=\angle 2$	已知$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，內錯角相等
$\overline{AB}=\overline{DC}$	由(3) 已證
$\angle 5=\angle 6$	已知$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，內錯角相等
(5) △ABE ≅ △DCE	由(4) A.S.A.三角形全等定理
(6) $\overline{AE}=\overline{DE}$，$\overline{BE}=\overline{CE}$	由(5) 對應邊相等

例題 3.2-26：

已知：圖 3.2-42 中，$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，$\overline{AE}=\overline{BE}$，$\overline{AF}=\overline{FC}$

試證：$\overline{EF}=\overline{GF}$。

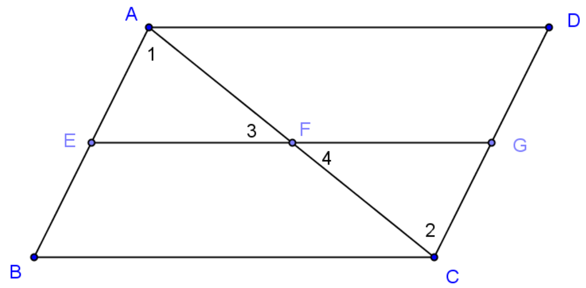


圖 3.2-42

想法：(1) 一截線與兩平行線相交，則：

1. 內錯角相等
2. 同位角相等
3. 同側內角互補

(2) 判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱 S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱 A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱 S.S.S.三角形全等定理

證明：

敘述	理由
(1) △AEF 與△CGF 中	如圖 3.2-42 所示
$\angle 1=\angle 2$	已知$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，內錯角相等
$\overline{AF}=\overline{FC}$	已知$\overline{AF}=\overline{FC}$
$\angle 3=\angle 4$	對頂角相等
(2) △AEF ≅ △CGF	由(1) A.S.A.三角形全等定理
(3) $\overline{EF}=\overline{GF}$	由(2) 對應邊相等

習題 3.2

習題 3.2-1：

如圖 3.2-43，L 是 L_1 和 L_2 的截線，則：

(1)$\angle 1$ 的同位角為 ____________。

(2)$\angle 3$ 的同側內角為 __________。

(3)$\angle 4$ 的內錯角為 ____________。

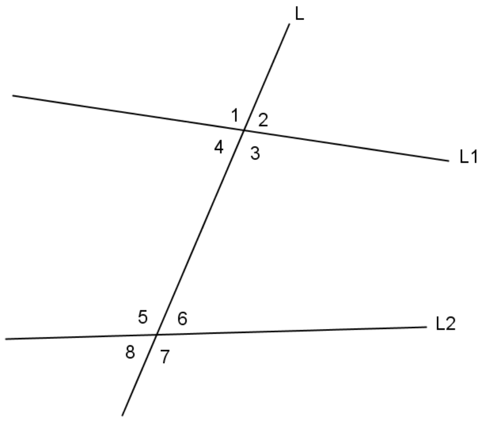


圖 3.2-43

習題 3.2-2：

如圖 3.2-44，$L_1//L_2$，L 為截線，$\angle 4 = 100°$，則：

(1)$\angle 6 =$_______度　　　　(2)$\angle 5 =$_______度

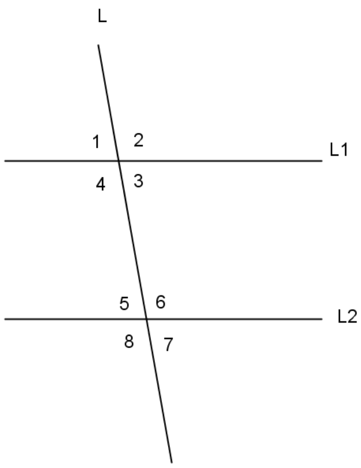


圖 3.2-44

習題 3.2-3：

如圖 3.2-45，$L_1//L_2$，L 為截線，求：

(1) x＝________。　(2)$\angle 1$＝________度。　(3)$\angle 2$＝________度。

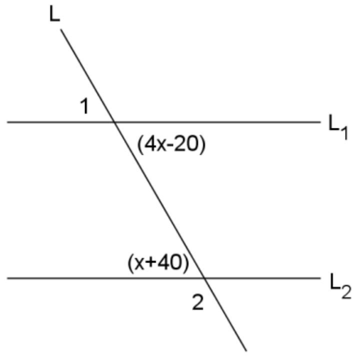


圖 3.2-45

習題 3.2-4：

如圖 3.2-46，已知 $L_1 \parallel L_2$，M 是 L_1、L_2 的一條截線，若$\angle 1=125°$，求$\angle 2$。

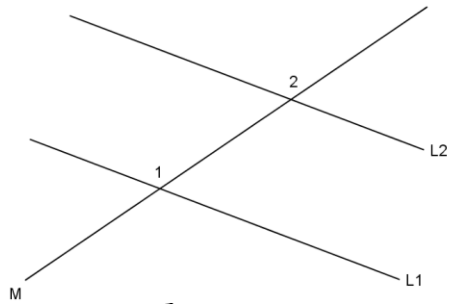


圖 3.2-46

習題 3.2-5：

如圖 3.2-47，$\overline{AD} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{PQ}$。連接$\overline{AQ}$，且$\angle 1=60°$，求：

(1) $\angle 2$ 至$\angle 8$ 各截角的度數。

(2) 同側內角$\angle 3$ 與$\angle 5$ 的和。

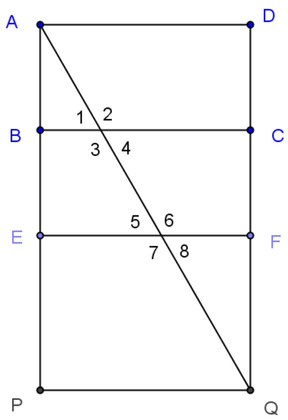


圖 3.2-47

習題 3.2-6：

如圖 3.2-48，$L_1 \parallel L_2$，$L_3 \parallel L_4$，則：

(1)∠1＝＿＿＿＿＿＿度。　　(2)∠2＝＿＿＿＿＿＿度。

(3)∠3＝＿＿＿＿＿＿度。　　(4)∠4＝＿＿＿＿＿＿度。

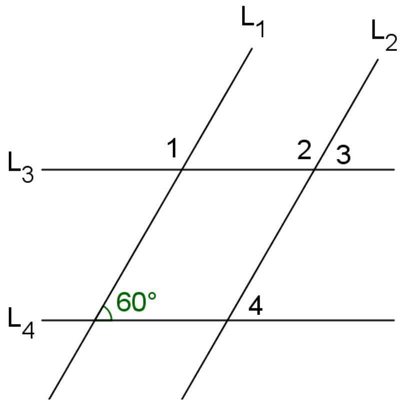


圖 3.2-48

習題 3.2-7：

如圖 3.2-49，$L_1 \parallel L_2$，M 是 L_1、L_2 的一條截線，若∠1＝135°，求∠2、∠3。

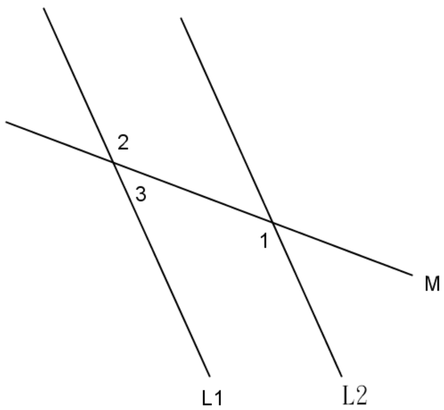


圖 3.2-49

習題 3.2-8：

如圖 3.2-50，$L_1 \parallel L_2$，M 是 L_1 和 L_2 的截線，$\angle 1 = 57°$，則：

(1) $\angle 2$ 和__________是同側內角。

(2) $\angle 3$ 和__________是同位角。

(3) $\angle 6 =$__________度。

(4) $\angle 8 =$__________度。

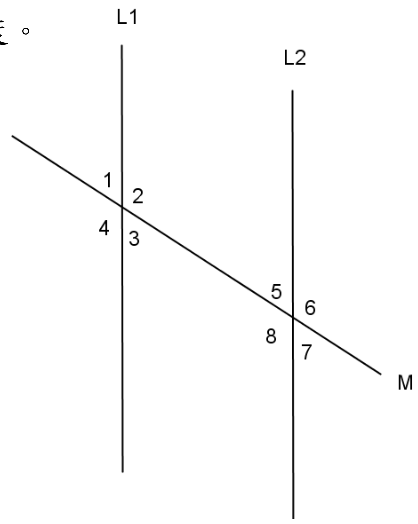


圖 3.2-50

習題 3.2-9：

如圖 3.2-51，$L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$，L 為截線，$\angle 1 = 75°$，則：

