

# 代數第七章

## 目錄

第七章 一元二次方程式的解法 .....	1
學習目標.....	1
7.1 節 認識一元二次方程式.....	2
7.1 節 習題 .....	8
7.2 節 用因式分解解一元二次方程式.....	10
7.2 節 習題 .....	20
7.3 節 用配方法解一元二次方程式.....	22
7.3 節 習題 .....	35
7.4 節 一元二次方程式的公式解.....	38
7.4.1 節 一元二次方程式解的判別 .....	40
7.4.2 節 用公式解解一元二次方程式 .....	42
7.4 節 習題 .....	53
7.5 節 一元二次方程式的應用題與綜合題.....	55
7.5 節 習題 .....	70
第七章綜合習題 .....	74

基測與會考試題 .....	78
習題解答 .....	83

## 第七章 一元二次方程式的解法

我們已經學過了一元一次方程式與二元一次方程式，在本章中，我們將學習一元二次方程式，並學習用多種方法來解，熟悉一元二次方程式解法後，可以再延伸到二次函數及其圖形。

### 學習目標

1. 瞭解什麼是一元二次方程式。
2. 能利用因式分解、配方法、公式解找出一元二次方程式的解。
3. 能利用判別式判斷一元二次方程式解的種類。
4. 能處理一元二次方程式的應用問題。

## 7.1 節 認識一元二次方程式

前面的章節中，我們學過了一元一次方程式、二元一次方程式：

一元一次方程式是指只有 1 個未知數(一元)，未知數最高次數為 1(一次)的方程式，如  $2x+7=0$ 。

二元一次方程式是指只有 2 個未知數(二元)，未知數最高次數為 1(一次)的方程式，如  $2x+3y+7=0$ 。

同樣地，一元二次方程式就是只有 1 個未知數(一元)，未知數最高次數為 2(二次)的方程式，如  $x^2+4x+4=0$ 、 $(x-3)(x-4)=0$

我們先來看看什麼樣的場合會用到一元二次方程式。

### 例題 7.1-1

請依下列敘述列出一元二次方程式：

- (1) 某三角形的底為  $(x+1)$  公分，高為  $3x$  公分，面積為 30 平方公分。
- (2) 小華 買了  $(2x+3)$  枝原子筆，每枝原子筆售價都是  $x$  元，小華 共花了 65 元。
- (3)  $(x+2)$  與  $(x-3)$  兩數的乘積為 6。

詳解：

(1) 三角形的面積等於底 $\times$ 高 $\times\frac{1}{2}$ 。

$$\text{列成方程式為 } (x+1)\times 3x\times\frac{1}{2}=30$$

$$\text{繼續化簡 } (3x^2+3x)\times\frac{1}{2}=30$$

$$(3x^2+3x)\times\frac{1}{2}\times 2=30\times 2 \quad (\text{等量公理，等號左右同乘以 } 2)$$

$$3x^2+3x=60$$

$$x^2+x-20=0$$

(2) 總價等於單價 $\times$ 枝數。

列成方程式為  $x \times (2x + 3) = 65$

繼續化簡  $2x^2 + 3x = 65$

$$2x^2 + 3x - 65 = 0$$

(3) 列成方程式為  $(x + 2) \times (x - 3) = 6$

繼續化簡  $x^2 - x - 6 = 6$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

由例題 7.7-1 可知，生活中有很多情境是可以列成一元二次方程式的。

接著我們再來看看什麼是一元二次方程式的解。

與一元一次方程式相同，只要將一個數代入方程式中的未知數，若能使等號的兩邊相等，則稱此數為該一元二次方程式的解(或根)。

我們試試看  $-2$ 、 $-1$ 、 $0$ 、 $1$ 、 $2$  這些數中有哪幾個是一元二次方程式  $x^2 - x - 2 = 0$  的解。

$-2$ ：  $(-2)^2 - (-2) - 2 = 4 + 2 - 2 = 4 \neq 0$ ，等號不成立， $-2$  不是此方程式的解。

$-1$ ：  $(-1)^2 - (-1) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$ ，等號成立， $-1$  是此方程式的解。

$0$ ：  $(0)^2 - (0) - 2 = 0 - 0 - 2 = -2 \neq 0$ ，等號不成立， $0$  不是此方程式的解。

$1$ ：  $(1)^2 - (1) - 2 = 1 - 1 - 2 = -2 \neq 0$ ，等號不成立， $1$  不是此方程式的解。

$2$ ：  $(2)^2 - (2) - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$ ，等號成立， $2$  是此方程式的解。

因此  $-1$  與  $2$  都是一元二次方程式  $x^2 - x - 2 = 0$  的解。

### 例題 7.1-2

下列哪些敘述是正確的？

(1) 3 是  $x^2 - 2x - 3 = 0$  的解

(2) 4 是  $x^2 - 4x + 4 = 0$  的解

詳解：

(1) 將  $x=3$  代入  $x^2 - 2x - 3 = 0$ ： $(3)^2 - 2 \times (3) - 3 = 0$

等式成立，因此 3 是  $x^2 - 2x - 3 = 0$  的解。

(2) 將  $x=4$  代入  $x^2 - 4x + 4 = 0$ ： $(4)^2 - 4 \times (4) + 4 = 4 \neq 0$

等式不成立，因此 4 不是  $x^2 - 4x + 4 = 0$  的解。

### 例題 7.1-3

若  $x=2$  是一元二次方程式  $x^2 + ax + 4 = 0$  的解，試求  $a$  之值。

詳解：

$x=2$  是一元二次方程式  $x^2 + ax + 4 = 0$  的解，

也就是將  $x=2$  代入方程式，可使等式成立。

$$x^2 + ax + 4 = 0$$

$$2^2 + a \times 2 + 4 = 0 \quad (\text{將 } x=2 \text{ 代入})$$

$$4 + 2a + 4 = 0$$

$$2a + 8 = 0$$

$$2a = -8$$

$$a = -4$$

### 【練習】7.1-3

若  $x=-3$  是一元二次方程式  $x^2 + ax + 9 = 0$  的解，試求  $a$  之值。

若是想找一元二次方程式的解，有一個性質我們必須熟悉：

**若  $a \times b = 0$ ，則  $a = 0$  或  $b = 0$**

我們來證明這個性質：

已知  $a \times b = 0$ ，我們想利用等量公理，將等式左右都乘以  $\frac{1}{a}$  消去  $a$ ，但必須在  $a \neq 0$  時才能乘以  $\frac{1}{a}$ ，故我們先看  $a \neq 0$  的情形。

$$a \times b = 0$$

$$a \times b \times \frac{1}{a} = 0 \times \frac{1}{a} \quad (a \neq 0, \text{ 利用等量公理, 將等式左右都乘以 } \frac{1}{a})$$

$$b = 0$$

即  $a \neq 0$  時，可推得  $b = 0$ 。

另一個情形是  $a = 0$ ， $a = 0$  即為此性質的另一個結果。

由以上討論可知，若  $a \times b = 0$ ，則  $a = 0$  或  $b = 0$ 。

利用這個性質，我們可以解一些一元二次方程式。

如要解  $(x-1)(x-2) = 0$ ，我們可以從方程式推得  $x-1=0$  或  $x-2=0$ 。

$x-1=0$ ，即  $x=1$ ； $x-2=0$ ，即  $x=2$ 。

因此  $(x-1)(x-2) = 0$  的解為  $x=1$  或  $x=2$ 。

驗算：  $x=1$  時， $(1-1)(1-2) = 0 \times (-1) = 0$ ； $x=2$  時， $(2-1)(2-2) = 1 \times 0 = 0$ 。

### 例題 7.1-4

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) x(x-1)=0$$

$$(2) (x-2)(x+3)=0$$

$$(3) (2x+1)(x-4)=0$$

$$(4) (x-2)^2=0$$

詳解：

(1)由題目可知， $x=0$  或  $x-1=0$  可使等式成立。

$$x-1=0 \rightarrow x=1$$

解為  $x=0$ 、 $1$ 。

(2)由題目可知， $x-2=0$  或  $x+3=0$  可使等式成立。

$$x-2=0 \rightarrow x=2$$

$$x+3=0 \rightarrow x=-3$$

解為  $x=2$ 、 $-3$ 。

(3)由題目可知， $2x+1=0$  或  $x-4=0$  可使等式成立。

$$2x+1=0 \rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

$$x-4=0 \rightarrow x=4$$

解為  $x=-\frac{1}{2}$ 、 $4$ 。

$$(4) (x-2)^2 = (x-2)(x-2)$$

兩個含  $x$  的式子都相同， $x-2=0$  時可使等式成立。

$$x-2=0 \rightarrow x=2$$

解為  $x=2$ 。

同學可以驗算看看各題的解是否能使等式成立。

在例題 7.1-4(4)中，若是依(1)~(3)的答案寫法，(4)的答案可寫成  $x=2$ 、 $2$ 。

像這種兩個解都相同的情形，我們稱為**重根**，也就是一個解重覆出現兩次。

### 【練習】7.1-4

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) 2x(x-7)=0$$

$$(2) (x+5)(x-6)=0$$

$$(3) (3x+2)(x-1)=0$$

$$(4) (x+3)^2=0$$

### 例題 7.1-5

若  $x=5$  是一元二次方程式  $(x-2)(x-a)=0$  的解，試求  $a$  之值。

詳解：

一元二次方程式  $(x-2)(x-a)=0$ ， $x-2=0$  或  $x-a=0$  時可使等式成立。

$$x-2=0 \rightarrow x=2$$

$$x-a=0 \rightarrow x=a$$

依題意， $x=5$  是一個解，且  $2 \neq 5$ ，因此  $a=5$ 。

驗算： $a=5$  代入方程式得  $(x-2)(x-a)=0$ ，此方程式解為 2、5，與題意符合。

### 【練習】7.1-5

若  $x=-3$  是一元二次方程式  $(x-2)(x+a)=0$  的解，試求  $a$  之值。

## 7.1 節 習題

### 習題 7.1-1

請依下列敘述列出一元二次方程式：

- (1) 某長方形的長為  $(2x+5)$  公分，寬為  $2x$  公分，面積為 36 平方公分。
- (2) 小美 買了  $(2x-3)$  顆蘋果，每顆蘋果售價都是  $x$  元，小美 共花了 35 元。
- (3)  $(x+1)$  與  $(x-2)$  兩數的乘積為 10。

### 習題 7.1-2

下列哪些敘述是正確的？

- (1) 1 是  $x^2 - 2x + 1 = 0$  的解
- (2) -3 是  $x^2 - 2x - 15 = 0$  的解

### 習題 7.1-3

若  $x=4$  是一元二次方程式  $x^2 + ax + 8 = 0$  的解，試求  $a$  之值。

### 習題 7.1-4

求下列一元二次方程式的解。

- (1)  $2x(x-3) = 0$
- (2)  $(x-3)(x+5) = 0$
- (3)  $(5x+1)(x+1) = 0$
- (4)  $(x-5)^2 = 0$

習題 7.1-5

若  $x=1$  是一元二次方程式  $(x-2)(x-a)=0$  的解，試求  $a$  之值。

## 7.2 節 用因式分解解一元二次方程式

在前一節中我們學習了如何找  $(x-2)(x-3)=0$  這種已拆成兩式相乘的一元二次方程式的解。那未拆成兩式相乘，如  $x^2-3x-10=0$  這種形式的方程式又該如何處理呢？過去章節中，我們曾學過因式分解，也就是能夠將  $x^2-3x-10$  化成  $(x-5)(x+2)$ 。將  $x^2-3x-10=0$  轉變成  $(x-5)(x+2)=0$ ，我們就能輕鬆的找到解為  $x=5$ 、 $-2$  了。本節中我們將學習利用因式分解來找一元二次方程式的解。

首先來學習直接提出公因式的題型。

### 例題 7.2-1

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) x^2 - x = 0$$

$$(2) x^2 = 5x$$

詳解：

$$(1) x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0 \quad (\text{直接提出 } x)$$

$$x = 0 \text{、} 1$$

$$(2) x^2 = 5x$$

$$x^2 - 5x = 0$$

$$x(x-5) = 0 \quad (\text{直接提出 } x)$$

$$x = 0 \text{、} 5$$

同學可以驗算看看各題的解是否能使等式成立。

### 【練習】7.2-1

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) 3x(x-5) = 0$$

$$(2) (x+4)(x+2) = 0$$

### 例題 7.2-2

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) \quad x(x+2)-2(x+2)=0$$

$$(2) \quad (x+2)(x-3)=-6(x-3)$$

詳解：

$$(1) \quad x(x+2)-2(x+2)=0$$

$$(x+2)(x-2)=0 \quad (\text{直接提出 } x+2)$$

$$x=-2 \text{、} 2$$

$$(2) \quad (x+2)(x-3)=-6(x-3)$$

$$(x+2)(x-3)+6(x-3)=0$$

$$(x-3)(x+2+6)=0 \quad (\text{直接提出 } x-3)$$

$$(x-3)(x+8)=0$$

$$x=3 \text{、} -8$$

同學可以驗算看看各題的解是否能使等式成立。

### 【練習】7.2-2

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) \quad x(x+5)+4(x+5)=0$$

$$(2) \quad (x+5)(x-1)=-3(x-1)$$

接下來，我們練習需要利用乘法公式來因式分解的題目。

### 例題 7.2-3

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) x^2 - 9 = 0$$

$$(2) 4x^2 = (x-2)^2$$

詳解：

$$(1) x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 - 3^2 = 0$$

$$(x+3)(x-3) = 0 \quad (\text{利用平方差公式})$$

$$x = -3, 3$$

$$(2) 4x^2 = (x-2)^2$$

$$4x^2 - (x-2)^2 = 0$$

$$(2x)^2 - (x-2)^2 = 0$$

$$(2x+(x-2))(2x-(x-2)) = 0 \quad (\text{利用平方差公式})$$

$$(3x-2)(x+2) = 0$$

$$x = \frac{2}{3}, -2$$

同學可以驗算看看各題的解是否能使等式成立。

### 【練習】7.2-3

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) 4x^2 - 36 = 0$$

$$(2) 9x^2 = (x-4)^2$$

### 例題 7.2-4

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(2) x^2 - 6x + 9 = 0$$

詳解：

$$(1) x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

(利用和的平方公式)

$$x = -1 \text{ (重根)}$$

$$(2) x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x-3)^2 = 0$$

(利用差的平方公式)

$$x = 3 \text{ (重根)}$$

同學可以驗算看看各題的解是否能使等式成立。

### 【練習】7.2-4

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(2) x^2 - 10x + 25 = 0$$

除了用直接提出公因式與乘法公式做因式分解外，我們還學過用十字交乘法做因式分解。

### 例題 7.2-5

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$(2) x^2 + x - 6 = 0$$

詳解：

$$(1) x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$(x+5)(x+1) = 0$$

(利用十字交乘)

$$x = -5、-1$$

$$(2) x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0$$

(利用十字交乘)

$$x = -3、2$$

同學可以驗算看看各題的解是否能使等式成立。

### 【練習】7.2-5

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(2) x^2 + 6x - 7 = 0$$

以上是利用因式分解解一元二次方程式的基本題目，接下來讓我們練習一些運算較多變化的題型。

**例題 7.2-6 (先移項再因式分解)**

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) 2x^2 - 11x = 21$$

$$(2) (x+6)(x-5) = -24$$

**詳解：**

$$(1) 2x^2 - 11x = 21$$

$$2x^2 - 11x - 21 = 0$$

$$(2x+3)(x-7) = 0 \quad (\text{利用十字交乘})$$

$$x = -\frac{3}{2}、7$$

$$(2) (x+6)(x-5) = -24$$

$$x^2 + x - 30 = -24$$

$$x^2 + x - 30 + 24 = 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0 \quad (\text{利用十字交乘})$$

$$x = -3、2$$

同學可以驗算看看各題的解是否能使等式成立。

**【練習】7.2-6**

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) 3x^2 + 2x = 8$$

$$(2) (x+4)(x-3) = 30$$

例題 7.2-7 (先整理係數再因式分解)

