習題 1-1

習題 1.1-1　點的長度是多少？

解答：點只有位置，沒有長度，寬度及厚度。

習題 1.1-2　什麼是直線？

解答：兩端可以無限延長的線叫做直線。

習題 1.1-3　什麼是射線？

解答：一端可以無限延長的線叫做射線。

習題 1.1-4　什麼是線段？

解答：有兩個端點的線叫做線段。

習題 1.1-5　直線可否無限延長？

解答：兩端可以無限延長的線叫做直線。所以直線的兩端可無限延長。

習題 1.1-6　什麼是曲線？

解答：彎曲的線叫做曲線。

習題 1.1-7　什麼是兩點間的距離？

解答：如果線段兩端是 A 和 B,則$\overline{AB}$的長度就是 A 和 B 間的距離。

習題 1.1-8　試畫出距離為 12 公分之兩點。

解答：

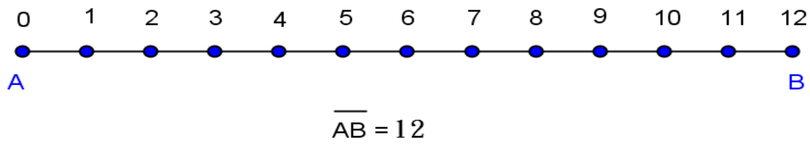


圖 1.1-14

圖 1.1-14 中，每一個空格代表 1 公分，所以$\overline{AB}$＝12 公分

習題 1.1-9　將$\overline{AB}$、$\overline{PQ}$分別對應到刻度尺上，已知對應於 A、B、P、Q 四點的刻度分別為 3.5、8.4、4.3、8.9，則$\overline{AB}$＝___，$\overline{PQ}$＝___。

解答：$\overline{AB}$＝8.4－3.5＝4.9 單位長；$\overline{PQ}$＝8.9－4.3＝4.6 單位長。

習題 1.1-10　已知$\overline{AB}$＝10 公分，若拿一把有刻度的尺，將端點 A 對齊 2.0 公分的位置，則 B 點所對的刻度為__________。

解答：第一種情況：B 點在 A 點左邊，則 B 點的刻度為 2－10＝－8 公分

第二種情況：B 點在 A 點右邊，則 B 點的刻度為 2＋10＝12 公分

習題 1-2

習題 1.2-1　平角為多少度？

解答：平角為 180°

習題 1.2-2　直角為多少度？

解答：直角為 90°

習題 1.2-3　周角為多少度？

解答：周角為 360°

習題 1.2-4　什麼是銳角？

解答：0°＜銳角＜90°

習題 1.2-5　什麼是鈍角？

解答：90°＜鈍角＜180°

習題 1.2-6　什麼是劣角？

解答：0°＜劣角＜180°

習題 1.2-7　什麼是優角？

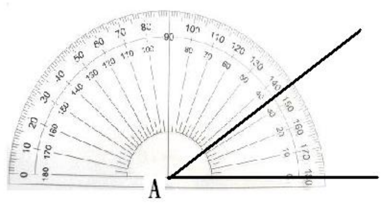
解答：180°＜優角＜360°

習題 1.2-8　用量角器畫出以下各角度：

(a) 45°　(b)75°　(c) 90°　(d) 135°　(e) 150°

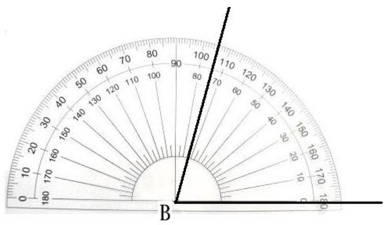
解答：

(a)



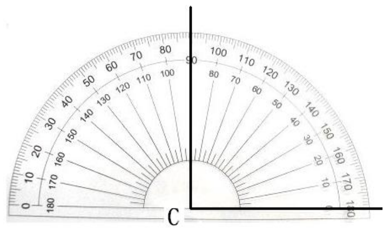
∠A＝45°

(b)



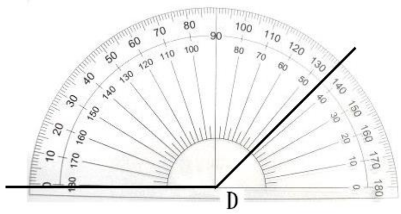
∠B＝75°

(c)



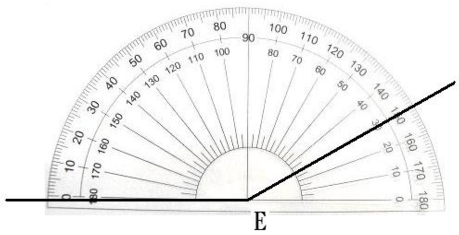
∠C＝90°

(d)



∠D＝135°

(e)



∠E＝150°

圖 1.2-18

習題 1.2-9　如圖 1.2-16，∠CAB＋∠CAD ＝ ？

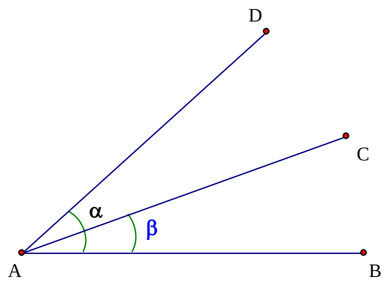
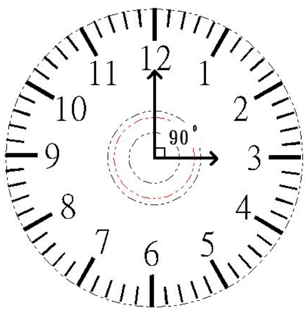


圖 1.2-16

解答：∠CAB＋∠CAD＝∠BAD

習題 1.2-10　3 點時，時鐘的時針與分針所成的角度為幾度？

解答：

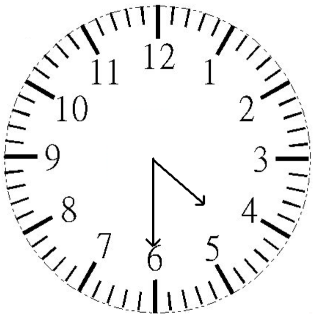


如圖 1.2-19 所示，時針與分針所成的夾角為 90°

圖 1.2-19

習題 1.2-11　4 點 30 分，時鐘的時針與分針所成的角度為幾度？

解答：

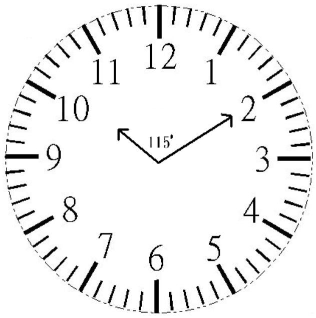


如圖 1.2-20 所示，時針與分針所成的夾角為 45°

圖 1.2-20

習題 1.2-12　10 點 10 分，時鐘的時針與分針所成的角度為幾度？

解答：



如圖 1.2-21 所示，時針與分針所成的夾角為 115°

圖 1.2-21

習題 1.2-13　圖 1.2-17 中共有＿＿＿＿＿個銳角。

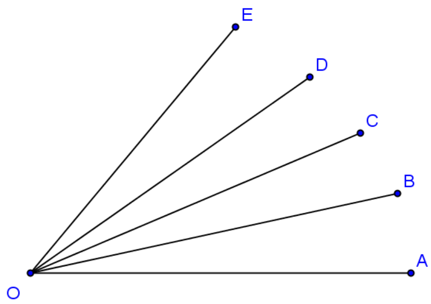


圖 1.2-17

想法：0°＜銳角＜90°

解：

敘述	理由
(1) ∠AOB、∠AOC、∠AOD、∠AOE、∠BOC、∠BOD、∠BOE、∠COD、∠COE、∠DOE 皆小於 90°，所以共有 10 個銳角。	0°＜銳角＜90°

習題 1-3

習題 1.3-1

若∠A＝40°，∠A 與∠B 互為餘角，則∠B＝？

想法：互為餘角的兩個角，其和為 90°

解：

敘述	理由
(1) ∠A＋∠B＝90°	已知∠A 與∠B 互為餘角＆ 餘角的定義
(2) ∠B＝90°－∠A ＝90°－40° ＝50°	由(1) 等量減法公理 ＆ 已知∠A＝40°代入

習題 1.3-2

若∠A＝30°，∠A 與∠B 互為補角，則∠B＝？

想法：互為補角的兩個角，其和為 180°

解：

敘述	理由
(1) ∠A＋∠B＝180°	已知∠A 與∠B 互為補角＆ 補角的定義
(2) ∠B＝180°－∠A ＝180°－30° ＝150°	由(1) 等量減法公理 ＆ 已知∠A＝30° 代入

習題 1.3-3

在下列空格中填入適當的角度：

156°的補角是____度，42°的餘角是____度，52°的補角是____度。

137°的補角是____度，33°的餘角是____度，19°的餘角是____度。

想法：(1) 互為餘角的兩個角，其和為 90°

(2) 互為補角的兩個角，其和為 180°

解：

敘述	理由
(1) 156°的補角＝180°－156°＝24°	補角的定義
(2) 42°的餘角＝90°－42°＝48°	餘角的定義
(3) 52°的補角＝180°－52°＝128°	補角的定義
(4) 137°的補角＝180°－137°＝43°	補角的定義
(5) 33°的餘角＝90°－33°＝57°	餘角的定義
(6) 19°的餘角＝90°－19°＝71°	餘角的定義

習題 1.3-4

已知∠1＝153°，若∠1 和∠2 互補，∠2 和∠3 互餘，求∠3。

想法：(1) 互為餘角的兩個角，其和為 90°

(2) 互為補角的兩個角，其和為 180°

解：

敘述	理由
(1) ∠1＋∠2＝180°	已知∠1 與∠2 互補 & 補角定義
(2) ∠2＝180°－∠1 ＝180°－153° ＝27°	由(1) 等量減法公理 & 已知∠1＝153°
(3) ∠2＋∠3＝90°	已知∠B 與∠C 互餘 & 餘角定義
(4) ∠3＝90°－∠2 ＝90°－27° ＝63°	由(3) 等量減法公理 & (2) ∠2＝27°已證
(5) ∠3＝63°	由(3)