(1) $\angle 2 =$__________度。

(2) $\angle 3 =$__________度。

(3) $\angle 4 =$__________度。

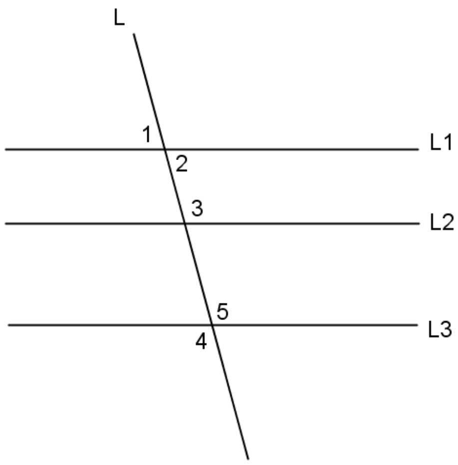


圖 3.2-51

習題 3.2-10

如圖 3.2-52，回答下列問題：

(1) L_1和哪一條直線平行？_____________。

(2) L_2和哪一條直線平行？_____________。

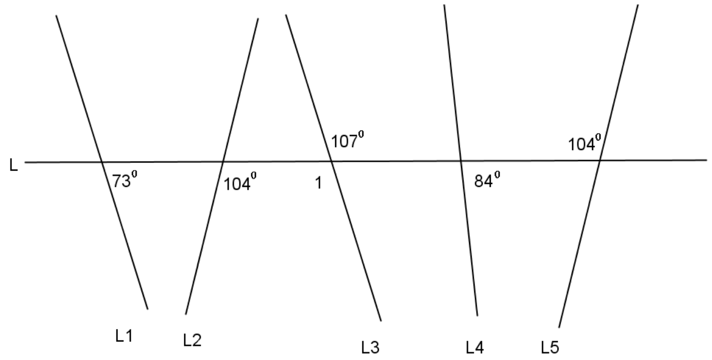


圖 3.2-52

習題 3.2-11

圖 3.2-53 中，$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，$\overline{HE}$平分∠BEF，$\overline{GF}$平分∠CFE，試證$\overline{EH} \parallel \overline{GF}$。

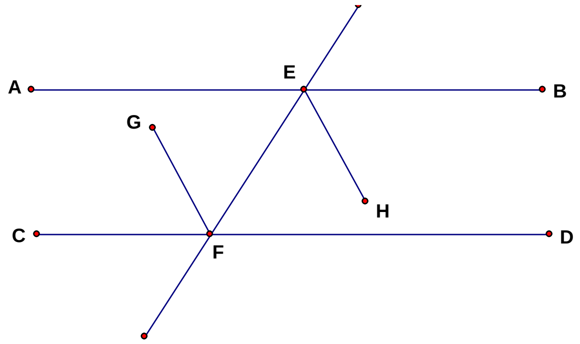


圖 3.2-53

習題 3.2-12

圖 3.2-54 中，$\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$， $\overline{CD} \parallel \overline{BD'}$，試證∠ACD＝∠A'B'D'。

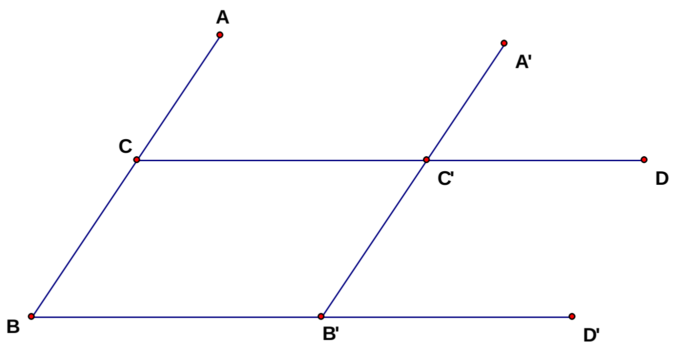


圖 3.2-54

習題 3.2-13

圖 3.2-55 中，$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，$\overline{AC} \parallel \overline{DE}$，$\overline{AB}=\overline{CD}$，試證$\overline{AC}=\overline{DE}$。

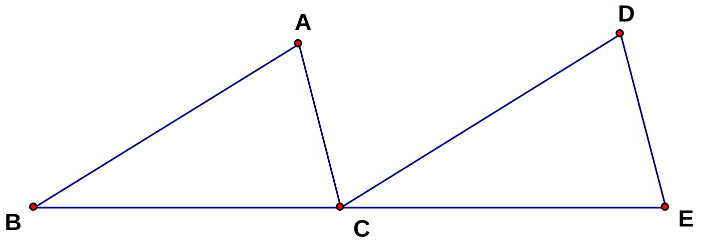


圖 3.2-55

習題 3.2-14

圖 3.2-56 中，$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$，試證∠A＝∠D，∠C＝∠B。

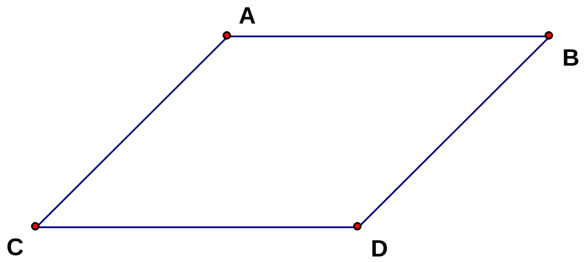


圖 3.2-56

3.3 節　對稱圖形

定義 3.3-1 線對稱圖形

若有一直線 L(不一定在圖形上)，使圖形上的每一點在直線的對側與直線等距離的位置都有**一對稱點**，則稱為**對稱直線 L 之圖形**或簡稱為**線對稱圖形**，直線 L 為圖形的**對稱軸**。