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$$

$$(2) \frac{1}{7}x^2 - \frac{4}{7} = 0$$

詳解：

$$(1) \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) \times 8 = 0 \times 8 \quad (\text{等號左右兩邊同乘以 } 8)$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0 \quad (\text{利用乘法公式})$$

$$x = 2 \text{ (重根)}$$

$$(2) \frac{1}{7}x^2 - \frac{4}{7} = 0$$

$$\left(\frac{1}{7}x^2 - \frac{4}{7}\right) \times 7 = 0 \times 7 \quad (\text{等號左右兩邊同乘以 } 7)$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x+2)(x-2) = 0 \quad (\text{利用乘法公式})$$

$$x = -2, 2$$

同學可以驗算看看各題的解是否能使等式成立。

【練習】7.2-7

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{6} = 0$$

$$(2) \frac{1}{7}x^2 - \frac{4}{7}x - \frac{5}{7} = 0$$

例題 7.2-8 (係數為文字)

求下列一元二次方程式的解。(各題中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  皆不為 0)

(1)  $ax^2 + (ab+1)x + b = 0$

(2)  $x^2 + 2ax + a^2 = 0$

(3)  $x^2 + (a+b)x + ab = 0$

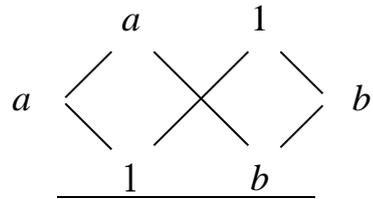
(4)  $abx^2 + (ab+c)x + c = 0$

詳解：

(1)  $ax^2 + (ab+1)x + b = 0$

$(ax+1)(x+b) = 0$  (利用十字交乘)

$x = -\frac{1}{a}$ 、 $-b$

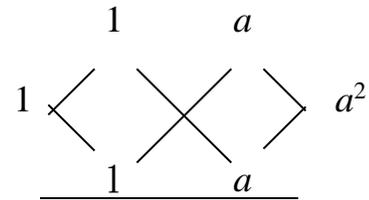


$(a \times b + 1 \times 1)x = (ab+1)x$

(2)  $x^2 + 2ax + a^2 = 0$

$(x+a)^2 = 0$  (利用乘法公式或十字交乘)

$x = -a$  (重根)

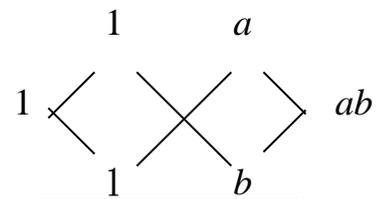


$(1 \times a + a \times 1)x = 2ax$

(3)  $x^2 + (a+b)x + ab = 0$

$(x+a)(x+b) = 0$  (十字交乘)

$x = -a$ 、 $-b$

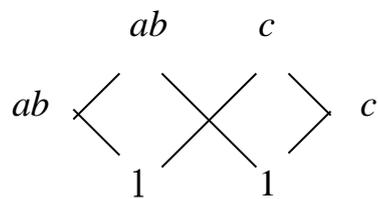


$(1 \times b + a \times 1)x = (a+b)x$

(4)  $abx^2 + (ab+c)x + c = 0$

$(abx+c)(x+1) = 0$  (利用十字交乘)

$x = -\frac{c}{ab}$ 、 $-1$



$(ab \times 1 + c \times 1)x = (ab+c)x$

驗算：

(1) 將  $x = -\frac{1}{a}$  代入  $ax^2 + (ab+1)x + b$ ：

$$\begin{aligned} & a\left(-\frac{1}{a}\right)^2 + (ab+1)\left(-\frac{1}{a}\right) + b \\ &= \frac{1}{a} + (-b) + \left(-\frac{1}{a}\right) + b \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a} + (-b) + b \\ &= 0 \quad \text{可確認 } x = -\frac{1}{a} \text{ 為方程式 } ax^2 + (ab+1)x + b = 0 \text{ 的解。} \end{aligned}$$

將  $x = -b$  代入  $ax^2 + (ab+1)x + b$ ：

$$\begin{aligned} & a(-b)^2 + (ab+1)(-b) + b \\ &= ab^2 + (-ab^2) + (-b) + b \\ &= 0 \quad \text{可確認 } x = -b \text{ 為方程式 } ax^2 + (ab+1)x + b = 0 \text{ 的解。} \end{aligned}$$

(2) 將  $x = -a$  代入  $x^2 + 2ax + a^2$ ：

$$\begin{aligned} & (-a)^2 + 2a(-a) + a^2 \\ &= a^2 - 2a^2 + a^2 \\ &= 0 \quad \text{可確認 } x = -a \text{ 為方程式 } x^2 + 2ax + a^2 = 0 \text{ 的解。} \end{aligned}$$

同學可以驗算看看(3)、(4)題的解是否能使等式成立。

### 【練習】7.2-8

求下列一元二次方程式的解。(各題中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  皆不為 0)

(1)  $x^2 - 2bx + b^2 = 0$

(2)  $abx^2 + (ac+b)x + c = 0$

### 例題 7.2-9

$$\text{解一元二次方程式 } x^2 + (x+2)(x+1) - 4 = (x+2)^2$$

詳解：

本題可以活用之前學過的因式分解來計算

$$x^2 + (x+2)(x+1) - 4 = (x+2)^2$$

$$(x^2 - 4) + (x+2)(x+1) = (x+2)^2 \quad (\text{將 } -4 \text{ 與 } x^2 \text{ 湊成一組})$$

$$(x+2)(x-2) + (x+2)(x+1) - (x+2)^2 = 0 \quad (\text{利用平方差公式})$$

$$(x+2)[(x-2) + (x+1) - (x+2)] = 0 \quad (\text{提出 } (x+2))$$

$$(x+2)[x-2+x+1-x-2] = 0$$

$$(x+2)(x-3) = 0$$

$$x = -2, 3$$

同學可以驗算看看此解是否能使等式成立。

### 【練習】7.2-9

$$\text{解一元二次方程式 } x^2 + (x+3)(x+2) - 9 = (x+3)^2$$

## 7.2 節 習題

### 習題 7.2-1

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) x^2 + 8x = 0$$

$$(2) x^2 = 3x$$

### 習題 7.2-2

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) x(4x-5) - 6(4x-5) = 0$$

$$(2) (x+5)(2x-7) = -3(x+5)$$

### 習題 7.2-3

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) x^2 - 25 = 0$$

$$(2) 16x^2 = (x-3)^2$$

### 習題 7.2-4

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$(2) x^2 + 12x + 36 = 0$$

### 習題 7.2-5

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$(2) x^2 + 2x - 3 = 0$$

### 習題 7.2-6 (先移項再因式分解)

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) 3x^2 - 13x = -4$$

$$(2) (x+3)(x+1) = 8$$

### 習題 7.2-7 (先整理係數再因式分解)

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 1 = 0$$

$$(2) \frac{1}{16}x^2 - 1 = 0$$

### 習題 7.2-8 (係數為文字)

求下列一元二次方程式的解。(各題中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  皆不為 0)

$$(1) x^2 + (-a+b)x - ab = 0$$

$$(2) a^2x^2 - 2ax + 1 = 0$$

### 習題 7.2-9

解一元二次方程式  $x^2 + (x+2)(x+4) - 16 = (x+4)^2$

## 7.3 節 用配方法解一元二次方程式

在多項式章節中，我們已經學過根號。如  $\sqrt{9} = 3$ 、 $\sqrt{25} = 5$ 。

我們也知道  $3^2 = 9$ ， $5^2 = 25$ 。

那麼今天若是想解一個一元二次方程式  $x^2 = 9$ ，會有什麼答案呢？

因為  $3^2 = 9$ ，所以  $x = 3$  是一個解。

但再仔細觀察，會發現因為  $(-3)^2 = 9$ ，所以  $x = -3$  也是一個解。

也就是說  $x^2 = 9$  的解有 3 和  $-3$ 。而 3 和  $-3$  也稱為 9 的平方根。

用文字來表示，一元二次方程式  $x^2 = a (a \geq 0)$  的解即為  $\sqrt{a}$  與  $-\sqrt{a}$ ，也可寫為  $\pm\sqrt{a}$ 。

### 例題 7.3-1

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) x^2 = 16$$

$$(2) 3x^2 = 12$$

$$(3) (x-1)^2 = 3$$

詳解：

$$(1) x^2 = 16$$

$$x = \pm 4 \quad (\sqrt{16} = 4)$$

$$(2) 3x^2 = 12$$

$$3x^2 \div 3 = 12 \div 3$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2 \quad (\sqrt{4} = 2)$$

$$(3) (x-1)^2 = 3$$

$$x-1 = \pm\sqrt{3}$$

$$x = 1 \pm\sqrt{3}$$

同學可以驗算看看各題的解是否能使等式成立。

### 【練習】7.3-1

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) x^2 = 81$$

$$(2) 2x^2 = 32$$

$$(3) (x+3)^2 = 7$$

在前面的例題 7.3-1(3)中，我們可以想成是利用**完全平方式**來找出解。

**完全平方式**：對於一多項式  $A$ ，若能找到另一多項式  $B$  使得  $A = B^2$ ，則稱  $A$  為完全平方式。例如多項式  $x^2 - 2x + 1$  可以寫成  $(x-1)^2$ ，因此  $x^2 - 2x + 1$  是完全平方式。

若我們想解一元二次方程式  $x^2 - 2x - 2 = 0$ ，因為  $x^2 - 2x - 2$  沒辦法用因式分解，因此可試著利用乘法公式湊出完全平方式，形成例題 7.3-1(3)的形式後再找出解。

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \quad (\text{觀察前兩項 } x^2 - 2x, \text{ 可以發現若是加上 } 1,$$

就能變成完全平方式  $x^2 - 2x + 1$ ，即  $(x-1)^2$ )

$$x^2 - 2x + 1 - 2 = 0 + 1 \quad (\text{等號左右兩邊都加上 } 1)$$

$$(x-1)^2 - 2 = 1 \quad (x^2 - 2x + 1 \text{ 利用乘法公式變成 } (x-1)^2)$$

$$(x-1)^2 = 1 + 2$$

$$(x-1)^2 = 3$$

至此，方程式便與例題 7.3-1(3)相同，可以繼續用例題 7.3-1(3) 的計算方法找出解。像這種利用配成完全平方式，將一元二次方程式變成  $(x+a)^2 = b$  的形式，再使用平方根的概念來求解的方法，稱為**配方法**。

在正式使用配方法求解以前，我們需要先熟悉如何配出完全平方式。

若有一個式子是  $x^2 + kx + \square$

$\square$  要填入什麼數，才能配出完全平方式呢？

回想以前學過的乘法公式： $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

令  $k = 2a$ ，則  $a = \frac{k}{2}$ ， $a^2 = (\frac{k}{2})^2$

也就是  $\square$  只要填入  $(\frac{k}{2})^2$ ，就能配出完全平方式。

$$x^2 + kx + (\frac{k}{2})^2 = x^2 + 2 \times x \times \frac{k}{2} + (\frac{k}{2})^2 = (x + \frac{k}{2})^2$$

配完全平方式時會使用到的乘法公式有  $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$   
 $(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

### 例題 7.3-2

分別將適當的數填入  $\square$  中，使該式子可以配成一個完全平方式，並將它寫成完全平方的形式。

(1)  $x^2 + 2x + \square$

(2)  $x^2 - 12x + \square$

(3)  $x^2 + 7x + \square$

(4)  $x^2 - \frac{6}{5}x + \square$

詳解：

(1)  $x^2 + 2x + \square$

$$\begin{aligned} & x^2 + 2x + 1 && ((\frac{2}{2})^2 = 1^2 = 1, \square \text{填入 } 1) \\ = & (x+1)^2 \end{aligned}$$

(2)  $x^2 - 12x + \square$

$$\begin{aligned} & x^2 - 12x + 36 && ((-\frac{12}{2})^2 = (-6)^2 = 36, \square \text{填入 } 36) \\ = & (x-6)^2 \end{aligned}$$

(3)  $x^2 + 7x + \square$

$$\begin{aligned} & x^2 + 7x + \frac{49}{4} && ((\frac{7}{2})^2 = \frac{49}{4}, \square \text{填入 } \frac{49}{4}) \\ = & (x + \frac{7}{2})^2 \end{aligned}$$

$$(4) x^2 - \frac{6}{5}x + \square$$

$$x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{9}{25} \quad \left( \left( -\frac{6}{5} \div 2 \right)^2 = \left( -\frac{3}{5} \right)^2 = \frac{9}{25}, \square \text{填入 } \frac{9}{25} \right)$$
$$= \left( x - \frac{3}{5} \right)^2$$

### 【練習】7.3-2

分別將適當的數填入□中，使該式子可以配成一個完全平方式，並將它寫成完全平方的形式。

$$(1) x^2 - 2x + \square$$

$$(2) x^2 + 14x + \square$$

$$(3) x^2 - 5x + \square$$

$$(4) x^2 - \frac{4}{7}x + \square$$

熟悉了如何配出完全平方式後，接下來我們就可以正式用**配方法**來求解。

### 例題 7.3-3

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) x^2 - 4x - 6 = 0$$

$$(2) x^2 - 2x - 9 = 0$$

$$(3) x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$(4) x^2 + x - 3 = 0$$

詳解：

$$(1) x^2 - 4x - 6 = 0$$

$$x^2 - 4x = 6$$

(先將常數項移到等號右邊)

$$x^2 - 4x + (-2)^2 = 6 + (-2)^2 \quad (\text{等號兩邊都加}(-2)^2)$$

$$(x - 2)^2 = 10$$

(配成完全平方式)

$$x - 2 = \pm\sqrt{10}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{10}$$

$$(2) \quad x^2 - 2x - 9 = 0$$

$$x^2 - 2x = 9 \quad (\text{先將常數項移到等號右邊})$$

$$x^2 - 2x + (-1)^2 = 9 + (-1)^2 \quad (\text{等號兩邊都加}(-1)^2)$$

$$(x-1)^2 = 10 \quad (\text{配成完全平方式})$$

$$x-1 = \pm\sqrt{10}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{10}$$

$$(3) \quad x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$x^2 + 3x = 5 \quad (\text{先將常數項移到等號右邊})$$

$$x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 5 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad (\text{等號兩邊都加}\left(\frac{3}{2}\right)^2)$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{29}{4} \quad (\text{配成完全平方式})$$

$$x + \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{29}{4}}$$

$$x + \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$x = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$(4) \quad x^2 + x - 3 = 0$$

$$x^2 + x = 3 \quad (\text{先將常數項移到等號右邊})$$

$$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad (\text{等號兩邊都加}\left(\frac{1}{2}\right)^2)$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{4} \quad (\text{配成完全平方式})$$

$$x + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$x + \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$

同學可以驗算看看各題的解是否能使等式成立。

### 【練習】7.3-3

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$(2) x^2 - 4x - 7 = 0$$

$$(3) x^2 + x - 4 = 0$$

$$(4) x^2 + 5x - 8 = 0$$

### 例題 7.3-4 (二次項係數不為 1)

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) -x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$(2) 2x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(3) 3x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$(4) -4x^2 + 5x + 1 = 0$$

詳解：

若二次項係數不為 1，可先利用等量公理，乘上二次項係數的倒數，將二次項係數化為 1。

$$(1) -x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$(-x^2 - 6x - 6) \times (-1) = 0 \times (-1) \quad (\text{等號左右都乘以}(-1), \text{二次項係數化為}1)$$

$$x^2 + 6x + 6 = 0$$

$$x^2 + 6x = -6 \quad (\text{將常數項移到等號右邊})$$

$$x^2 + 6x + 3^2 = (-6) + 3^2 \quad (\text{等號兩邊都加}3^2)$$

$$(x+3)^2 = 3 \quad (\text{配成完全平方式})$$

$$x+3 = \pm\sqrt{3}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{3}$$

$$(2) \quad 2x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(2x^2 - 4x - 5) \times \frac{1}{2} = 0 \times \frac{1}{2}$$

(等號左右都乘以  $\frac{1}{2}$ ，二次項係數化為 1)

$$x^2 - 2x - \frac{5}{2} = 0$$

$$x^2 - 2x = \frac{5}{2}$$

(將常數項移到等號右邊)

$$x^2 - 2x + (-1)^2 = \frac{5}{2} + (-1)^2$$

(等號兩邊都加  $(-1)^2$ )

$$(x-1)^2 = \frac{7}{2}$$

(配成完全平方式)

$$x-1 = \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$$

$$x = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{14}$$

$$(3) \quad 3x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$(3x^2 + 5x - 2) \times \frac{1}{3} = 0 \times \frac{1}{3}$$