習題 1.3-5

若 $\angle 1$ 與 $\angle 2$ 互為補角，且 $\angle 1$ 的餘角為$(43+x)°$，$\angle 2=8x°$，求 $x=$？

想法：(1) 互為餘角的兩個角，其和為 90°

(2) 互為補角的兩個角，其和為 180°

解：

敘述	理由
(1) $\angle 1+\angle 2=180°$	已知$\angle 1$ 與$\angle 2$ 互補 & 補角定理
(2) $\angle 1$ 的餘角$=90°-\angle 1=(43+x)°$	已知 $\angle 1$ 的餘角為$(43+x)°$ & 餘角定理
(3) $\angle 1=90°-(43+x)°=47°-x°$	由(2) 移項
(4) $47°-x°+\angle 2=180°$	將(3) $\angle 1=47°-x°$ 已證 代入(1)
(5) $47°-x°+8x°=180°$ $7x°=133°$ $x=19$	將已知 $\angle 2=8x°$ 代入 (4) & 解一元一次方程式

習題 1.3-6

$\angle A$ 的補角和$\angle B$ 的餘角度數相同，已知$\angle A=120°$，求$\angle B$。

想法：(1) 互為餘角的兩個角，其和為 90°

(2) 互為補角的兩個角，其和為 180°

解：

敘述	理由
(1) $\angle A$ 的補角$=180°-120°=60°$	已知$\angle A=120°$ & 補角定義
(2) $\angle B$ 的餘角度數$=90°-\angle B$	餘角定義
(3) $60°=90°-\angle B$	已知$\angle A$ 的補角和$\angle B$ 的餘角度數相同
(4) $\angle B=90°-60°=30°$	由(3) 移項

習題 1.3-7

設一角的餘角與補角的和，比其餘角的四倍多 25°，求此角。

想法：(1) 互為餘角的兩個角，其和為 90°

(2) 互為補角的兩個角，其和為 180°

解：

敘述	理由
(1) 設此角為 A	假設
(2) A 角的餘角＝90－A	由(1) ＆ 餘角定義
(3) A 角的補角＝180－A	由(1) ＆ 補角定義
(4) (90－A)＋(180－A)＝4(90－A)＋25	已知設一角的餘角與補角的和，比其餘角的四倍多 25°
(5) 270－2A＝360－4A＋25 4A－2A＝360＋25－270 2A＝115 A＝57.5	由(4) 解一元一次方程式

習題 1.3-8

若∠A＝80°，∠A 與∠B 互為共軛角，則∠B＝？

想法：互為共軛角的兩個角，其和為 360°

解：

敘述	理由
(1) ∠A＋∠B＝360°	已知∠A 與∠B 互為共軛角 ＆ 共軛角的定義
(2) ∠B＝360°－∠A ＝360°－80° ＝280°	由(1) 等量減法公理 ＆ 已知∠A＝80° 代入

習題 1.3-9

共軛的二角相差 80°，求此兩角。

想法：互為共軛角的兩個角，其和為 360°

解：

敘述	理由
(1) 假設∠A 與∠B 互為共軛角	假設∠A 與∠B 互為共軛角
(2) ∠A＋∠B＝360°	共軛角的定義
(3) 假設∠B＝∠A－80°	已知共軛的二角相差 80°
(4) ∠A＋(∠A－80°)＝360°	將(3)代入(2)
(5) ∠A＝(360°＋80°)÷2＝220°	由(4)解一元一次方程式
(6) ∠B＝220°－80°＝140°	將(5)代入(3)
(7) 此兩角為 220°與 140°	由(5)＆(6)

習題 1.3-10

$\frac{1}{3}$平角的餘角是幾度？它的共軛角是幾度？

想法：(1) 互為餘角的兩個角，其和為 90°

(2) 互為共軛角的兩個角，其和為 360°

解：

敘述	理由
(1) $\frac{1}{3}$平角的餘角＝(90°－$\frac{1}{3}$平角) ＝(90°－$\frac{1}{3}$×180°)＝30°	餘角的定義 ＆ 平角的定義
(2) $\frac{1}{3}$平角的共軛角＝(360°－$\frac{1}{3}$平角) ＝(360°－$\frac{1}{3}$×180°)＝300°	共軛角的定義 ＆ 平角的定義

習題 1.3-11

如圖 1.3-10，L、M 交於一點，則圖中共有__________組對頂角。

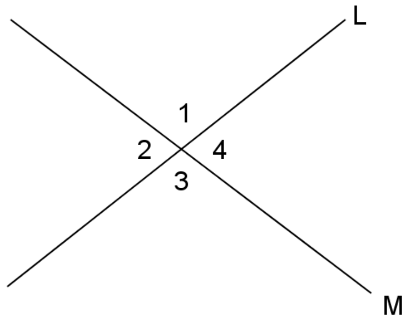


圖 1.3-10

想法：兩條直線如相交於一點，必定形成四個角，其中每一對相對的角互為對頂角。

解：

敘述	理由
(1) ∠1 與∠3 互為對頂角	已知 L、M 交於一點 & 對頂角定義
(2) ∠2 與∠4 互為對頂角	已知 L、M 交於一點 & 對頂角定義
(3) 所以共有 2 組對頂角	由(1) & (2)

習題 1.3-12

如圖 1.3-11，$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{DC}$交於一點 E，且∠AEC＝45°，則∠BED＝________度。

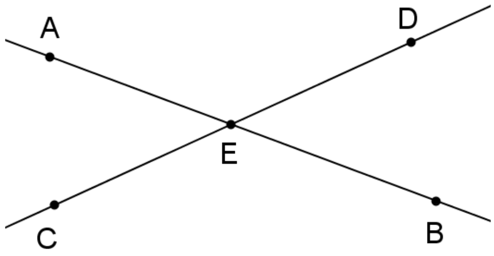


圖 1.3-11

想法：平角為 180°

解：

敘述	理由
(1)　∠AEC＋∠AED＝180°	如圖 1.3-10，∠AEC＋∠AED 為平角 180°
(2)　∠AED＝180°－∠AEC ＝180°－45°＝135°	由(1) 等量減法公理 & 已知∠AEC＝45°
(3)　∠AED＋∠BED＝180°	如圖 1.3-10，∠AED＋∠BED 為平角 180°
(4)　∠BED＝180°－∠AED ＝180°－135°＝45°	由(3) 等量減法公理 & 由(2) ∠AED＝135°

習題 1.3-13

二鄰角如互為餘角，試證此二角的平分線夾角為 45°。

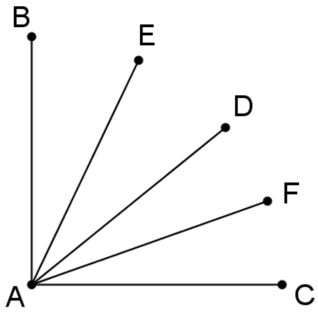


圖 1.3-12

已知：如圖 1.3-12，∠BAD 與∠DAC 互為餘角，且$\overline{AE}$、$\overline{AF}$分別為∠BAD 與∠DAC 的角平分線

求證： ∠EAF＝45°

想法：互為餘角的兩個角，其和為 90°

解：

敘述	理由
(1) ∠BAD＋∠DAC＝90°	已知∠BAD 與∠DAC 互為餘角
(2) ∠EAD＝$\frac{1}{2}$ ∠BAD	已知$\overline{AE}$為∠BAD 的角平分線
(3) ∠DAF＝$\frac{1}{2}$ ∠DAC	已知$\overline{AF}$為∠DAC 的角平分線
(4) ∠EAF＝∠EAD＋∠DAF	如圖 1.3-11 所示∠EAF＝∠EAD＋∠DAF
＝$\frac{1}{2}$ ∠BAD＋$\frac{1}{2}$ ∠DAC	將(2) ＆ (3) 代入
＝$\frac{1}{2}$(∠BAD＋∠DAC)	提出$\frac{1}{2}$
＝$\frac{1}{2}$×90°＝45°	將(1) 代入

習題 1.5

習題 1.5-1

平面上任三個點不共線的五個點，共可畫出幾條相異直線？幾條線段？

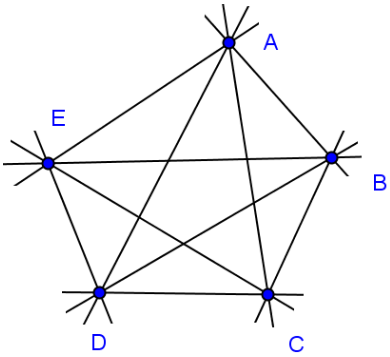


圖 1.5-5

詳解：如圖 1.5-5，A、B、C、D、E 任三點不共線的五個點，共可決定

(1) 直線：$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CD}$、$\overleftrightarrow{CE}$、$\overleftrightarrow{DE}$
共十條相異直線

(2) 線段：$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{AD}$、$\overline{AE}$、$\overline{BC}$、$\overline{BD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CD}$、$\overline{CE}$、$\overline{DE}$
共十條線段

習題 1.5-2

平面上共線的四個點，共可畫出幾條相異直線？幾條線段？

圖 1.5-6

詳解：如圖 1.5-6，A、B、C、D 共線的四個點，共可決定

(1) 直線：$\overleftrightarrow{AD}$共一條直線

(2) 線段：A、B、C、D 四個點，共可決定 $\frac{4\times(4-1)}{2}=6$ 條線段，分別是
$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{AC}$、$\overline{BD}$、$\overline{AD}$共六條線段。

習題 1.6

習題 1.6-1：

圖 1.6-17 中，$\overline{AB}$與$\overline{CD}$相交，且∠1＝40°，則∠2＝_____度，∠3＝_____度，∠4＝_____度。

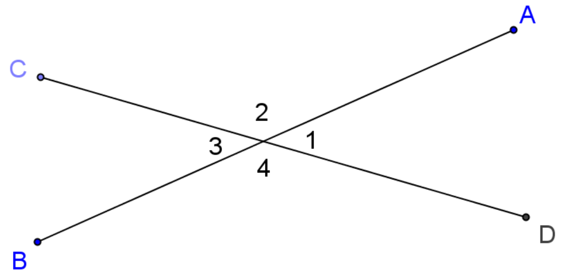


圖 1.6-17

想法：對頂角相等

解：

敘述	理由
(1) ∠3＝∠1＝40°	如圖 1.6-17，∠3 與∠1 互為對頂角 & 已知∠1＝40°
(2) ∠1＋∠2＝180°	如圖 1.6-17，∠1＋∠2 為平角 180°
(3) ∠2＝180°－∠1 ＝180°－40° ＝140°	由(2) 等量減法公理 & 已知∠1＝40°
(4) ∠4＝∠2＝140°	如圖 1.6-17，∠4 與∠2 互為對頂角 & (3) ∠2＝140°