若一個圖形是線對稱圖形，則沿著對稱軸對折，圖形會完全重疊。

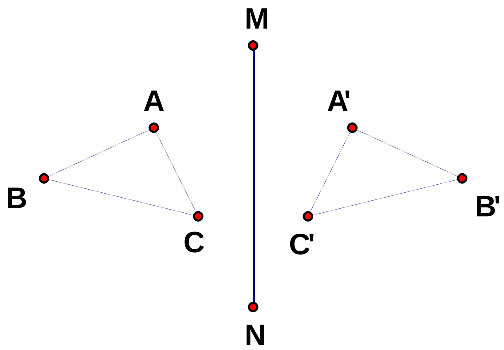


圖 3.3-1 對稱直線 $\overline{MN}$ 之線對稱圖形

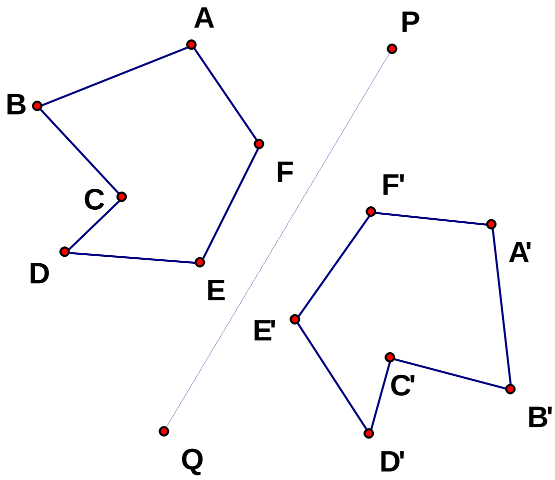


圖 3.3-2 對稱直線 $\overline{PQ}$ 之線對稱圖形

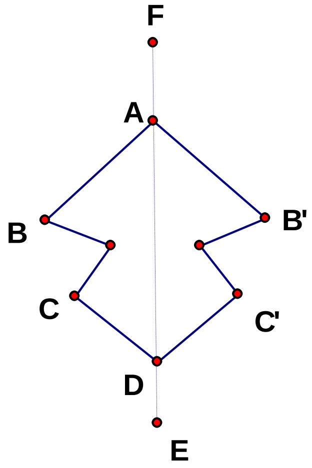


圖 3.3-3：此圖為對稱$\overline{EF}$之線對稱圖形。

常見之線對稱圖形有：正方形、長方形、等腰三角形、圓形，…等。

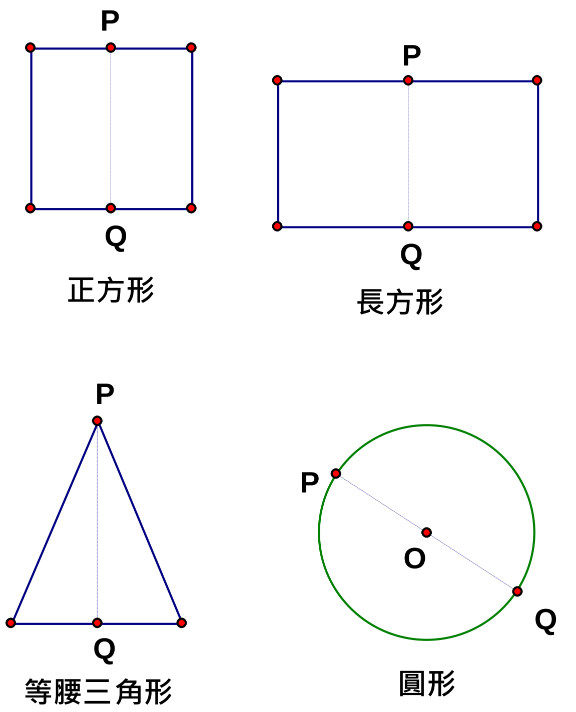


圖 3.3-4：圖中之各圖形都是以$\overline{PQ}$為對稱軸之線對稱圖形

平行四邊形並不是一個線對稱圖形，若以平行四邊形 ABCD 的兩對邊中點連線段$\overline{PQ}$為對稱軸，則對稱$\overline{PQ}$的圖形為另一平行四邊形 A`B`C`D`，圖形並沒有完全重疊，如圖 3.3-5 所示； 若以平行四邊形的對角線$\overline{AC}$為對稱軸，則平行四邊形 ABCD 對稱$\overline{AC}$的圖形為平行四邊形 AB`CD`，圖形並沒有完全重疊，如圖 3.3-6 所示；若以平行四邊形的對角線$\overline{BD}$為對稱軸，則平行四邊形 ABCD 對稱$\overline{BD}$的圖形為平行四邊形 A`BC`D，圖形並沒有完全重疊，如圖 3.3-7 所示。在平行四邊形上找不到對稱軸，可以延著對稱軸對折後，圖形會完全重疊，故平行四邊形不是一個線對稱圖形。

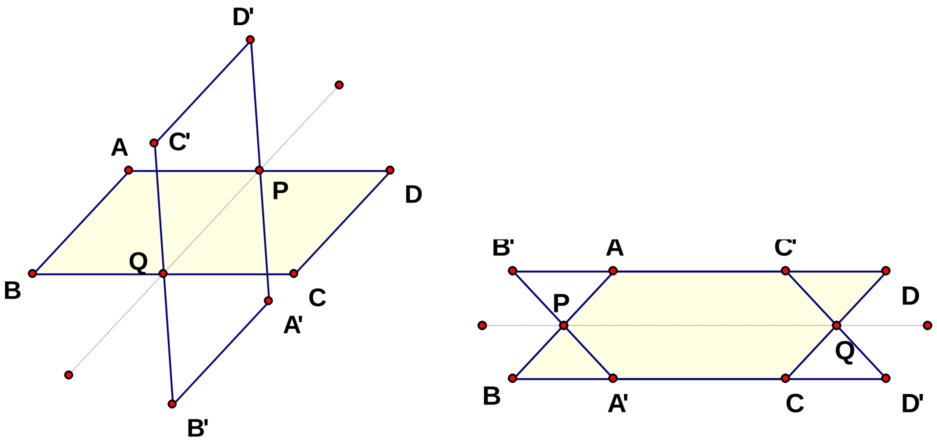


圖 3.3-5： 以平行四邊形兩對邊的中點連線段$\overline{PQ}$為對稱軸之對稱圖形

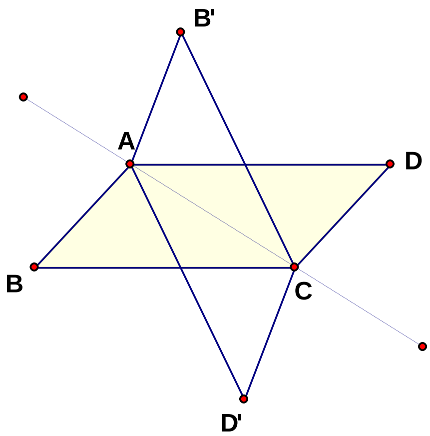


圖 3.3-6： 以平行四邊形的對角線$\overline{AC}$為對稱軸之對稱圖形

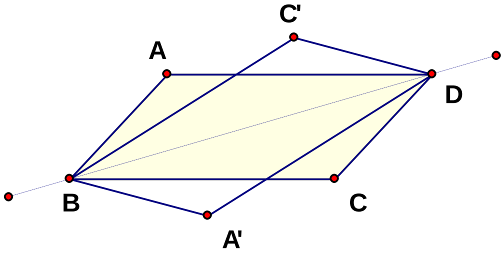


圖 3.3-7： 以平行四邊形的對角線$\overline{BD}$為對稱軸之對稱圖形

線對稱圖形之判斷要領

1. 先畫出線對稱圖形之**對稱軸**。
   在圖上找出可能對稱的兩點，做**兩點連線的垂直平分線**，若圖為線對稱圖形，則此線就是**對稱軸**。

2. 檢查圖形上的每一點在對稱軸之兩側等距離位置是否都有對稱點，若有，則此圖形是線對稱圖形。
   (若圖形可以拿起來對折，可以沿著對稱軸對折，檢查圖形是否會完全重疊，若完全重疊，則是線對稱圖形。)

例題 3.3-1

如圖 3.3-8，△ABC 是等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$，△ABC 是線對稱圖形嗎？如果是，畫出其對稱軸，並指出 B 點的對稱點為何？

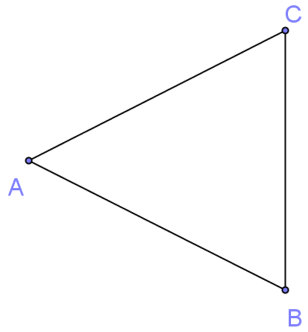


圖 3.3-8

想法：(1) 若一個圖形是線對稱圖形，則沿著對稱軸對折，圖形會完全重疊

(2) 點在對稱軸的對側與對稱軸等距離的點稱為此點的對稱點

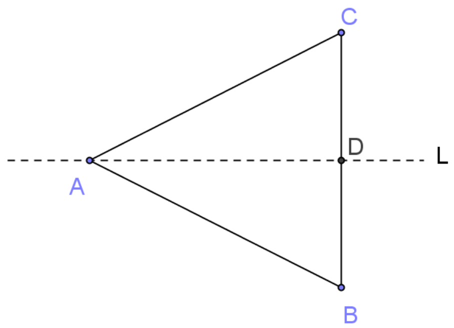


圖 3.3-8(a)