(等號左右都乘以  $\frac{1}{3}$ ，二次項係數化為 1)

$$x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0$$

$$x^2 + \frac{5}{3}x = \frac{2}{3}$$

(將常數項移到等號右邊)

$$x^2 + \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{2}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

(等號兩邊都加  $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ )

$$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{24}{36} + \frac{25}{36}$$

(配成完全平方式)

$$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{49}{36}$$

$$x + \frac{5}{6} = \pm \sqrt{\frac{49}{36}}$$

$$x + \frac{5}{6} = \pm \frac{7}{6}$$

$$x = -\frac{5}{6} \pm \frac{7}{6}$$

$$x = \frac{1}{3}, 2$$

$$(4) -4x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$(-4x^2 + 5x + 1) \times \left(-\frac{1}{4}\right) = 0 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \quad (\text{等號左右都乘以}\left(-\frac{1}{4}\right), \text{二次項係數化為}1)$$

$$x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} = 0$$

$$x^2 - \frac{5}{4}x = \frac{1}{4}$$

(將常數項移到等號右邊)

$$x^2 - \frac{5}{4}x + \left(-\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(-\frac{5}{8}\right)^2$$

(等號兩邊都加 $\left(-\frac{5}{8}\right)^2$ )

$$\left(x - \frac{5}{8}\right)^2 = \frac{16}{64} + \frac{25}{64}$$

(配成完全平方式)

$$\left(x - \frac{5}{8}\right)^2 = \frac{41}{64}$$

$$x - \frac{5}{8} = \pm \sqrt{\frac{41}{64}}$$

$$x - \frac{5}{8} = \pm \frac{\sqrt{41}}{8}$$

$$x = \frac{5}{8} \pm \frac{\sqrt{41}}{8}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{8}$$

我們來驗算看看(1)

將  $x = -3 + \sqrt{3}$  代入  $-x^2 - 6x - 6$ ，看看是否會等於 0。

$$-(-3 + \sqrt{3})^2 - 6(-3 + \sqrt{3}) - 6$$

$$= -(9 - 6\sqrt{3} + 3) - 6(-3 + \sqrt{3}) - 6$$

$$= -12 + 6\sqrt{3} + 18 - 6\sqrt{3} - 6$$

$$= (-12 + 18 - 6) + (6\sqrt{3} - 6\sqrt{3})$$

$$= 0$$

因此  $x = -3 + \sqrt{3}$  是  $-x^2 - 6x - 6 = 0$  的解。

將  $x = -3 - \sqrt{3}$  代入  $-x^2 - 6x - 6$ ，看看是否會等於 0。

$$\begin{aligned} & -(-3 - \sqrt{3})^2 - 6(-3 - \sqrt{3}) - 6 \\ & = -(9 + 6\sqrt{3} + 3) - 6(-3 - \sqrt{3}) - 6 \\ & = -12 - 6\sqrt{3} + 18 + 6\sqrt{3} - 6 \\ & = (-12 + 18 - 6) + (-6\sqrt{3} + 6\sqrt{3}) \\ & = 0 \end{aligned}$$

因此  $x = -3 - \sqrt{3}$  是  $-x^2 - 6x - 6 = 0$  的解。

由以上驗算可知， $x = -3 \pm \sqrt{3}$  是  $-x^2 - 6x - 6 = 0$  的解。

同學可以驗算看看其他題的解是否能使等式成立。

### 【練習】7.3-4

求下列一元二次方程式的解。

(1)  $-x^2 - 7x - 3 = 0$

(2)  $2x^2 - 6x - 7 = 0$

(3)  $5x^2 + 7x - 2 = 0$

(4)  $-3x^2 + 9x + 2 = 0$

### 例題 7.3-5

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) x^2 - 2x - 483 = 0$$

$$(2) x^2 - 6x - 391 = 0$$

$$(3) x^2 - 12x - 253 = 0$$

$$(4) x^2 - 24x - 697 = 0$$

詳解：

$$(1) x^2 - 2x - 483 = 0$$

$$x^2 - 2x = 483$$

(先將常數項移到等號右邊)

$$x^2 - 2x + (-1)^2 = 483 + (-1)^2$$

(等號兩邊都加 $(-1)^2$ )

$$(x-1)^2 = 484$$

(配成完全平方式)

$$x-1 = \pm\sqrt{484}$$

$$x-1 = \pm 22$$

$$x = 1 \pm 22$$

$$x = 23, -21$$

$$(2) x^2 - 6x - 391 = 0$$

$$x^2 - 6x = 391$$

(先將常數項移到等號右邊)

$$x^2 - 6x + (-3)^2 = 391 + (-3)^2$$

(等號兩邊都加 $(-3)^2$ )

$$(x-3)^2 = 400$$

(配成完全平方式)

$$x-3 = \pm\sqrt{400}$$

$$x-3 = \pm 20$$

$$x = 3 \pm 20$$

$$x = 23, -17$$

$$(3) \quad x^2 - 12x - 253 = 0$$

$$x^2 - 12x = 253 \quad (\text{先將常數項移到等號右邊})$$

$$x^2 - 12x + (-6)^2 = 253 + (-6)^2 \quad (\text{等號兩邊都加 } (-6)^2)$$

$$(x-6)^2 = 289 \quad (\text{配成完全平方式})$$

$$x-6 = \pm\sqrt{289}$$

$$x-6 = \pm 17$$

$$x = 6 \pm 17$$

$$x = 23, -11$$

$$(4) \quad x^2 - 24x - 697 = 0$$

$$x^2 - 24x = 697 \quad (\text{先將常數項移到等號右邊})$$

$$x^2 - 24x + (-12)^2 = 697 + (-12)^2 \quad (\text{等號兩邊都加 } (-12)^2)$$

$$(x-12)^2 = 841 \quad (\text{配成完全平方式})$$

$$x-12 = \pm\sqrt{841}$$

$$x-12 = \pm 29$$

$$x = 12 \pm 29$$

$$x = 41, -17$$

同學可以驗算看看各題的解是否能使等式成立。

### 【練習】7.3-5

求下列一元二次方程式的解。

$$(1) \quad x^2 - 2x - 255 = 0$$

$$(2) \quad x^2 - 6x - 216 = 0$$

$$(3) \quad x^2 - 4x - 221 = 0$$

$$(4) \quad x^2 - 8x - 345 = 0$$

### 例題 7.3-6

若  $x^2 - 4x - 16 = 0$ ，則  $(x-2)^2$  之值為何？

詳解：

由題目知  $x^2 - 4x - 16 = 0$

$$x^2 - 4x = 16 \quad (\text{先將常數項移到等號右邊})$$

$$x^2 - 4x + (-2)^2 = 16 + (-2)^2 \quad (\text{等號兩邊都加 } (-2)^2)$$

$$(x-2)^2 = 20 \quad (\text{配成完全平方式})$$

可知  $(x-2)^2$  之值為 20。

### 【練習】7.3-6

若  $x^2 - 6x - 20 = 0$ ，則  $(x-3)^2$  之值為何？

### 例題 7.3-7

若方程式  $x^2 - 12x + p = 0$  可配方成  $(x-6)^2 = 30$  的形式，則  $p$  的值是多少？

詳解：

將  $(x-6)^2 = 30$  化成  $x^2 - 12x + p = 0$  的形式

由題目知  $(x-6)^2 = 30$

$$x^2 - 12x + 36 = 30$$

$$x^2 - 12x + 36 - 30 = 0$$

$$x^2 - 12x + 6 = 0$$

可知  $p$  之值為 6。

### 【練習】7.3-7

若方程式  $x^2 - 14x + p = 0$  可配方成  $(x-7)^2 = 30$  的形式，則  $p$  的值是多少？

### 例題 7.3-8

已知  $x^2 - 10x + a = (x - b)^2$ ，求  $a$ 、 $b$  之值。

詳解：

$$\begin{aligned} & x^2 - 10x + a \\ = & x^2 - 10x + (-5)^2 + a - (-5)^2 \\ = & (x - 5)^2 + (a - 25) \end{aligned}$$

與  $(x - b)^2$  對照，可知  $b = 5$ ， $a - 25 = 0 \rightarrow a = 25$ 。

### 【練習】7.3-8

已知  $x^2 - 16x + a = (x - b)^2$ ，求  $a$ 、 $b$  之值。

### 例題 7.3-9

若方程式  $x^2 - 2x + p = 0$  可利用配方法寫成  $(x - q)^2 = 5$ ，試求  $p$  之值。

詳解：

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x + p = 0 \\ & x^2 - 2x + (-1)^2 = -p + (-1)^2 \\ & (x - 1)^2 = -p + 1 \end{aligned}$$

與  $(x - q)^2 = 5$  對照，可知  $q = 1$ ， $-p + 1 = 5 \rightarrow p = -4$ 。

### 【練習】7.3-9

若方程式  $x^2 - 8x + p = 0$  可利用配方法寫成  $(x - q)^2 = 8$ ，試求  $p$  之值。

## 7.3 節 習題

### 習題 7.3-1

求下列一元二次方程式的解。

(1)  $x^2 = 25$

(2)  $4x^2 = 4$

(3)  $(x-2)^2 = 5$

### 習題 7.3-2

分別將適當的數填入□中，使該式子可以配成一個完全平方式，並將它寫成完全平方的形式。

(1)  $x^2 + 6x + \square$

(2)  $x^2 - 8x + \square$

(3)  $x^2 + 3x + \square$

(4)  $x^2 - \frac{2}{5}x + \square$

### 習題 7.3-3

求下列一元二次方程式的解。

(1)  $x^2 - 10x - 2 = 0$

(2)  $x^2 + 2x - 5 = 0$

(3)  $x^2 + 7x - 1 = 0$

(4)  $x^2 - x - 1 = 0$

### 習題 7.3-4 (二次項係數不為 1)

求下列一元二次方程式的解。

(1)  $-x^2 - 5x - 3 = 0$

(2)  $4x^2 + 8x - 6 = 0$

(3)  $2x^2 + 5x - 3 = 0$

(4)  $3x^2 + 15x + 14 = 0$

### 習題 7.3-5

求下列一元二次方程式的解。

(1)  $x^2 - 28x + 187 = 0$

(2)  $x^2 + 2x - 195 = 0$

(3)  $x^2 + 2x - 323 = 0$

(4)  $x^2 - 10x - 375 = 0$

### 習題 7.3-6

若  $x^2 - 10x - 15 = 0$ ，則  $(x-5)^2$  之值為何？

### 習題 7.3-7

若方程式  $x^2 - 8x + p = 0$  可配方成  $(x-4)^2 = 28$  的形式，則  $p$  的值是多少？

習題 7.3-8

已知  $x^2 - 4x + a = (x - b)^2$ ，求  $a$ 、 $b$  之值。

習題 7.3-9

若方程式  $x^2 - 6x + p = 0$  可利用配方法寫成  $(x - q)^2 = 6$ ，試求  $p$  之值。

## 7.4 節 一元二次方程式的公式解

對於一元二次方程式，目前我們已經學過了利用因式分解與配方法來找出解。

本節我們將討論一般的方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  要如何找出其解。

我們試著用前一節學過的配方法來處理方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ )：

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$(ax^2 + bx + c) \times \frac{1}{a} = 0 \times \frac{1}{a} \quad (\text{等號兩邊同乘以 } \frac{1}{a})$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad (\text{常數項移到等號右邊})$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \quad (\text{等號兩邊同加 } \left(\frac{b}{2a}\right)^2, \text{ 配成完全平方})$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \quad (\text{等號左邊化為完全平方})$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} \quad (\text{等號右邊通分})$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2} \quad (\text{等號右邊分數相加})$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (\text{整理式子})$$

到這一步，我們必須先討論左式與右式之間的關係才能繼續運算。

等號左邊為完全平方式，會大於或等於 0，那等號右邊呢？等號右邊的分母為  $4a^2$ ，會大於 0 (一開始條件已設  $a \neq 0$ )。

等號右邊的分子是  $b^2 - 4ac$ ，我們分成小於 0、等於 0 和大於 0 三種情形來討論：

(1)  $b^2 - 4ac < 0$

即方程式右邊  $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0$ ，但方程式左邊是一個完全平方式，必須大於 0 或等於 0。因此方程式**無解**。

$$(2) \quad b^2 - 4ac = 0$$

$$\begin{aligned} \text{則原方程式可寫成} \quad & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \\ & x + \frac{b}{2a} = 0 \end{aligned}$$

此情形一元二次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  的解只有一個  $x = -\frac{b}{2a}$ ，稱為**重根**。

$$(3) \quad b^2 - 4ac > 0$$

即方程式右邊  $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$ ，我們將等號兩邊取平方根來計算。

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ x + \frac{b}{2a} &= \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} && \text{(等號兩邊取平方根)} \\ x + \frac{b}{2a} &= \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} && \text{(等號右邊分母 } \sqrt{4a^2} \text{ 化為 } 2a) \\ x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} && \left(\frac{b}{2a} \text{ 移到等號右邊}\right) \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

由以上討論，我們知道若是  $a \neq 0$  且  $b^2 - 4ac \geq 0$

則一元二次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  的解為  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(重根時一樣可如此表示， $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm 0}{2a} = \frac{-b}{2a}$ )

這個公式稱為一元二次方程式的**公式解**。

另外  $b^2 - 4ac$  稱為方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  的**判別式**，可以用來判別解的種類。

## 7.4.1 節 一元二次方程式解的判別

本小節我們會利用方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  的判別式  $b^2 - 4ac$  來判斷二元一次方程式解的種類：

(1)  $b^2 - 4ac < 0$ ，此方程式無解。

(2)  $b^2 - 4ac = 0$ ，此方程式有重根， $x = -\frac{b}{2a}$ 。

(3)  $b^2 - 4ac > 0$ ，此方程式有兩相異解(兩相異根)， $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 。

### 例題 7.4.1-1

利用判別式判斷下列方程式解的情形：

(1)  $x^2 + x + 1 = 0$

(2)  $x^2 + x - 1 = 0$

(3)  $x^2 + 2x + 1 = 0$

(4)  $x^2 - 2x + 1 = 0$

詳解：

(1)  $a = 1$ 、 $b = 1$ 、 $c = 1$

$$b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

此方程式無解。

(2)  $a = 1$ 、 $b = 1$ 、 $c = -1$

$$b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5 > 0$$

此方程式有兩相異解。

(3)  $a = 1$ 、 $b = 2$ 、 $c = 1$

$$b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0$$

此方程式有重根。

(4)  $a = 1$ 、 $b = -2$ 、 $c = 1$

$$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0$$

此方程式有重根。

### 【練習】7.4.1-1

利用判別式判斷下列方程式解的情形：

$$(1) x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$(2) x^2 + 8x + 16 = 0$$

$$(3) x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$(4) x^2 - 2x - 6 = 0$$

### 例題 7.4.1-2

利用判別式判斷下列方程式解的情形：

$$(1) 3x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$(2) 2x^2 - 16x + 32 = 0$$

$$(3) 5x^2 - 7x - 2 = 0$$

$$(4) 3x^2 - 3x + 8 = 0$$

詳解：

$$(1) a=3、b=4、c=5$$

$$b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 3 \times 5 = 16 - 60 = -44 < 0$$

此方程式無解。

$$(2) a=2、b=-16、c=32$$

$$b^2 - 4ac = (-16)^2 - 4 \times 2 \times 32 = 256 - 256 = 0$$

此方程式有重根。

$$(3) a=5、b=-7、c=-2$$

$$b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 5 \times (-2) = 49 + 40 = 89 > 0$$

此方程式有兩相異解。

$$(4) a=3、b=-3、c=8$$

$$b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 3 \times 8 = 9 - 96 = -87 < 0$$

此方程式無解。

### 【練習】7.4.1-2

利用判別式判斷下列方程式解的情形：

$$(1) -3x^2 + x + 5 = 0$$

$$(2) 2x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$(3) 4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$(4) -x^2 + 2x - 7 = 0$$