習題 1.6-2：

如圖 1.6-18，已知三線段相交於一點，且$\angle 3=110^\circ$、$\angle 5=30^\circ$，
則$\angle 1=$___度。

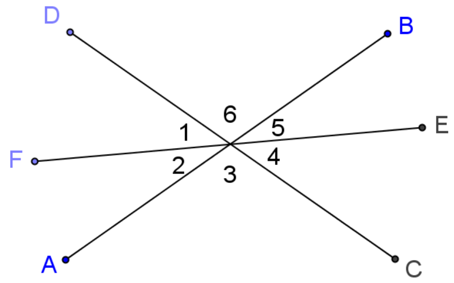


圖 1.6-18

想法：對頂角相等

解：

敘述	理由
(1) $\angle 2=\angle 5=30^\circ$	如圖 1.6-18，$\angle 2$ 與$\angle 5$ 互為對頂角 & 已知$\angle 5=30^\circ$
(2) $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$	如圖 1.6-18，$\angle 1+\angle 2+\angle 3$ 為平角 180°
(3) $\angle 1=180^\circ-\angle 3-\angle 2$ $=180^\circ-110^\circ-30^\circ$ $=40^\circ$	由(2) 等量減法公理 & 已知$\angle 3=110^\circ$ & (1) $\angle 2=30^\circ$

習題 1.6-3：

如圖 1.6-19，已知三線段相交於一點，且∠1＝(x＋10)°、∠2＝(3x－10)°、∠3＝(2x－60)°，則 x＝______。

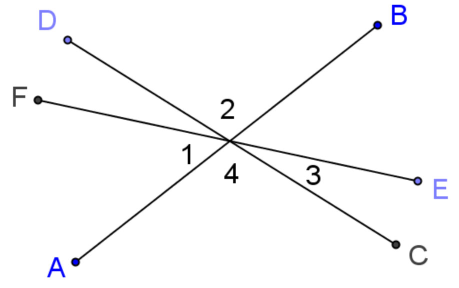


圖 1.6-19

想法：對頂角相等

解：

敘述	理由
(1) ∠4＝∠2＝(3x－10)°	如圖 1.6-19，∠4 與∠2 互為對頂角 & 已知∠2＝(3x－10)°
(2) ∠1＋∠4＋∠3＝180°	如圖 1.6-19， ∠1＋∠4＋∠3 為平角 180°
(3) (x＋10)°＋(3x－10)°＋(2x－60)°＝180° 6x－60＝180 6x＝240 x＝40	將已知∠1＝(x＋10)°、 ∠3＝(2x－60)° & (1) ∠4＝(3x－10)° 代入(2) & 解一元一次方程式

習題 1.6-4

圖 1.6-20 中，∠DBE＝∠ABC＝90°，試證∠CBD＝∠ABE。

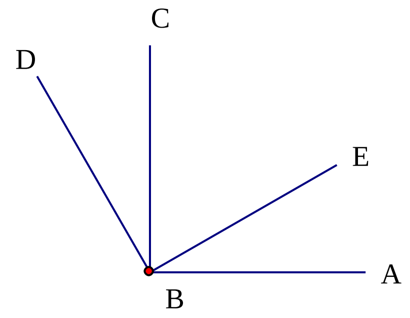


圖 1.6-20

想法：全量＝分量和

解：

敘述	理由
(1) ∠DBE＝∠ABC	已知∠DBE＝∠ABC＝90°
(2) ∠DBE＝∠DBC＋∠CBE	如圖 1.6-20，全量＝分量和
(3) ∠ABC＝∠ABE＋∠CBE	如圖 1.6-20，全量＝分量和
(4) ∠DBC＋∠CBE＝∠ABE＋∠CBE	將(2)＆(3)代入(1)
(5) ∠DBC＝∠ABE	等量減法公理(等式兩邊同減∠CBE)

習題 1.6-5：

如圖 1.6-21，$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$交於一點 Q，且∠BQD＝150°，∠CQE＝120°，則∠AQF＝__________度。

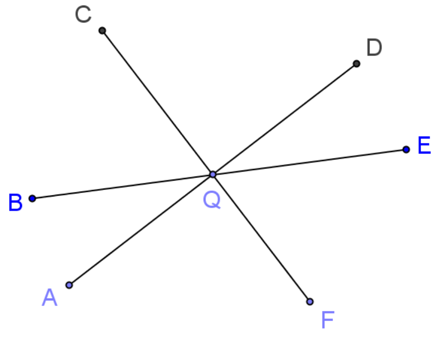


圖 1.6-21

想法：對頂角相等

解：

敘述	理由
(1) ∠CQD＋∠CQB＝∠BQD＝150°	如圖 1.6-21 所示 & 已知∠BQD＝150°
(2) ∠CQD＋∠DQE＝∠CQE＝120°	如圖 1.6-21 所示 & 已知∠CQE＝120°
(3) (∠CQD＋∠CQB)＋(∠CQD＋∠DQE) ＝∠BQD＋∠CQE (∠CQD＋∠CQB＋∠DQE)＋∠CQD ＝150°＋120°＝270° ∠CQD＝270°－(∠CQD＋∠CQB＋∠DQE)	由(1)＋(2) & 加法交換律、結合律 & 已知∠BQD＝150°， ∠CQE＝120° & 等量減法公理
(4) ∠CQD＋∠CQB＋∠DQE＝180°	$\overline{BE}$為一線段
(5) ∠CQD＝270°－180°＝90°	將(4)代入(3)
(6) ∠AQF＝∠CQD＝90°	由(5) & 對頂角相等

習題 1.6-6

若兩鄰角互為餘角，試證明這兩角的平分線所成的角為 45°。

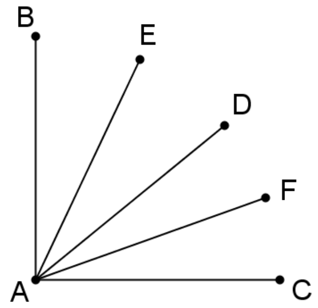


圖 1.6-22

已知： 如圖 1.6-22，∠BAD 與∠DAC 互為餘角，且$\overline{AE}$、$\overline{AF}$分別為∠BAD 與∠DAC 的角平分線

求證： ∠EAF＝45°

想法： 互為餘角的兩個角，其和為 90°

解：

敘述	理由
(1) ∠BAD＋∠DAC＝90°	已知∠BAD 與∠DAC 互為餘角
(2) ∠EAD＝$\frac{1}{2}$∠BAD	已知$\overline{AE}$為∠BAD 的角平分線
(3) ∠DAF＝$\frac{1}{2}$∠DAC	已知$\overline{AF}$為∠DAC 的角平分線
(4) ∠EAF＝∠EAD＋∠DAF	如圖 1.6-22 所示∠EAF＝∠EAD＋∠DAF
＝$\frac{1}{2}$∠BAD＋$\frac{1}{2}$∠DAC	將(2) & (3) 代入
＝$\frac{1}{2}$(∠BAD＋∠DAC)	提出$\frac{1}{2}$
＝$\frac{1}{2}$×90°＝45°	將(1) 代入

習題 1.6-7：

如圖 1.6-23，A、O、B 三點共線，若$\overline{OD}$為∠EOB 之角平分線，$\overline{OC}$為∠AOE 之角平分線，且∠EOC＝50°，求∠EOD＝？

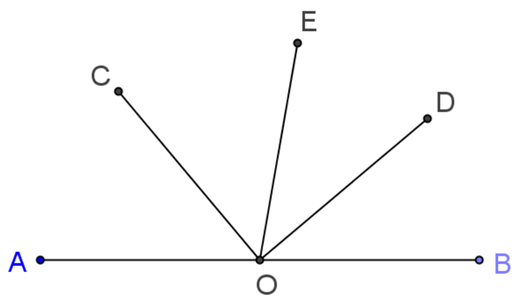


圖 1.6-23

想法：如兩鄰角互為補角，則兩角的平分線互相垂直

解：

敘述	理由
(1) ∠AOE＋∠EOB＝180°	如圖 1.6-23 所示，∠AOE＋∠EOB 為平角 180°
(2) $\overline{OD}$為∠EOB 之角平分線	已知
(3) $\overline{OC}$為∠AOE 之角平分線	已知
(4) ∠EOC＋∠EOD＝90°	由(1) & (2) & (3) 如兩鄰角∠AOE 與∠EOB 互為補角，則兩角的平分線$\overline{OC}$與$\overline{OD}$互相垂直
(5) ∠EOD＝90°－∠EOC ＝90°－50°＝40°	由(4) 等量減法公理 & 已知∠EOC＝50°

習題 1.6-8

若兩鄰角的平分線所成的角等於直角的一半，試證明這兩角互為餘角。

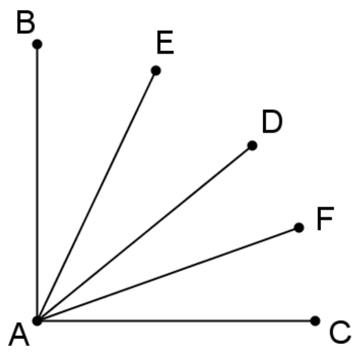


圖 1.6-24

已知：如圖 1.6-24，∠BAD 與∠DAC 為相鄰的兩角，且$\overline{AE}$、$\overline{AF}$分別為∠BAD 與∠DAC 的角平分線，若∠EAF＝45°