解：

敘述	理由
(1) 假設 L 為∠BAC 的角平分線，如圖 3.3-8(a)，則 L⊥$\overline{BC}$且 $\overline{BD}=\overline{CD}$	已知△ABC 是等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$ & 等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊
(2) 在△ABD 與△ACD 中， $\overline{BD}=\overline{CD}$ ∠B=∠C $\overline{AB}=\overline{AC}$	如圖 3.3-8(a)所示 由(1) $\overline{BD}=\overline{CD}$ 已知△ABC 是等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$ 已知$\overline{AB}=\overline{AC}$
(3) △ABD ≅ △ACD	由(2) & 根據 S.A.S.三角形全等定理
(4) △ABC 為線對稱圖形，且 L 為其對稱軸	由(3) & △ABC 沿著 L 對折，圖形會完全重疊
(5) B 點的對稱點為 C 點	由(4) L 為其對稱軸 & (1) L⊥$\overline{BC}$且 $\overline{BD}=\overline{CD}$

例題 3.3-2

判別下列各圖形是否為線對稱圖形，並畫出其所有的對稱軸。

(A)

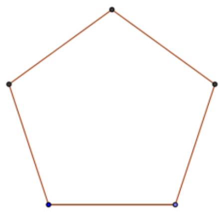


圖 3.3-9(a)

(B)

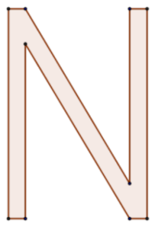


圖 3.3-9(b)

(C)

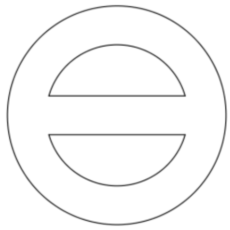


圖 3.3-9(c)

(D)

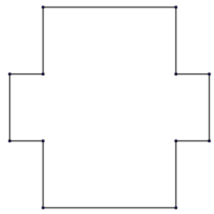


圖 3.3-9(d)

想法：若一個圖形是線對稱圖形，則沿著對稱軸對折，圖形會完全重疊

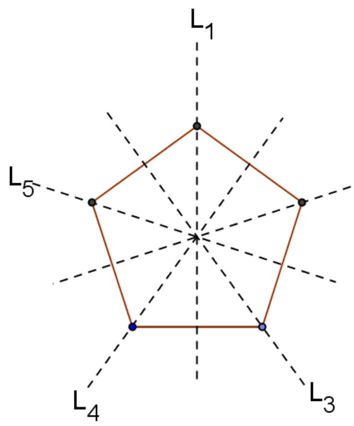


圖 3.3-9(a-1)

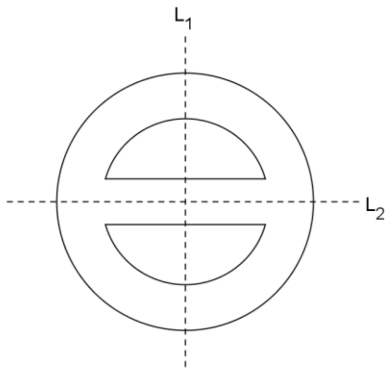


圖 3.3-9(c-1)

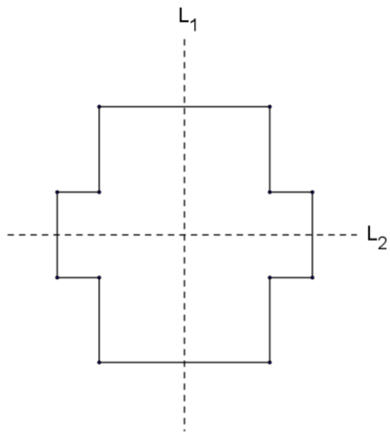


圖 3.3-9(d-1)

解：

敘述	理由
(1) 選項(A)為線對稱圖形，如圖 3.3-9(a-1)，L_1、L_2、L_3、L_4、L_5 為其對稱軸	圖 3.3-9(a-1)中，分別沿著 L_1、L_2、L_3、L_4、L_5 對折，圖形完全重疊
(2) 選項(B)不是線對稱圖形	無對稱軸
(3) 選項(C)為線對稱圖形，如圖 3.3-9(c-1)，L_1、L_2 為其對稱軸	圖 3.3-9(c-1)中，分別沿著 L_1、L_2 對折，圖形完全重疊
(4) 選項(D)為線對稱圖形，如圖 3.3-9(d-1)，L_1、L_2 為其對稱軸	圖 3.3-9(d-1)中，分別沿著 L_1、L_2 對折，圖形完全重疊

定義 3.3-2 點對稱圖形

若有一點 O(不一定在圖上),使圖形上的每一點在與 O 點連線的對側上的等距離的位置都有一點與之對稱，則叫此圖為對稱 O 點之**點對稱圖形**或稱簡為**點對稱圖形**，叫 O 點為對稱圖形的「**對稱中心**」。

若一個圖形是點對稱圖形，則以**對稱中心**為旋轉中心，旋轉 180 度後，會與原來圖形重合。

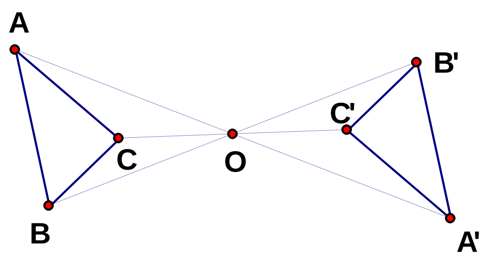


圖 3.3-10 點對稱圖形

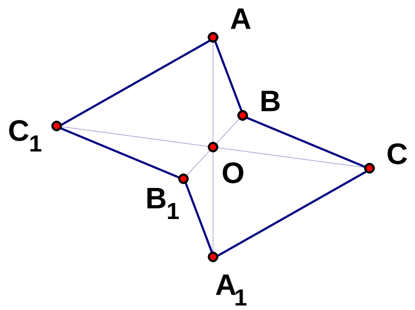


圖 3.3-11 點對稱圖形

常見之點對點稱圖形有：正方形、長方形、平行四邊形、正六邊形、圓形，…等。

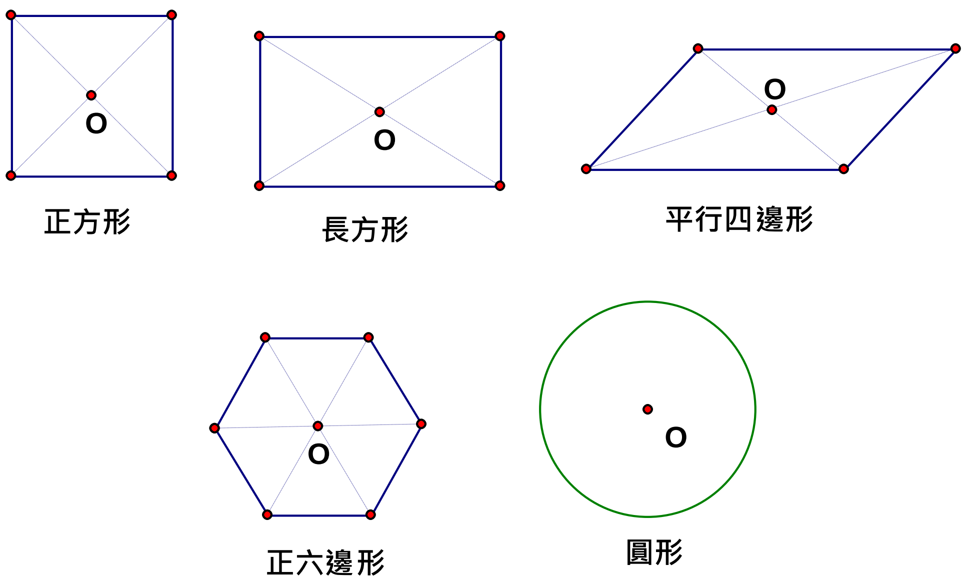


圖 3.3-12

點對稱圖形之判斷要領

1. 先畫出點對稱圖形之**對稱中心**。
   在圖上找出可能對稱的兩點，做**兩點連線的中點**，若圖形為點對稱圖形，則此點就是**對稱中心**。

2. 檢查圖形上的每一點，在點與對稱中心連線之對側等距離位置是否都有對稱點，若有，則此圖形是點對稱圖形。

習題 3.3

習題 3.3-1

下列各圖形中，哪些是線對稱圖形？_______________

（A）

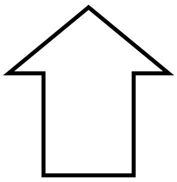


圖 3.3-13(a)