### 例題 7.4.1-3

若一元二次方程式  $ax^2 + 4x + 8 = 0$  有兩相異解，試求  $a$  的範圍。

詳解：

一元二次方程式  $ax^2 + 4x + 8 = 0$  有兩相異解，代表判別式  $b^2 - 4ac > 0$

$$b^2 - 4ac > 0$$

$$4^2 - 4 \times a \times 8 > 0$$

$$16 - 32a > 0$$

$$1 - 2a > 0 \quad (\text{等號兩邊同除以 } 16)$$

$$-2a > -1$$

$$2a < 1 \quad (\text{等號兩邊同乘以 } (-1), \text{ 不等號方向相反})$$

$$a < \frac{1}{2}$$

即若  $ax^2 + 4x + 8 = 0$  有兩相異解，則  $a < \frac{1}{2}$ 。

### 【練習】7.4.1-3

若一元二次方程式  $ax^2 + 3x + 9 = 0$  無解，試求  $a$  的範圍。

### 例題 7.4.1-4

已知一元二次方程式  $x^2 + bx + 25 = 0$  有重根，試求  $b$  之值。

詳解：

一元二次方程式  $x^2 + bx + 25 = 0$  有重根，代表判別式  $b^2 - 4ac = 0$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$b^2 - 4 \times 1 \times 25 = 0$$

$$b^2 - 100 = 0$$

$$b^2 = 100$$

$$b = \pm 10$$

即若  $x^2 + bx + 25 = 0$  有重根，則  $b = \pm 10$ 。

### 【練習】7.4.1-4

已知一元二次方程式  $x^2 + bx + 16 = 0$  有重根，試求  $b$  之值。

## 7.4.2 節 用公式解一元二次方程式

本小節我們將學習如何用公式找出一元二次方程式的解。

若  $a \neq 0$  且  $b^2 - 4ac \geq 0$ ，則一元二次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  的解為  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

舉例來說，方程式  $3x^2 + 19x - 14 = 0$ ，我們利用公式來求解：

$$a = 3、b = 19、c = -14$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\&= \frac{-19 \pm \sqrt{19^2 - 4 \times 3 \times (-14)}}{2 \times 3} \\&= \frac{-19 \pm \sqrt{361 + 168}}{6} \\&= \frac{-19 \pm \sqrt{529}}{6} \\&= \frac{-19 \pm 23}{6} \\(1) x &= \frac{-19 + 23}{6} = \frac{2}{3}、(2) x = \frac{-19 - 23}{6} = -7\end{aligned}$$

得解為  $x = \frac{2}{3}$ 、 $x = -7$

### 例題 7.4.2-1

利用公式求下列一元二次方程式的解。

$$(1) x^2 - 3x - 40 = 0$$

$$(2) x^2 - 17x - 60 = 0$$

$$(3) x^2 - 7x + 8 = 0$$

$$(4) x^2 + 3x - 12 = 0$$

詳解：

$$(1) a=1、b=-3、c=-40$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\&= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times (-40)}}{2 \times 1} \\&= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 160}}{2} \\&= \frac{3 \pm \sqrt{169}}{2} \\&= \frac{3 \pm 13}{2}\end{aligned}$$

$$\frac{3+13}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$\frac{3-13}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

$$x=8、-5$$

$$(2) a=1、b=-17、c=-60$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\&= \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \times 1 \times (-60)}}{2 \times 1} \\&= \frac{17 \pm \sqrt{289 + 240}}{2} \\&= \frac{17 \pm \sqrt{529}}{2} \\&= \frac{17 \pm 23}{2}\end{aligned}$$

$$\frac{17+23}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

$$\frac{17-23}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x = 20、-3$$

$$(3) a=1、b=-7、c=8$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\&= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 1 \times 8}}{2 \times 1} \\&= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 32}}{2} \\&= \frac{7 \pm \sqrt{17}}{2}\end{aligned}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$(4) a=1、b=3、c=-12$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\&= \frac{-(3) \pm \sqrt{(3)^2 - 4 \times 1 \times (-12)}}{2 \times 1} \\&= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 48}}{2} \\&= \frac{-3 \pm \sqrt{57}}{2}\end{aligned}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{57}}{2}$$

同學可以驗算看看各題的解是否能使等式成立。

### 【練習】7.4.2-1

利用公式求下列一元二次方程式的解。

$$(1) x^2 - 13x - 30 = 0$$

$$(2) x^2 - 11x - 60 = 0$$

$$(3) x^2 - 8x + 14 = 0$$

$$(4) x^2 + 3x - 15 = 0$$

### 例題 7.4.2-2

利用公式求下列一元二次方程式的解。

$$(1) 6x^2 + 17x - 45 = 0$$

$$(2) 4x^2 + 29x - 24 = 0$$

$$(3) -x^2 - 2x + 8 = 0$$

$$(4) -6x^2 - x + 40 = 0$$

詳解：

$$(1) a=6、b=17、c=-45$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-17 \pm \sqrt{(17)^2 - 4 \times 6 \times (-45)}}{2 \times 6} \\ &= \frac{-17 \pm \sqrt{289 + 1080}}{12} \\ &= \frac{-17 \pm \sqrt{1369}}{12} \\ &= \frac{-17 \pm 37}{12} \end{aligned}$$

$$\frac{-17+37}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{-17-37}{12} = \frac{-54}{12} = -\frac{9}{2}$$

$$x = \frac{5}{3}、-\frac{9}{2}$$

$$(2) \ a=4 \ 、 b=29 \ 、 c=-24$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\&= \frac{-29 \pm \sqrt{(29)^2 - 4 \times 4 \times (-24)}}{2 \times 4} \\&= \frac{-29 \pm \sqrt{841 + 384}}{8} \\&= \frac{-29 \pm \sqrt{1225}}{8} \\&= \frac{-29 \pm 35}{8}\end{aligned}$$

$$\frac{-29+35}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{-29-35}{8} = \frac{-64}{8} = -8$$

$$x = \frac{3}{4} \ 、 -8$$

$$(3) \ a=-1 \ 、 b=-2 \ 、 c=8$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\&= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times (-1) \times 8}}{2 \times (-1)} \\&= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{-2} \\&= \frac{2 \pm \sqrt{36}}{-2} \\&= \frac{2 \pm 6}{-2}\end{aligned}$$

$$\frac{2+6}{-2} = \frac{8}{-2} = -4$$

$$\frac{2-6}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x = -4 \ 、 2$$

$$(4) a = -6, b = -1, c = 40$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\&= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times (-6) \times 40}}{2 \times (-6)} \\&= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 960}}{-12} \\&= \frac{1 \pm \sqrt{961}}{-12} \\&= \frac{1 \pm 31}{-12}\end{aligned}$$

$$\frac{1+31}{-12} = \frac{32}{-12} = -\frac{8}{3}$$

$$\frac{1-31}{-12} = \frac{-30}{-12} = \frac{5}{2}$$

$$x = -\frac{8}{3}, \frac{5}{2}$$

同學可以驗算看看各題的解是否能使等式成立。

### 【練習】7.4.2-2

利用公式求下列一元二次方程式的解。

$$(1) 8x^2 - 14x - 15 = 0$$

$$(2) 5x^2 - 29x - 6 = 0$$

$$(3) -x^2 - 2x + 8 = 0$$

$$(4) -3x^2 - x + 20 = 0$$

### 例題 7.4.2-3 (重根)

利用公式求下列一元二次方程式的解。

$$(1) x^2 + 12x + 36 = 0$$

$$(2) 3x^2 - 18x + 27 = 0$$

詳解：

$$(1) a=1、b=12、c=36$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\&= \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4 \times 1 \times (36)}}{2 \times 1} \\&= \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 144}}{2} \\&= \frac{-12 \pm \sqrt{0}}{2} \\&= \frac{-12}{2} \\&= -6 (\text{重根})\end{aligned}$$

$$(2) a=3、b=-18、c=27$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\&= \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \times 3 \times 27}}{2 \times 3} \\&= \frac{18 \pm \sqrt{324 - 324}}{6} \\&= \frac{18 \pm \sqrt{0}}{6} \\&= \frac{18}{6} \\&= 3 (\text{重根})\end{aligned}$$

同學可以驗算看看各題的解是否能使等式成立。

### 【練習】7.4.2-3

利用公式求下列一元二次方程式的解。

$$(1) x^2 - 16x + 64 = 0$$

$$(2) 5x^2 - 10x + 5 = 0$$

### 例題 7.4.2-4

利用公式求下列一元二次方程式的解。

$$(1) (x+1)^2 + 3(x+1) - 2 = 0$$

$$(2) (x-6)^2 - 5(x-6) + 3 = 0$$

詳解：

(1) 這類的題目，我們不需要將 $(x+1)^2$ 乘開，可以將 $(x+1)$ 當成一個未知數來計算

$$a=1、b=3、c=-2$$

$$\begin{aligned} x+1 &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(3) \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{2} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

(得到了 $(x+1)$ 之值後，我們再求 $x$ 之值)

$$\begin{aligned} x+1 &= \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x &= \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} - 1 \\ x &= \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} - \frac{2}{2} \\ x &= \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

(2) 同(1)，我們不需要將 $(x-6)^2$ 乘開，可以將 $(x-6)$ 當成一個未知數來計算

$$a=1、b=-5、c=3$$

$$\begin{aligned}x-6 &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1}\end{aligned}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25-12}}{2}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

(得到了 $(x-6)$ 之值後，我們再求 $x$ 之值)

$$x-6 = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} + 6$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} + \frac{12}{2}$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{13}}{2}$$

#### 【練習】7.4.2-4

利用公式求下列一元二次方程式的解。

(1)  $(x-1)^2 + 6(x-1) - 3 = 0$

(2)  $(x+3)^2 - 7(x+3) + 5 = 0$

## 7.4 節 習題

### 習題 7.4-1

利用判別式判斷下列方程式解的情形：

(1)  $x^2 + 4x - 45 = 0$

(2)  $x^2 - 2x + 11 = 0$

(3)  $x^2 - 6x + 9 = 0$

(4)  $x^2 - 10x + 25 = 0$

### 習題 7.4-2

利用判別式判斷下列方程式解的情形：

(1)  $2x^2 - 6x + 3 = 0$

(2)  $16x^2 - 8x + 1 = 0$

(3)  $2x^2 + 6x + 7 = 0$

(4)  $3x^2 - 10x + 9 = 0$

### 習題 7.4-3

若一元二次方程式  $ax^2 + 3x - 4 = 0$  有兩相異解，試求  $a$  的範圍。

### 習題 7.4-4

已知一元二次方程式  $x^2 + bx + 9 = 0$  有重根，試求  $b$  之值。

### 習題 7.4-5

利用公式求下列一元二次方程式的解。

$$(1) x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$(2) x^2 - 19x + 60 = 0$$

$$(3) x^2 + 5x - 10 = 0$$

$$(4) x^2 + 8x + 3 = 0$$

### 習題 7.4-6

利用公式求下列一元二次方程式的解。

$$(1) 6x^2 + 7x + 2 = 0$$

$$(2) 5x^2 + 9x - 2 = 0$$

$$(3) -x^2 - x + 12 = 0$$

$$(4) -12x^2 + 13x - 3 = 0$$

### 習題 7.4-7

利用公式求下列一元二次方程式的解。

$$(1) x^2 + 22x + 121 = 0$$

$$(2) 3x^2 - 12x + 12 = 0$$

### 習題 7.4-8

利用公式求下列一元二次方程式的解。

$$(1) (x-2)^2 + 5(x-2) + 5 = 0$$

$$(2) (x+2)^2 + 3(x+2) - 5 = 0$$

## 7.5 節 一元二次方程式的應用題與綜合題

在前三節，我們學習了利用因式分解、配方法與公式解找出二元一次方程式的解，本節我們將應用這些學到的方法，來處理應用問題。

利用因式分解求解：

將方程式因式分解成  $(ax-b)(cx-d)=0$  的形式，則解為  $x = \frac{b}{a}$ 、 $\frac{d}{c}$ 。 $(a \neq 0, c \neq 0)$

利用配方法求解：

將方程式配方成  $(x-a)^2 = b$  的形式，則解為  $x = a \pm \sqrt{b}$ 。 $(b \geq 0)$

利用公式求解：

方程式  $ax^2 + bx + c = 0$ ，其解為  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 。 $(a \neq 0, b^2 - 4ac \geq 0)$

之前在例題 7.1-1，我們只有在情境中列式，現在可以試著求出未知數之值了。

### 例題 7.5-1

試求下列各情境中的  $x$  之值。

(1) 某三角形的底為  $(x+1)$  公分，高為  $3x$  公分，面積為 30 平方公分。

(2) 小華 買了  $(2x+3)$  枝原子筆，每枝原子筆售價都是  $x$  元，小華 共花了 65 元。

(3)  $(x+2)$  與  $(x-3)$  兩數的乘積為 6。

詳解：

(1) 三角形的面積等於底 $\times$ 高 $\times\frac{1}{2}$ 。

$$\text{列成方程式為 } (x+1)\times 3x\times\frac{1}{2}=30$$

$$(3x^2+3x)\times\frac{1}{2}=30$$

$$(3x^2+3x)\times\frac{1}{2}\times 2=30\times 2 \quad (\text{等量公理，等號左右同乘以 } 2)$$

$$3x^2+3x=60$$

$$3x^2+3x-60=0$$

$$x^2+x-20=0$$

$$(x+5)(x-4)=0 \quad (\text{利用十字交乘})$$

$$x=4、x=-5 (\text{長度不可為負數，}-5 \text{ 不合})$$

得  $x=4$ 。

(2) 總價等於單價 $\times$ 枝數。

$$\text{列成方程式為 } (2x+3)\times x=65$$

$$2x^2+3x=65$$

$$2x^2+3x-65=0$$

$$(2x+13)(x-5)=0 \quad (\text{利用十字交乘})$$

$$x=5、x=-\frac{13}{2} (\text{枝數與價格不可為負數，}-\frac{13}{2} \text{ 不合})$$

得  $x=5$ 。

(3)列成方程式為  $(x+2)\times(x-3)=6$

$$x^2 - x - 6 = 6$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x-4)(x+3) = 0 \quad (\text{利用十字交乘})$$

$$x=4 \text{、} x=-3$$

得  $x=4$ 、 $x=-3$ 。

### 例題 7.5-2

有一長方形，長為  $(3x-1)$  公分，寬為  $(x+2)$  公分，面積為 98 平方公分，試求其長。

詳解：

長方形的面積等於長 $\times$ 寬。

列成方程式為  $(3x-1)(x+2)=98$

$$3x^2 + 5x - 2 = 98$$

$$3x^2 + 5x - 100 = 0$$

這裡我們用公式求解

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 3 \times (-100)}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 1200}}{6}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{1225}}{6}$$

$$= \frac{-5 \pm 35}{6}$$

$$x = \frac{-5 + 35}{6} = 5 \quad \text{、} \quad x = \frac{-5 - 35}{6} = -\frac{20}{3} \quad (\text{代入會使長、寬為負，不合})$$

