代數第五章

目錄

第五章 多項式

在本章中，我們將學習多項式與乘法公式的運算。在瞭解這些觀念後，未來可以再延伸應用到一元二次方程式與二次函數等章節。

學習目標

1.瞭解什麼是多項式。

2.能進行多項式的四則運算。

3.能活用乘法公式進行運算。

4.能利用乘法公式將根式化簡。

5.1 節　多項式

前面的章節中，我們學了一元一次式，例如$x+1$、$5x$、$7x-9$等。

其中像$5x$只有一個項，我們也稱為**單項式**。

單項式：　1.　運算只有乘法和次方，不可有加減運算（除法可視為乘以分數）。

　　　　　2.　變數不可放在分母、指數、根號或絕對值的位置。

例如：$0.5x$、$\frac{2}{3}x^2$、$-4x^3$、6這些都可稱為單項式。(※)

接著我們再來看看本章要介紹的**多項式**。

顧名思義，**多項式**即是 1 個或若干個單項式用加減符號組成的代數式。

譬如$4x^3-3x^2+7x+2$、$3x^2-4x+5$、$6x^3+3.5x^2+7x+3$、14、$\frac{x}{8}+11$可稱為多項式。

而$|4x-7|$、$\frac{3}{x}+6$、5^{x-9}、$\sqrt{4x^2-3x+7}$等皆不為多項式。

我們首先要認識多項式的次數、係數等有關名詞。接著再介紹多項式排列的兩種方法：升冪排列、降冪排列以及多項式的同類項合併。

※　x^2即x的二次方，也就是$x \cdot x$。同理x^3即x的三次方，也就是$x \cdot x \cdot x$。

5.1.1 節　認識多項式

讓我們來認識多項式各組成要素的名稱：

元：　在多項式中，變數的數量。

第一章我們學過一元一次式如$7x+1$，變數只有 1 個x，可稱為一元多項式。

第三章學過二元一次式如$7x+4y+1$，變數有x和y共 2 個，可稱為二元多項式。

次數： 在多項式中，變數的最高次數就是這多項式的次數。

例：多項式$5x^3+3x^2+2x+1$，x 的最高次數是 3，這個多項式稱為三次多項式。

多項式$4x^2+9x+1$，x 的最高次數是 2，這個多項式也可以簡稱為二次式。

若是多元多項式如$2x^3y^2+9xy+1$，$2x^3y^2$中 x 的次數是 3，y 的次數是 2，合起來是 5，則這個多項式為五次多項式。

項： 在多項式中，加減號分開的每一部分，連同它前面的符號，稱為一個項。

例：多項式x^2-3x+1，有三個項，分別為x^2、$-3x$、1。

係數： 一個多項式中，未知數以外的部分，連同其前面的符號叫做係數。

例：$-2x$是-2跟x的乘積，-2是x的係數。

常數項： 在多項式中，如某一個項只是一個數字，而不包含任何的未知數，稱為常數項。例：x^2-3x+1這個多項式中，1 為這個多項式的常數項。

常數多項式： 多項式只含有常數項，稱為常數多項式。

常數多項式又可細分為零次多項式與零多項式：

零次多項式： 次數為 0 且常數項不為 0 的多項式，例：$2=2x^0$為零次多項式，$5, 8, \pi$ 也都是零次多項式。

零多項式： 若此多項式為 0，即為零多項式。

例題 5.1.1-1

試判斷下列各選項是否為多項式，如果不是，請寫出理由來：

(1) $3x^2-7x+5$　(2) $\left|2x^2-5x+3\right|$　(3) $-9x$　(4) $\dfrac{2}{x^2-1}$　(5) 2

(6) $3y+1$　(7) $\sqrt{x^2+2x+1}$　(8) 9^x　(9) x^2+y+1　(10) xy

詳解：

(1)是。

(2)不是，因為 x 在絕對值內。

(3)是。

(4)不是，因為 x 不能在分母。

(5)是。

(6)是。

(7)不是，因為 x 不能在根號內。

(8)不是，因為 x 不能在指數內。

(9)是。

(10)是。

【練習】5.1.1-1

試判斷下列各選項是否為多項式，如果不是，請寫出理由來：

(1) $2x-1$　(2) $\sqrt{x^4-4}$　(3) $-5x$　(4) $7z+1$　(5) 3

(6) $\dfrac{2}{x}$　(7) $\left|3x^3-1\right|$　(8) 9^{x+1}　(9) xyz　(10) 0

例題 5.1.1-2

請寫出下列各多項式的次數：

(1) $4x^3-7x+5$　　(2) $x+7$　　(3) 19　　(4) x^2y+x+1

詳解：

(1)最高次項$4x^3$的次數為 3，是三次多項式。

(2) 最高次項x的次數為 1，是一次多項式。

(3) 19 的次數為 0，是零次多項式。(19 也可以想成是$19x^0$)

(4) 最高次項x^2y，x 的次數為 2，y 的次數為 1，合起來是 3，是三次多項式。

【練習】5.1.1-2

請寫出下列各多項式的次數：

(1) $2x^6-3x+1$　　(2) $4x+7$　　(3) 50　　(4) x^7y+xy^2+1

例題 5.1.1-3

請寫出多項式$4x^3-2x^2+1$各項的係數：

(1) x^3項的係數為？　　　(2) x^2項的係數為？

(3) x項的係數為？　　　(4)常數項的係數為？

詳解：

(1) x^3項為$4x^3$，係數為 4。

(2) x^2項為$-2x^2$，係數為－2。

(3)沒有x項，係數為 0。(可以想成是$0\cdot x$)

(4)常數項為 1，係數為 1。

【練習】5.1.1-3

請寫出多項式$-5x^3+3x-4$各項的係數：

(1) x^3項的係數為？　　　(2) x^2項的係數為？

(3) x項的係數為？　　　(4)常數項的係數為？

例題 5.1.1-4

配合題：

(A)二次多項式　(B)一次多項式　(C)常數多項式

(D)零次多項式　(E)零多項式　(F)一元一次式

將以上代號填入下面符合的式子中：(可重覆)

(1) $13x+6$ 是（　　　　　　　　　）

(2) x^2-4 是（　　　　　　　　　）

(3) 6 是（　　　　　　　　　）

(4) 0 是（　　　　　　　　　）

詳解：

(1) $13x+6$ 最高次數為 1，為一次多項式，也是一元一次式，填入(B)、(F)。

(2) x^2-4 最高次數為 2，為二次多項式，填入(A)。

(3) 6 的次數為 0，為常數多項式，常數項不為 0，也是零次多項式，填入(C)、(D)。

(4) 0 為常數多項式，也是零多項式，填入(C)、(E)。

【練習】5.1.1-4

配合題：

(A)二次多項式　(B)一次多項式　(C)常數多項式

(D)零次多項式　(E)零多項式　(F)一元一次式

將以上代號填入下面符合的式子中：(可重覆)

(1) -52 是（　　　　　　　　　）

(2) x^2+2x-4 是（　　　　　　　　　）

(3) 0 是（　　　　　　　　　）

(4) $x-7$ 是（　　　　　　　　　）

降冪排列與**升冪排列**：

一個多項式，將未知數的次數由高而低，由左而右的順序排列，稱為**降冪排列**。

反之，將未知數的次數由低而高，由左而右的順序排列，稱為**升冪排列**。

例如：

$7x-x^2+5x^3-4$　　是不規則的排列

$5x^3-x^2+7x-4$　　為降冪排列

$-4+7x-x^2+5x^3$　　為升冪排列

習慣上我們都會將整理完的多項式寫成**降冪排列**。

例題 5.1.1-5

多項式 A＝$-x^2-3+9x+3x^3$

(1)將多項式 A 按降冪排列

(2)將多項式 A 按升冪排列

詳解：

(1) $3x^3-x^2+9x-3$

(2) $-3+9x-x^2+3x^3$

【練習】5.1.1-5

多項式 B＝$-7x-3x^2+5-15x^3$

(1)將多項式 B 按降冪排列

(2)將多項式 B 按升冪排列

5.1.2 節 多項式化簡

在學多項式的各種運算之前，我們要先會化簡多項式。

在多項式中，如果某一項次與另一項次的文字與次數相同，我們就稱之為**同類項**。

例：在多項式$6x^2+3x^2+7x+3$中，$6x^2$與$3x^2$的次數相同，都是 2，則我們可以將這兩個同類項做合併，得到比較簡潔的式子。

$6x^2+3x^2+7x+3$

$=(6+3)x^2+7x+3$

$=9x^2+7x+3$　　像這種合併的動作，稱為**同類項合併**。

例題 5.1.2-1

(A)$-4x$　(B)$\frac{2}{3}x^2$　(C)-6　(D)$7x^2$　(E)$4x^3$　(F)$2.1x$

(1)上面選項中，與$2x^2$是同類項的有（　　　　　　　　）。

(2)上面選項中，與$\frac{x}{4}$是同類項的有（　　　　　　　　）。

(3)上面選項中，與2.5是同類項的有（　　　　　　　　）。

詳解：

(1)$2x^2$的次數是 2，同樣次數是 2 的選項有(B)、(D)。

(2)$\frac{x}{4}=\frac{1}{4}x$，次數是 1，同樣次數是 1 的選項有(A)、(F)。

(3)2.5的次數是 0，同樣次數是 0 的選項有(C)。

※2.5可以想成是$2.5x^0$，次數為 0。

【練習】5.1.2-1

(A)$-9x$(B)$2x^3$　(C)7.2　(D)x^3　(E)$0.5x$　(F)$\frac{2}{5}$

(1)上面選項中，與$5x^3$是同類項的有（　　　　　　　　）。

(2)上面選項中，與$\frac{x}{3}$是同類項的有（　　　　　　　　）。

(3)上面選項中，與-9是同類項的有（　　　　　　　　　　　　　　　　）。

例題 5.1.2-2

將下列各多項式做同類項合併：

(1) $2x^2+4x+5x+8-1$　　(2) $3x^2-x^2+4x+6$

(3) $-2x^3+4x-9+9x^3$　　(4) $7x^2-3-3x+4$

詳解：

(1)
$$\begin{aligned} & 2x^2+4x+5x+8-1 \\ = \; & 2x^2+(4+5)x+(8-1) \\ = \; & 2x^2+9x+7 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} & 3x^2-x^2+4x+6 \\ = \; & (3-1)x^2+4x+6 \\ = \; & 2x^2+4x+6 \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} & -2x^3+4x-9+9x^3 \\ = \; & -2x^3+9x^3+4x-9 \\ = \; & (-2+9)x^3+4x-9 \\ = \; & 7x^3+4x-9 \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} & 7x^2-3-3x+4 \\ = \; & 7x^2-3x-3+4 \\ = \; & 7x^2-3x+(-3+4) \\ = \; & 7x^2-3x+1 \end{aligned}$$