求證：∠BAD 與∠DAC 互為餘角

想法：互為餘角的兩個角，其和為 90°

解：

敘述	理由
(1) ∠EAD＋∠FAD＝∠EAF＝45°	如圖 1.6-24 所示 & 已知∠EAF＝45°
(2) ∠BAD＝2∠EAD	已知$\overline{AE}$為∠BAD 的角平分線
(3) ∠DAC＝2∠FAD	已知$\overline{AF}$為∠DAC 的角平分線
(4) ∠BAD＋∠DAC＝2∠EAD＋2∠FAD ＝2(∠EAD＋∠FAD) ＝2×45°＝90°	如圖 1.6-24 所示 & 將(2) & (3) 代入提出 2 將(1) 代入
(5) ∠BAD 與∠DAC 互為餘角	由(4) 餘角定義

習題 1.6-9

圖 1.6-25 中，$\overline{EF}$為∠DEG 的角平分線，∠1＝∠3，試證∠2＝∠3。

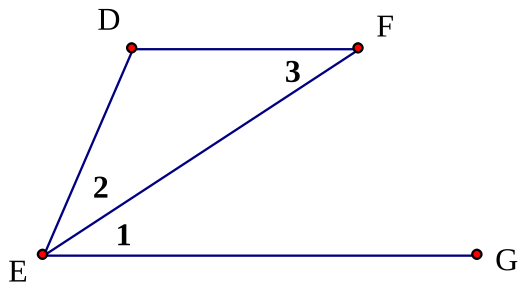


圖 1.6-25

想法：角平分線將角度平分為兩相等的角

證明：

敘述	理由
(1) ∠1＝∠2	已知$\overline{EF}$為∠DEG 的角平分線
(2) ∠1＝∠3	已知∠1＝∠3
(3) ∠2＝∠3	由(1) & (2) 遞移律

習題 1.6-10

圖 1.6-26 中，∠HIJ＝∠KJI，$\overline{LI}$為∠HIJ 的角平分線，$\overline{LJ}$為∠KJI 的角平分線，試證∠HIL＝∠KJL。

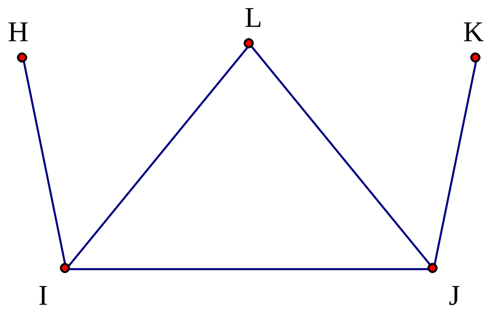


圖 1.6-26

想法：角平分線將角度平分為兩相等的角

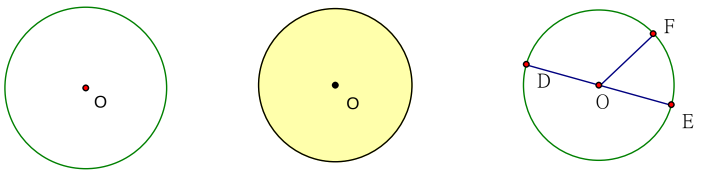
證明：

敘述	理由
(1) ∠HIJ＝∠KJI	已知∠HIJ＝∠KJI
(2) ∠HIJ＝2∠HIL	已知$\overline{LI}$為∠HIJ 的角平分線
(3) ∠KJI＝2∠KJL	$\overline{LJ}$為∠KJI 的角平分線
(4) 2∠HIL＝2∠KJL	將(2) ＆ (3)代入 (1)
(5) ∠HIL＝∠KJL	等量除法公理(等式兩邊同除以 2)

習題 1.7

習題 1.7-1　圓與圓周的區別為何？

解答： 圓周為一封閉曲線，如圖 1.7-4(a)，線上各點都與其內一點等距離，此點稱為圓心；圓周內的部份為圓，如圖 1.7-4(b)。



(a) 圓周　　(b) 圓　　(c) 直徑 DE，半徑 OF

圖 1.7-4

習題 1.7-2　半徑、直徑是線段還是直線？

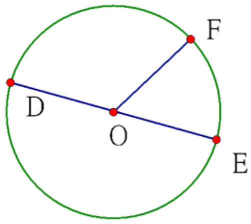


圖 1.7-5

想法： 兩端可以無限延長的線叫做直線 & 有兩個端點的線叫做線段

解答：

敘述	理由
(1)　半徑 $\overline{OF}$ 為線段	半徑 $\overline{OF}$ 有左端點(O)與右端點(F)
(2)　直徑 $\overline{DE}$ 為線段	直徑 $\overline{DE}$ 有左端點(D)與右端點(E)

習題 1.7-3　一個圓有多少個半徑？

想法： 半徑為一端為圓心且另一端在圓周上的線段

解答：

敘述	理由
(1)　一個圓有無限多個半徑	圓周上有無限多個點，這無限多個點與圓心所形成的線段都是此圓的半徑

習題 1.7-4　一個圓有多少個直徑？

想法：直徑為通過圓心且兩個端點都在圓周上的線段

解答：

敘述	理由
(1)　一個圓有無限多個直徑	圓周上有無限多個點，通過圓心與圓周上兩點所形成的線段都是直徑

習題 1.7-5　一個圓有多少條弦？

想法：弦為兩端點(相異兩點)都在圓周上所形成的線段

解答：

敘述	理由
(1)　一個圓有無限多條弦	圓周上有無限多個點，兩端點(相異兩點)都在圓周上所形成的線段都是弦

習題 1.7-6　一個圓的直徑為半徑的幾倍？

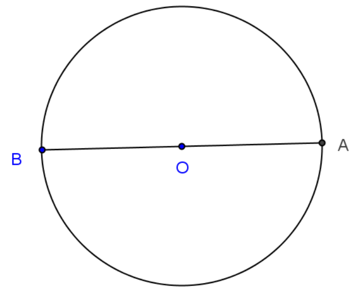


圖 1.7-6

想法：一個圓的半徑為固定值

解答：

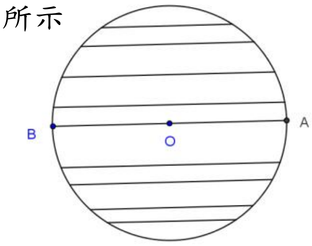
敘述	理由
(1)　以 O 為圓心，$\overline{OA}$為半徑畫圓 $\overline{OA}=\overline{OB}$	作圖，$\overline{OA}$與$\overline{OB}$都是圓 O 的半徑，一個圓的半徑為固定值
(2)　$\overline{AB}=\overline{OA}+\overline{OB}$	如圖 1.7-6 所示，$\overline{AB}$為圓 O 的直徑
(3)　$\overline{AB}=\overline{OB}+\overline{OB}=2\overline{OB}$	將(1)代入(2)
(4)　所以一個圓的直徑為半徑的 2 倍	由(3)

習題 1.7-7　什麼是圓的最大弦？

想法：(1) 直徑為通過圓心且兩個端點都在圓周上的線段

(2) 弦為兩端點都在圓周上所形成的線段

解答：

敘述	理由
(1)　一個圓有無限多個弦	圓周上有無限多個點，兩端點都在圓周上所形成的線段都是弦
(2)　圓中最大的弦為通過圓心的$\overline{AB}$弦	如圖 1.7-7 所示  **圖 1.7-7**
(3)　通過圓心的弦為直徑$\overline{AB}$	直徑為通過圓心且兩個端點都在圓周上的線段
(4)　圓中最大的弦為直徑$\overline{AB}$	由(2)&(3)

習題 1.7-8　一個圓有多少個圓心？

想法：圓周為一封閉曲線，線上各點都與其內一點等距離，此點稱為圓心

解答：

敘述	理由
(1)　一個圓只有 1 個圓心	圓周為一封閉曲線，線上各點都與其內一點等距離，此點稱為圓心

第一章進階思考題

1. 平面上任三個點不共線的五個點，共可畫出幾條相異直線？幾條線段？

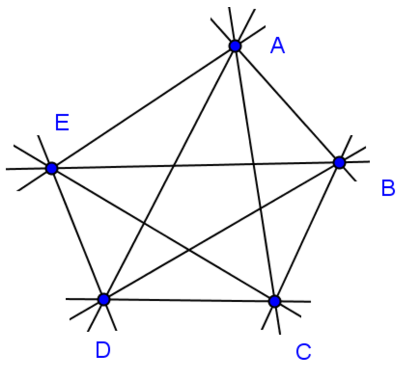


圖 1.11

詳解：如圖 1.11，A、B、C、D、E 任三點不共線的五個點，共可決定

(1) **直線：**$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CD}$、$\overleftrightarrow{CE}$、$\overleftrightarrow{DE}$
共十條相異直線。

(2) **線段：**$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{AD}$、$\overline{AE}$、$\overline{BC}$、$\overline{BD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CD}$、$\overline{CE}$、$\overline{DE}$
共十條線段。

2. 平面上有相異 8 個點，若其中任三點不共線，則此 8 個點可決定幾條直線？幾條線段？

想法：平面上有相異 n 個點，若其中任三點不共線，則此 n 個點可決定 $\frac{n(n-1)}{2}$ 條直線、$\frac{n(n-1)}{2}$ 條線段。

詳解：

(1) **直線：**$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{8(8-1)}{2}=28$ 條相異直線。

(2) **線段：**$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{8(8-1)}{2}=28$ 條線段。

3. 平面上有相異 10 個點，若其中任三點不共線，則此 10 個點可決定幾條直線？幾條線段？

想法：平面上有相異 n 個點，若其中任三點不共線，則此 n 個點可決定 $\frac{n(n-1)}{2}$ 條直線、$\frac{n(n-1)}{2}$ 條線段。

詳解：(1)　直線：$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{10(10-1)}{2}=45$ 條相異直線。

(2)　線段：$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{10(10-1)}{2}=45$ 條線段。

4. 平面上共線的 8 個點，共可畫出幾條相異直線？幾條線段？

想法：平面上有相異 n 個點，若這 n 個點皆共線，可決定 1 條直線、$\frac{n(n-1)}{2}$ 條線段。

詳解：(1)　直線：1 條直線。

(2)　線段：$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{8(8-1)}{2}=28$ 條線段。

5. 平面上共線的 10 個點，共可畫出幾條相異直線？幾條線段？

想法：平面上有相異 n 個點，若這 n 個點皆共線，可決定 1 條直線、$\frac{n(n-1)}{2}$ 條線段。

詳解：(1)　直線：1 條直線。

(2)　線段：$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{10(10-1)}{2}=45$ 條線段。