得  $x=5$

$$\text{長} = 3x - 1 = 3 \times 5 - 1 = 14 \text{ (公分)}$$

答：長為 14 公分。

### 例題 7.5-3

如圖 7.5-1，某正方形，若將其一邊長度減少 2 公分，另一邊長度變為 2 倍，則所得新長方形面積比原正方形面積多 32 平方公分，試求原正方形邊長。

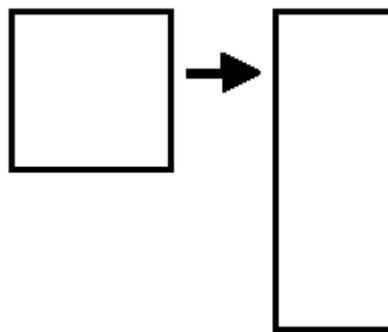


圖 7.5-1

詳解：

令原正方形邊長為  $x$  公分，則其面積為  $x^2$  平方公分。

新長方形邊長為  $(x-2)$  公分與  $2x$  公分，面積為  $2x(x-2)$  平方公分。

新長方形面積比原正方形面積多 32 平方公分

列成方程式為  $2x(x-2) - x^2 = 32$

$$2x^2 - 4x - x^2 = 32$$

$$x^2 - 4x - 32 = 0$$

$$(x-8)(x+4) = 0$$

$$x = 8, -4 \text{ (邊長不可為負, } -4 \text{ 不合)}$$

得原正方形邊長為 8 公分。

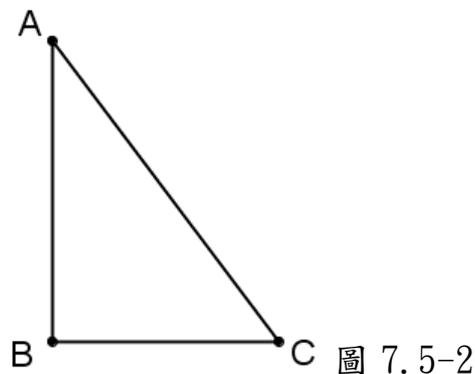
### 例題 7.5-4

如圖 7.5-2，有三角形 ABC，其中 B 為直角。

已知  $\overline{AB} = x + 4$ 、 $\overline{BC} = 6$ 、 $\overline{CA} = 2x + 2$ ，

且直角三角形邊長有  $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$  的關係，

試求三角形 ABC 之面積。



詳解：

根據  $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$

可列式  $(x + 4)^2 + (6)^2 = (2x + 2)^2$

$$x^2 + 8x + 16 + 36 = 4x^2 + 8x + 4$$

$$x^2 - 4x^2 + 8x - 8x + 16 + 36 - 4 = 0$$

$$-3x^2 + 48 = 0$$

$$x^2 - 16 = 0$$

$$(x - 4)(x + 4) = 0 \quad (\text{利用平方差公式})$$

$$x = 4、x = -4 \quad (\text{長度不可為負，故 } -4 \text{ 不合})$$

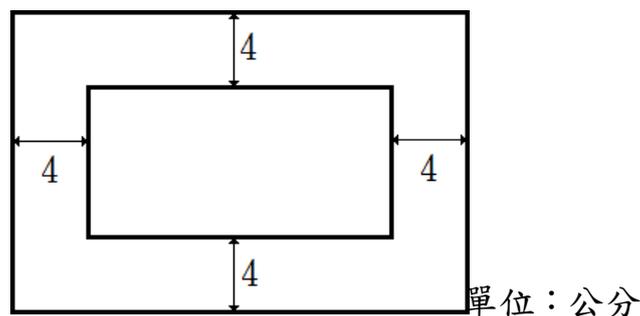
$$\overline{AB} = x + 4 = 4 + 4 = 8$$

$$\text{三角形 ABC 之面積} = \overline{AB} \times \overline{BC} \times \frac{1}{2} = 8 \times 6 \times \frac{1}{2} = 24$$

得三角形 ABC 面積為 24 平方單位。

### 例題 7.5-5

如圖 7.5-3，有一張長方形紙片，其長比寬多 8 公分。在紙片中間剪去了一塊小長方形，使剩餘紙片的四周寬度均為 4 公分。若原長方形紙片之長為  $x$  公分，試回答下列問題：



(1) 原長方形的面積為何？(以  $x$  表示)

(2) 剪去的小長方形面積為何？(以  $x$  表示)

(3) 剪去小長方形後，剩餘的紙片面積為何？(以  $x$  表示)

(4) 若剩餘紙片的面積，比剪去的小長方形紙片面積多 128 平方公分，試求原長方形紙片之長。

詳解：

- (1) 原長方形紙片之長為  $x$  公分，則寬為  $(x-8)$  公分。

$$x(x-8) = x^2 - 8x$$

原長方形紙片面積為  $(x^2 - 8x)$  平方公分。

- (2) 紙片中間減去的小長方形：

$$\text{長： } x - 4 - 4 = x - 8 \text{ (公分)}$$

$$\text{寬： } (x - 8) - 4 - 4 = x - 16 \text{ (公分)}$$

$$(x - 8)(x - 16) = x^2 - 24x + 128$$

小長方形面積為  $(x^2 - 24x + 128)$  平方公分

- (3) 剩餘的紙片面積 = 原長方形紙片面積 - 小長方形面積

$$(x^2 - 8x) - (x^2 - 24x + 128) = 16x - 128$$

剩餘的紙片面積為  $(16x - 128)$  平方公分。

- (4) 剩餘紙片的面積，比剪去的小長方形紙片面積多 128 平方公分

$$(16x - 128) - (x^2 - 24x + 128) = 128$$

$$16x - 128 - x^2 + 24x - 128 - 128 = 0$$

$$-x^2 + 40x - 384 = 0$$

$$x^2 - 40x + 384 = 0$$

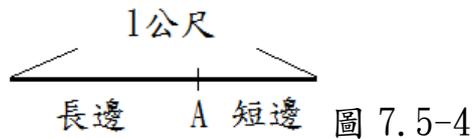
$$(x - 24)(x - 16) = 0$$

$x = 24$ 、 $16$  (若  $x = 16$ ，則小長方形寬為 0，故不合)

因此原長方形紙片之長為 24 公分。

### 例題 7.5-6

如圖 7.5-4，有一條 1 公尺長的繩子，在上面取一點 A，使繩子分為長邊與短邊，若其長度比例，全長：長邊 = 長邊：短邊，試求長邊對短邊的比值。



詳解：

設長邊長度為  $x$  公尺，則短邊長度為  $(1-x)$  公尺。

全長：長邊 = 長邊：短邊

$$1:x = x:(1-x)$$

$$1 \times (1-x) = x \times x \quad (\text{外項乘積等於內項乘積})$$

$$1-x = x^2$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (\text{長度不可為負，負不合})$$

長邊長度為  $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  公尺。

長邊對短邊的比值 = 全長對長邊的比值 (全長：長邊 = 長邊：短邊)

$$\begin{aligned} &= 1 \div \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ &= 1 \times \frac{2}{-1 + \sqrt{5}} \\ &= \frac{2}{-1 + \sqrt{5}} \\ &= \frac{2(-1 - \sqrt{5})}{(-1 + \sqrt{5})(-1 - \sqrt{5})} \\ &= \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{1 - 5} \\ &= \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{-4} \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

得長邊對短邊的比值為  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 。

### 例題 7.5-7

如圖 7.5-5，有一長方形，長邊長度為  $x$  公尺，短邊長度為 1 公尺。若從長方形邊緣切掉一塊邊長 1 公尺的正方形後，可使剩下的長方形長短邊比與原長方形長短邊比相等，試求  $x$  之值。

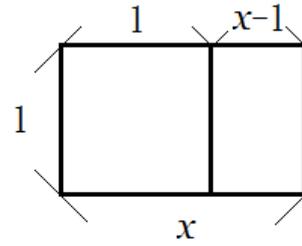


圖 7.5-5

詳解：

剩下的長方形長短邊比為  $1:(x-1)$

原長方形長短邊比為  $x:1$

剩下的長方形長短邊比與原長方形長短邊比相等：

$$1:(x-1) = x:1$$

$$1 \times 1 = (x-1) \times x \quad (\text{外項乘積等於內項乘積})$$

$$1 = x^2 - x$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (\text{長度不可為負，負不合})$$

$$\text{原長方形長邊長度為 } \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ 公尺， } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{。}$$

在例題 7.5-6 與 7.5-7 中，都出現了  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  的比值，這個數被稱為黃金比例或黃金分割。

黃金比例構成的圖形被認為是美麗的圖形，現今也有許多藝術品、建築物、電子產品

等應用了黃金比例。

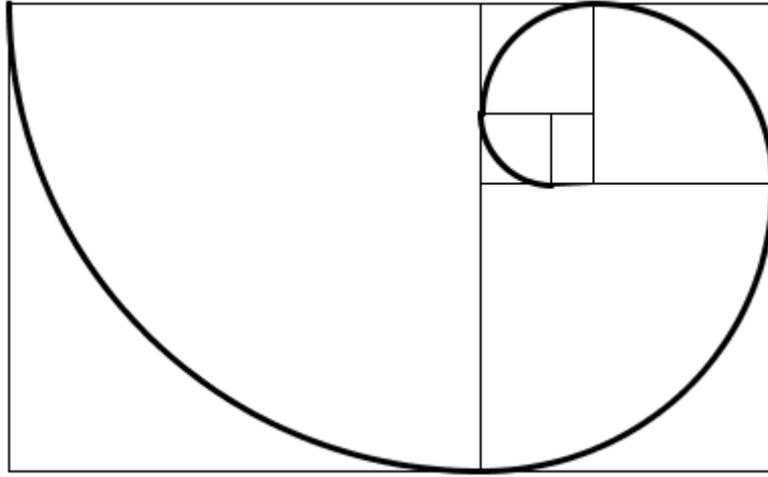


圖 7.5-6

圖 7.5-6 是將例題 7.5-7 中的長方形繼續用黃金比例分割，再利用分割出來的點畫一條螺旋形的線。自然界中，舉凡海螺的形狀、衛星雲圖中的颱風圖、蜘蛛網的形狀都與這種螺旋線相當相似。

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  的數值大約是 1.618，一個有趣的地方是，1.618 的倒數再加上 1，大約也是 1.618。

$$\frac{1}{1.618} \doteq 0.618 \qquad 0.618+1=1.618$$

### 例題 7.5-8

如圖 7.5-7，有一長 250 公分的梯子靠在牆上，若牆腳到梯頂的距離比牆腳到梯腳的距離多 50 公分，試求牆腳到梯腳的距離。

(牆與地面垂直，直角三角形斜邊平方等於兩股平方和)

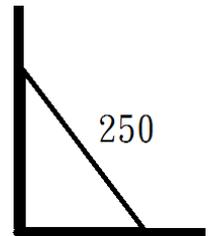


圖 7.5-7

### 詳解：

令牆腳到梯腳的距離為  $x$  公分，則牆腳到梯頂的距離為  $(x+50)$  公分。

牆與地面垂直，因此可將梯子與牆面、地面所構成圖形視為直角三角形，斜邊長為 250 公分，兩股長分別為  $x$  公分與  $(x+50)$  公分，如圖 7.5-8。

直角三角形斜邊平方等於兩股平方和，可列式：

$$250^2 = x^2 + (x+50)^2$$

$$62500 = x^2 + x^2 + 100x + 2500$$

$$62500 = 2x^2 + 100x + 2500$$

$$2x^2 + 100x - 60000 = 0$$

$$x^2 + 50x - 30000 = 0$$

$$(x-150)(x+200) = 0$$

$$x = 150、-200 \text{ (長度不可為負，負不合)}$$

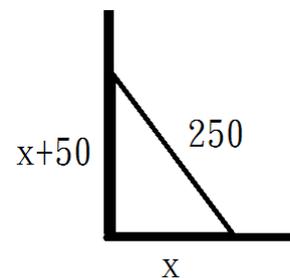


圖 7.5-8

得牆腳到到梯腳的距離為 150 公分。

### 例題 7.5-9

一袋蕃茄分給  $x$  人，每人分得  $(x+1)$  顆蕃茄且沒有剩下，若一袋蕃茄有 72 顆，請問每人分得多少顆蕃茄？

詳解：

蕃茄總數等於人數 $\times$ 每人分得的顆數。

列成方程式為  $72 = x(x+1)$

$$72 = x^2 + x$$

$$x^2 + x - 72 = 0$$

$$(x-8)(x+9) = 0$$

$$x = 8、x = -9(\text{人數不可為負數，}-9 \text{ 不合})$$

$$\text{得 } x = 8。$$

每人分得顆數為  $x+1=8+1=9$

答：每人分得 9 顆蕃茄。

### 例題 7.5-10

一袋蕃茄分給  $x$  人，每人分得  $(x+1)$  顆蕃茄且沒有剩下。若改為分給 7 人，則每人分得  $(x+5)$  顆，剩下 5 顆，請問這袋蕃茄共有幾顆？

詳解：

蕃茄總數等於人數 $\times$ 每人分得的顆數。

分給  $x$  人，每人分得  $(x+1)$  顆蕃茄且沒有剩下 $\rightarrow$ 蕃茄總數 $=x(x+1)$

分給 7 人，每人分得  $(x+5)$  顆，剩下 5 顆 $\rightarrow$ 蕃茄總數 $=7(x+5)+5$

列成方程式為  $x(x+1) = 7(x+5)+5$  (等號兩邊都代表蕃茄總數，故相等)

$$x^2 + x = 7x + 40$$

$$x^2 + x - 7x - 40 = 0$$

$$x^2 - 6x - 40 = 0$$

$$(x-10)(x+4) = 0$$

$$x = 10、x = -4(\text{人數不可為負數，}-4 \text{ 不合})$$

$$\text{得 } x = 10。$$

蕃茄總數為  $7(x+5)+5 = 7(10+5)+5 = 110$

答：這袋蕃茄共有 110 顆。

### 例題 7.5-11

某遊樂園，基本門票價格為每人 200 元。現在放出團體票優惠，若一次買超過 20 張門票，則每增加 1 張，每張門票減 5 元。例如買 22 張門票，則每張門票為 190 元。若現在小明買門票共花 4455 元，請問小明共買了幾張門票？

詳解：

我們先看看小明買的門票是否有超過 20 張。

若買 20 張，則總價為  $200 \times 20 = 4000$ ， $4000 < 4455$ ，可知小明買的門票超過 20 張。

設小明買的門票比 20 張又多出  $x$  張，也就是  $(20+x)$  張。則門票單價為  $(200-5x)$  元。

總價 = 門票數  $\times$  門票單價

$$4455 = (20+x)(200-5x)$$

$$4455 = 4000 + 100x - 5x^2$$

$$5x^2 - 100x + 455 = 0$$

$$x^2 - 20x + 91 = 0$$

$$(x-13)(x-7) = 0, \text{ 得 } x=13 \text{ 或 } x=7$$

因此小明可能買了 33 張或 27 張門票。

我們來驗算看看：

$x=13$ ，則門票共 33 張，單價為 135 元，總價為  $33 \times 135 = 4455$ ，符合題意。

$x=7$ ，則門票共 27 張，單價為 165 元，總價為  $27 \times 165 = 4455$ ，符合題意。

### 例題 7.5-12

已知三個連續整數的平方和為 302，試求此三個連續整數。

詳解：

令三個連續整數為  $x-1$ 、 $x$ 、 $x+1$

三個連續整數的平方和為 302：

$$(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = 302$$

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 + x^2 + 2x + 1 = 302$$

$$3x^2 + 2 - 302 = 0$$

$$3x^2 - 300 = 0$$

$$x^2 - 100 = 0$$

$$x^2 - 100 = 0$$

$$(x+10)(x-10) = 0$$

$$x = -10、10$$

若  $x = -10$ ，另外兩個整數為  $-9$ 、 $-11$ 。

若  $x = 10$ ，另外兩個整數為  $9$ 、 $11$ 。

此三個連續整數可能為  $-9$ 、 $-10$ 、 $-11$  或  $9$ 、 $10$ 、 $11$ 。

### 例題 7.5-13

若某一元二次方程式  $x^2 + bx + c = 0$  的兩根為 2 和  $-5$ ，試求  $b$ 、 $c$  之值。

詳解：

一元二次方程式的兩根為 2 和  $-5$ ，則此方程式可寫為：

$$(x-2)(x+5) = 0$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

與  $x^2 + bx + c = 0$  對照，可得  $b = 3$ 、 $c = -10$

### 例題 7.5-14

一元二次方程式  $(ax+b)(cx+d)=0$  的解為  $-2$  和  $3$ ，其中  $a>0$ 、 $c>0$ ，且  $\frac{b}{a}<0$ 、 $\frac{d}{c}>0$ ，試求  $\frac{b}{a}+\frac{d}{c}$  之值。

詳解：

$(ax+b)(cx+d)=0$  的解為  $-2$  和  $3$

$a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  的關係為下列兩種情形之一：

(1)  $a \times (-2) + b = 0$  或  $c \times (3) + d = 0$

(2)  $a \times (3) + b = 0$  或  $c \times (-2) + d = 0$

情形(1)：

$$a \times (-2) + b = 0 \rightarrow -2a + b = 0 \rightarrow b = 2a \rightarrow \frac{b}{a} = 2$$

與題目  $\frac{b}{a} < 0$  矛盾，可知正確的情形應為(2)