【練習】5.1.2-2

將下列各多項式做同類項合併：

(1) $-3x^2-x^2+4x+4$　　(2) $2x^2-x+4x-5+6$

(3) $-3x^3-3x+2x^3-4$　　(4) $6x^2+5-7x-1$

5.1 節 習題

習題 5.1-1

試判斷下列各選項是否為多項式，如果不是，請寫出理由來：

(1) $2x^2-6x-1$　(2) $\left|x^2-6x-5\right|$　(3) $-8x$　(4) $\dfrac{3}{y^2-2}$　(5) 6

(6) $4x-5$　(7) $\sqrt{y^2+3y+3}$　(8) 2^x　(9) x^2+x+1　(10) x^2y

習題 5.1-2

請寫出下列各多項式的次數：

(1) $3x^4-2x^2+6$　(2) 3　(3) $y+5$　(4) $xy+x+2$

習題 5.1-3

請寫出多項式 $3y^3-5y^2+4y-2$ 各項的係數：

(1) y^3 項的係數為？　(2) y^2 項的係數為？

(3) y 項的係數為？　(4)常數項的係數為？

習題 5.1-4

配合題：

(A)二次多項式　(B)一次多項式　(C)常數多項式

(D)零次多項式　(E)零多項式　(F)一元一次式

將以上代號填入下面符合的式子中：(可重覆)

(1) x^2-1 是（　　　　）　(2) 8 是（　　　　）

(3) 0 是（　　　　）　(4) $5x+1$ 是（　　　　）

習題 5.1-5

有多項式 A＝$-3+5x^2+6x-2x^3$

(1)將多項式 A 按降冪排列

(2)將多項式 A 按升冪排列

習題 5.1-6

(A)$-5x$ (B)$\frac{1}{2}x$ (C)$5x^2$ (D)8 (E)$3x^2$ (F)$\frac{1}{3}$

(1)上面選項中，與$6x^2$是同類項的有（ ）。

(2)上面選項中，與$\frac{x}{4}$是同類項的有（ ）。

(3)上面選項中，與3是同類項的有（ ）。

習題 5.1-7

將下列各多項式做同類項合併：

(1) $3x^3+2x+x-2+3$　(2) $4x^2+3x^2+x-2$

(3) $2x^3+x-5-x^3$　(4) $6x^2-2-2x-2$

5.2 節　多項式的四則運算

5.1 節中我們已經瞭解了多項式的基本觀念，本節將繼續介紹多項式與多項式之間的四則運算。

5.2.1 節　多項式的加減法運算

瞭解多項式化簡方法後，我們就可以進行多項式之間的加減法運算。

多項式與多項式的加減法運算，計算方式與前面的併項類似，先將同類項放在一起，然後利用加法或減法運算將同類項合併。

例如：多項式 $3x^2+2x-4$ 與 $-x^2+3x-2$ 相加，寫成算式為：

$$(3x^2+2x-4)+(-x^2+3x-2)$$

$= \quad 3x^2+2x-4-x^2+3x-2$ 　　(拆括號)

$= \quad 3x^2-x^2+2x+3x-4-2$ 　　(整理同類項)

$= \quad (3-1)x^2+(2+3)x+(-4-2)$

$= \quad 2x^2+5x-6$

多項式 $3x^2+2x-4$ 減去 $-x^2+3x-2$，寫成算式為：

$$(3x^2+2x-4)-(-x^2+3x-2)$$

$= \quad 3x^2+2x-4+x^2-3x+2$ 　　(拆括號)

$= \quad 3x^2+x^2+2x-3x-4+2$ 　　(整理同類項)

$= \quad (3+1)x^2+(2-3)x+(-4+2)$

$= \quad 4x^2-x-2$

例題 5.2.1-1

計算下列各式：

(1) $(5x^2+3x+2)+(2x^2+4x+7)$

(2) $(2x^2+4x-1)+(-x^2+3x+5)$

詳解：

(1) $(5x^2+3x+2)+(2x^2+4x+7)$

$= 5x^2+3x+2+2x^2+4x+7$ （拆括號）

$= 5x^2+2x^2+3x+4x+2+7$ （整理同類項）

$= (5+2)x^2+(3+4)x+(2+7)$

$= 7x^2+7x+9$

(2) $(2x^2+4x-1)+(-x^2+3x+5)$

$= 2x^2+4x-1-x^2+3x+5$ （拆括號）

$= 2x^2-x^2+4x+3x-1+5$ （整理同類項）

$= (2-1)x^2+(4+3)x+(-1+5)$

$= x^2+7x+4$

【練習】5.2.1-1

計算下列各式：

(1) $(2x^2+x+4)+(x^2+3x+6)$

(2) $(-2x^2-3x-2)+(-x^2+4x-3)$

例題 5.2.1-2

計算下列各式：

(1) $(2x^2+4x+6)-(x^2-2x+4)$

(2) $(8x^2+3x+6)-(2x^2+4x-4)$

詳解：

(1) $(2x^2+4x+6)-(x^2-2x+4)$

$= 2x^2+4x+6-x^2+2x-4$ （拆括號）

$= 2x^2-x^2+4x+2x+6-4$ （整理同類項）

$= (2-1)x^2+(4+2)x+(6-4)$

$= x^2+6x+2$

(2) $(8x^2+3x+6)-(2x^2+4x-4)$

$= 8x^2+3x+6-2x^2-4x+4$ （拆括號）

$= 8x^2-2x^2+3x-4x+6+4$ （整理同類項）

$= (8-2)x^2+(3-4)x+(6+4)$

$= 6x^2-x+10$

【練習】5.2.1-2

計算下列各式：

(1) $(3x^2+2x+1)-(x^2+2x+7)$

(2) $(-7x^2+3x-1)-(2x^2-4x-3)$

例題 5.2.1-3

(1)計算 $(4x^2+2+3x)+(3x^2+4+2x^3)$，並將結果按降冪排列。

(2)計算 $(2x^2+x-3)-(5x^2-4x+2x^3)$，並將結果按升冪排列。

詳解：

(1) $(4x^2+2+3x)+(3x^2+4+2x^3)$

$= 4x^2+2+3x+3x^2+4+2x^3$ (拆括號)

$= 4x^2+3x^2+2+4+3x+2x^3$ (整理同類項)

$= (4+3)x^2+(2+4)+3x+2x^3$

$= 7x^2+6+3x+2x^3$

$= 2x^3+7x^2+3x+6$ (降冪排列)

(2) $(2x^2+x-3)-(5x^2-4x+2x^3)$

$= 2x^2+x-3-5x^2+4x-2x^3$ (拆括號)

$= 2x^2-5x^2+x+4x-3-2x^3$ (整理同類項)

$= (2-5)x^2+(1+4)x-3-2x^3$

$= -3x^2+5x-3-2x^3$

$= -3+5x-3x^2-2x^3$ (升冪排列)

【練習】5.2.1-3

計算下列各式：

(1)計算 $(x^2-2x+3)-(-4x-x^2+2)$，並將結果按降冪排列。

(2)計算 $(x-3)+(-x^2+3x^3-2)$，並將結果按升冪排列。

多項式的加減運算，除了前述的橫式運算外，也可以進行直式運算。

以例題 5.1.2-3(1)為例，計算$(5x^2+3x+2)+(2x^2+4x+7)$

寫成直式算式：

$$
\begin{array}{lllll}
 & 5x^2 & +3x & +2 \\
+) & 2x^2 & +4x & +7 \\
\hline
 & 7x^2 & +7x & +9
\end{array}
$$

得到答案為$7x^2+7x+9$

再以例題 5.1.2-4(2)為例，計算$(8x^2+3x+6)-(2x^2+4x-4)$

寫成直式算式：

$$
\begin{array}{lllll}
 & 8x^2 & +3x & +6 \\
-) & 2x^2 & +4x & -4 \\
\hline
 & 6x^2 & -x & +10
\end{array}
$$

得到答案為$6x^2-x+10$

注意直式算式需要將同類項對齊，若是式子有缺項，則將該位置補上零。

計算$(3x^3+2x+4)+(7x^2+3x-2)$

寫成直式算式：

$$
\begin{array}{llllll}
 & 3x^3 & +0x^2 & +2x & +4 \\
+) & & 7x^2 & +3x & -2 \\
\hline
 & 3x^3 & +7x^2 & +5x & +2
\end{array}
$$

得到答案為$3x^3+7x^2+5x+2$

為了讓計算更簡便，我們在項次對齊後，可以省略 x 的次方項，只留下各項的係數。這種方法稱為**分離係數法**。

以前題 $(3x^3+2x+4)+(7x^2+3x-2)$ 為例，計算可省略如下：

	x^3	x^2	x	1
	3	$+0$	$+2$	$+4$
＋）		7	$+3$	-2
	3	$+7$	$+5$	$+2$

再將 x 的次方項補上，一樣可得到答案為 $3x^3+7x^2+5x+2$

例題 5.2.1-4

利用分離係數法計算下列各式:

(1) $(5x^2+15x-12)+(-3x^2+4x-2)$

(2) $(6x^2+x-4)-(3x^3+5x+2)$

詳解：

(1)

	x^2	x	1
	5	$+15$	-12
＋）	-3	$+4$	-2
	2	$+19$	-14

答案為 $2x^2+19x-14$

(2)

	x^3	x^2	x	1
		6	$+1$	-4
－)	3	$+0$	$+5$	$+2$
	-3	$+6$	-4	-6

答案為$-3x^3+6x^2-4x-6$

【練習】5.2.1-4

利用分離係數法計算下列各式:

(1) $(3x^3+14x-8)+(x^2-2x-3)$

(2) $(2x^3+x-4)-(-3x^3+2)$

5.2.2 節　多項式的乘法運算

經過上一節介紹多項式加減法運算後，本節將繼續介紹多項式的乘除法運算。

在多項式乘除法運算中我們會運用到下列幾個指數運算：

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

$a^m \div a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

首先單項式的相乘開始介紹。

針對兩個單項式的相乘，我們會將係數與文字符號都進行相乘，然後把係數寫在前面。例如：

$2x \cdot 2x = 4x^2$　　$5x \cdot 7 = 35x$　　$4x \cdot 3x^2 = 12x^3$

例題 5.2.2-1

計算下列各式：

(1) $3 \cdot 2x$　(2) $(-5) \cdot 4x$　(3) $7x \cdot 6x$　(4) $5x \cdot (-x)$

(5) $(2x)^2$　(6) $4x^3 \cdot 3x^2$　(7) $3x^3 \cdot 2x$

詳解：

(1)　$3 \cdot 2x = 6x$

(2)　$(-5) \cdot 4x = -20x$

(3)　$7x \cdot 6x = 42x^2$

(4)　$5x \cdot (-x) = -5x^2$

(5)　$(2x)^2 = 2x \cdot 2x = 4x^2$

(6)　$4x^3 \cdot 3x^2 = 12x^5$

(7)　$3x^3 \cdot 2x = 6x^4$

【練習】5.2.2-1

計算下列各式：

(1) $3\cdot 4x$　　(2) $(-2)\cdot 3x$　　(3) $5\cdot 6x$　　(4) $2\cdot(-x)$

(5) $(7x)^2$　　(6) $2x^2\cdot 3x^2$　　(7) $6x^2\cdot 2x$

瞭解了單項式的乘法後，讓我們來看多項式的乘法，如果我們想計算 $(x+1)\times(2x+3)$，應該怎麼做呢？

我們可以先令 $A=x+1$

那麼算式就會變成 $A\times(2x+3)$

$=\ A\times 2x+A\times 3$　　(利用分配律)