（B）

圖 3.3-13(b)

（C）

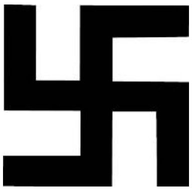


圖 3.3-13(c)

（D）

圖 3.3-13(d)

（E）

圖 3.3-13(e)

（F）

圖 3.3-13(f)

（G）

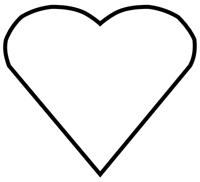


圖 3.3-13(g)

（H）

圖 3.3-13(h)

（I）

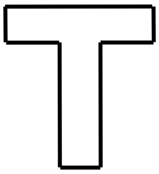


圖 3.3-13(i)

（J）

圖 3.3-13(j)

（K）

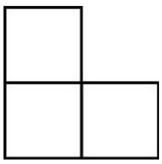


圖 3.3-13(k)

（L）

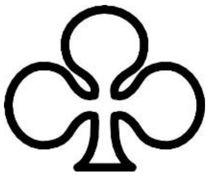


圖 3.3-13(l)

習題 3.3-2

下列各圖形哪一個的對稱軸超過一條？＿＿＿＿＿＿＿

(A) (B) (C) (D)

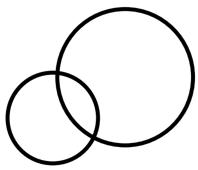
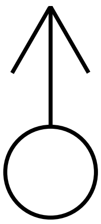
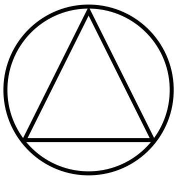
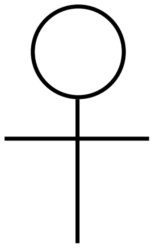





圖 3.3-14(a) **圖 3.3-14(b)** **圖 3.3-14(c)** **圖 3.3-14(d)**

習題 3.3-3

畫出下列圖形的所有對稱軸：

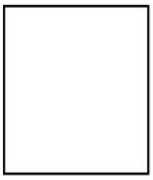
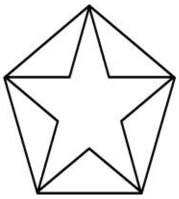
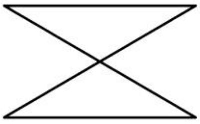





圖 3.3-15(a) **圖 3.3-15(b)** **圖 3.3-15(c)** **圖 3.3-15(d)**

習題 3.3-4

直角三角形都是線對稱圖形嗎？哪一種直角三角形是線對稱圖形？

習題 3.3-5

如圖 3.3-16，將一張長方形色紙對摺後，剪出一個字母，則展開後的圖形為下列何者？

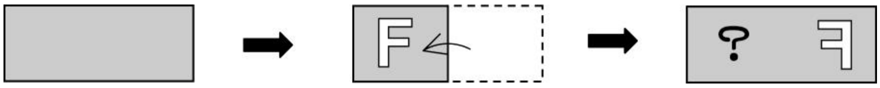
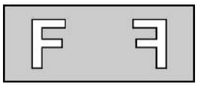
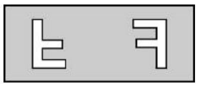
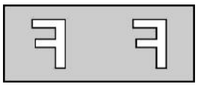
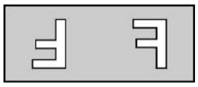


圖 3.3-16

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

本章重點

本章介紹直線與直線關係的兩個重要性質：垂直與平行。

1. 線段的垂直線性質。

2. 線段的垂直平分線性質。

3. 線上一點與線外一點的垂直線性質。

4. 定義線與線相交形成的各種角的名詞：內角、外角、同位角、內錯角、外錯角、同側內角、同側外角等。

5. 平行線的相關性質：
   (1) 同時垂直一直線的兩線平行。
   (2) 平行線必同時垂直同一直線。
   (3) 兩平行線間的距離處處相等。
   (4) 平行線的內錯角性質。
   (5) 平行線的外錯角性質。
   (6) 平行線的同位角性質。
   (7) 平行線的同側內角性質。

6. 線對稱圖形與點對稱圖形。

進階思考題

1. 已知： 如圖 3.1，$L_1 \parallel L_2$，$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$。

證明： $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360°$。

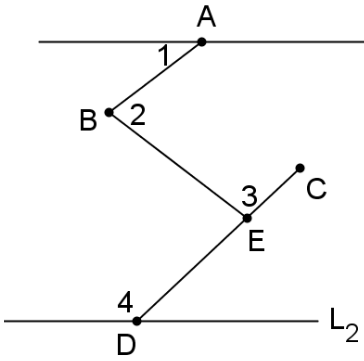


圖 3.1

2. 如圖 3.2，$L_1 \parallel L_2$，求：

(1) $\angle 1 =$ _____ 度。　(2) $\angle 2 =$ _____ 度。　(3) $\angle 3 =$ _____ 度。

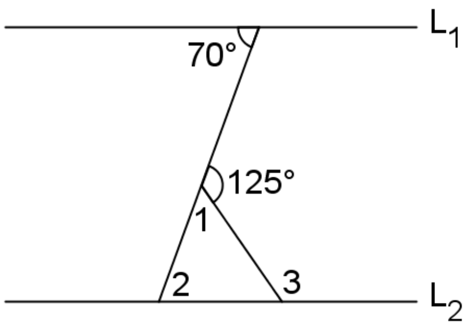


圖 3.2

3. 如圖 3.3，$L_1 \parallel L_2$，則 $\angle 1 =$ ____________ 度。

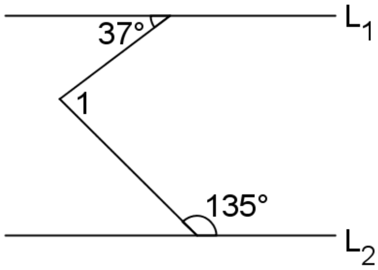


圖 3.3

4. 如圖 3.4，$L_1 \parallel L_2$，若$\overline{AB} \perp \overline{BC}$，則$\angle BCD=$____________度。

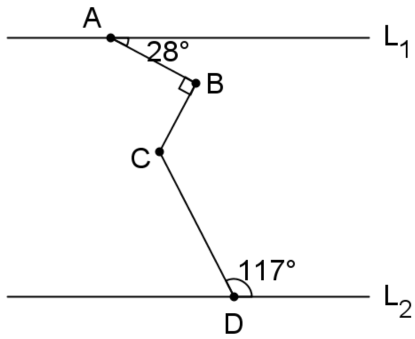


圖 3.4

5. 如圖 3.5，$L_1 \parallel L_2$，$\angle 1=(3x-25)°$，$\angle 2=(4x-13)°$，則 $x=$____________。