情形(2)：

$$a \times (3) + b = 0 \rightarrow 3a + b = 0 \rightarrow b = -3a \rightarrow \frac{b}{a} = -3$$

$$c \times (-2) + d = 0 \rightarrow -2c + d = 0 \rightarrow d = 2c \rightarrow \frac{d}{c} = 2$$

$$\frac{b}{a} + \frac{d}{c} = -3 + 2 = -1$$

### 例題 7.5-15

若  $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=99$ ，試求  $x^2+5x=?$

詳解：

題目求  $x^2+5x$ ，因為所求的  $x$  一次項係數為 5，我們也將方程式分組湊出  $x$  的一次項係數為 5 的式子。

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=99$$

$$[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]=99 \quad (1、4 \text{ 一組}, 2、3 \text{ 一組})$$

$$[x^2+5x+4][x^2+5x+6]=99$$

$$[A+4][A+6]=99 \quad (\text{令 } A=x^2+5x)$$

$$A^2+10A+24=99$$

$$A^2+10A+24-99=0$$

$$A^2+10A-75=0$$

$$(A+15)(A-5)=0$$

得  $A=-15$  或  $5$

即  $x^2+5x=-15$  或  $5$

驗算：

(1)  $x^2+5x=-15$  代入

$$[x^2+5x+4][x^2+5x+6]=(-15+4)(-15+6)=(-11)\times(-9)=99$$

與題意相合。

(2)  $x^2+5x=5$  代入

$$[x^2+5x+4][x^2+5x+6]=(5+4)(5+6)=9\times 11=99$$

與題意相合。

## 7.5 節 習題

### 習題 7.5-1

試求下列各情境中的  $x$  之值。

(1) 某長方形的長為  $(2x+5)$  公分，寬為  $2x$  公分，面積為 36 平方公分。

(2) 小美 買了  $(2x-3)$  顆蘋果，每顆蘋果售價都是  $x$  元，小美 共花了 35 元。

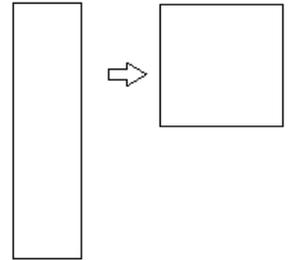
(3)  $(x+1)$  與  $(x-2)$  兩數的乘積為 10。

### 習題 7.5-2

有一三角形，底為  $(5x+3)$  公分，高為  $(x+7)$  公分，面積為 90 平方公分，試求其底。

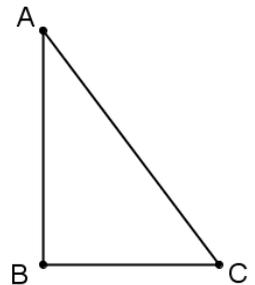
### 習題 7.5-3

如右圖，某長方形，其長為寬的 3 倍多 1 公分，若將其寬度變為 2 倍，長度減少 4 公分，則得新正方形，面積比原長方形面積多 6 平方公分，試求原長方形的寬。



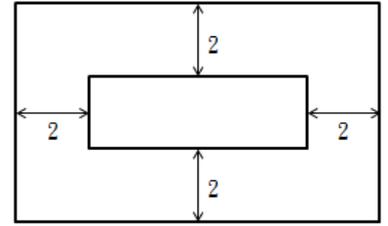
### 習題 7.5-4

如右圖，有三角形 ABC，其中 B 為直角。已知  $\overline{AB} = x+1$ 、 $\overline{BC} = 3$ 、 $\overline{CA} = x+2$ ，且直角三角形邊長有  $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$  的關係，試求三角形 ABC 之周長。



### 習題 7.5-5

如右圖，有一張長方形紙片，其長比寬多 4 公分。在紙片中間剪去了一塊小長方形，使剩餘紙片的四周寬度均為 2 公分。若原長方形紙片之長為  $x$  公分，試回答下列問題：



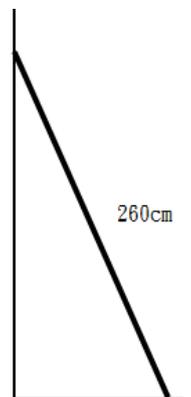
- (1) 原長方形的面積為何？(以  $x$  表示)
- (2) 剪去的小長方形面積為何？(以  $x$  表示)
- (3) 剪去小長方形後，剩餘的紙片面積為何？(以  $x$  表示)
- (4) 若剩餘紙片的面積，比剪去的小長方形紙片面積多 36 平方公分，試求原長方形紙片之長。

### 習題 7.5-6

若將一正方形的一邊減少 2 公分，另一邊變成原來的 3 倍，則所得新長方形的面積比原正方形的面積多 20 平方公分，求原正方形的邊長是多少公分？

### 習題 7.5-7

如右圖，有一長 260 公分的梯子靠在牆上，若牆腳到梯頂的距離比牆腳到梯腳的距離多 140 公分，試求牆腳到梯腳的距離。  
(牆與地面垂直，直角三角形斜邊平方等於兩股平方和)



### 習題 7.5-8

端午節媽媽包了若干顆粽子，每  $x$  顆綁成一捆，恰可綁成  $3x$  捆，若吃掉 4 捆後，還剩粽子 32 顆，請問媽媽總共包了幾顆粽子？

### 習題 7.5-9

一袋糖果分給  $x$  人，每人分得  $(5x+2)$  顆糖果且沒有剩下。若改為分給 10 人，則每人分得  $(x+2)$  顆，剩下 1 顆，請問這袋糖果共有幾顆？

### 習題 7.5-10

某游泳班預定招生 20 人，每人收費 300 元，但人數若少於 20 人，每減少 1 人，則每人要加收 10 元。已知該游泳班共收到 5040 元，請問共有多少人參加？

### 習題 7.5-11

已知三個連續整數的平方和為 77，試求此三個連續整數。

### 習題 7.5-12

若某一元二次方程式  $x^2 + bx + c = 0$  的兩根為 3 和 -5，試求  $b$ 、 $c$  之值。

例題 7.5-13

若  $(x+5)(x+4)(x+3)(x+2)=360$ ，試求  $x^2+7x=?$

## 第七章綜合習題

### 習題 1：

解下列一元二次方程式

(1)  $x^2 + 16x + 64 = 0$

(2)  $x^2 - 9 = 0$

(3)  $4x^2 - 5x + 1 = 0$

(4)  $4x^2 + 19x - 5 = 0$

(5)  $6x^2 + x - 1 = 0$

(6)  $2x(x+5) - 3(x+5) = 0$

(7)  $(x-3)(3x+4) = -5(3x+4)$

(8)  $\frac{5}{3}x^2 - \frac{8}{3}x - 7 = 0$

(9)  $(x+2)(x-6) = 9$

(10)  $(x+4)^2 = 9x^2$

### 習題 2：

利用配方法，解下列一元二次方程式

(1)  $x^2 + 2x - 7 = 0$

(2)  $x^2 - 8x + 3 = 0$

(3)  $4x^2 + \frac{13}{4} = 8x$

(4)  $\frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{12} = 0$

**習題 3：**

利用公式解，解下列一元二次方程式

(1)  $2x^2 + 8x + 3 = 0$

(2)  $5x^2 - 4x - 3 = 0$

(3)  $(x+2)(2x+5) = 15$

(4)  $\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{2} = 0$

**習題 4：**

若  $\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$  為方程式  $(2x+a)^2 = b$  的解，則  $a-b = ?$

**習題 5：**

若  $x = -1$  是方程式  $x^2 - 3x + k = 0$  的解，求  $k$  值及方程式的另一根。

**習題 6：**

若方程式  $2x^2 - 8x - 5 = 0$  與  $(x-2)^2 = m$  有相同的解，則  $m = ?$

**習題 7：**

若方程式  $x^2 - 6x + k = 0$  無解，則  $k$  的範圍為何？

**習題 8：**

設  $x^2 - x - 1 = 0$  的兩根為  $a$ 、 $b$ ，則  $|a| + |b| = ?$

**習題 9：**

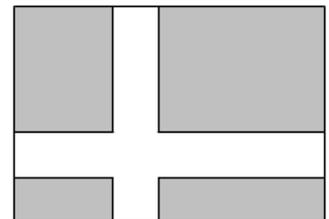
有一三角形的底是  $(3x+5)$  公分，高是  $(2x-5)$  公分，且其面積是 7 平方公分，則底是多少公分？

**習題 10：**

若將一正方形的一邊減少 2 公分，另一邊變成原來的 3 倍，則所得新長方形的面積比原正方形的面積多 20 平方公分，求原正方形的邊長是多少公分？

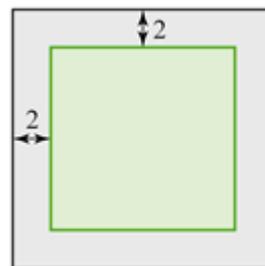
**習題 11：**

如右圖，在長 20 公尺、寬 14 公尺的長方形草地內部開闢一條等寬的十字形道路，已知道路與草地的長寬平行，若剩下的草地面積為 187 平方公尺，則十字形道路的寬應是多少公尺？



**習題 12：**

如右圖，沿著正方形菜園的四周鋪上一條寬 2 公尺的道路，若菜園面積與道路面積相等，問菜園的邊長為多少？



**習題 13：**

某補習班預定招收 30 名學生，每人收費 1000 元，但人數若少於 30 人，則每減少 1 人，每人要加收 50 元。已知該補習班共收到 31200 元，請問共招收多少名學生？

**習題 14：**

已知  $x^2 - 2x - 2 = 0$ ，則  $(x-1)^2 = ?$

**習題 15：**

設  $(2x+3)^2 - 18 = 0$  的兩根為  $a$ 、 $b$ ，且  $a < b$ ，則  $a - b = ?$

## 基測與會考模擬試題

( ) 1. 如下列何者可為方程式  $91x^2 - 53x + 6 = 0$  的解？【90(一)基測】

- (A)  $-\frac{2}{7}$     (B)  $-\frac{2}{13}$     (C)  $\frac{2}{13}$     (D)  $\frac{3}{13}$

( ) 2. 如圖，有一個數學遊戲如下，由左方入口進入，按框框內的指示判斷正確的路徑，則最後到達哪一個地方？【90(一)基測】



- (A) 甲    (B) 乙    (C) 丙    (D) 丁

( ) 3. 如  $x=2$  不是 下列哪一個方程式的解？【93(一)基測】

- (A)  $3(x-2)=0$     (B)  $2x^2 - 3x = 2$     (C)  $(x-2)(x+2)=0$   
(D)  $x^2 - x + 2 = 0$

( ) 4. 如  $a$ 、 $b$  為方程式  $x(3x+7)=0$  的兩根，且  $a > b$ ，則  $b-a = ?$  【94(一)基測】

- (A)  $\frac{7}{3}$     (B)  $\frac{3}{7}$     (C)  $-\frac{7}{3}$     (D)  $-\frac{3}{7}$

( ) 5. 已知方程式  $x^2 - 5625 = 0$  的兩根為  $\pm 75$ ，則下列何者可為方程式  $x^2 + 6x - 5616 = 0$  的解？【95(二)基測】

- (A)  $x=69$     (B)  $x=72$     (C)  $x=77$     (D)  $x=81$

( ) 6. 將一元二次方程式  $x^2 - 6x - 5 = 0$  化成  $(x+a)^2 = b$  的型式，則  $b = ?$  【96(一)基測】

- (A)  $-4$     (B)  $4$     (C)  $-14$     (D)  $14$

( ) 7. 用配方法將  $y = -2x^2 + 12x + 1$  化成  $y = -2(x+h)^2 + k$  的形式，求  $h+k = ?$  【98(二)基測】

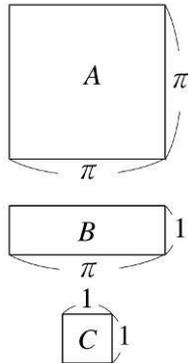
- (A)  $16$     (B)  $21$     (C)  $-20$     (D)  $-14$

- ( ) 8. 若  $a$  為方程式  $(x-\sqrt{17})^2=100$  的一根， $b$  為方程式  $(y-4)^2=17$  的一根，且  $a$ 、 $b$  都是正數，則  $a-b$  之值為何？【99(一)基測】  
 (A) 5 (B) 6 (C)  $\sqrt{83}$  (D)  $10-\sqrt{17}$
- ( ) 9. 關於方程式  $88(x-2)^2=95$  的兩根，下列判斷何者正確？【100(一)基測】  
 (A) 一根小於 1，另一根大於 3 (B) 一根小於 -2，另一根大於 2  
 (C) 兩根都小於 0 (D) 兩根都大於 2
- ( ) 10. 用配方法將  $y=-2x^2+4x+6$  化成  $y=a(x+h)^2+k$  的形式，求  $a+h+k$  之值為何？【100(二)基測】  
 (A) 5 (B) 7 (C) -1 (D) -2
- ( ) 11. 小傑用長為  $x$  公分的竹筷去量一張長方形的紙，發現紙的長度比竹筷的兩倍長少 1 公分，寬比竹筷長多 2 公分。已知紙的面積為 3000 平方公分，依題意下列哪一個一元二次方程式是正確的？【90(二)基測】  
 (A)  $(x-2)(2x+1)=3000$  (B)  $(x+2)(2x-1)+3000=0$   
 (C)  $2x^2-3x=3002$  (D)  $2x^2+3x-3002=0$
- ( ) 12. 對於方程式  $(2x+5)(x+1)=(3x-2)(x+1)$  根的敘述，下列何者正確？【91(一)基測】  
 (A) 方程式只有一根，而且這個根是正數  
 (B) 方程式有兩根，而且兩根的正、負號相同  
 (C) 方程式一根為正數，一根為負數  
 (D) 方程式無解
- ( ) 13. 小風想利用一個遊戲的方法問出兩位朋友的年齡。他說：「將你的年齡，先減 5，再平方，最後加上 25。所出現的數字將會是你今天的幸運數字喔！」阿珠說：「我是 89 耶！」阿花說：「我的是 146！」若阿珠的年齡是  $a$ ，阿花的年齡是  $b$ ，則  $a+b$  的值會落在下列哪一個範圍內？【91(二)基測】  
 (A)  $18 \leq a+b < 21$  (B)  $21 \leq a+b < 24$   
 (C)  $24 \leq a+b < 27$  (D)  $27 \leq a+b < 30$
- ( ) 14. 樂樂以配方法解  $2x^2-bx+a=0$ ，可得  $x-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$ 。求  $a=?$ 【91(二)基測】  
 (A) -6 (B) -3 (C) 6 (D) 3

- ( ) 15. 下列有關 $\sqrt{10}$ 的敘述，何者不正確？【92(一)基測】  
 (A)  $\sqrt{10}$ 是方程式 $x^2=10$ 的一個解  
 (B)在數線上可以找到坐標為 $\sqrt{10}$ 的點  
 (C)  $\sqrt{10}=2\sqrt{5}$   
 (D)  $\sqrt{10}<4$
- ( ) 16. 若一元二次方程式 $x^2-2x-323=0$ 的兩根為 $a$ 、 $b$ ，且 $a>b$ ，則 $2a+b=?$   
 【92(二)基測】  
 (A)  $-53$  (B)  $15$  (C)  $55$  (D)  $21$
- ( ) 17. 利用配方法將 $4x^2+8x+a$ 化成 $b(x+c)^2+3$ 的形式，則 $a+b+c=?$ 【93(二)基測】  
 (A)  $9$  (B)  $12$  (C)  $13$  (D)  $25$
- ( ) 18. 已知 $x^2-6x+b=0$ 可配方成 $(x-a)^2=7$ 的型式、請問 $x^2-6x+b=2$ 可配方成下列何種型式？【94(二)基測】  
 (A)  $(x-a)^2=5$  (B)  $(x-a)^2=9$   
 (C)  $(x-a+2)^2=9$  (D)  $(x-a+2)^2=5$
- ( ) 19. 下列哪一個選項為方程式 $4x^2-16x+15=0$ 的兩根？【95(一)基測】  
 (A)  $\frac{3}{2}$ 、 $\frac{5}{2}$  (B)  $\frac{3}{2}$ 、 $-\frac{5}{2}$  (C)  $-\frac{3}{2}$ 、 $\frac{5}{2}$  (D)  $-\frac{3}{2}$ 、 $-\frac{5}{2}$
- ( ) 20. 若 $a$ 、 $b$ 為方程式 $(x-29)^2=247$ 的兩根，則下列敘述何者正確？【95(一)基測】  
 (A)  $a$ 為 $247$ 的平方根 (B)  $a+b$ 為 $247$ 的平方根  
 (C)  $a+29$ 為 $247$ 的平方根 (D)  $29-b$ 為 $247$ 的平方根
- ( ) 21. 已知方程式 $(\frac{x}{3}-1)(x+2)=0$ 的兩根為 $a$ 、 $b$ ，其中 $a>b$ ，則下列哪一個選項是正確的？【95(一)基測】  
 (A)  $3a=-6$  (B)  $2b=6$  (C)  $a+b=1$  (D)  $a-b=-1$