$=\ (x+1)\times 2x+(x+1)\times 3$　　(將 A 換回 $x+1$)

$=\ 2x^2+2x+3x+3$　　(化簡)

$=\ 2x^2+5x+3$　　(同類項合併)

於是我們就得到了 $(x+1)\times(2x+3)=2x^2+5x+3$

我們也可以不用 A 來代換多項式：

$(x+1)\times(2x+3)$

$=\ (x+1)\times 2x+(x+1)\times 3$　　(利用分配律)

$=\ 2x^2+2x+3x+3$　　(化簡)

$=\ 2x^2+5x+3$　　(同類項合併)

例題 5.2.2-2

計算下列各式：

（1）$(x+3)(x+1)$　　（2）$(2x+3)(x+2)$

（3）$(x+6)(2x+1)$　　（4）$(3x+1)(x+5)$

詳解：

（1）
$$\begin{aligned} & (x+3)(x+1) \\ = \; & (x+3)\times x+(x+3)\times 1 \\ = \; & x^2+3x+x+3 \\ = \; & x^2+4x+3 \end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned} & (2x+3)(x+2) \\ = \; & (2x+3)\times x+(2x+3)\times 2 \\ = \; & 2x^2+3x+4x+6 \\ = \; & 2x^2+7x+6 \end{aligned}$$

（3）
$$\begin{aligned} & (x+6)(2x+1) \\ = \; & (x+6)\times 2x+(x+6)\times 1 \\ = \; & 2x^2+12x+x+6 \\ = \; & 2x^2+13x+6 \end{aligned}$$

（4）
$$\begin{aligned} & (3x+1)(x+5) \\ = \; & (3x+1)\times x+(3x+1)\times 5 \\ = \; & 3x^2+x+15x+5 \\ = \; & 3x^2+16x+5 \end{aligned}$$

【練習】5.2.2-2

計算下列各式：

（1）$(x+1)(x+2)$　　（2）$(3x+2)(x+4)$

（3）$(x+5)(4x+3)$　　（4）$(3x+2)(2x+3)$

例題 5.2.2-3

計算下列各式：

(1) $(x-3)(x+1)$ (2) $(-3x+2)(x-5)$

(3) $(x+3)(-2x+7)$ (4) $(3x-1)(-x-2)$

詳解：

(1)
$$\begin{aligned}&(x-3)(x+1)\\=\ &(x-3)\times x+(x-3)\times 1\\=\ &x^2-3x+x-3\\=\ &x^2-2x-3\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&(-3x+2)(x-5)\\=\ &(-3x+2)\times x-(-3x+2)\times 5\\=\ &-3x^2+2x+15x-10\\=\ &-3x^2+17x-10\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&(x+3)(-2x+7)\\=\ &(x+3)\times(-2x)+(x+3)\times 7\\=\ &-2x^2-6x+7x+21\\=\ &-2x^2+x+21\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}&(3x-1)(-x-2)\\=\ &(3x-1)\times(-x)-(3x-1)\times 2\\=\ &-3x^2+x-6x+2\\=\ &-3x^2-5x+2\end{aligned}$$

【練習】5.2.2-3

計算下列各式：

(1) $(x+4)(x-2)$ (2) $(-5x-2)(x-3)$

(3) $(x-2)(x-2)$ (4) $(3x-1)(3x+1)$

例題 5.2.2-4

計算下列各式：

(1) $(x-1)(x^2+x+1)$

(2) $(5x+1)(3x-2)-(3x-4)(-2x-6)$

詳解：

(1) $(x-1)(x^2+x+1)$

$= (x-1)\times x^2+(x-1)\times x+(x-1)\times 1$ （ $A(a+b+c)=Aa+Ab+Ac$ ）

$= x^3-x^2+x^2-x+x-1$

$= x^3-1$

(2) $(5x+1)(3x-2)-(3x-4)(-2x-6)$

$= [(5x+1)\times 3x-(5x+1)\times 2]-[(3x-4)\times(-2x)-(3x-4)\times 6]$

$= [15x^2+3x-10x-2]-[-6x^2+8x-18x+24]$

$= 15x^2+3x-10x-2+6x^2-8x+18x-24$

$= 15x^2+6x^2+3x-10x-8x+18x-2-24$ （整理同類項）

$= (15+6)x^2+(3-10-8+18)x+(-2-24)$

$= 21x^2+3x-26$

【練習】5.2.2-4

計算下列各式：

(1) $(x+1)(x^2-x+1)$

(2) $(x+3)(x-3)-(2x-3)(2x-3)$

多項式的乘法，除了前述的橫式計算外，也可以使用直式計算。

例如我們要計算 $(x-3)(x+1)$ ，直式計算可寫成：

		x	-3	
×）		x	$+1$	
		x	-3	$(x-3)\times 1$
	x^2	$-3x$		$(x-3)\times x$
	x^2	$-2x$	-3	

得到答案為 x^2-2x-3

與直式加法相同，乘法也能用分離係數法計算：

	x^2	x	1
		1	-3
×）		1	$+1$
		1	-3
	1	-3	
	1	-2	-3

使用分離係數法時，務必注意同次項的對齊！

例題 5.2.2-5

使用分離係數法計算下列各式：

（1）$(x-2)(-3x+1)$

（2）$(x+2)(2x^2-2x+3)$

（3）$(x^2+1)(2x-3)$

詳解：

（1）$(x-2)(-3x+1)$

	x^2	x	1
		1	-2
×）		-3	$+1$
		$+1$	-2
	-3	$+6$	
	-3	$+7$	-2

$(x-2)(-3x+1)=-3x^2+7x-2$

（2）$(x+2)(2x^2-2x+3)$

	x^3	x^2	x	1
			1	$+2$
×）		2	-2	$+3$
			$+3$	$+6$
		-2	-4	
	2	$+4$		
	2	$+2$	-1	$+6$

$(x+2)(2^2x-2x+3)=2x^3+2x^2-x+6$

(3) $(x^2+1)(2x-3)$

	x^3	x^2	x	1
		1	0	+1
×)			2	−3
		−3	0	−3
	2	0	2	
	2	−3	2	−3

$$(x^2+1)(2x-3)=2x^3-3x^2+2x-3$$

【練習】5.2.2-5

使用分離係數法計算下列各式：

(1) $(-2x+3)(-x+5)$

(2) $(3x^2-x+5)(2x+1)$

(3) $(2x^2+3)(x-4)$

5.2.3 節　多項式的除法運算

介紹完多項式的乘法後，接著我們來看看除法。

以前我們學過由$2\times 3=6$，可以得到$6\div 3=2$，其中 6 是被除數，3 是除數，2 是商。

同樣地，例題 5.2.1-3 中我們寫過$(x-3)(x+1)=x^2-2x-3$

寫成除法算式則為$(x^2-2x-3)\div(x-3)=(x+1)$

其中(x^2-2x-3)是**被除式**，$(x-3)$是**除式**，$(x+1)$是**商式**。

※因除式為 0 時無意義，本節不考慮除式為 0 的情況

與乘法運算時相同，除法的計算我們先從單項式開始看。

在單項式的除法中，先將原式化為分式，即$\dfrac{\text{被除式}}{\text{除式}}$的形式，其中數字部分要均分，文字部分則利用指數運算$\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$來化簡。

舉例：$3x^2\div x=\dfrac{3x^2}{x}=3x \qquad (x\neq 0)$

$6x^2\div 3x=\dfrac{6x^2}{3x}=2x \qquad (x\neq 0)$

例題 5.2.3-1

計算下列各式：

(1) $6x^2\div 2x$　　(2) $-15x\div 3x$　　(3) $5x^2\div 2x$

詳解：

(1) $6x^2\div 2x=\dfrac{6x^2}{2x}=3x$

(2) $-15x\div 3x=\dfrac{-15x}{3x}=-5$

(3) $5x^2\div 2x=\dfrac{5x^2}{2x}=\dfrac{5}{2}x$

【練習】5.2.3-1

計算下列各式：

(1) $16x^3 \div 4x$ (2) $25x^2 \div 5x$

(3) $30x^2 \div 6x$ (4) $81x^2 \div 9x$

若被除數為多項式，除數為單項式，我們也可以拆解來計算，如下題：

例題 5.2.3-2

計算下列各式：

(1) $(x^2+3x)\div x$ (2) $(12x^3+8x^2)\div 4x$

詳解：

(1)
$$(x^2+3x)\div x$$
$$=\frac{x^2+3x}{x}$$
$$=\frac{x^2}{x}+\frac{3x}{x}$$
$$=x+3$$

(2)
$$(12x^3+8x^2)\div 4x$$
$$=\frac{12x^3+8x^2}{4x}$$
$$=\frac{12x^3}{4x}+\frac{8x^2}{4x}$$
$$=3x^2+2x$$

【練習】5.2.3-2

計算下列各式：

(1) $(x^2+2x)\div x$ (2) $(9x^3-18x^2)\div 3x$

接下來我們來看看多項式除以多項式要如何運算，這裡我們使用直式除法計算。

直式除法也稱為**長除法**，計算方式與一般數字的直式除法類似。

以計算$(x^2+2x-3)\div(x-1)$為例：

(1) 先列出直式

$$\begin{array}{rl} x-1 & \overline{)\;x^2 \quad +2x \quad -3} \end{array}$$

(2) 被除式x^2+2x-3的第一項是x^2，除式$x-1$的第一項是x，

$x^2\div x=x$，因此我們商式的第一項放x，

被除式下面放除式與商式第一項相乘的式子。

$$\begin{array}{rlll} & \;x & & \\ x-1 & \overline{)\;x^2 \quad +2x \quad -3} & & \\ & \;x^2 \quad -x & \leftarrow & (x-1)\times x=x^2-x \end{array}$$

(3) 計算$(x^2+2x-3)-(x^2-x)=3x-3$

$$\begin{array}{rlll} & \qquad x & & \\ x-1 & \overline{)\;x^2 \quad +2x \quad -3} & & \\ & \underline{\;x^2 \quad -x \qquad\quad} & & \\ & \qquad\quad 3x \quad -3 & \leftarrow & (x^2+2x-3)-(x^2-x)=3x-3 \end{array}$$