6. 如圖 1.1 所示，若 A、B、C 三點共線，另有一點 D，則此 4 個點共可畫出幾條相異直線？幾條線段？

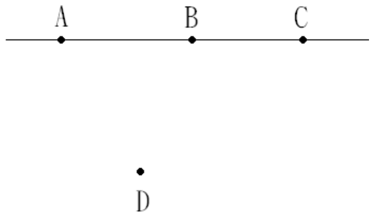


圖 1.1

想法：(1) 平面上有相異n個點，若其中任三點不共線，則此n個點可決定$\dfrac{n(n-1)}{2}$條直線、$\dfrac{n(n-1)}{2}$條線段。

(2) 平面上有相異n個點，若這n個點皆共線，可決定1條直線、$\dfrac{n(n-1)}{2}$條線段。

詳解：如圖 1.1(a)，A、B、C、D 四個點，共可決定

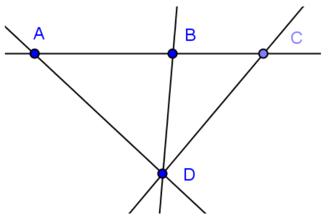


圖 1.1(a)

(1) 直線：若 A、B、C、D 四個點都不共線，

則可決定$\dfrac{4\times(4-1)}{2}=6$條相異直線，

若 A、B、C 三點不共線，

則可決定$\dfrac{3\times(3-1)}{2}=3$條相異直線，

但 A、B、C 三點共線，只決定一條直線$\overleftrightarrow{AC}$，

所以最後可決定$\dfrac{4\times(4-1)}{2}-\dfrac{3\times(3-1)}{2}+1=6-3+1=4$條直線，

分別是$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{CD}$共四條相異直線。

(2) 線段：A、B、C、D 四個點，共可決定$\dfrac{4\times(4-1)}{2}=6$條線段，

分別是$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{AD}$、$\overline{BC}$、$\overline{BD}$、$\overline{CD}$共六條線段。

7. 如圖 1.2 所示，A、B、C 三點共線，另有兩點 D、E，則此 5 個點共可畫出幾條相異直線？幾條線段？

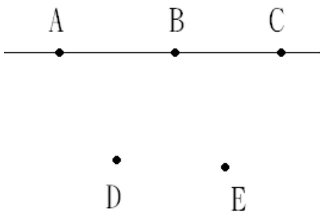


圖 1.2

想法：(1) 平面上有相異 n 個點，若其中任三點不共線，則此 n 個點可決定 $\frac{n(n-1)}{2}$ 條直線、$\frac{n(n-1)}{2}$ 條線段。

(2) 平面上有相異 n 個點，若這 n 個點皆共線，可決定1條直線、$\frac{n(n-1)}{2}$ 條線段。

詳解：如圖 1.2(a)，A、B、C、D、E 五個點，共可決定

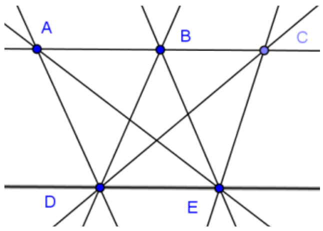


圖 1.2(a)

(1) 直線：若 A、B、C、D、E 五個點都不共線，

則可決定 $\frac{5\times(5-1)}{2}=10$ 條相異直線，

若 A、B、C 三點不共線，

則可決定 $\frac{3\times(3-1)}{2}=3$ 條相異直線，

但 A、B、C 三點共線，

只決定一條直線 $\overleftrightarrow{AC}$，

所以最後可決定 $\frac{5\times(5-1)}{2}-\frac{3\times(3-1)}{2}+1=10-3+1=8$ 條直線，分別是 $\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CD}$、$\overleftrightarrow{CE}$、$\overleftrightarrow{DE}$ 共八條相異直線。

(2) 線段：A、B、C、D、E 五個點，共可決定$\dfrac{5\times(5-1)}{2}=10$條線段，

分別是$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{AD}$、$\overline{AE}$、$\overline{BC}$、$\overline{BD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CD}$、$\overline{CE}$、 $\overline{DE}$

共十條線段。

8. 如圖 1.3 所示，A、B、C、D 四點共線，其餘三點 E、F、G 不共線，則此 7 個點共可畫出幾條相異直線？幾條線段？

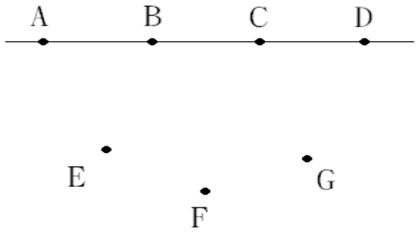


圖 1.3

想法：(1) 平面上有相異n個點，若其中任三點不共線，則此n個點可決定$\dfrac{n(n-1)}{2}$條直線、$\dfrac{n(n-1)}{2}$條線段。

(2) 平面上有相異n個點，若這n個點皆共線，可決定1條直線、$\dfrac{n(n-1)}{2}$條線段。

詳解：如圖 1.3(a)，A、B、C、D、E、F、G 七個點，共可決定

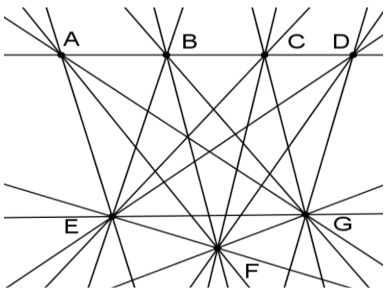


圖 1.3(a)

(1) 直線：若 A、B、C、D、E、F、G 七個點都不共線，

則可決定$\dfrac{7\times(7-1)}{2}=21$條相異直線，

若 A、B、C、D 四點不共線，

則可決定$\dfrac{4\times(4-1)}{2}=6$條相異直線，

但 A、B、C、D 四點共線，只可決定一條直線$\overleftrightarrow{AD}$，

所以最後可有 $\frac{7\times(7-1)}{2}-\frac{4\times(4-1)}{2}+1=21-6+1=16$ 條直線，
分別是$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{AF}$、$\overleftrightarrow{AG}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{BG}$、$\overleftrightarrow{CE}$、$\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{CG}$、$\overleftrightarrow{DE}$、$\overleftrightarrow{DF}$、$\overleftrightarrow{DG}$、$\overleftrightarrow{EF}$、$\overleftrightarrow{EG}$、$\overleftrightarrow{FG}$共 16 條相異直線。

(2) 線段：A、B、C、D、E、F、G 七個點，可決定 $\frac{7\times(7-1)}{2}=21$ 條線段，
分別是$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{AD}$、$\overline{AE}$、$\overline{AF}$、$\overline{AG}$、$\overline{BC}$、$\overline{BD}$、$\overline{BE}$、$\overline{BE}$、$\overline{BG}$、$\overline{CD}$、$\overline{CE}$、$\overline{CF}$、$\overline{CG}$、$\overline{DE}$、$\overline{DF}$、$\overline{DG}$、$\overline{EF}$、$\overline{EG}$、$\overline{FG}$共 21 條線段。

9. 平面上有相異 8 個點，其中有 5 個點共線，則可決定幾條直線？可決定幾條線段？

想法：平面上有相異 n 個點，其中有 m 個點共線，則可決定
$\frac{n(n-1)}{2}-\frac{m(m-1)}{2}+1$ 條直線，可決定 $\frac{n(n-1)}{2}$ 條線段。

詳解：(1) 直線： $\frac{n(n-1)}{2}-\frac{m(m-1)}{2}+1=\frac{8(8-1)}{2}-\frac{5(5-1)}{2}+1=28-10+1=19$ 條相異直線。

(2) 線段： $\frac{n(n-1)}{2}=\frac{8(8-1)}{2}=28$ 條線段。

10. 平面上有相異 10 個點，其中有 6 個點共線，則可決定幾條直線？可決定幾條線段？

想法：平面上有相異 n 個點，其中有 m 個點共線，則可決定
$\frac{n(n-1)}{2}-\frac{m(m-1)}{2}+1$ 條直線，可決定 $\frac{n(n-1)}{2}$ 條線段。

詳解：(1) 直線： $\frac{n(n-1)}{2}-\frac{m(m-1)}{2}+1=\frac{10(10-1)}{2}-\frac{6(6-1)}{2}+1=45-15+1=31$ 條相異直線。

(2) 線段： $\frac{n(n-1)}{2}=\frac{10(10-1)}{2}=45$ 條線段。

11. 如圖 1.4 所示，L 與 M 為兩條相異直線，且 L 與 M 不相交，若直線 L 上有 A、B、C 三點，直線 M 上有 D、E、F 三點，則此 6 個點共可畫出幾條相異直線？幾條線段？

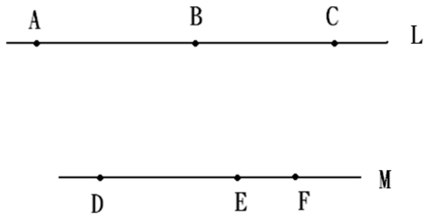


圖 1.4

想法：(1) 平面上有相異 n 個點，若其中任三點不共線，則此 n 個點可決定 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 條直線、$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 條線段。

(2) 平面上有相異 n 個點，若這 n 個點皆共線，可決定 1 條直線、$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 條線段。

(3) 平面上有相異 n 個點，其中有 m 個點共線，則可決定 $\dfrac{n(n-1)}{2}-\dfrac{m(m-1)}{2}+1$ 條直線，可決定 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 條線段。

詳解：如圖 1.4(a)，A、B、C、D、E、F 六個點，共可決定

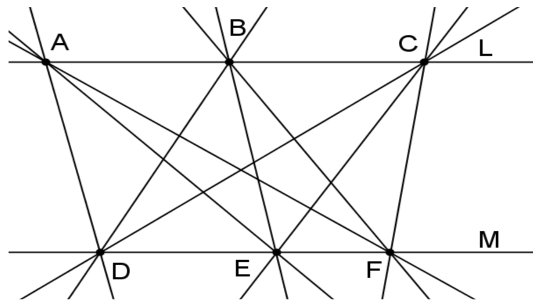


圖 1.4(a)