- ( ) 22. 下列何者為一元二次方程式  $(2x+3)(x+1)=(x+1)(x+3)$  的解？【96(一)基測】  
 (A)  $x=0$  或  $x=-1$  (B)  $x=-1$  或  $x=-3$   
 (C)  $x=-\frac{3}{2}$  或  $x=-1$  (D)  $x=-3$  或  $x=-\frac{3}{2}$  或  $x=-1$
- ( ) 23. 關於方程式  $49x^2-98x-1=0$  的解，下列敘述何者正確？【97(一)基測】  
 (A)無解 (B)有兩正根 (C)有兩負根 (D)有一正根及一負根
- ( ) 24. 若  $\alpha$ 、 $\beta$  為方程式  $\frac{(x+3)(x-5)}{7}=\frac{x(x-2)}{8}$  的兩根，且  $\alpha>\beta$ ，則  $\alpha+2\beta=?$  【97(二)基測】  
 (A) 5 (B) 10 (C) -6 (D) -8
- ( ) 25. 若  $a$ 、 $b$  為方程式  $x^2-4(x+1)=1$  的兩根，且  $a>b$ ，則  $\frac{a}{b}=?$  【98(一)基測】  
 (A) -5 (B) -4 (C) 1 (D) 3
- ( ) 26. 已知一元二次方程式  $x^2+ax-16=0$  的兩根均為整數， $a>0$  且  $a$  為二位數，求  $a$  的個位數字與十位數字相差為何？【98(二)基測】  
 (A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) 6
- ( ) 27. 若一元二次方程式  $ax(x+1)+(x+1)(x+2)+bx(x+2)=2$  的兩根為 0、2，則  $|3a+4b|$  之值為何？【100 北北基】  
 (A) 2 (B) 5 (C) 7 (D) 8
- ( ) 28. 若方程式  $(3x-c)^2-60=0$  的兩根均為正數，其中  $c$  為整數，則  $c$  的最小值為何？【100(二)基測】  
 (A) 1 (B) 8 (C) 16 (D) 61
- ( ) 29. 若一元二次方程式  $x^2-2x-3599=0$  的兩根為  $a$ 、 $b$ ，且  $a>b$ ，則  $2a-b$  之值為何？【101 基測】  
 (A) -57 (B) 63 (C) 179 (D) 181
- ( ) 30. 若一元二次方程式  $a(x-b)^2=7$  的兩根為  $\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{7}$ ，其中  $a$ 、 $b$  為兩數，則  $a+b$  之值為何？【102 基測】  
 (A)  $\frac{5}{2}$  (B)  $\frac{9}{2}$  (C) 3 (D) 5

- ( ) 31. 如圖，有  $A$  型、 $B$  型、 $C$  型三種不同的紙板，其  $A$  型：邊長為  $\pi$  公分( $\pi$  為圓周率)的正方形，共有 7 塊； $B$  型：長為  $\pi$  公分，寬為 1 公分的長方形，共有 17 塊； $C$  型：邊長為 1 公分的正方形，共有 12 塊。從這 36 塊紙板中，拿掉一塊紙板，使得剩下的紙板在不重疊的情況下，可以緊密的排出一個大長方形，請問拿掉的是哪一種紙板？【91(二)基測】



- (A)  $A$  型 (B)  $B$  型 (C)  $C$  型 (D) 完全不用拿掉，就可排出一個大長方形

- ( ) 32. 已知  $a$ 、 $b$  為方程式  $(\frac{2}{5}x+1)^2 = 680$  的兩根，且  $a > b$ ，利用下表，求  $\frac{2}{5}a - \frac{2}{5}b$  之值最接近下列哪一數？【94(二)基測】

$N$	$\sqrt{N}$	$\sqrt{10N}$
2	1.414	4.472
5	2.236	7.071
34	5.831	18.439
68	8.246	26.077

- (A) 0 (B) 2 (C) 37 (D) 52
- ( ) 33. 若  $b$  為正數且方程式  $x^2 - x - b = 0$  的兩根均為整數，則  $b$  可能為下列哪一數？【96(二)基測】
- (A)  $2 \times 3 \times 5 \times 11$  (B)  $2 \times 3 \times 7 \times 11$  (C)  $2 \times 5 \times 7 \times 11$  (D)  $3 \times 5 \times 7 \times 11$

# 習題解答

## 7.1 練習解答

### 練習 7.1-3

$$a = 6$$

### 練習 7.1-4

$$(1) x = 0 \text{ 或 } x = 7 \quad (2) x = -5 \text{ 或 } x = 6$$

$$(3) x = 1 \text{ 或 } x = -\frac{2}{3} \quad (4) x = -3 \text{ (重根)}$$

### 練習 7.1-5

$$a = 3$$

## 7.1 習題解答

$$7.1-1 \quad (1) 2x(2x+5) = 36$$

$$(2) x(2x-3) = 35$$

$$(3) (x+1)(x-2) = 10$$

$$7.1-2 \quad (1) \text{等式成立} \quad (2) \text{等式成立}$$

$$7.1-3 \quad a = -6$$

$$7.1-4 \quad (1) x = 0 \text{ 或 } x = 3$$

$$(2) x = 3 \text{ 或 } x = -5$$

$$(3) x = -1 \text{ 或 } x = -\frac{1}{5}$$

$$(4) x = 5 \text{ (重根)}$$

$$7.1-5 \quad a = 1$$

## 7.2 練習解答

### 練習 7.2-1

$$(1) x = 0 \text{ 或 } x = 5 \quad (2) x = -4 \text{ 或 } x = -2$$

### 練習 7.2-2

$$(1) x = -4 \text{ 或 } x = -5 \quad (2) x = 1 \text{ 或 } x = -8$$

### 練習 7.2-3

$$(1) x = 3 \text{ 或 } x = -3 \quad (2) x = 1 \text{ 或 } x = -2$$

### 練習 7.2-4

$$(1) x = -2 \text{ (重根)} \quad (2) x = 5 \text{ (重根)}$$

### 練習 7.2-5

$$(1) x = 4 \text{ 或 } x = 2 \quad (2) x = 1 \text{ 或 } x = -7$$

## 練習 7.2-6

$$(1) x = \frac{4}{3} \text{ 或 } x = -2 \quad (2) x = 6 \text{ 或 } x = -7$$

## 練習 7.2-7

$$(1) x = 5 \text{ (重根)} \quad (2) x = 5 \text{ 或 } x = -1$$

## 練習 7.2-8

$$(1) x = b \text{ (重根)} \quad (2) x = -\frac{1}{a} \text{ 或 } x = -\frac{c}{b}$$

## 練習 7.2-9

$$x = 4 \text{ 或 } x = -3$$

## 7.2 習題解答

$$7.2-1 \quad (1) x = 0 \text{ 或 } x = -8 \quad (2) x = 0 \text{ 或 } x = 3$$

$$7.2-2 \quad (1) x = \frac{5}{4} \text{ 或 } x = 6 \quad (2) x = -5 \text{ 或 } x = 2$$

$$7.2-3 \quad (1) x = 5 \text{ 或 } x = -5 \quad (2) x = \frac{3}{5} \text{ 或 } x = -1$$

$$7.2-4 \quad (1) x = 4 \text{ (重根)} \quad (2) x = -6 \text{ (重根)}$$

$$7.2-5 \quad (1) x = -2 \text{ 或 } x = -3 \quad (2) x = 1 \text{ 或 } x = -3$$

$$7.2-6 \quad (1) x = \frac{1}{3} \text{ 或 } x = 4 \quad (2) x = -5 \text{ 或 } x = 1$$

$$7.2-7 \quad (1) x = 3 \text{ (重根)} \quad (2) x = 4 \text{ 或 } x = -4$$

$$7.2-8 \quad (1) x = a \text{ 或 } x = -b \quad (2) x = \frac{1}{a} \text{ (重根)}$$

$$7.2-9 \quad x = 6 \text{ 或 } x = -4$$

## 7.3 練習解答

### 練習 7.3-1

$$(1) x = \pm 9 \quad (2) x = \pm 4$$

$$(3) x = -3 \pm \sqrt{7}$$

### 練習 7.3-2

$$(1) \square = 1, (x-1)^2 \quad (2) \square = 49, (x+7)^2$$

$$(3) \square = \frac{25}{4}, (x-\frac{5}{2})^2 \quad (4) \square = \frac{4}{49}, (x-\frac{2}{7})^2$$

### 練習 7.3-3

$$(1) x = 3 \pm 3\sqrt{2} \quad (2) x = 2 \pm \sqrt{11}$$

$$(3) x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \quad (4) x = \frac{-5 \pm \sqrt{57}}{2}$$

### 練習 7.3-4

$$(1) x = \frac{-7 \pm \sqrt{37}}{2} \quad (2) x = \frac{3 \pm \sqrt{23}}{2}$$

$$(3) x = \frac{-7 \pm \sqrt{89}}{10} \quad (4) x = \frac{9 \pm \sqrt{105}}{6}$$

### 練習 7.3-5

$$(1) x = 17 \text{ 或 } x = -15 \quad (2) x = 18 \text{ 或 } x = -12$$

$$(3) x = 17 \text{ 或 } x = -13 \quad (4) x = 23 \text{ 或 } x = -15$$

### 練習 7.3-6

29

### 練習 7.3-7

19

### 練習 7.3-8

$$a = 64, b = 8$$

### 練習 7.3-9

8

### 7.3 習題解答

$$7.3-1 \quad (1) x = \pm 5 \quad (2) x = \pm 1$$

$$(3) x = 2 \pm \sqrt{5}$$

$$7.3-2 \quad (1) \square = 9, (x+3)^2$$

$$(2) \square = 16, (x-4)^2$$

$$(3) \square = \frac{9}{4}, (x + \frac{3}{2})^2$$

$$(4) \square = \frac{1}{25}, (x - \frac{1}{5})^2$$

$$7.3-3 \quad (1) x = 5 \pm 3\sqrt{3} \quad (2) x = -1 \pm \sqrt{6}$$

$$(3) x = \frac{-7 \pm \sqrt{53}}{2} \quad (4) x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$7.3-4 \quad (1) x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2} \quad (2) x = \frac{-2 \pm \sqrt{10}}{2}$$

$$(3) x = \frac{1}{2} \text{ 或 } x = -3 \quad (4) x = \frac{-15 \pm \sqrt{57}}{6}$$

$$7.3-5 \quad (1) x = 11 \text{ 或 } x = 17$$

$$(2) x = 13 \text{ 或 } x = -15$$

$$(3) x = 17 \text{ 或 } x = -19$$

$$(4) x = 25 \text{ 或 } x = -15$$

$$7.3-6 \quad 40$$

$$7.3-7 \quad -12$$

$$7.3-8 \quad a = 4, b = 2$$

$$7.3-9 \quad 3$$

### 7.4 練習解答

#### 練習 7.4.1-1

(1) 兩相異解

(2) 重根

(3) 無解

(4) 兩相異解

#### 練習 7.4.1-2

(1) 兩相異解

(2) 無解

(3) 重根

(4) 無解

#### 練習 7.4.1-3

$$a > \frac{1}{4}$$

#### 練習 7.4.1-4

$$b = \pm 8$$

#### 練習 7.4.2-1

$$(1) x = 15 \text{ 或 } x = -2$$

$$(2) x = 15 \text{ 或 } x = -4$$

$$(3) x = 4 \pm \sqrt{2}$$

$$(4) x = \frac{-3 \pm \sqrt{69}}{2}$$

#### 練習 7.4.2-2

$$(1) x = -\frac{3}{4} \text{ 或 } x = \frac{5}{2}$$

$$(2) x = -\frac{1}{5} \text{ 或 } x = 6$$

$$(3) x = 2 \text{ 或 } x = -4$$

$$(4) x = \frac{-1 \pm \sqrt{241}}{6}$$

#### 練習 7.4.2-3

$$(1) x = 8 \text{ (重根)}$$

$$(2) x = 1 \text{ (重根)}$$

### 練習 7.4.2-4

$$(1) x = -2 \pm 2\sqrt{3} \quad (2) x = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$$

### 7.4 習題解答

7.4-1 (1) 兩相異解 (2) 無解

(3) 重根 (4) 重根

7.4-2 (1) 兩相異解 (2) 重根

(3) 無解 (4) 無解

7.4-3  $a > -\frac{9}{16}$

7.4-4  $b = \pm 6$

7.4-5 (1)  $x = 6$  或  $x = -3$  (2)  $x = 15$  或  $x = 4$

(3)  $x = \frac{-5 \pm \sqrt{65}}{2}$  (4)  $x = -4 \pm \sqrt{13}$

7.4-6 (1)  $x = -\frac{2}{3}$  或  $x = -\frac{1}{2}$

(2)  $x = \frac{1}{5}$  或  $x = -2$

(3)  $x = 3$  或  $x = -4$

(4)  $x = \frac{1}{3}$  或  $x = \frac{3}{4}$

7.4-7 (1)  $x = -11$  (重根) (2)  $x = 2$  (重根)

7.4-8 (1)  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$  (2)  $x = \frac{-7 \pm \sqrt{29}}{2}$

### 7.5 習題解答

7.5-1 答：

(1)  $x = 2$  (2)  $x = 5$

(3)  $x = 4$  或  $x = -3$

7.5-2 答：底為 18 公分

7.5-3 答：長方形寬 3 公分

7.5-4 答：12 單位

7.5-5 答：

(1)  $x^2 - 4x$  平方公分

(2)  $x^2 - 12x + 32$  平方公分

(3)  $8x - 32$  平方公分

(4) 10 公分

7.5-6 答：5 公分

7.5-7 答：100 公分

7.5-8 答：48 顆

7.5-9 答：51 顆

7.5-10 答：14 人

7.5-11 答：4、5、6 或 -6、-5、-4

7.5-12 答： $b = 2$ 、 $c = -15$

7.5-13 答：8 或 -30

### 第七章綜合習題

1. 答：

(1)  $x = -8$  (重根)

(2)  $x = \pm 3$

(3)  $x = \frac{1}{4}$  或  $x = 1$

(4)  $x = \frac{1}{4}$  或  $x = -5$

(5)  $x = -\frac{1}{2}$  或  $x = \frac{1}{3}$

(6)  $x = -5$  或  $x = \frac{3}{2}$

(7)  $x = -\frac{4}{3}$  或  $x = -2$

(8)  $x = -\frac{7}{5}$  或  $x = 3$

(9)  $x = 7$  或  $x = -3$

(10)  $x = -1$  或  $x = 2$

2. 答：

(1)  $x = -1 \pm 2\sqrt{2}$

(2)  $x = 4 \pm \sqrt{13}$

(3)  $x = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{4}$

(4)  $x = \frac{4 \pm \sqrt{19}}{3}$

3. 答：

$$(1) x = \frac{-4 \pm \sqrt{10}}{2}$$

$$(2) x = \frac{2 \pm \sqrt{19}}{5}$$

$$(3) x = -5 \text{ 或 } x = \frac{1}{2}$$

$$(4) x = \frac{-2 \pm \sqrt{31}}{9}$$

4. 答：-4

5. 答： $k = -4$ ，另一根  $x = 4$

$$6. \text{ 答： } m = \frac{13}{2}$$

7. 答： $k > 9$

8. 答： $\sqrt{5}$

9. 答：14 公分

10. 答：設原正方形邊長為  $x$ ，則新長方形的兩邊長分別為  $3x$ 、 $x-2$

新長方形的面積比原正方形多 20

$$3x(x-2) - x^2 = 20$$

$$(x-5)(x+2) = 0$$

$$x = 5 \text{ 或 } x = -2 \text{ (負不合)}$$

正方形邊長為 5 公分

11. 答：設十字形道路的寬為  $x$  公尺，扣除道路寬度後草地面積為長  $20-x$ 、寬  $14-x$  的長方形

$$(20-x)(14-x) = 187$$

$$280 - 34x + x^2 = 187$$

$$(x-3)(x-31) = 0$$

$$x = 3 \text{ 或 } x = 31 \text{ (超過原長方形的長，不合)}$$

十字形道路的寬為 3 公尺

12. 答：設正方形菜園的邊長為  $x$ ，四周鋪上寬 2

公尺的道路後成一邊長  $x+4$  的大正方形。且菜園面積與道路面積相等

道路面積 = 大正方形面積 - 菜園面積

$$x^2 = (x+4)^2 - x^2$$

$$x^2 - 8x - 16 = 0$$

$$x = 4 + 4\sqrt{2} \text{ 或 } x = 4 - 4\sqrt{2} \text{ (負不合)}$$

菜園邊長為  $4 + 4\sqrt{2}$  公尺

13. 答：設補習班人數比 30 少  $x$  人，所以學生有  $30-x$  人，且每位學生須繳交

1000 + 50 $x$  元

$$(1000 + 50x)(30 - x) = 31200$$

$$x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$(x-4)(x-6) = 0$$

$$x = 4 \text{ 或 } x = 6$$

所以學生有  $30-4 = 26$  人

或  $30-6 = 24$  人

14. 答：3

15. 答： $-3\sqrt{2}$

## 基測與會考模擬試題解答

### 1. 《答案》(C)

詳解： $91x^2 - 53x + 6 = 0 \rightarrow (13x - 2)(7x - 3) = 0$ ， $x = \frac{2}{13}$  或  $x = \frac{3}{7}$