(4) $3x-3$的第一項是$3x$，除式$x-1$的第一項是x，

$3x\div x=3$，因此我們商式的第二項放3，

$$\begin{array}{rlll} & \qquad x \quad +3 & & \\ x-1 & \overline{)\;x^2 \quad +2x \quad -3} & & \\ & \underline{\;x^2 \quad -x \qquad\quad} & & \\ & \qquad\quad 3x \quad -3 & & \\ & \qquad\quad 3x \quad -3 & \leftarrow & (x-1)\times 3=3x-3 \end{array}$$

(5) 計算$(3x-3)-(3x-3)=0$

$$
\begin{array}{rrrrl}
 & x & +3 & & \leftarrow \text{此處}(x+3)\text{為商式} \\ \cline{2-4}
x-1 & x^2 & +2x & -3 & \\
 & x^2 & -x & & \\ \cline{2-4}
 & & 3x & -3 & \\
 & & 3x & -3 & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 & \leftarrow (3x-3)-(3x-3)=0\text{，此處為餘式}
\end{array}
$$

於是我們得到了$(x^2+2x-3)\div(x-1)=x+3$，餘式為 0。

驗算： 無餘式時，除式×商式＝被除式

可計算$(x-1)\times(x+3)=x^2+2x-3$

接著再看一題有餘式的計算：

計算$(2x^2+3x+4)\div(x+2)$

$$
\begin{array}{rrrrl}
 & 2x & -1 & & \leftarrow \text{商式為}(2x-1) \\ \cline{2-4}
x+2 & 2x^2 & +3x & +4 & \\
 & 2x^2 & +4x & & \leftarrow (x+2)\times 2x=2x^2+4x \\ \cline{2-4}
 & & -x & +4 & \leftarrow (2x^2+3x+4)-(2x+4x)=-x+4 \\
 & & -x & -2 & \leftarrow (x+2)\times(-1)=-x-2 \\ \cline{2-4}
 & & & 6 & \leftarrow (-x+4)-(-x-2)=6\text{，餘式為 }6
\end{array}
$$

因此我們得到，$(2x^2+3x+4)\div(x+2)$，商式為$2x-1$，餘式為6。

驗算： 有餘式時，除式×商式＋餘式＝被除式

可計算$(2x-1)\times(x+2)+6=(2x^2+3x-2)+6=2x^2+3x+4$

例題 5.2.3-3

直式計算下列各式並驗算：

(1) $(3x^2+5x)\div(x+5)$　　　　(2) $(6x^2+5x)\div(2x+1)$

詳解：

(1) $(3x^2+5x)\div(x+5)$

$$
\begin{array}{r|lll}
 & 3x & -10 & \\ \cline{2-4}
x+5 & 3x^2 & +5x & \\
 & 3x^2 & +15x & \\ \cline{2-4}
 & & -10x & \\
 & & -10x & -50 \\ \cline{2-4}
 & & & 50
\end{array}
$$

$(3x^2+5x)\div(x+5)$ 的商式為 $(3x-10)$，餘式為 50。

驗算：計算 $(x+5)\times(3x-10)+50=3x^2+5x$

(2) $(6x^2+5x)\div(2x+1)$

$$
\begin{array}{r|lll}
 & 3x & +1 & \\ \cline{2-4}
2x+1 & 6x^2 & +5x & \\
 & 6x^2 & +3x & \\ \cline{2-4}
 & & 2x & \\
 & & 2x & +1 \\ \cline{2-4}
 & & & -1
\end{array}
$$

$(6x^2+5x)\div(2x+1)$ 的商式為 $(3x+1)$，餘式為 (-1)。

驗算：計算 $(2x+1)\times(3x+1)+(-1)=6x^2+5x$

【練習】5.2.3-3

直式計算下列各式並驗算：

(1) $(18x^2+15x)\div(6x+3)$　　(2) $(4x^2-7x)\div(2x-1)$

例題 5.2.3-4

直式計算下列各式並驗算：

(1) $(48x^2+30x+3)\div(6x+3)$　　(2) $(12x^2+6x+4)\div(6x+1)$

詳解：

(1) $(48x^2+30x+3)\div(6x+3)$

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & 8x & +1 & \\
\hline
6x+3 & 48x^2 & +30x & +3 \\
 & 48x^2 & +24x & \\
\hline
 & & 6x & +3 \\
 & & 6x & +3 \\
\hline
 & & & 0
\end{array}
$$

$(48x^2+30x+3)\div(6x+3)$ 的商式為 $(8x+1)$，餘式為 0。

驗算：計算 $(6x+3)\times(8x+1)=48x^2+30x+3$

(2) $(12x^2+6x+4)\div(6x+1)$

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & 2x & +\frac{2}{3} & \\
\hline
6x+1 & 12x^2 & +6x & +4 \\
 & 12x^2 & +2x & \\
\hline
 & & 4x & +4 \\
 & & 4x & +\frac{2}{3} \\
\hline
 & & & 3\frac{1}{3}
\end{array}
$$

$(12x^2+6x+4)\div(6x+1)$ 的商式為 $(2x+\frac{2}{3})$ ，餘式為 $3\frac{1}{3}$ 。

驗算：計算 $(6x+1)\times(2x+\frac{2}{3})+3\frac{1}{3}=12x^2+6x+4$

【練習】5.2.3-4

直式計算下列各式並驗算：

(1) $(5x^2+9x+2)\div(x+2)$　　(2) $(8x^2-2x-6)\div(4x+3)$

例題 5.2.3-5

直式計算並驗算：

$(15x^3+4x^2+4x+1)\div(5x^2+3x+2)$

詳解：

$(15x^3+4x^2+4x+1)\div(5x^2+3x+2)$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 3x & -1 & & \\
\hline
5x^2+3x+2 & 15x^3 & +4x^2 & +4x & +1 \\
 & 15x^3 & +9x^2 & +6x & \\
\hline
 & & -5x^2 & -2x & +1 \\
 & & -5x^2 & -3x & -2 \\
\hline
 & & & x & +3
\end{array}
$$

$(15x^3+4x^2+4x+1)\div(5x^2+3x+2)$ 的商式為 $(3x-1)$，餘式為 $(x+3)$。

驗算：計算 $(5x^2+3x+2)\times(3x-1)+(x+3)=15x^3+4x^2+4x+1$

【練習】5.2.3-5

直式計算並驗算：

$(8x^3+2x^2+5x+2)\div(2x^2+3x+2)$

例題 5.2.3-6 (缺 x 一次項的直式除法)

直式計算下列各式並驗算：

(1) $(16x^2+6)\div(4x+3)$　　　　(2) $(9x^2-4)\div(3x+2)$

詳解：

(1) $(16x^2+6)\div(4x+3)$

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & 4x & -3 & \\
\hline
4x+3 & 16x^2 & +0x & +6 \\
 & 16x^2 & +12x & \\
\hline
 & & -12x & +6 \\
 & & -12x & -9 \\
\hline
 & & & 15
\end{array}
$$

← 缺項時補上 0，讓算式更清楚

$(16x^2+6)\div(4x+3)$ 的商式為 $(4x-3)$，餘式為 15。

驗算：計算 $(4x+3)\times(4x-3)+15=16x^2+6$

(2) $(9x^2-4)\div(3x+2)$

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & 3x & -2 & \\
\hline
3x+2 & 9x^2 & +0x & -4 \\
 & 9x^2 & +6x & \\
\hline
 & & -6x & -4 \\
 & & -6x & -4 \\
\hline
 & & & 0
\end{array}
$$

← 缺項時補上 0，讓算式更清楚

$(9x^2-4)\div(3x+2)$ 的商式為 $(3x-2)$，餘式為 0。

驗算：計算 $(3x+2)\times(3x-2)=9x^2-4$

【練習】5.2.3-6

直式計算下列各式並驗算：

(1) $(8x^2+6)\div(2x+1)$　　　　(2) $(9x^2-2)\div(3x+1)$

若在一個多項式除法中，被除式為 A，除式為 B，商式為 Q，餘式為 R。(B 不為 0)

也就是：$A\div B=Q\cdots R$

我們在前面驗算時寫成：　$A=B\times Q+R$

也可以將此式同除以 B 寫成：　$\dfrac{A}{B}=Q+\dfrac{R}{B}$

即　$\dfrac{\text{被除式}}{\text{除式}}=\text{商式}+\dfrac{\text{餘式}}{\text{除式}}$

例題 5.2.3-7

有兩多項式 A、B，若 A 除以 B，得商式為 Q，餘式為 R，則：

(1)寫出 A、B、Q、R 的關係式。　　(2)求 $2A$ 除以 B 的商式與餘式。

(3)求 A 除以 $5B$ 的商式與餘式。

詳解：

(1) $\dfrac{\text{被除式}}{\text{除式}}=\text{商式}+\dfrac{\text{餘式}}{\text{除式}}$

多項式 A 除以 B，商式為 Q，餘式為 R。

關係式為 $\dfrac{A}{B}=Q+\dfrac{R}{B}$

(2) 求 $2A$ 除以 B 的商式與餘式。

將 $\dfrac{A}{B}=Q+\dfrac{R}{B}$ 同乘以 2

得 $\dfrac{A}{B}\times 2=(Q+\dfrac{R}{B})\times 2$

化簡為 $\dfrac{2A}{B}=2Q+\dfrac{2R}{B}$

對照 $\dfrac{\text{被除式}}{\text{除式}}=\text{商式}+\dfrac{\text{餘式}}{\text{除式}}$

即 $2A$ 除以 B，商式為 $2Q$，餘式為 $2R$。

(3) 求 A 除以 $5B$ 的商式與餘式。

將 $\dfrac{A}{B}=Q+\dfrac{R}{B}$ 同除以 5

得 $\dfrac{A}{B}\div 5=(Q+\dfrac{R}{B})\div 5$

化簡為 $\dfrac{A}{5B}=\dfrac{Q}{5}+\dfrac{R}{5B}$

對照 $\dfrac{\text{被除式}}{\text{除式}}=\text{商式}+\dfrac{\text{餘式}}{\text{除式}}$

即 A 除以 $5B$，商式為 $\dfrac{Q}{5}$，餘式為 R。

【練習】5.2.3-7

有兩多項式 A、B，若 A 除以 B，得商式為 Q，餘式為 R，則：

(1)求 $4A$ 除以 B 的商式與餘式。 (2)求 A 除以 $2B$ 的商式與餘式。

5.2 節 習題

習題 5.2-1

計算下列各式：

(1) $(3x^2+x+1)+(6x^2+2x+3)$

(2) $(x^3+3x-2)+(-2x^3+6x+3)$

習題 5.2-2

計算下列各式：

(1) $(5x^2+3x+1)-(2x^2+4x-7)$

(2) $(2x^2-4x+3)-(-x^2+3x+5)$

習題 5.2-3

(1)計算 $(4x^2-2+x)+(3x^2+3+2x)$ ，並將結果按降冪排列。

(2)計算 $(x^3+2x^2-1)-(5x^2+x+3)$ ，並將結果按升冪排列。

習題 5.2-4

利用分離係數法計算下列各式:

(1) $(2x^2+6x-8)+(-4x^2-2x-2)$

(2) $(-3x^2+4x-3)-(x^2-x-1)$

習題 5.2-5

計算下列各式：

(1) $4\cdot 2x$　(2) $(-2)\cdot 3x$　(3) $4x\cdot 2x$　(4) $6x\cdot(-x)$

(5) $(3x)^2$　(6) $5x^3\cdot 3x^2$　(7) $4x^3\cdot 2x$

習題 5.2-6

計算下列各式：

(1) $(x+2)(x+1)$　(2) $(2x+3)(x+1)$

(3) $(x+4)(3x+2)$　(4) $(3x+2)(x+3)$

習題 5.2-7

計算下列各式：

(1) $(x-1)(x+2)$　(2) $(-2x+1)(x-2)$

(3) $(x+3)(-x-1)$　(4) $(3x-1)(-2x+1)$

習題 5.2-8

計算下列各式：

(1) $(x-2)(x^2+2x+1)$

(2) $(2x+1)(3x-1)-(3x-2)(2x+5)$

習題 5.2-9

使用分離係數法計算下列各式：

(1) $(x-1)(x+3)$

(2) $(x+2)(2x^2-x+1)$

(3) $(x^2-1)(x+2)$

習題 5.2-10

計算下列各式：

(1) $4x^2 \div 2x$　　(2) $-18x \div 6x$　　(3) $7x^2 \div 3x$

習題 5.2-11

計算下列各式：

(1) $(2x^3+3x) \div x$　　(2) $(18x^3+4x^2) \div 2x$

習題 5.2-12

計算下列各式並驗算：

(1) $(2x^2+5x+42)\div(x+2)$　　(2) $(3x^2+13x+14)\div(3x+1)$

習題 5.2-13

計算下列各式並驗算：

(1) $(30x^2+16x+2)\div(5x+1)$　　(2) $(24x^2+25x+6)\div(8x+3)$

習題 5.2-14

計算下列各式並驗算：

(1) $(25x^2+3)\div(5x+1)$　　(2) $(16x^2-2)\div(4x-1)$

習題 5.2-15

有兩多項式 A、B，若 A 除以 B，得商式為 Q，餘式為 R，則：

(1)寫出 A、B、Q、R 的關係式。　　(2)求 $3A$ 除以 B 的商式與餘式。

(3)求 A 除以 $4B$ 的商式與餘式。

5.3 節　多項式的乘法公式

在 5.2 節中，我們學習了如何展開兩個多項式的乘法。在這一節，我們將學習下列多項式的乘法公式：

兩式相乘	$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$
和的平方	$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$
差的平方	$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$
平方差	$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$
立方和	$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$
立方差	$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$
和的立方	$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
差的立方	$(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$
三數和平方	$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

我們將在以下各小節推導這些公式並學習如何應用。

5.3.1 節 兩式相乘公式

本節我們要學習的乘法公式是兩式相乘公式： $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

我們利用 5.2 節學過的多項式乘法，來計算$(a+b)\times(c+d)$

令 $A=a+b$

那麼算式就會變成 $A\times(c+d)$

$$
\begin{aligned}
&= A\times c+A\times d && \text{(利用分配律)}\\
&= (a+b)\times c+(a+b)\times d && \text{(將 } A \text{ 換回 } a+b\text{)}\\
&= ac+bc+ad+bd && \text{(化簡)}\\
&= ac+ad+bc+bd
\end{aligned}
$$

於是我們就得到了$(a+b)\times(c+d) = ac+ad+bc+bd$

除了利用分配律計算外，我們也可以從長方形面積來理解。

圖 5.3-1 的長方形中，長為$(a+b)$，寬為$(c+d)$。

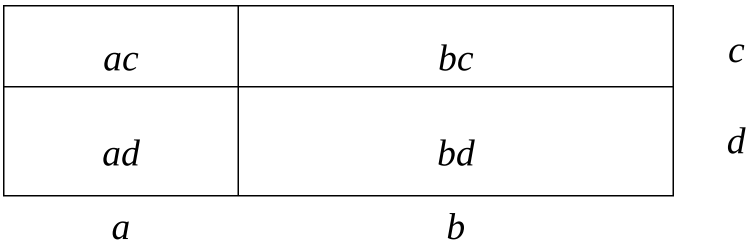


圖 5.3-1

我們想計算此長方形的面積，也就是$(a+b)\times(c+d)$

由圖可知，整個大長方形可以切成 4 塊，

左上方長方形的面積為 ac；左下方長方形的面積為 ad；

右上方長方形的面積為 bc；右下方長方形的面積為 bd。

全部合起來就是$ac+ad+bc+bd$

因此得到$(a+b)\times(c+d) = ac+ad+bc+bd$

例題 5.3.1-1

利用 $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ 展開下列各式：

(1) $(x-3)(x+5)$　　(2) $(2x-6)(x-4)$

(3) $(2x+1)(x+3)$　　(4) $(4x+3)(3x-2)$

詳解：

(1)
$$\begin{aligned}&(x-3)(x+5)\\=\;&x^2+5x-3x-15\\=\;&x^2+2x-15\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&(2x-6)(x-4)\\=\;&2x^2-8x-6x+24\\=\;&2x^2-14x+24\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&(2x+1)(x+3)\\=\;&2x^2+6x+x+3\\=\;&2x^2+7x+3\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}&(4x+3)(3x-2)\\=\;&12x^2-8x+9x-6\\=\;&12x^2+x-6\end{aligned}$$

【練習】5.3.1-1

利用 $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ 展開下列各式：

(1) $(x+1)(x+2)$　　(2) $(2x+3)(x-2)$

(3) $(x-4)(5x+4)$　　(4) $(6x-5)(2x-1)$

學習了多項式乘法公式之後，我們可以利用公式來做數字的計算。

我們先從簡單的乘法分配律開始練習。

例題 5.3.1-2

利用 $(a+b)\times c=ac+bc$ 或 $(a-b)\times c=ac-bc$，計算下列各式：

(1) 102×350　　(2) 99×2400

(3) $123^2-123\times23$　　(4) $123^2+123\times77$

詳解：

(1)
$$\begin{aligned} & 102\times350 \\ = & (100+2)\times350 \\ = & 100\times350+2\times350 \\ = & 35000+700 \\ = & 35700 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} & 99\times2400 \\ = & (100-1)\times2400 \\ = & 100\times2400-1\times2400 \\ = & 240000-2400 \\ = & 237600 \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} & 123^2-123\times23 \\ = & 123\times123-123\times23 \\ = & 123\times(123-23) \\ = & 123\times100 \\ = & 12300 \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} & 123^2+123\times77 \\ = & 123\times123+123\times77 \\ = & 123\times(123+77) \\ = & 123\times200 \\ = & 24600 \end{aligned}$$

【練習】5.3.1-2

利用 $(a+b)\times c=ac+bc$ 或 $(a-b)\times c=ac-bc$，計算下列各式：

(1) 201×250　　(2) 98×1200

(3) $255^2-255\times55$　　(4) $255^2+255\times45$

接著我們利用公式 $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ 來做數字的計算。

例題 5.3.1-3

利用 $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ ，計算下列各式：

(1) 71×101　　(2) 49×201

詳解：

(1)
$$\begin{aligned} & 71\times101 \\ = & (70+1)\times(100+1) \\ = & 70\times100+70\times1+1\times100+1\times1 \\ = & 7000+70+100+1 \\ = & 7171 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} & 49\times201 \\ = & (50+(-1))\times(200+1) \\ = & 50\times200+50\times1+(-1)\times200+(-1)\times1 \\ = & 10000+50-200-1 \\ = & 9849 \end{aligned}$$

【練習】5.3.1-3

利用 $(a+b)\times c=ac+bc$ 或 $(a-b)\times c=ac-bc$ ，計算下列各式：

(1) 41×301　　(2) 49×501

5.3.2 節 和的平方公式

本節要學習的乘法公式是和的平方公式：$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

公式推導：$(x+y)^2$

$$
\begin{aligned}
&= (x+y)(x+y) \\
&= (x+y)x+(x+y)y \qquad \text{(分配律)} \\
&= x^2+xy+xy+y^2 \\
&= x^2+2xy+y^2
\end{aligned}
$$

除了利用分配律計算外，我們也可以從正方形面積來理解。

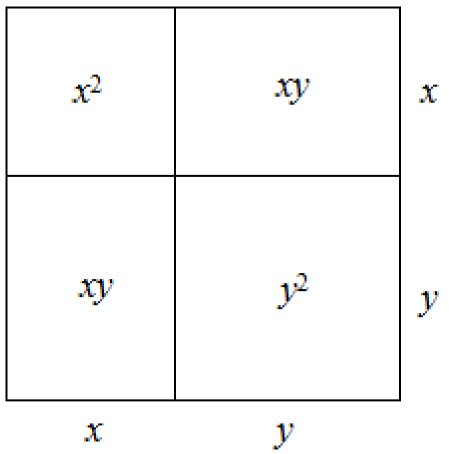


圖 5.3-2

圖 5.3-2 的正方形中，邊長為$(x+y)$。

我們想計算此正方形的面積，也就是$(x+y)\times(x+y)$或$(x+y)^2$。

由圖可知，整個大正方形可以切成 4 塊，

左上方正方形的面積為 x^2；左下方長方形的面積為 xy；

右上方長方形的面積為 xy；右下方正方形的面積為 y^2。

全部合起來就是$x^2+xy+xy+y^2$，化簡為$x^2+2xy+y^2$。

因此得到$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$。

例題 5.3.2-1

利用乘法公式$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$，展開下列各式：

(1) $(x+9)^2$　　(2) $(x+2y)^2$

(3) $(4x+5)^2$　　(4) $(-5x+3)^2$

詳解：

(1)
$$(x+9)^2$$
$$=(x)^2+2\times(x)\times(9)+(9)^2$$
$$=x^2+18x+81$$

(2)
$$(x+2y)^2$$
$$=(x)^2+2\times(x)\times(2y)+(2y)^2$$
$$=x^2+4xy+4y^2$$

(3)
$$(4x+5)^2$$
$$=(4x)^2+2\times(4x)\times(5)+(5)^2$$
$$=16x^2+40x+25$$

(4)
$$(-5x+3)^2$$
$$=(-5x)^2+2\times(-5x)\times(3)+(3)^2$$
$$=25x^2-30x+9$$

【練習】5.3.2-1

利用乘法公式$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$，展開下列各式：

(1) $(x+2)^2$　　(2) $(3x+4)^2$

(3) $(2x+y)^2$　　(4) $(-3x+1)^2$

例題 5.3.2-2

利用乘法公式$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$，展開下列各式：

(1) $(m+n)^2$　　(2) $(3a+2b)^2$

詳解：

(1)
$$
\begin{aligned}
& (m+n)^2 \\
= & (m)^2+2\times(m)\times(n)+(n)^2 \\
= & m^2+2mn+n^2
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
& (3a+2b)^2 \\
= & (3a)^2+2\times(3a)\times(2b)+(2b)^2 \\
= & 9a^2+12ab+4b^2
\end{aligned}
$$