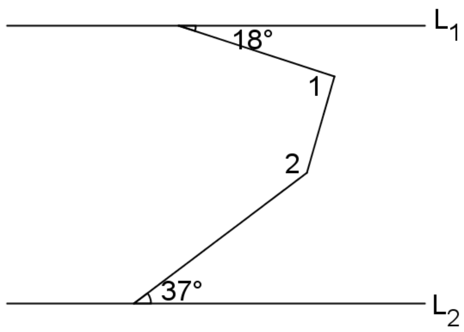


圖 3.5

6. 如圖 3.6，$L \parallel M$，求 $y=$____________度。

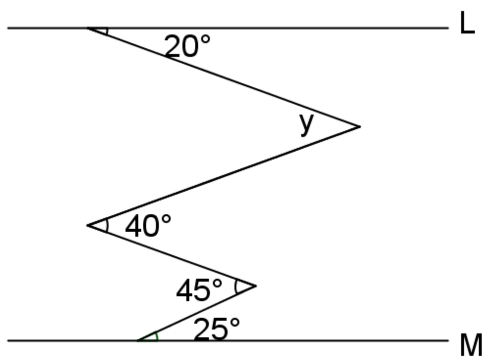


圖 3.6

7. 如圖 3.7，L ∥ M，且∠1＝∠2，∠3＝∠4，∠B＝40°，求∠ADC＝_______度。

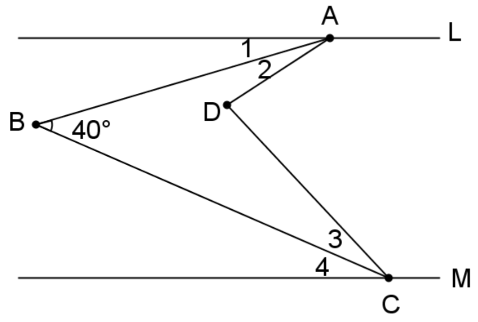


圖 3.7

8. 如圖 3.8，已知 L_1 ∥ L_2，M 和 N 都是 L_1 和 L_2 的截線，且∠1＝(8x＋6)°，∠2＝(2x＋19)°，則：

(1) x＝______________。

(2)∠3＝____________度。

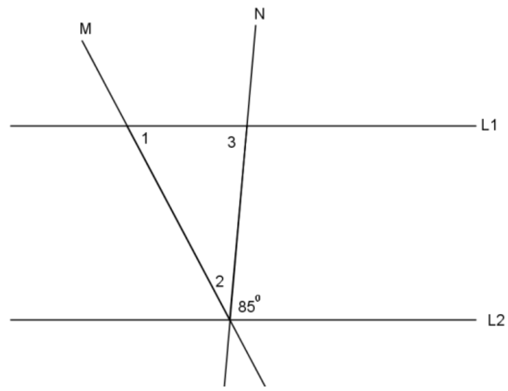


圖 3.8

9. 如圖 3.9，L_1 ∥ L_2，△ABC 為正三角形，∠1＝80°，則 x＝_____度，y＝_____度。

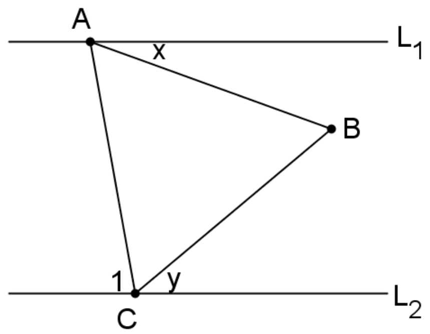


圖 3.9

10. 如圖 3.10，$L_1 \parallel L_2$，$\angle BAC = 18°$，$\angle ABC = 20°$，則 x＝______________度。

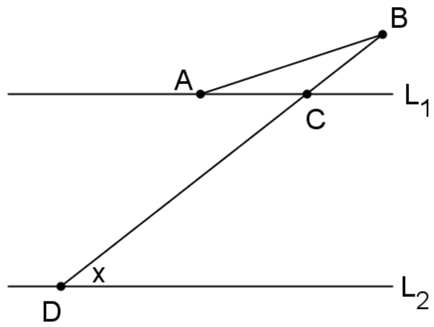


圖 3.10

11. 如圖 3.11，$L_1 \parallel L_2$，$\angle ABC = 95°$，$\angle 1 = 28°$，$\angle CDE = 67°$，則 x＝___度，

y＝___度。

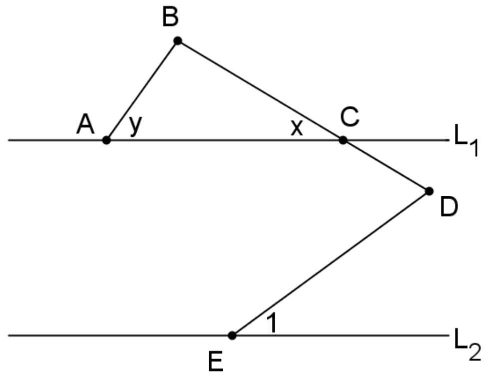


圖 3.11

12. 如圖 3.12，$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$，則 x＝______，y＝_______，$\angle BEC$＝______度。

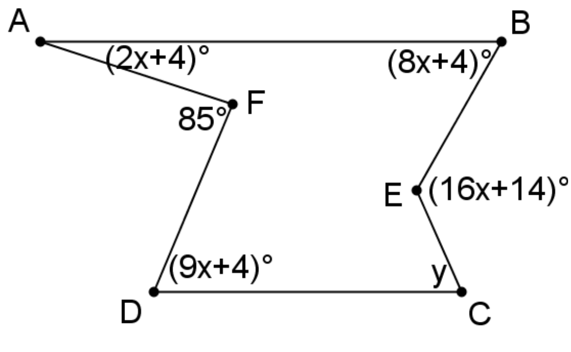


圖 3.12

13. 如圖 3.13，$L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$，則 x＝______度。

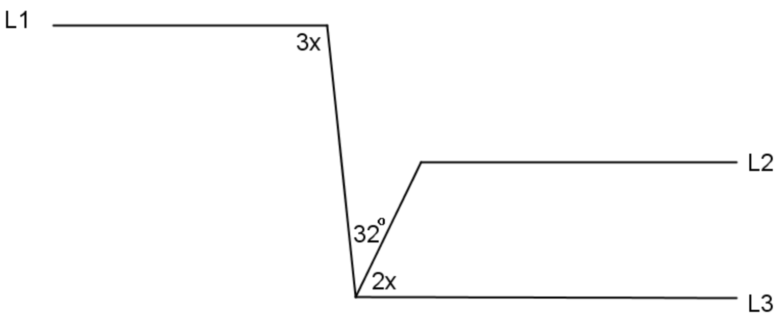


圖 3.13

14. 如圖 3.14，$L_1 \parallel L_2$，則∠1＝_______度。

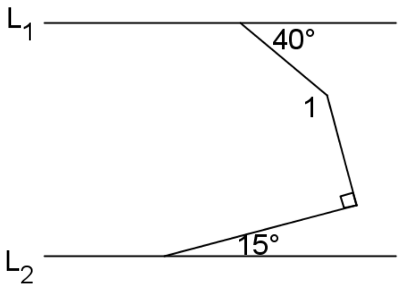


圖 3.14

15. 如圖 3.15，$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$，E、F 分別在$\overline{AB}$與$\overline{BD}$上，求∠1。

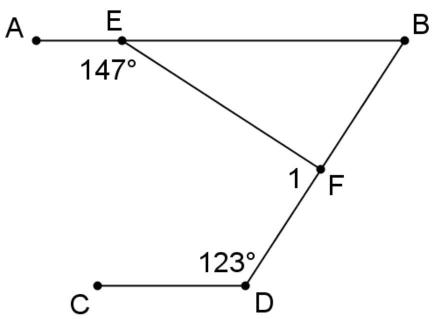


圖 3.15

16. 如圖 3.16，直線 $L_1 \parallel L_2$，A、B 在 L_1 上，C、 D、E 在 L_2 上，求∠1、∠2。

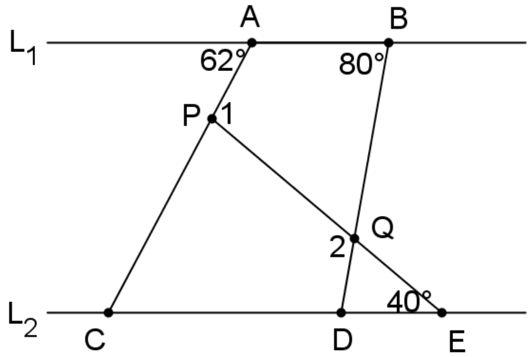


圖 3.16

17. 如圖 3.17，$\overline{AB} \parallel \overline{DE}$，$\overline{BC} \parallel \overline{EF}$，∠B＝30°，則∠E＝__________度。