### 2. 《答案》(A)

詳解： $2x(x+2) = 5x+7 \rightarrow 2x^2 - x - 7 = 0$  僅有一未知數  $x$  且為 2 次方，故為一元二次方程式；  
 $4x+3y=7$  有二未知數  $x$ 、 $y$  且皆為 1 次方，故為二元一次方程式

### 3. 《答案》(D)

詳解：(A)  $3(x-2) = 0 \rightarrow x = 2$

(B)  $2x^2 - 3x = 2 \rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \rightarrow (2x+1)(x-2) = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$  或  $x = 2$

(C)  $(x-2)(x+2) = 0 \rightarrow x = 2$  或  $x = -2$

(D)  $x^2 - x + 2 = 0 \rightarrow$  判別式  $b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0 \rightarrow$  無解

### 4. 《答案》(C)

詳解： $a$ 、 $b$  為  $x(3x+7)=0$  的兩根且  $a > b$ ，解方程式  $x=0$  或  $x = -\frac{7}{3} \rightarrow a=0$ 、 $b = -\frac{7}{3}$ ，所以

$$b - a = -\frac{7}{3} - 0 = -\frac{7}{3}$$

### 5. 《答案》(B)

詳解： $x^2 + 6x - 5616 = 0 \rightarrow x^2 + 6x = 5616 \rightarrow$  利用配方法可得  $x^2 + 6x + 3^2 = 5616 + 3^2$   
 $\rightarrow (x+3)^2 = 5625 \rightarrow$  由題目可得  $x+3 = \pm 75 \rightarrow x = -3 + 75$  或  $x = -3 - 75$   
 $\rightarrow x = 72$  或  $x = -78$

### 6. 《答案》(D)

詳解：將  $x^2 - 6x - 5 = 0$  化成  $(x+a)^2 = b \rightarrow x^2 - 6x + 9 = 5 + 9 \rightarrow (x-3)^2 = 14 \rightarrow b = 14$

### 7. 《答案》(A)

詳解：用配方法將  $y = -2x^2 + 12x + 1$  化成  $y = -2(x+h)^2 + k \rightarrow y = -2(x^2 - 6x + 9) + 18 + 1$   
 $y = -2(x-3)^2 + 19 \rightarrow h = -3$ 、 $k = 19 \rightarrow h+k = -3+19 = 16$

### 8. 《答案》(B)

詳解： $a$  為  $(x - \sqrt{17})^2 = 100$  的一根、 $b$  為  $(y-4)^2 = 17$  的一根，且  $a$ 、 $b$  都是正數  
解方程式  $(x - \sqrt{17})^2 = 100 \rightarrow x = \sqrt{17} \pm 10$  ( $4 < \sqrt{17} < 5$ ， $\sqrt{17} - 10 < 0$ )  $\rightarrow a = \sqrt{17} + 10$   
解方程式  $(y-4)^2 = 17 \rightarrow y = 4 \pm \sqrt{17}$  ( $4 < \sqrt{17} < 5$ ， $4 - \sqrt{17} < 0$ )  $\rightarrow b = 4 + \sqrt{17}$   
 $a - b = \sqrt{17} + 10 - (4 + \sqrt{17}) = 6$

9. 《答案》(A)

詳解：解方程式  $88(x-2)^2 = 95 \rightarrow x = 2 \pm \sqrt{\frac{95}{88}}$  ( $1 < \sqrt{\frac{95}{88}} < 2$ )  
 $\rightarrow x = 2 - \sqrt{\frac{95}{88}} < 1$  或  $x = 2 + \sqrt{\frac{95}{88}} > 3$

10. 《答案》(A)

詳解：用配方法將  $y = -2x^2 + 4x + 6$  化成  $y = a(x+h)^2 + k \rightarrow y = -2(x^2 - 2x + 1) + 2 + 6$   
 $y = -2(x-1)^2 + 8 \rightarrow a = -2, h = -1, k = 8 \rightarrow a+h+k = -2+(-1)+8 = 5$

11. 《答案》(D)

詳解：竹筴長為  $x$  公分，長方形紙長度為  $2x-1$ 、寬度為  $x+2$ ，面積為 3000 平方公分  
 面積 = 長  $\times$  寬， $(2x-1) \times (x+2) = 3000 \rightarrow 2x^2 + 3x - 3002 = 0$

12. 《答案》(C)

詳解：解方程式  $(2x+5)(x+1) = (3x-2)(x+1) \rightarrow 2x^2 + 7x + 5 = 3x^2 + x - 2 \rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0$   
 $(x-7)(x+1) = 0 \rightarrow x = 7$  或  $x = -1 \rightarrow$  根為一正數、一負數

13. 《答案》(D)

詳解：依題意將年齡先減 5，再平方，最後加上 25，所出現的數字為幸運數字  
 阿珠年齡  $a \rightarrow (a-5)^2 + 25 = 89 \rightarrow (a-5)^2 = 64 \rightarrow a-5 = \pm 8 \rightarrow a = 13$  或  $a = -3$  (年齡不為負)  
 阿花年齡  $b \rightarrow (b-5)^2 + 25 = 146 \rightarrow (b-5)^2 = 121 \rightarrow b-5 = \pm 11 \rightarrow a = 16$  或  $a = -6$  (年齡不為負)  
 $a+b = 13+16 = 29$  會落在  $27 \leq a+b < 30$

14. 《答案》(B)

詳解：以配方法解  $2x^2 - bx + a = 0$ ，可得  $x - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{15}}{2} \rightarrow$  兩邊同時平方  $(x - \frac{3}{2})^2 = \frac{15}{4}$   
 $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{15}{4} \rightarrow$  同乘 2， $2x^2 - 6x + \frac{9}{2} = \frac{15}{2} \rightarrow 2x^2 - 6x - 3 = 0 \rightarrow a = -3$

15. 《答案》(C)

詳解：(A) 解  $x^2 = 10$  得  $x = \pm\sqrt{10}$   
 (B) 由畢氏定理知，繪出直角三角形，其斜邊即可得  $\sqrt{10}$  的長度(例：兩股為 1、3 的直角三角形，其斜邊長即為  $\sqrt{10}$ )  
 (C)  $\sqrt{10}$  為最簡根式不可化簡， $2\sqrt{5} = \sqrt{20}$ ， $\sqrt{10} = 2\sqrt{5}$  是不正確的  
 (D)  $\sqrt{10} < \sqrt{16} = 4$

16. 《答案》(D)

詳解： $a, b$  為  $x^2 - 2x - 323 = 0$  的兩根且  $a > b$ ，解方程式  $(x-19)(x+17) = 0$ ， $x = 19$  或  $x = -17 \rightarrow$   
 $a = 19, b = -17$ ，所以  $2a+b = 2 \times 19 + (-17) = 21$

17. 《答案》(B)

詳解： 利用配方法  $4x^2 + 8x + a = 4(x^2 + 2x + 1) + a - 4 = 4(x+1)^2 + a - 4 = b(x+c)^2 + 3$   
 $b=4$ 、 $c=1$ 、 $a-4=3 \rightarrow a=7 \rightarrow a+b+c=7+4+1=12$

18. 《答案》(B)

詳解：  $x^2 - 6x + b = 0$  可配方成  $(x-a)^2 = 7 \rightarrow x^2 - 2ax + a^2 - 7 = 0 \rightarrow 2a=6 \rightarrow a=3$ 、  
 $b = a^2 - 7 = 2$   
 $x^2 - 6x + 2 = 2 \rightarrow x^2 - 6x + 9 = 9 \rightarrow (x-3)^2 = 9$

19. 《答案》(A)

詳解：  $4x^2 - 16x + 15 = (2x-5)(2x-3) = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}$  或  $x = \frac{3}{2}$

20. 《答案》(D)

詳解：  $a$ 、 $b$  為  $(x-29)^2 = 247$  的兩根  $\rightarrow a-29$ 、 $b-29$  為 247 的平方根  
 $(29-x)^2 = 247 \rightarrow 29-a$ 、 $29-b$  為 247 的平方根

21. 《答案》(C)

詳解： 方程式  $(\frac{x}{3}-1)(x+2) = 0$  的兩根為  $a$ 、 $b$ ，其中  $a > b \rightarrow a=3$ 、 $b=-2$   
(A)  $3a=9 \neq -6$  (B)  $2b=-4 \neq 6$  (C)  $a+b=3+(-2)=1$  (D)  $a-b=3-(-2)=5 \neq -1$

22. 《答案》(A)

詳解： 解方程式  $(2x+3)(x+1) = (x+1)(x+3) \rightarrow (x+1)[(2x+3)-(x+3)] = 0 \rightarrow x(x+1) = 0$   
 $\rightarrow x=0$  或  $x=-1$

23. 《答案》(D)

詳解： 解方程式  $49x^2 - 98x - 1 = 0 \rightarrow$  先化簡為  $x^2 - 2x - \frac{1}{49} = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 1 + \frac{1}{49}$   
 $(x-1)^2 = \frac{50}{49} \rightarrow x = 1 \pm \frac{5\sqrt{2}}{7}$  (得知有一正根及一負根)

24. 《答案》(D)

詳解： 方程式  $\frac{(x+3)(x-5)}{7} = \frac{x(x-2)}{8}$  有  $\alpha$ 、 $\beta$  兩根，且  $\alpha > \beta$ ，解此方程式  
 $8(x+3)(x-5) = 7x(x-2) \rightarrow 8x^2 - 16x - 120 = 7x^2 - 14x \rightarrow x^2 - 2x - 120 = 0 \rightarrow$   
 $(x-12)(x+10) = 0 \rightarrow x=12 = \alpha$  或  $x=-10 = \beta \rightarrow \alpha + 2\beta = 12 + 2 \times (-10) = -8$

25. 《答案》(A)

詳解： 方程式  $x^2 - 4(x+1) = 1$  的兩根為  $a$ 、 $b$ ，且  $a > b \rightarrow$  解此方程式  $x^2 - 4x + (-4) - 1 = 0$   
 $\rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow (x-5)(x+1) = 0 \rightarrow x=5 = a$  或  $x=-1 = b \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{-1} = -5$

26. 《答案》(C)

詳解：  $x^2 + ax - 16 = 0$  的兩根均為整數，依此有以下分解方式

$$x^2 + ax - 16 = (x+1)(x-16) \cdot (x-1)(x+16) \cdot (x+2)(x-8) \cdot (x-2)(x+8) \cdot (x+4)(x-4)$$

所以  $a$  可能為  $-15$ 、 $15$ 、 $-6$ 、 $6$ 、 $0$ ，又依題意  $a > 0$  且為二位數，僅有  $15$  符合，故其個位數字與十位數字的差為  $5 - 1 = 4$

27. 《答案》(B)

詳解：  $ax(x+1) + (x+1)(x+2) + bx(x+2) = 2$  的兩根為  $0$ 、 $2$ ，將兩根代入即可得  $a$ 、 $b$  的關係式

$$x = 2 \text{ 代入 } \rightarrow 6a + 12 + 8b = 2 \rightarrow 6a + 8b = -10 \rightarrow 3a + 4b = -5 \rightarrow |3a + 4b| = 5$$

28. 《答案》(B)

詳解： 方程式  $(3x - c)^2 - 60 = 0$  的兩根均為正數，解此方程式得  $x = \frac{c \pm \sqrt{60}}{3} (x > 0)$

$$\frac{c \pm \sqrt{60}}{3} > 0 \rightarrow c > \sqrt{60} \text{ 且 } c \text{ 為整數 } (7 = \sqrt{49} < \sqrt{60} < \sqrt{64} = 8), \text{ 所以 } c \text{ 的最小值為 } 8$$

29. 《答案》(D)

詳解： 方程式  $x^2 - 2x - 3599 = 0$  的兩根為  $a$ 、 $b$ ，且  $a > b \rightarrow$  解此方程式  $(x - 61)(x + 59) = 0 \rightarrow$

$$x = 61 = a \text{ 或 } x = -59 = b \rightarrow 2a - b = 2 \times 61 - (-59) = 181$$

30. 《答案》(B)

詳解：  $a(x - b)^2 = 7$  的兩根為  $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{7} \rightarrow 2x = 1 \pm \sqrt{7} \rightarrow (2x - 1)^2 = 7 \rightarrow 4(x - \frac{1}{2})^2 = 7$

$$a = 4 \cdot b = \frac{1}{2} \rightarrow a + b = \frac{9}{2}$$

31. 《答案》(A)

詳解： A 型 7 塊，面積為  $\pi^2$ ；B 型 17 塊，面積為  $\pi$ ；C 型 12 塊，面積為 1。合併後總面積為  $7\pi^2 + 17\pi + 12$ ，若面積可因式分解成兩式相乘，即代表可排成長方形(兩式分別為長與寬)。試取掉各型紙板：

拿掉一塊 A 後的面積  $\rightarrow 6\pi^2 + 17\pi + 12 = (2\pi + 3)(3\pi + 4)$  (可分解，表示可排成長、寬分別為  $3\pi + 4$ 、 $2\pi + 3$  的長方形)

拿掉一塊 B 後的面積  $\rightarrow 7\pi^2 + 16\pi + 12$ ，無法再分解

拿掉一塊 C 後的面積  $\rightarrow 7\pi^2 + 17\pi + 11$ ，無法再分解

沒拿掉任何一塊的面積  $\rightarrow 7\pi^2 + 17\pi + 12$ ，無法再分解

所以拿掉一塊 A 型紙板後可排成一個大長方形

32. 《答案》(D)

詳解： 方程式  $(\frac{2}{5}x + 1)^2 = 680$  的兩根為  $a$ 、 $b$ ，且  $a > b \rightarrow$  解此方程式  $\frac{2}{5}x = -1 \pm \sqrt{680} \rightarrow$

$$\frac{2}{5}a = -1 + \sqrt{680} \cdot \frac{2}{5}b = -1 - \sqrt{680} \rightarrow \frac{2}{5}a - \frac{2}{5}b = -1 + \sqrt{680} - (-1 - \sqrt{680}) = 2\sqrt{680}$$

由表知  $\sqrt{680} = 26.077$ ， $2\sqrt{680} = 52.154$ ，最接近 52

33. 《答案》(B)

詳解：  $x^2 - x - b = 0$  的兩根均為整數， $b$  需可分解為相差 1 的兩數乘積

(A)  $2 \times 3 \times 5 \times 11$ ，無法分解為相差 1 的兩數乘積

(B)  $2 \times 3 \times 7 \times 11$ ，僅此數可分解為  $21 \times 22$

(C)  $2 \times 5 \times 7 \times 11$ ，無法分解為相差 1 的兩數乘積

(D)  $3 \times 5 \times 7 \times 11$ ，無法分解為相差 1 的兩數乘積