(1) 直線：若 A、B、C、D、E、F 六個點都不共線，

則可決定 $\dfrac{6\times(6-1)}{2}=15$ 條相異直線，

若 A、B、C 三點不共線，

則可決定 $\dfrac{3\times(3-1)}{2}=3$ 條相異直線，

但 A、B、C 三點共線，

只可決定一條直線 $\overleftrightarrow{AC}$，

若 D、E、F 三點不共線，

則可決定$\dfrac{3\times(3-1)}{2}=3$條相異直線，

但 D、E、F 三點共線，只可決定一條直線$\overleftrightarrow{DF}$，

所以最後可有$\dfrac{6\times(6-1)}{2}-\dfrac{3\times(3-1)}{2}+1-\dfrac{3\times(3-1)}{2}+1$

$=15-3+1-3+1=11$條相異直線，

分別是$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{AF}$、$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{CD}$、$\overleftrightarrow{CE}$、$\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{DF}$，

共 11 條相異直線。

(2) 線段：A、B、C、D、E、F 六個點，共可決定$\dfrac{6\times(6-1)}{2}=15$條線段，

分別是$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{AD}$、$\overline{AE}$、$\overline{AF}$、$\overline{BC}$、$\overline{BD}$、$\overline{BE}$、$\overline{BF}$、$\overline{CD}$、$\overline{CE}$、$\overline{CF}$、$\overline{DE}$、$\overline{DF}$、$\overline{EF}$共 15 條線段。

12. 如圖 1.5 所示，L 與 M 為兩條相異直線，且 L 與 M 不相交，若直線 L 上有 A、B、C、D 四個點，直線 M 上有 E、F、G 三個點，則此 7 個點共可畫出幾條相異直線？幾條線段？

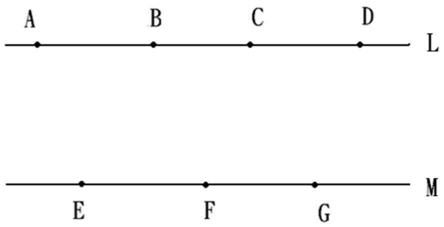


圖 1.5

想法：(1) 平面上有相異n個點，若其中任三點不共線，則此n個點可決定$\frac{n(n-1)}{2}$條直線、$\frac{n(n-1)}{2}$條線段。

(2) 平面上有相異n個點，若這n個點皆共線，可決定1條直線、$\frac{n(n-1)}{2}$條線段。

(3) 平面上有相異n個點，其中有m個點共線，則可決定$\frac{n(n-1)}{2}-\frac{m(m-1)}{2}+1$條直線，可決定$\frac{n(n-1)}{2}$條線段。

詳解：如圖 1.5(a)，A、B、C、D、E、F、G 七個點，共可決定

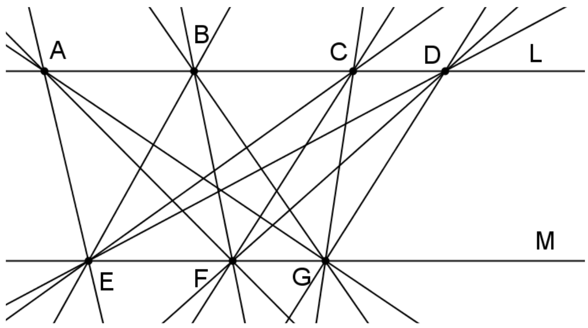


圖 1.5(a)

(1) 直線：若 A、B、C、D、E、F、G 七個點都不共線，

則可決定$\frac{7\times(7-1)}{2}=21$條相異直線，

若 A、B、C、D 四點不共線，

則可決定$\frac{4\times(4-1)}{2}=6$條相異直線，

但 A、B、C、D 四點共線，只可決定一條直線$\overleftrightarrow{AD}$，

若 E、F、G 三點不共線，則可決定$\dfrac{3\times(3-1)}{2}=3$條相異直線，

但 E、F、G 三點共線，只可決定一條直線$\overleftrightarrow{EG}$，

所以最後可有$\dfrac{7\times(7-1)}{2}-\dfrac{4\times(4-1)}{2}+1-\dfrac{3\times(3-1)}{2}+1$

$=21-6+1-3+1=14$條相異直線，

分別是$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{AF}$、$\overleftrightarrow{AG}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{BG}$、$\overleftrightarrow{CE}$、$\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{CG}$、$\overleftrightarrow{DE}$、$\overleftrightarrow{DF}$、$\overleftrightarrow{DG}$、$\overleftrightarrow{EG}$共 14 條相異直線。

(2) 線段：A、B、C、D、E、F、G 七個點，可決定$\dfrac{7\times(7-1)}{2}=21$條線段，

分別是$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{AD}$、$\overline{AE}$、$\overline{AF}$、$\overline{AG}$、$\overline{BC}$、$\overline{BD}$、$\overline{BE}$、$\overline{BF}$、$\overline{BG}$、$\overline{CD}$、$\overline{CE}$、$\overline{CF}$、$\overline{CG}$、$\overline{DE}$、$\overline{DF}$、$\overline{DG}$、$\overline{EF}$、$\overline{EG}$、$\overline{FG}$

共 21 條線段。

13. 平面上有L、M兩條直線，且 L 與 M 不相交，L線上有相異 5 點，M線上有相異 4 點，則這些點可決定，則可決定幾條直線？可決定幾條線段？

想法：平面上有L、M兩條直線，且 L 與 M 不相交，L線上有相異m點，M線上有相異n點，則這些點可決定

$$\frac{(m+n)\times(m+n-1)}{2}-\frac{m\times(m-1)}{2}+1-\frac{n\times(n-1)}{2}+1$$

$$=\frac{(m+n)^2-(m+n)}{2}-\frac{m^2-m}{2}+1-\frac{n^2-n}{2}+1$$

$$=\frac{m^2+2mn+n^2-m-n}{2}-\frac{m^2-m}{2}+1-\frac{n^2-n}{2}+1$$

$$=\frac{m^2+2mn+n^2-m-n-m^2+m-n^2+n}{2}+2$$

$=m\times n+2$條直線(包含L、M)，可決定$\dfrac{(m+n)\times(m+n-1)}{2}$條線段。

詳解：(1) 直線：$m\times n+2=5\times4+2=20+2=22$條相異直線。

(2) 線段：$\dfrac{(m+n)\times(m+n-1)}{2}=\dfrac{(5+4)\times(5+4-1)}{2}=9\times4=36$條線段。

14. 平面上有 L 、M 兩條直線，且 L 與 M 不相交，L 線上有相異 7 點，M 線上有相異 5 點，則這些點可決定，則可決定幾條直線？可決定幾條線段？

想法：平面上有 L 、M 兩條直線，且 L 與 M 不相交，L 線上有相異 m 點，M 線上有相異 n 點，則這些點可決定

$$\frac{(m+n)\times(m+n-1)}{2}-\frac{m\times(m-1)}{2}+1-\frac{n\times(n-1)}{2}+1$$

$$=\frac{(m+n)^2-(m+n)}{2}-\frac{m^2-m}{2}+1-\frac{n^2-n}{2}+1$$

$$=\frac{m^2+2mn+n^2-m-n}{2}-\frac{m^2-m}{2}+1-\frac{n^2-n}{2}+1$$

$$=\frac{m^2+2mn+n^2-m-n-m^2+m-n^2+n}{2}+2$$

$=m\times n+2$ 條直線(包含 L 、M)，可決定 $\frac{(m+n)\times(m+n-1)}{2}$ 條線段。

詳解：(1)　直線： $m\times n+2=7\times5+2=35+2=37$ 條相異直線。

(2)　線段： $\frac{(m+n)\times(m+n-1)}{2}=\frac{(7+5)\times(7+5-1)}{2}=6\times11=66$ 條線段。

15. L 與 M 為兩條相異直線，且**L 與 M 有交點**，若直線 L 上有 A、B、C 三點，直線 M 上有 D、E、F 三點，則共可畫出幾條相異直線？幾條線段？

想法：(1) 平面上有相異n個點，若其中任三點不共線，則此n個點可決定$\frac{n(n-1)}{2}$條直線、$\frac{n(n-1)}{2}$條線段。

(2) 平面上有相異n個點，若這n個點皆共線，可決定1條直線、$\frac{n(n-1)}{2}$條線段。

(3) 平面上有相異n個點，其中有m個點共線，則可決定$\frac{n(n-1)}{2}-\frac{m(m-1)}{2}+1$條直線，可決定$\frac{n(n-1)}{2}$條線段。

(4) 平面上有L、M兩條直線，且 L 與 M 不相交，L線上有相異m點，M線上有相異n點，則這些點可決定$m\times n+2$條直線(包含L、M)，可決定$\frac{(m+n)\times(m+n-1)}{2}$條線段。

詳解：因為題目並沒有將圖形畫出來，故我們必須來探討各種不同的情況

第一種情況，假設 L 與 M 相交於 P 點，關係如圖所示：

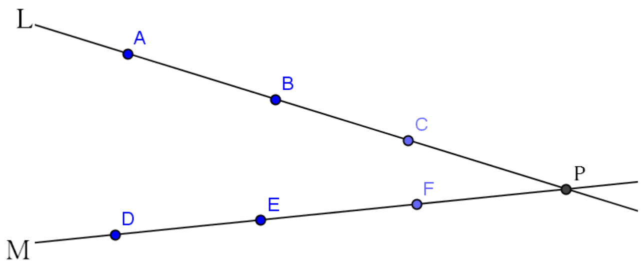


圖 1.12

(1) 直線： 圖 1.12 中的點共有：L 上 3 點 A、B、C 加上 M 上 3 點 D、E、F，再加上 L 與 M 的交點 P，共有 3＋3＋1＝7 個點，因為有通過 P 點的直線只有 L 與 M 兩條，所以上圖中的 A、B、C、D、E、F、P 七個點，他們所能夠決定的直線數目，其實可以不用考慮 P 點，所以我們只需考慮 L 上 3 點 A、B、C 與 M 上 3 點 D、E、F，取圖 1.12 中的一部分來看，如圖 1.12(a)所示：