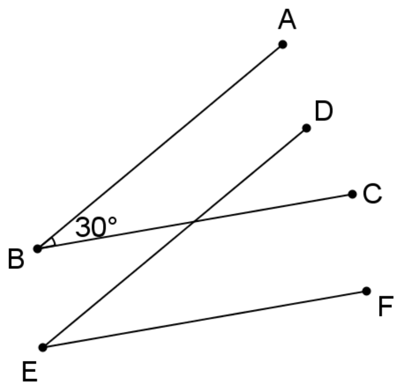


圖 3.17

18. 如圖 3.18，$\overline{AB} \parallel \overline{DE}$，$\overline{FE} \parallel \overline{BC}$，∠B＝42°，則∠E＝__________度。

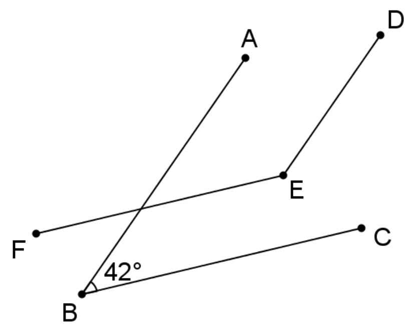


圖 3.18

19. 如圖 3.19，$\overline{AB} \parallel \overline{EF}$，$\overline{BC} \parallel \overline{DE}$，$\angle$E＝80°，則$\angle$B＝_________度。

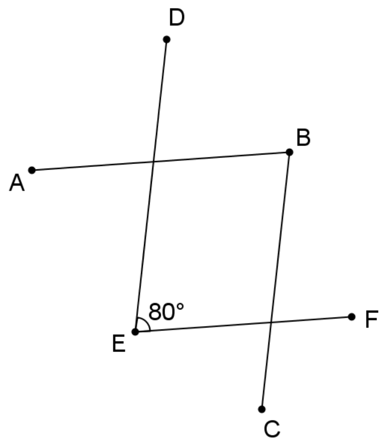


圖 3.19

20. 如圖 3.20，$\overline{AB} \perp \overline{DE}$，$\overline{BC} \perp \overline{EF}$，$\angle$B＝37°，則$\angle$E＝_________度。

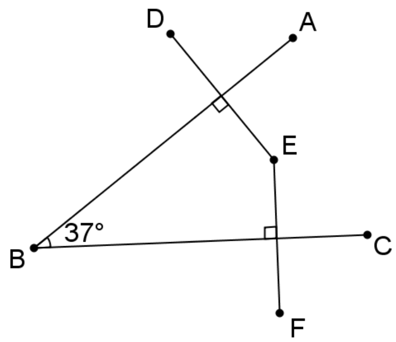


圖 3.20

歷年基測題目

1. 圖 3.21 中有直線 L 截過兩直線 L_1、L_2 後所形成的八個角。由下列哪一個選項中的條件可判斷 $L_1 \parallel L_2$？ **(98-1)**

(A) $\angle 2+\angle 4=180°$　　(B) $\angle 3+\angle 8=180°$

(C) $\angle 5+\angle 6=180°$　　(D) $\angle 7+\angle 8=180°$

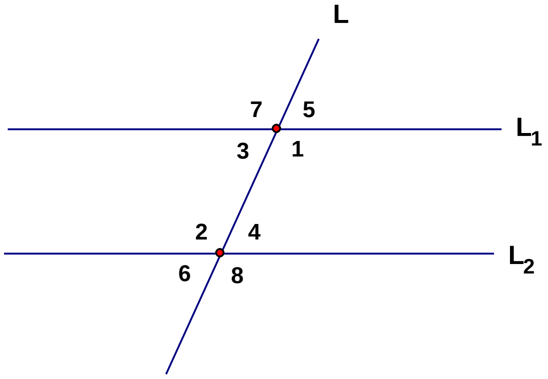


圖 3.21

解答：(B) $\angle 3+\angle 8=180°$

想法： (1) 平行線同側內角和等於 180°　　(2) 對頂角相等

解：

敘述	理由
(1) $\angle 3+\angle 2=180°$	平行線同側內角和等於 180°
(2) $\angle 2=\angle 8$	對頂角相等
(3) $\angle 3+\angle 8=180°$	由(1) & (2)

2. 如圖 3.22，長方形 ABCD 中，以 A 為圓心，$\overline{AD}$長為半徑畫弧，交$\overline{AB}$於 E 點。取$\overline{BC}$的中點為 F，過 F 作一直線與$\overline{AB}$平行，且交$\overset{\frown}{DE}$於 G 點。求∠AGF＝？

(A) 110°　　(B) 120°　　(C) 135°　　(D) 150°　　　　　　　　**(98-1)**

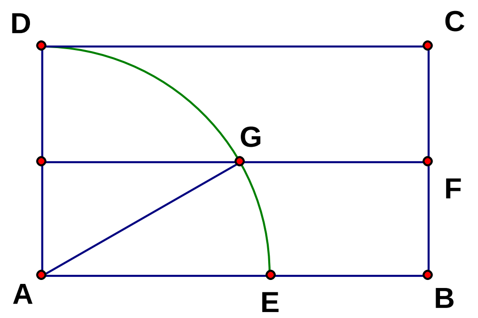


圖 3.22

解答：(D) 150°

想法： (1) 正三角形之三內角相等　　　(2) S.A.S.三角形全等定理

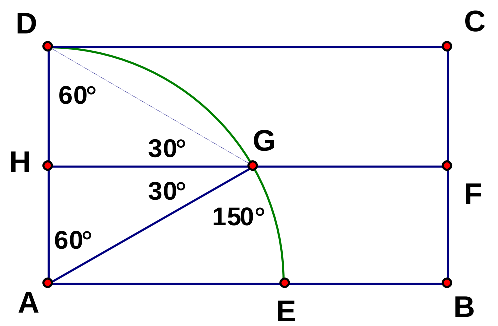


圖 3.22(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接 D 點與 G 點，如圖 3.22(a)	兩點可決定一直線
(2) $\overline{AD}=\overline{AG}$	同圓的半徑相等
(3) ∠ADG＝∠AGD	△ADG 為等腰三角形，兩底角相等
(4) $\overline{AH}=\overline{DH}$	過平行四邊形一邊中點之平行線交於對邊中點(平行四邊形性質於第六章會再詳細證明)
(5) ∠AHG＝∠DHG＝90°	長方形之每一角為 90°，平行線之同位角相等

(6) $\overline{HG}=\overline{HG}$	同線段相等
(7) △AHG ≅ △DHG	由(3)(4)(5)，SAS 全等三角形定理
(8) ∠HGA ＝∠HGD	全等三角形對應角相等
(9) ∠HDG＝∠HAG ∠ADG＝∠DAG	全等三角形對應角相等 同角相等∠HDG＝∠ADG， ∠HAG＝∠DAG
(10) ∠ADG＝∠AGD＝∠DAG	由(2)&(7)
(11) ∠ADG＝∠AGD＝∠DAG＝60°	△ADG 中三角相等，故每一角為 60° (三角形內角和 180˚性質在第四章會再詳細介紹)
(12) ∠AGD＝∠HGA ＋∠HGD＝60° 2∠HGA＝60° ∠HGA＝30°	全量=全部分量和 由(7)
(13) ∠AGF＋∠HGA ＝180° ∠AGF＝180°－∠HGA ＝180°－ 30°＝150°	全量=全部分量和 將(11)代入(12)