【練習】5.3.2-2

利用乘法公式$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$，展開下列各式：

(1) $(p+q)^2$　　(2) $(5a+3b)^2$

例題 5.3.2-3

利用乘法公式$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$，計算下列各式：

(1) 101^2　　(2) 52^2

(3) 90.1^2　　(4) $(12\frac{1}{5})^2$

詳解：

(1)
$$
\begin{aligned}
& 101^2 \\
= & (100+1)^2 \\
= & (100)^2+2\times(100)\times(1)+(1)^2 \\
= & 10000+200+1 \\
= & 10201
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
& 52^2 \\
= & (50+2)^2 \\
= & (50)^2+2\times(50)\times(2)+(2)^2 \\
= & 2500+200+4 \\
= & 2704
\end{aligned}
$$

（3）

$$
\begin{aligned}
& 90.1^2 \\
=\ & (90+0.1)^2 \\
=\ & (90)^2+2\times(90)\times(0.1)+(0.1)^2 \\
=\ & 8100+18+0.01 \\
=\ & 8118.01
\end{aligned}
$$

（4）

$$
\begin{aligned}
& (12\frac{1}{5})^2 \\
=\ & (12+\frac{1}{5})^2 \\
=\ & (12)^2+2\times(12)\times(\frac{1}{5})+(\frac{1}{5})^2 \\
=\ & 144+\frac{24}{5}+\frac{1}{25} \\
=\ & 148\frac{21}{25}
\end{aligned}
$$

【練習】5.3.2-3

利用乘法公式 $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ ，計算下列各式：

(1) 201^2　　(2) 51^2

(3) 50.1^2　　(4) $(18\frac{1}{6})^2$

5.3.3 節　差的平方公式

本節要學習的乘法公式是：$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$

公式推導：$(x-y)^2$

$$
\begin{aligned}
&= (x-y)(x-y) \\
&= (x-y)x-(x-y)y \qquad \text{(分配律)} \\
&= x^2-xy-xy+y^2 \\
&= x^2-2xy+y^2
\end{aligned}
$$

除了利用分配律計算外，我們也可以從正方形面積來理解。

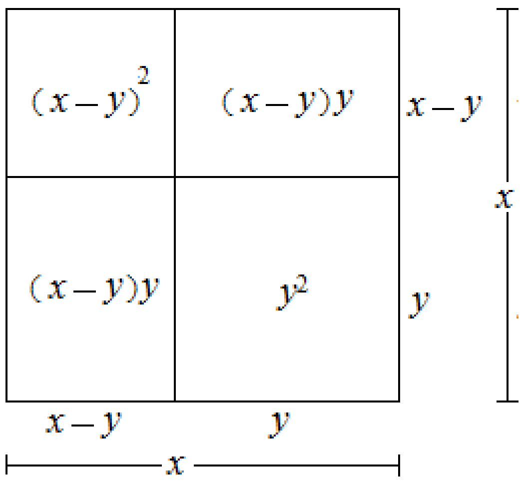


圖 5.3-3

圖 5.3-3 的正方形中，邊長為 x，其中右下方的小正方形邊長為 y。

整個大正方形正方形的面積為 x^2

左上方正方形的面積為 $(x-y)^2$ ；左下方長方形的面積為 $(x-y)y$ ；

右上方長方形的面積為 $(x-y)y$ ；右下方正方形的面積為 y^2。

列成等式為 $(x-y)^2+(x-y)y+(x-y)y+y^2=x^2$

化簡為 $(x-y)^2+xy-y^2+xy-y^2+y^2=x^2$

$(x-y)^2+2xy-y^2=x^2$

得到 $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$

例題 5.3.3-1

利用乘法公式$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$，展開下列各式：

(1) $(x-4)^2$ (2) $(7x-1)^2$

(3) $(2x-5)^2$ (4) $(-3x-3)^2$

詳解：

(1)
$$
\begin{aligned}
&(x-4)^2\\
=\ &(x)^2-2\times(x)\times(4)+(4)^2\\
=\ &x^2-8x+16
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
&(7x-1)^2\\
=\ &(7x)^2-2\times(7x)\times(1)+(1)^2\\
=\ &49x^2-14x+1
\end{aligned}
$$

(3)
$$
\begin{aligned}
&(2x-5)^2\\
=\ &(2x)^2-2\times(2x)\times(5)+(5)^2\\
=\ &4x^2-20x+25
\end{aligned}
$$

(4)
$$
\begin{aligned}
&(-3x-3)^2\\
=\ &(-3x)^2-2\times(-3x)\times(3)+(3)^2\\
=\ &9x^2+18x+9
\end{aligned}
$$

【練習】5.3.3-1

利用乘法公式$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$，展開下列各式：

(1) $(x-2)^2$ (2) $(5x-1)^2$

(3) $(6x-7)^2$ (4) $(-2x-5)^2$

例題 5.3.3-2

利用乘法公式$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$，展開下列各式：

(1) $(m-n)^2$　　(2) $(2a-7b)^2$

詳解：

(1) $(m-n)^2$
$=(m)^2-2\times(m)\times(n)+(n)^2$
$=m^2-2mn+n^2$

(2) $(2a-7b)^2$
$=(2a)^2-2\times(2a)\times(7b)+(7b)^2$
$=4a^2-28ab+49b^2$

【練習】5.3.3-2

利用乘法公式$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$，展開下列各式：

(1) $(p-q)^2$　　(2) $(3a-2b)^2$

例題 5.3.3-3

利用乘法公式$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$，計算下列各式：

(1) 49^2　　(2) 497^2

(3) 89.9^2　　(4) $(11\frac{4}{5})^2$

詳解：

(1) 49^2
$=(50-1)^2$
$=(50)^2-2\times(50)\times(1)+(1)^2$
$=2500-100+1$
$=2401$

(2) 497^2
$=(500-3)^2$
$=(500)^2-2\times(500)\times(3)+(3)^2$
$=250000-3000+9$
$=247009$

（3） 89.9^2

$= (90-0.1)^2$

$= (90)^2-2\times(90)\times(0.1)+(0.1)^2$

$= 8100-18+0.01$

$= 8082.01$

（4） $(11\frac{4}{5})^2$

$= (12-\frac{1}{5})^2$

$= (12)^2-2\times(12)\times(\frac{1}{5})+(\frac{1}{5})^2$

$= 144-\frac{24}{5}+\frac{1}{25}$

$= 139\frac{6}{25}$

【練習】5.3.3-3

利用乘法公式 $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$，計算下列各式：

（1） 79^2

（2） 198^2

（3） 49.9^2

（4） $(19\frac{7}{8})^2$

5.3.4 節 平方差公式

本節要學習的乘法公式是平方差公式：$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

公式推導：(由右式推導到左式)

$$
\begin{aligned}
& (x+y)(x-y) \\
= \; & (x+y)x-(x+y)y \qquad (a(b-c)=ab-ac) \\
= \; & x^2+xy-xy-y^2 \\
= \; & x^2-y^2
\end{aligned}
$$

與其他小節相同，我們也可以從正方形面積來理解。

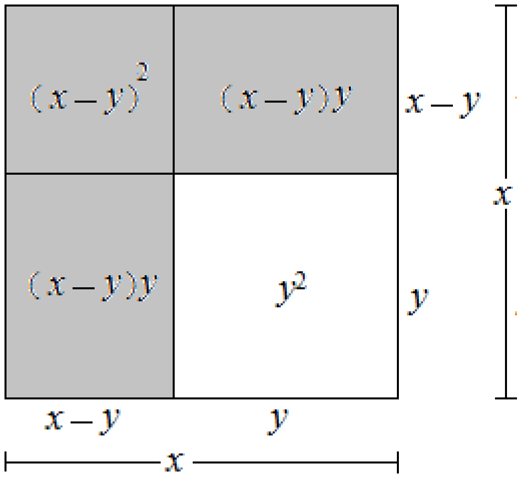


圖 5.3-4

圖 5.3-4 的正方形中，邊長為 x，其中右下方的小正方形邊長為 y。

整個大正方形的面積為 x^2，右下方小正方形的面積 y^2。

我們想計算著色部份的面積，也就是大正方形面積減去右下正方形面積。

即 $x^2 - y^2$ 。

著色部份是由左上、左下、右上三個四邊形組成。

左上方正方形的面積為 $(x-y)^2$ ；左下方長方形的面積為 $(x-y)y$ ；

右上方長方形的面積為 $(x-y)y$ 。

著色部份面積為 $(x-y)^2+(x-y)y+(x-y)y$

$$
\begin{aligned}
&= (x-y)[(x-y)+y+y] \qquad \text{提出}(x-y) \\
&= (x-y)(x+y)
\end{aligned}
$$

因為著色面積也是 x^2-y^2，即得到 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$

例題 5.3.4-1

利用乘法公式 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$，展開下列各式：

(1) $(x+2)(x-2)$ (2) $(3x+2)(3x-2)$

(3) $(5x-3)(5x+3)$ (4) $(-3x+2)(-3x-2)$

詳解：

(1) $(x+2)(x-2)$
$= (x)^2-(2)^2$
$= x^2-4$

(2) $(3x+2)(3x-2)$
$= (3x)^2-(2)^2$
$= 9x^2-4$

(3) $(5x-3)(5x+3)$
$= (5x)^2-(3)^2$
$= 25x^2-9$

(4) $(-3x+2)(-3x-2)$
$= (-3x)^2-(2)^2$
$= 9x^2-4$

【練習】5.3.4-1

利用乘法公式 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$，展開下列各式：

(1) $(x+1)(x-1)$ (2) $(2x+7)(2x-7)$

(3) $(4x-9)(4x+9)$ (4) $(-2x+1)(-2x-1)$

例題 5.3.4-2

利用乘法公式$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$，展開下列各式：

(1) $(a+b)(a-b)$　　(2) $(2m-7n)(2m+7n)$

詳解：

(1) $(a+b)(a-b)$

$=(a)^2-(b)^2$

$=a^2-b^2$

(2) $(2m-7n)(2m+7n)$

$=(2m)^2-(7n)^2$

$=4m^2-49n^2$

【練習】5.3.4-2

利用乘法公式$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$，展開下列各式：

(1) $(p-q)(p+q)$　　(2) $(-3a+2b)(-3a-2b)$

例題 5.3.4-3

利用乘法公式$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$，計算下列各式：

(1) 101×99　　(2) 203×197

(3) 200.2×199.8　　(4) $12\frac{1}{5}\times 11\frac{4}{5}$

詳解：

(1) 101×99

$=(100+1)(100-1)$

$=(100)^2-(1)^2$

$=10000-1$

$=9999$

(2) 203×197

$=(200+3)(200-3)$

$=(200)^2-(3)^2$

$=40000-9$

$=39991$

（3）

$$\begin{aligned} & 200.2\times199.8 \\ = \ & (200+0.2)(200-0.2) \\ = \ & (200)^2-(0.2)^2 \\ = \ & 40000-0.04 \\ = \ & 39999.96 \end{aligned}$$