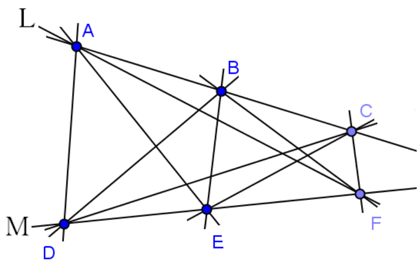


圖 1.12(a)

於是我們得到的圖形就與挑戰題第 11 題的圖形一樣，所以 A、B、C、D、E、F 此六點所決定的直線數目，當然就與挑戰題第 11 題的結果一樣，可決定$3\times3+2=9+2=11$條相異直線，分別是$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{AF}$、$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{CD}$、$\overleftrightarrow{CE}$、$\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{DF}$，共 11 條相異直線。

(2) 線段：平面上相異 n 個點，共可決定$\dfrac{n(n-1)}{2}$個線段。

所以這個題目的點共有：L 上 3 點 A、B、C 加上 M 上 3 點 D、E、F，還要再加上 L 與 M 的交點 P，共有 3＋3＋1＝7 個點，所以共可決定$\dfrac{7(7-1)}{2}=21$個線段，如圖 1.12(b)所示

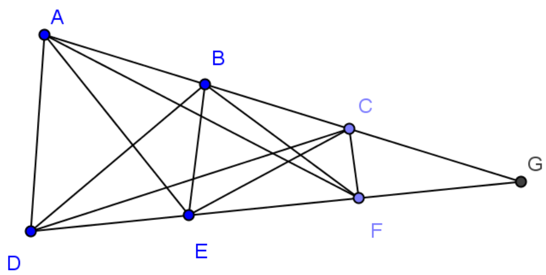


圖 1.12(b)

這些線段分別為$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{AD}$、$\overline{AE}$、$\overline{AF}$、$\overline{AP}$、$\overline{BC}$、$\overline{BD}$、$\overline{BE}$、$\overline{BF}$、$\overline{BP}$、$\overline{CD}$、$\overline{CE}$、$\overline{CF}$、$\overline{CP}$、$\overline{DE}$、$\overline{DF}$、$\overline{DP}$、$\overline{EF}$、$\overline{EP}$、$\overline{FP}$，共 21 個線段。

第二種情況，假設 L 與 M 相交於 P 點，關係如圖 1.13 所示：

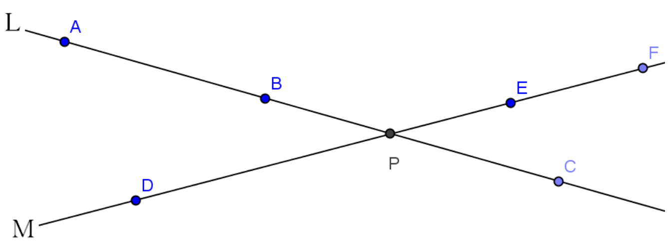


圖 1.13

(1) **直線**：L 上 3 點 A、B、C 加上 M 上 3 點 D、E、F，再加上 L 與 M 的交點 P，所以我們可以將題目視為 L 上 4 個點 A、B、P、C 與 M 上 4 個點 D、P、E、F 所決定的直線數目，如圖 1.13(a) 所示：

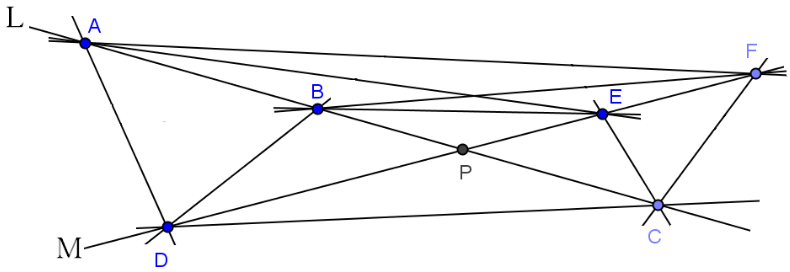


圖 1.13(a)

若 A、B、C、D、E、F、P 七個點皆不共線，

可決定 $\frac{7(7-1)}{2}=21$條相異直線，

若 A、B、P、C 四個點皆不共線，可決定 $\frac{4(4-1)}{2}=6$條相異直線，但 A、B、P、C 四個點共線，所以只決定一條直線$\overleftrightarrow{AC}$ (即直線 L)

若 D、P、E、F 四個點皆不共線，可決定 $\frac{4(4-1)}{2}=6$條相異直線，但 D、P、E、F 四個點共線，所以只決定一條直線$\overleftrightarrow{DF}$ (即直線 M)

所以 A、B、C、D、E、F、P 七個點共可決定

$\frac{7(7-1)}{2}-\frac{4(4-1)}{2}+1-\frac{4(4-1)}{2}+1=21-6+1-6+1=11$條相異直線，分別是$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{AF}$、$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{CD}$、$\overleftrightarrow{CE}$、$\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{DF}$，共 11 條相異直線。

(2) 線段：平面上相異 n 個點，共可決定 $\frac{n(n-1)}{2}$個線段。

所以這個題目的點共有：L 上 3 點 A、B、C 加上 M 上 3 點 D、E、F，還要再加上 L 與 M 的交點 P，共有 3＋3＋1＝7 個相異的點，共可決定 $\frac{7(7-1)}{2}=21$個線段，如圖 1.13(b)所示

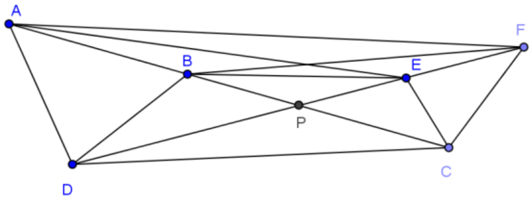


圖 1.13(b)

這些線段分別為$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{AD}$、$\overline{AE}$、$\overline{AF}$、$\overline{AP}$、$\overline{BC}$、$\overline{BD}$、$\overline{BE}$、$\overline{BF}$、$\overline{BP}$、$\overline{CD}$、$\overline{CE}$、$\overline{CF}$、$\overline{CP}$、$\overline{DE}$、$\overline{DF}$、$\overline{DP}$、$\overline{EF}$、$\overline{EP}$、$\overline{FP}$，共 21 個線段。

根據第一種與第二種情況，我們可以知道，不論 L 與 M 的交點在什麼地方，直線與線段的數目都不會改變，各位聰明的同學，你們也可以試試其他種的情況，看看結果是否也都是一樣的。

16. L與M為兩條相異直線，且**L與M有交點**，若直線L上有A、B、C、D四點，直線M上有E、F、G三點，則共可畫出幾條相異直線？幾條線段？

想法：(1) 平面上有相異n個點，若其中任三點不共線，則此n個點可決定$\frac{n(n-1)}{2}$條直線、$\frac{n(n-1)}{2}$條線段。

(2) 平面上有相異n個點，若這n個點皆共線，可決定1條直線、$\frac{n(n-1)}{2}$條線段。

(3) 平面上有相異n個點，其中有m個點共線，則可決定$\frac{n(n-1)}{2}-\frac{m(m-1)}{2}+1$條直線，可決定$\frac{n(n-1)}{2}$條線段。

(4) 平面上有L、M兩條直線，且L與M不相交，L線上有相異m點，M線上有相異n點，則這些點可決定$m\times n+2$條直線(包含L、M)，可決定$\frac{(m+n)\times(m+n-1)}{2}$條線段。

詳解：因為題目並沒有將圖形畫出來，故我們必須來探討各種不同的情況

第一種情況，假設L與M相交於P點，關係如圖1.14所示：

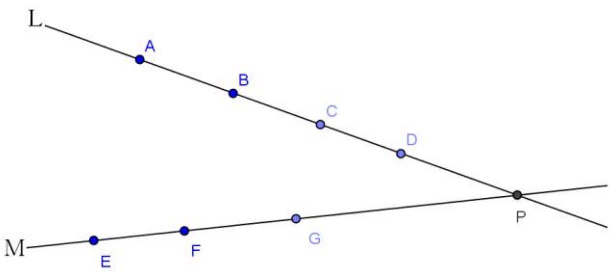


圖1.14

(1) 直線：圖1.14中的點共有：L上4點A、B、C、D加上M上3點E、F、G，再加上L與M的交點P，共有4＋3＋1＝8個點，因為有通過P點的直線只有L與M兩條，所以圖1.14中的A、B、C、D、E、F、G、P八個點，他們所能夠決定的直線數目，其實可以不用考慮P點，所以我們只需考慮L上4點A、B、C、D與M上3點E、F、G，取上圖中的一部分來看，如圖1.14(a)所示：

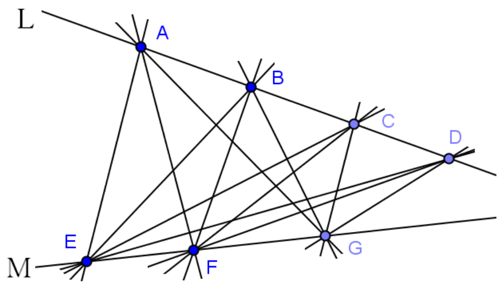


圖 1.14(a)

所以 A、B、C、D、E、F、G 此 7 點所決定的直線數目，當然就與挑戰題第 11 題的結果一樣，可決定 $4\times3+2=12+2=14$ 條相異直線，分別是 $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{AF}$、$\overleftrightarrow{AG}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{BG}$、$\overleftrightarrow{CE}$、$\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{CG}$、$\overleftrightarrow{DE}$、$\overleftrightarrow{DF}$、$\overleftrightarrow{DG}$、$\overleftrightarrow{EG}$，共 14 條相異直線。

(2) 線段：平面上相異 n 個點，共可決定 $\frac{n(n-1)}{2}$ 個線段。

所以這個題目的點共有：L 上 4 點 A、B、C、D 加上 M 上 3 點 E、F、G，還要再加上 L 與 M 的交點 P，共有 $4+3+1=8$ 個點，所以共可決定 $\frac{8(8-1)}{2}=28$ 個線段，如圖 1.14(b)所示

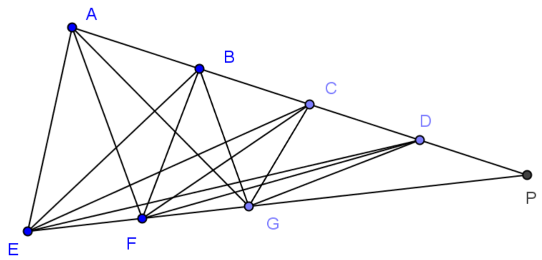


圖 1.14(b)