3. 如圖 3.23，將四邊形鐵板 ABCD(四個內角均不為直角)平放，沿$\overline{CD}$畫一直線 L，沿$\overline{AD}$畫一直線 M。甲、乙兩人想用此鐵板，在 M 的另一側畫一直線 L_1 與 L 平行，其作法分別如下：(95-1)

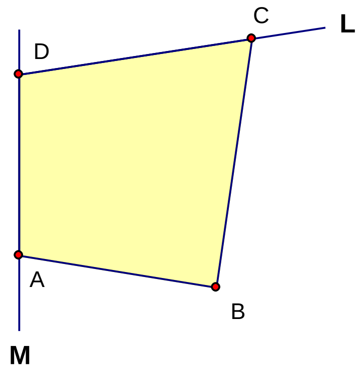


圖 3.23

甲：如圖 3.23(a)，將鐵板翻至 M 的另一側，下移一些並將$\overline{AD}$緊靠在直線 M 上，再沿$\overline{CD}$畫一直線 L_1，如圖 3.23(b)。

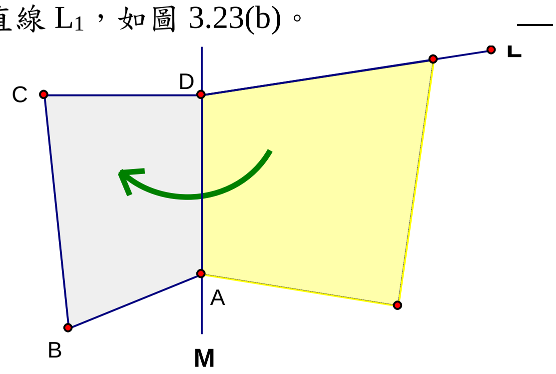


圖 3.23(a)

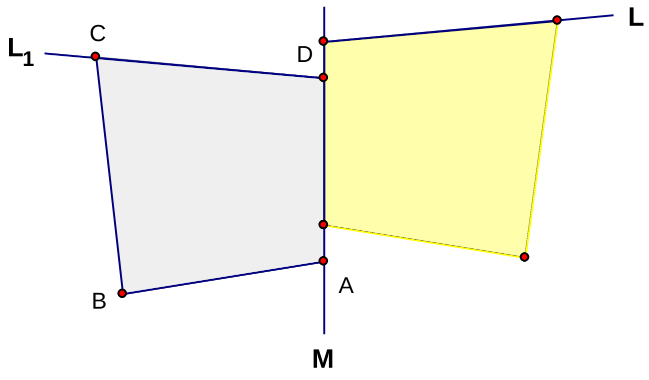


圖 3.23(b)

乙：如圖 3.23(c)，將鐵板轉動到 M 的另一側，下移一些並將$\overline{AD}$緊靠在直線 M 上，再沿$\overline{CD}$畫一直線 L_1，如圖 3.23(d)。

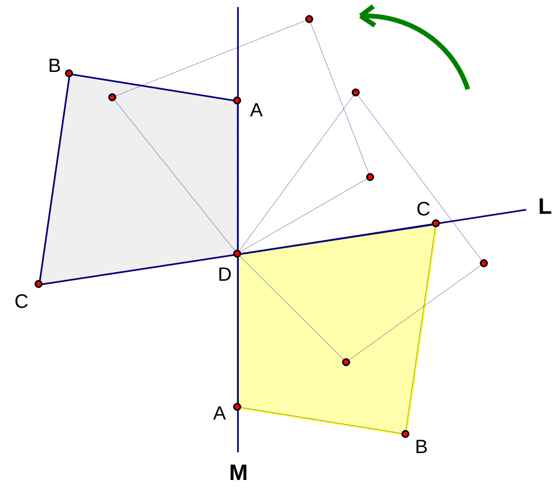


圖 3.23(c)

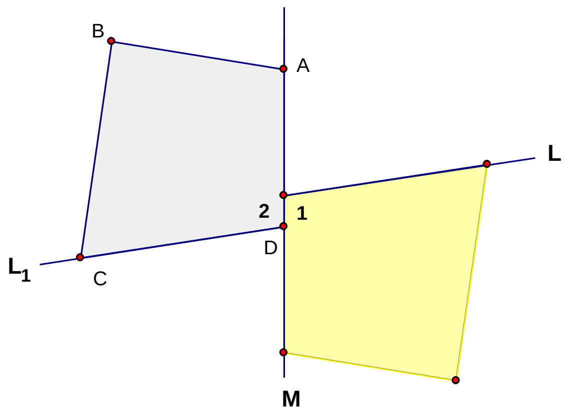


圖 3.23(d)

對於兩人的作法，下列判斷何者為正確？

(A) 兩人都正確 (B) 兩人都錯誤 (C)甲正確、乙錯誤 (D) 甲錯誤、乙正確

解答：(D) 甲錯誤、乙正確

想法： 內錯角相等之兩線平行。

解答說明：

敘述	理由
(1) $\angle 1 = \angle 2$	同角相等，∵$\angle 2$ 是$\angle 1$ 旋轉再平行得來，旋轉、平行都不會改變角的大小。
(2) $L_1 \parallel L$	內錯角相等之兩線平行
∴乙正確	

4. 如圖 3.24，L 是 L_1 與 L_2 的截線。找出∠1 的同位角，標上∠2，找出∠1 的同側內角，標上∠3。下列何者為∠1、∠2、∠3 正確的位置圖？ **(92-1)**

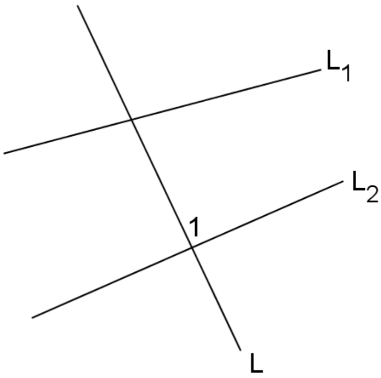
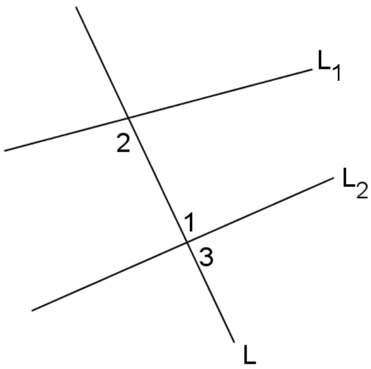
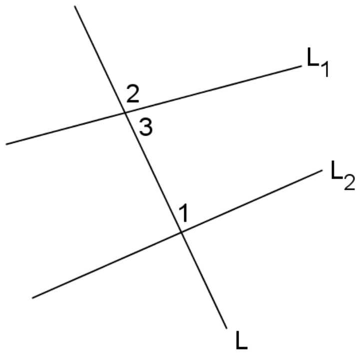


圖 3.24

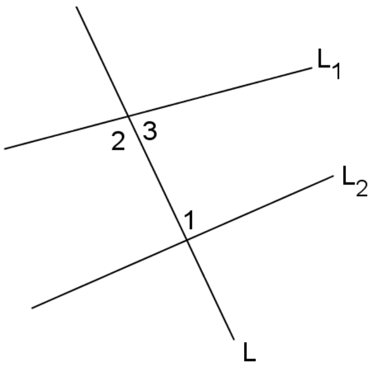
(A)



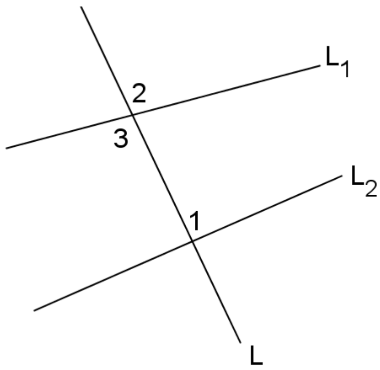
(B)



(C)



(D)



解答： (B)

想法： (1) 同位角定義

(2) 同側內角定義

解答說明：

敘述	理由
(1) 答案選(B)	同位角定義、同側內角定義