（4）

$$\begin{aligned} & 12\frac{1}{5}\times11\frac{4}{5} \\ = \ & (12+\frac{1}{5})(12-\frac{1}{5}) \\ = \ & (12)^2-(\frac{1}{5})^2 \\ = \ & 144-\frac{1}{25} \\ = \ & 143\frac{24}{25} \end{aligned}$$

【練習】5.3.4-3

利用乘法公式 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$，計算下列各式：

(1) 51×49　　(2) 302×298

(3) 100.3×99.7　　(4) $15\frac{1}{3}\times14\frac{2}{3}$

例題 5.3.4-4

利用乘法公式 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$，計算下列各式：

(1) 55^2-45^2　　(2) 151^2-149^2

詳解：

（1）

$$\begin{aligned} & 55^2-45^2 \\ = \ & (55+45)(55-45) \\ = \ & 100\times10 \\ = \ & 1000 \end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned} & 151^2-149^2 \\ = \ & (151+149)(151-149) \\ = \ & 300\times2 \\ = \ & 600 \end{aligned}$$

【練習】5.3.4-4

利用乘法公式 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$，計算下列各式：

(1) 51^2-49^2　　　　(2) 302^2-298^2

5.3.5 節 其他乘法公式

本節要學習的乘法公式有以下幾個：

1.立方和 $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

2.立方差 $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

3.和的立方 $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

4.差的立方 $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

5.三數和平方 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

我們先推導公式

1.立方和(由右式推導到左式)

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$$=(x+y)(x^2)-(x+y)(xy)+(x+y)(y^2) \qquad (A(a-b+c)=Aa-Ab+Ac)()$$

$$=(x^3+x^2y)-(x^2y+xy^2)+(xy^2+y^3)$$

$$=x^3+x^2y-x^2y-xy^2+xy^2+y^3$$

$$=x^3+y^3$$

2.立方差(由右式推導到左式)

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$=(x-y)(x^2)+(x-y)(xy)+(x-y)(y^2) \qquad (A(a+b+c)=Aa+Ab+Ac)$$

$$=(x^3-x^2y)+(x^2y-xy^2)+(xy^2-y^3)$$

$$=x^3-x^2y+x^2y-xy^2+xy^2-y^3$$

$$=x^3-y^3$$

3.和的立方　$(x+y)^3$

$= (x+y)^2(x+y)$

$= (x^2+2xy+y^2)(x+y)$　(和的平方公式)

$= (x^2+2xy+y^2)(x)+(x^2+2xy+y^2)(y)$　($A(a+b)=Aa+Ab$)

$= (x^3+2x^2y+xy^2)+(x^2y+2xy^2+y^3)$

$= x^3+2x^2y+xy^2+x^2y+2xy^2+y^3$

$= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

4.差的立方　$(x-y)^3$

$= (x-y)^2(x-y)$

$= (x^2-2xy+y^2)(x-y)$　(差的平方公式)

$= (x^2-2xy+y^2)(x)-(x^2-2xy+y^2)(y)$　($A(a-b)=Aa-Ab$)

$= (x^3-2x^2y+xy^2)-(x^2y-2xy^2+y^3)$

$= x^3-2x^2y+xy^2-x^2y+2xy^2-y^3$

$= x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

5.三數和平方　$(x+y+z)^2$

$= (A+z)^2$　(設 $A=x+y$)

$= A^2+2Az+z^2$　(和的平方公式)

$= (x+y)^2+2(x+y)z+z^2$

$= (x^2+2xy+y^2)+2(xz+yz)+z^2$

$= x^2+2xy+y^2+2xz+2yz+z^2$

$= x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$

例題 5.3.5-1

展開下列各式：

（1）$(x+1)(x^2-x+1)$ （2）$(1-3a)(9a^2+3a+1)$

詳解：

（1） $(x+1)(x^2-x+1)$

$=(x+1)[(x)^2-(x)\times(1)+(1)^2]$

$=(x)^3+(1)^3$ （利用乘法公式 $(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$）

$=x^3+1$

（2） $(1-3a)(1+3a+9a^2)$

$=(1-3a)[(1)^2+(1)\times(3a)+(3a)^2]$

$=(1)^3-(3a)^3$ （利用乘法公式 $(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$）

$=1-27a^3$

【練習】5.3.5-1

展開下列各式：

（1）$(x-1)(x^2+x+1)$ （2）$(2a+1)(4a^2-2a+1)$

例題 5.3.5-2

展開下列各式：

(1) $(a+1)^3$　　　　　(2) $(m-2n)^3$

詳解：

(1)（利用乘法公式 $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$）

$$\begin{aligned}&(a+1)^3\\ =\ &(a)^3+3(a)^2(1)+3(a)(1)^2+(1)^3\\ =\ &a^3+3a^2+3a+1\end{aligned}$$

(2)（利用乘法公式 $(x-y)^3 = x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$）

$$\begin{aligned}&(m-2n)^3\\ =\ &(m)^3-3(m)^2(2n)+3(m)(2n)^2-(2n)^3\\ =\ &m^3-6m^2n+12mn^2-8n^3\end{aligned}$$

【練習】5.3.5-2

展開下列各式：

(1) $(2-b)^3$　　　　　(2) $(2m+3n)^3$

例題 5.3.5-3

展開 $(2a+b+3c)^2$

詳解：

（利用乘法公式 $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$）

$$\begin{aligned}&(2a+b+3c)^2\\ =\ &(2a)^2+(b)^2+(3c)^2+2(2a)(b)+2(b)(3c)+2(3c)(2a)\\ =\ &4a^2+b^2+9c^2+4ab+6bc+12ca\end{aligned}$$

【練習】5.3.5-3

展開 $(a+3b+4c)^2$

5.3 節 習題

習題 5.3-1

利用 $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ 展開下列各式：

(1) $(x-2)(x+3)$ (2) $(2x-3)(x-1)$

(3) $(3x+1)(x+2)$ (4) $(4x+1)(x-2)$

習題 5.3-2

利用 $(a+b)\times c=ac+bc$ 或 $(a-b)\times c=ac-bc$ ，計算下列各式：

(1) 101×450 (2) 999×250

(3) $199^2-199\times 99$ (4) $189^2+189\times 11$

習題 5.3-3

利用 $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ ，計算下列各式：

(1) 81×102 (2) 99×201

習題 5.3-4

利用乘法公式 $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ ，展開下列各式：

(1) $(x+3)^2$ (2) $(x+4y)^2$

(3) $(3x+2)^2$ (4) $(-7x+1)^2$

習題 5.3-5

利用乘法公式$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$，展開下列各式：

(1) $(a+b)^2$　　(2) $(2a+3b)^2$

習題 5.3-6

利用乘法公式$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$，計算下列各式：

(1) 301^2　　(2) 41^2

(3) 30.1^2　　(4) $(40\frac{1}{2})^2$

習題 5.3-7

利用乘法公式$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$，展開下列各式：

(1) $(x-3)^2$　　(2) $(6x-1)^2$

(3) $(3x-2)^2$　　(4) $(-4x-2)^2$

習題 5.3-8

利用乘法公式$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$，展開下列各式：

(1) $(a-b)^2$　　(2) $(2a-3b)^2$

習題 5.3-9

利用乘法公式$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$，計算下列各式：

(1) 99^2　　(2) 499^2

(3) 99.9^2　　(4) $(11\frac{2}{3})^2$

習題 5.3-10

利用乘法公式$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$，展開下列各式：

(1) $(x+4)(x-4)$　　(2) $(2x+1)(2x-1)$

(3) $(3x+5)(3x-5)$　　(4) $(-6x+5)(-6x-5)$

習題 5.3-11

利用乘法公式$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$，展開下列各式：

(1) $(m+n)(m-n)$　　(2) $(3m+2n)(3m-2n)$

習題 5.3-12

利用乘法公式$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$，計算下列各式：

(1) 201×199 (2) 97×103

(3) 200.4×199.6 (4) $9\frac{1}{5}\times10\frac{4}{5}$

習題 5.3-13

利用乘法公式$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$，計算下列各式：

(1) 63^2-37^2 (2) 158^2-42^2

習題 5.3-14

展開下列各式：

(1) $(x+2)(x^2-2x+4)$ (2) $(x-3)(x^2+3x+9)$

習題 5.3-15

展開下列各式：

(1) $(x+1)^3$　　(2) $(x-2y)^3$

習題 5.3-16

展開 $(3a+2b+c)^2$

5.4 節 乘法公式在根號的應用

在本節中，我們會介紹根號的運算規則，並應用前面所學的乘法公式來化簡。

首先我們從指數來看看什麼是根號。

從指數律我們可以知道：

$x^6 = x^{3+3} = x^3 \times x^3$

$x^4 = x^{2+2} = x^2 \times x^2$

$x^2 = x^{1+1} = x^1 \times x^1 = x \times x$

以此類推，x 也可以寫成：

$x = x^1 = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}}$

這裡出現了指數為分數的情形，我們實際把數字代入看看。

將 $x=9$ 代入 $x = x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}}$，得到 $9 = 9^{\frac{1}{2}} \times 9^{\frac{1}{2}}$。

我們也知道 $9=3\times3$，對照上式可得 $9^{\frac{1}{2}} = 3$。

我們繼續看其他數字，$16^{\frac{1}{2}}$ 又是多少呢？因為 $16=4\times4$，可得 $16^{\frac{1}{2}} = 4$。

數學上，指數的 $\frac{1}{2}$ 次方也可以用運算符號 $\sqrt{\ }$ (根號)來表示，即 $x^{\frac{1}{2}}$ 也可以寫成 $\sqrt{x}$。

例：$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$、$25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$、$121^{\frac{1}{2}} = \sqrt{121} = 11$

5.4.1 節 根號的運算規則

瞭解了什麼是根號後，接著我們來看看根號的運算規則。

這裡我們會用到指數律：

$$x^m \times x^n = x^{m+n}$$

$$x^m \div x^n = x^{m-n} \quad (x \neq 0)$$

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

$$(x \times y)^m = x^m \times y^m$$

根號的運算規則：

1. $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (a、b 為正數或 0)

推導：

$$\begin{aligned} & \sqrt{a} \times \sqrt{b} \\ = \; & a^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}} && \text{(將根號換成指數)} \\ = \; & (a \times b)^{\frac{1}{2}} && \text{(指數律)} \\ = \; & \sqrt{ab} && \text{(將指數換成根號)} \end{aligned}$$

範例：$\sqrt{4} \times \sqrt{9} = \sqrt{36} = 6$ 、 $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$

2. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (a 為正數或 0、b 為正數)