這些線段分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{AD}$、$\overline{AE}$、$\overline{AF}$、$\overline{AG}$、$\overline{AP}$、$\overline{BC}$、$\overline{BD}$、$\overline{BE}$、$\overline{BF}$、$\overline{BG}$、$\overline{BP}$、$\overline{CD}$、$\overline{CE}$、$\overline{CF}$、$\overline{CG}$、$\overline{CP}$、$\overline{DE}$、$\overline{DF}$、$\overline{DG}$、$\overline{DP}$、$\overline{EF}$、$\overline{EG}$、$\overline{EP}$、$\overline{FG}$、$\overline{FP}$、$\overline{GP}$，共 28 個線段。

第二種情況，假設 L 與 M 相交於 P 點，關係如圖 1.15 所示：

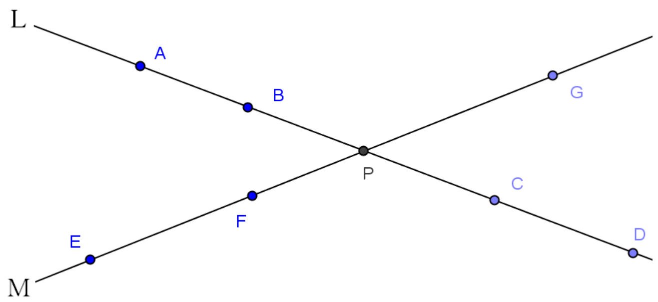


圖 1.15

(1) **直線**：L 上 4 點 A、B、C、D 加上 M 上 3 點 E、F、G，再加上 L 與 M 的交點 P，所以我們可以將題目視為 L 上 5 個點 A、B、P、C、D 與 M 上 4 個點 E、F、P、G 所決定的直線數目，如圖 1.15(a)所示：

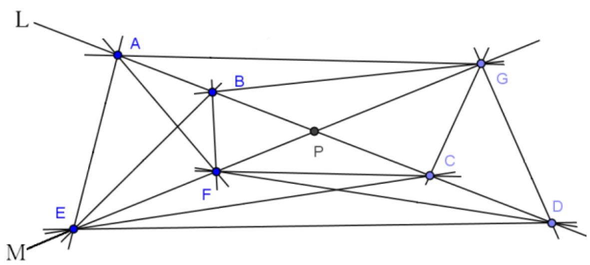


圖 1.15(a)

若 A、B、C、D、E、F、G、P 八個點皆不共線，可決定$\dfrac{8(8-1)}{2}=28$條相異直線，

若 A、B、P、C、D 五個點皆不共線，可決定$\dfrac{5(5-1)}{2}=10$條相異直線，但 A、B、P、C、D 五個點共線，所以只決定一條直線$\overleftrightarrow{AD}$(即直線 L)

若 E、F、P、G 四個點皆不共線，可決定$\dfrac{4(4-1)}{2}=6$條相異直線，但 E、F、P、G 四個點共線，所以只決定一條直線$\overleftrightarrow{EG}$(即直線 M)

所以 A、B、C、D、E、F、G、P 八個點共可決定

$\dfrac{8(8-1)}{2}-\dfrac{5(5-1)}{2}+1-\dfrac{4(4-1)}{2}+1=28-10+1-6+1=14$條相異直線，分別是$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{AF}$、$\overleftrightarrow{AG}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{BG}$、$\overleftrightarrow{CE}$、$\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{CG}$、$\overleftrightarrow{DE}$、$\overleftrightarrow{DF}$、$\overleftrightarrow{DG}$、$\overleftrightarrow{EG}$，共 14 條相異直線。

(2) 線段：平面上相異 n 個點，共可決定$\frac{n(n-1)}{2}$個線段。

所以這個題目的點共有：L 上 4 點 A、B、C、D 加上 M 上 3 點 E、F、G，還要再加上 L 與 M 的交點 P，共有 4＋3＋1＝8 個點，所以共可決定$\frac{8(8-1)}{2}=28$個線段，

如圖 1.15(b)所示：

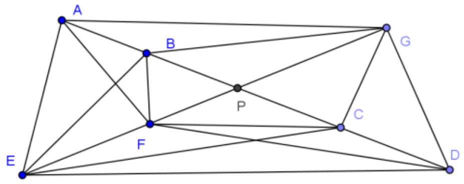


圖 1.15(b)

這些線段分別為$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{AD}$、$\overline{AE}$、$\overline{AF}$、$\overline{AG}$、$\overline{AP}$、$\overline{BC}$、$\overline{BD}$、$\overline{BE}$、$\overline{BF}$、$\overline{BG}$、$\overline{BP}$、$\overline{CD}$、$\overline{CE}$、$\overline{CF}$、$\overline{CG}$、$\overline{CP}$、$\overline{DE}$、$\overline{DF}$、$\overline{DG}$、$\overline{DP}$、$\overline{EF}$、$\overline{EG}$、$\overline{EP}$、$\overline{FG}$、$\overline{FP}$、$\overline{GP}$，共 28 個線段。

根據第一種與第二種情況，我們可以知道，不論 L 與 M 的交點在什麼地方，直線與線段的數目都不會改變，各位聰明的同學，你們也可以試試其他種的情況，看看結果是否也都是一樣的。

17. L 與 M 為兩條相異直線，且 **L 與 M 有交點**，若直線 L 上有相異 5 個點，直線 M 上有相異 4 個點，則共可畫出幾條相異直線？幾條線段？

想法：平面上有L、M兩條直線，且 L 與 M 相交於一點，L線上有相異m點，M線上有相異n點，則這些點可決定$m\times n+2$條直線(包含L、M)；並且因為有$m+n+1$個點，可決定

$$\frac{(m+n+1)\times(m+n+1-1)}{2}=\frac{(m+n+1)\times(m+n)}{2}$$條線段。

詳解：**(1) 直線**：$m\times n+2=5\times 4+2=20+2=22$條相異直線。

(2) 線段：$\frac{(m+n+1)\times(m+n)}{2}=\frac{(5+4+1)\times(5+4)}{2}=5\times 9=45$條線段。

18. L 與 M 為兩條相異直線，且 **L 與 M 有交點**，若直線 L 上有相異 6 個點，直線 M 上有相異 5 個點，則共可畫出幾條相異直線？幾條線段？

想法：平面上有 L 、 M 兩條直線，且 L 與 M 相交於一點，L 線上有相異 m 點，M 線上有相異 n 點，則這些點可決定 $m\times n+2$ 條直線(包含 L 、 M)；並且因為有 $m+n+1$ 個點，可決定

$\dfrac{(m+n+1)\times(m+n+1-1)}{2}=\dfrac{(m+n+1)\times(m+n)}{2}$ 條線段。

詳解：**(1)** **直線**：$m\times n+2=6\times5+2=30+2=32$ 條相異直線。

(2) **線段**：$\dfrac{(m+n+1)\times(m+n)}{2}=\dfrac{(6+5+1)\times(6+5)}{2}=6\times11=66$ 條線段。

19. 平面上有相異 10 個點，請問：

(1) 可決定幾個線段？ (2) 最多可決定幾條相異直線？

(3) 最少可決定幾條直線？

想法：(1) 一平面上有相異 n 個點，若其中任三點不共線，則此 n 個點可決定 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 條直線；$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 條線段。

(2) 一平面上有相異 n 個點，若這 n 個點皆共線，則可決定 1 條直線；$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 條線段。

(3) 一平面上有相異 n 個點，若其中有 m 個點共線，則最多可決定 $\dfrac{n(n-1)}{2}-\dfrac{m(m-1)}{2}+1$ 條直線；$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 條線段。

(4) 一平面上有 L 、 M 兩條直線，L 線上有相異 m 點，M 線上有相異 n 點，則這些點可決定 $m\times n+2$ 條直線(包含 L 、 M)；

若 L 與 M 不相交，則可決定 $\dfrac{(m+n)\times(m+n-1)}{2}$ 條線段。

若 L 與 M 相交於一點，則可決定 $\dfrac{(m+n+1)\times(m+n)}{2}$ 條線段。

詳解：**(1)** 平面上相異的 n 個點，不論其是否共線，都可決定 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 個線段。

所以本題的 10 個點，共可決定 $\dfrac{10(10-1)}{2}=5\times9=45$ 個線段。

(2) 因為題目只有提到 10 個相異的點，並沒有限制他們之間的關係，所

以我們就從挑戰題第 1 題到挑戰題第 18 題所討論過的情況來做一個探討：

第一種情況： 這 10 個點其中任 3 點不共線，我們知道，平面上相異 n 個點，其中任 3 點不共線，

則可決定 $\frac{n(n-1)}{2}$ 條相異直線。

所以第一種情況，可決定 $\frac{10(10-1)}{2}=5\times 9=45$ 條相異直線。

第二種情況： 若此 10 個點共線，我們知道，平面上相異 n 個點，若此 n 個點共線，則可決定一條直線。

所以第二種情況，可決定 1 條直線。

第三種情況： 若 10 個點中，有 5 個點共線，我們知道，平面上相異 n 個點，其中 m 個點共線，

則可決定 $\frac{n(n-1)}{2}-\frac{m(m-1)}{2}+1$ 條相異直線。

所以第三種情況，可決定 $\frac{10(10-1)}{2}-\frac{5(5-1)}{2}+1=36$ 條相異直線。

第四種情況： 若 10 個點中，其中有 4 個點共線，其餘的 6 個點共線，我們知道，平面上有相異兩條直線 L 與 M，L 上有相異 m 個點，M 上有相異 n 個點，則可決定 $m\times n+2$ 條相異直線。所以第四種情況，可決定 $4\times 6+2=26$ 條相異直線。

由以上我們探討的四種情況，以第一種情況所得到的直線數目最多，所以平面上 10 個相異的點，其中任 3 點不共線，最多可決定

$\frac{10(10-1)}{2}=45$ 條相異直線。

(3) 由 **(2)** 中所討論的 **第二種情況**，平面上相異 10 個點，若此 10 個點共線，則最少可決定 1 條直線。