推導：

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \\ = \; & \sqrt{a} \div \sqrt{b} \\ = \; & a^{\frac{1}{2}} \div b^{\frac{1}{2}} && \text{(將根號換成指數)} \\ = \; & (a \div b)^{\frac{1}{2}} && \text{(指數律)} \\ = \; & (\frac{a}{b})^{\frac{1}{2}} \\ = \; & \sqrt{\frac{a}{b}} && \text{(將指數換成根號)} \end{aligned}$$

範例：$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$ 、 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$

3. $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$ (a 、b 為正數或 0)

推導：

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{a^2b} \\
= \ & (a^2b)^{\frac{1}{2}} \\
= \ & (a^2)^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{2}} \\
= \ & a^{2\times\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{2}} \\
= \ & a\times b^{\frac{1}{2}} \\
= \ & a\sqrt{b}
\end{aligned}
$$

範例：$\sqrt{8}=\sqrt{2^2\times 2}=2\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{45}=\sqrt{3^2\times 5}=3\sqrt{5}$

名詞介紹

根式

在一個式子中，若運算符號含有根號，如$\sqrt{7}$ 、 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ，則稱這樣的式子為**根式**。

最簡根式

a 為一正數。

若將$\sqrt{a}$ 化成$b\sqrt{c}$ 的形式，其中 c 為整數，且 c 沒有大於 1 的平方數的因數、分母不含有根式，則稱$b\sqrt{c}$ 為最簡根式。

例如：$\sqrt{35}$ 、 $2\sqrt{3}$ 、 $\frac{\sqrt{11}}{2}$ 為最簡根式。

$\sqrt{18}$ 不是最簡根式，因 18 有因數 3^2，可化簡$\sqrt{18}=\sqrt{3^2\times 2}=\sqrt{3^2}\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}$ 。

$\sqrt{\frac{5}{2}}$ 、 $\sqrt{0.04}$ 不是最簡根式，因根號內有分數或小數。

$\frac{5}{\sqrt{2}}$ 不是最簡根式，因分母含有根式。

※因數：若 a 、b 、c 為整數，且$a=b\times c$ ，則 b 與 c 為 a 的因數。

例題 5.4.1-1

將下列各式子化為最簡根式：

（1） $\sqrt{50}$　　（2） $\sqrt{8}+\sqrt{2}$

（3） $\sqrt{\dfrac{5}{4}}$　　（4） $\sqrt{0.04}$

（5） $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　（6） $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

詳解：

（1）
$$\begin{aligned} & \sqrt{50} \\ = & \sqrt{5^2\times 2} \\ = & 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned} & \sqrt{8}+\sqrt{2} \\ = & 2\sqrt{2}+\sqrt{2} \\ = & 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

（3）
$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{5}{4}} \\ = & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} \\ = & \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

（4）
$$\begin{aligned} & \sqrt{0.04} \\ = & \sqrt{(0.2)^2} \\ = & 0.2 \end{aligned}$$

（5）
$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ = & \frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} \\ = & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

（6）
$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ = & \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} \\ = & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

【練習】5.4.1-1

將下列各式子化為最簡根式：

（1）$\sqrt{98}$

（2）$\sqrt{12}+\sqrt{3}$

（3）$\sqrt{\dfrac{7}{25}}$

（4）$\sqrt{0.16}$

（5）$\dfrac{1}{\sqrt{7}}$

（6）$\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{5}}$

5.4.2 節 乘法公式在根號運算的應用

了解了根式的基本運算後，接下來我們學習應用乘法公式化簡的題目。

例題 5.4.2-1

將下列各式展開並化為最簡根式：

（1）$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$　　（2）$(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2$

詳解：

（1）$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$

$= (\sqrt{2})^2+2\times(\sqrt{2})\times(\sqrt{3})+(\sqrt{3})^2$　（$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$）

$= 2+2\sqrt{6}+3$

$= 5+2\sqrt{6}$

（2）$(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2$

$= (\sqrt{7})^2-2\times(\sqrt{7})\times(\sqrt{5})+(\sqrt{5})^2$　（$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$）

$= 7-2\sqrt{35}+5$

$= 12-2\sqrt{35}$

【練習】5.4.2-1

將下列各式展開並化為最簡根式：

（1）$(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$　　（2）$(\sqrt{11}-\sqrt{3})^2$

例題 5.4.2-2

將下列各式展開並化為最簡根式：

（1） $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$ （2） $(\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{2})$

詳解：

（1） $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

$= (\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2$ （$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$）

$= 2-3$

$= -1$

（2） $(\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{2})$

$= (\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2$ （$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$）

$= 7-2$

$= 5$

【練習】5.4.2-2

將下列各式展開並化為最簡根式：

（1） $(\sqrt{11}+\sqrt{2})(\sqrt{11}-\sqrt{2})$ （2） $(\sqrt{5}-\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{7})$

例題 5.4.2-3

將下列各式化為最簡根式：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$　　(2) $\dfrac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$　　(4) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\sqrt{3}-\sqrt{11}}$

詳解：

(1) 本式因為分母有根號，因此非最簡根式。

我們可以利用平方差公式處理分母的根號。

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$= \frac{1\times(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)\times(\sqrt{2}-1)}$$ (分子與分母同乘以($\sqrt{2}-1$))

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-(1)^2}$$ ($(x+y)(x-y)=x^2-y^2$)

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{2-1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{1}$$

$$= \sqrt{2}-1$$

(2) $$\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{5\times(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{(\sqrt{7}+\sqrt{2})\times(\sqrt{7}-\sqrt{2})}$$ (分子與分母同乘以($\sqrt{7}-\sqrt{2}$))

$$= \frac{5(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2}$$ ($(x+y)(x-y)=x^2-y^2$)

$$= \frac{5(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{7-2}$$

$$= \frac{5(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{5}$$

$$= \sqrt{7}-\sqrt{2}$$

(3) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

$= \dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$ （分子與分母同乘以($\sqrt{5}+\sqrt{3}$)）

$= \dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}$ （ $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ ）

$= \dfrac{(\sqrt{5})^2+2\times(\sqrt{5})\times(\sqrt{3})+(\sqrt{3})^2}{5-3}$ （ $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ ）

$= \dfrac{5+2\sqrt{15}+3}{2}$

$= \dfrac{8+2\sqrt{15}}{2}$

$= 4+\sqrt{15}$

(4) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\sqrt{3}-\sqrt{11}}$

$= \dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{11})\times(\sqrt{3}+\sqrt{11})}{(\sqrt{3}-\sqrt{11})\times(\sqrt{3}+\sqrt{11})}$ （分子與分母同乘以($\sqrt{3}+\sqrt{11}$)）

$= \dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{11})^2}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{11})^2}$ （ $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ ）

$= \dfrac{(\sqrt{3})^2+2\times(\sqrt{3})\times(\sqrt{11})+(\sqrt{11})^2}{3-11}$ （ $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ ）

$= \dfrac{3+2\sqrt{33}+11}{-8}$

$= \dfrac{14+2\sqrt{33}}{-8}$

$= -\dfrac{7+\sqrt{33}}{4}$

【練習】5.4.2-3

將下列各式化為最簡根式：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$　　(2) $\dfrac{3}{\sqrt{11}+\sqrt{8}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$　　(4) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{13}}{\sqrt{5}-\sqrt{13}}$

5.4 節 習題

習題 5.4-1

將下列各式子化為最簡根式：

（1） $\sqrt{48}$　　（2） $\sqrt{75}+\sqrt{3}$

（3） $\sqrt{\frac{5}{9}}$　　（4） $\sqrt{0.09}$

（5） $\frac{1}{\sqrt{3}}$　　（6） $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

習題 5.4-2

將下列各式展開並化為最簡根式：

（1） $(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2$　　（2） $(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2$

習題 5.4-3

將下列各式展開並化為最簡根式：

（1） $(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})$　　（2） $(\sqrt{3}-\sqrt{6})(\sqrt{3}+\sqrt{6})$

習題 5.4-4

將下列各式化為最簡根式：

（1） $\dfrac{1}{\sqrt{5}+1}$　　（2） $\dfrac{7}{\sqrt{10}+\sqrt{3}}$

（3） $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$　　（4） $\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{5}}{\sqrt{11}-\sqrt{5}}$

5.5 節　多項式與乘法公式的應用題與綜合題

前面幾節中我們已經學習了多項式與乘法公式的基本觀念，本節中我們將學習相關的應用與綜合題型。

多項式相等：

若有兩多項式 A、B，且 A、B 同次方項的係數皆相等，則稱 A 與 B 相等，記為 $A=B$ 。

例題 5.5-1

(1)有兩多項式 $A=ax^2+2x+6$，$B=7x^2+bx+c$ ，且 $A=B$ ，求 $a+b+c$ 之值。

(2)設 B 為一個多項式，且 $(x^2-2x+3)+B=x^3-3x+2$ ，求多項式 B。

詳解：

(1) 由 $A=B$ ，可知各次方項係數會相等：

二次項：$a=7$

一次項：$b=2$

常數項：$c=6$

$a+b+c=7+2+6=15$

(2) $(x^2-2x+3)+B=x^3-3x+2$

$B=x^3-3x+2-(x^2-2x+3)$　　（移項）

$B=x^3-3x+2-x^2+2x-3$

$B=x^3-x^2-x-1$

例題 5.5-2

已知多項式$(a-3)x^2+(a+b)x+(a+2b+c)$為零多項式，求a、b、c之值。

詳解：

$(a-3)x^2+(a+b)x+(a+2b+c)$為零多項式，

即x^2項的係數為 0 ，x項的係數為 0，常數項係數為 0。

因此 $a-3=0 \quad \Rightarrow \quad a=3$

$a+b=0 \quad \Rightarrow \quad 3+b=0 \quad \Rightarrow \quad b=-3$

$a+2b+c=0 \quad \Rightarrow \quad 3+2(-3)+c=0 \Rightarrow \quad c=3$

解得$a=3$、$b=-3$、$c=3$。

例題 5.5-3

有兩多項式A、B，已知$A+B=2x^2+2x-1$，$A-B=2x^3-2x+3$，回答下列問題。

(1)求多項式A、B。

(2)求$3A+2B$之值。

詳解：

(1) 利用多項式加減法求出多項式A、B。

$A+B=2x^2+2x-1...①$

$A-B=2x^3-2x+3...②$

①＋② 得$2A=2x^3+2x^2+2$，化簡得$A=x^3+x^2+1$

①＋② 得$2B=-2x^3+2x^2+4x-4$，化簡得$B=-x^3+x^2+2x-2$

即$A=x^3+x^2+1$、$B=-x^3+x^2+2x-2$

(2) 求$3A+2B$之值。

$$
\begin{aligned}
& 3A+2B \\
= \quad & 3(x^3+x^2+1)+2(-x^3+x^2+2x-2) \\
= \quad & 3x^3+3x^2+3-2x^3+2x^2+4x-4) \\
= \quad & x^3+5x^2+4x-1
\end{aligned}
$$

例題 5.5-4

有兩多項式 A、B，已知 $A=x^2+2x+1$， $B=x^2+bx+1$，若 $A=B$ ，求 b 之值。

詳解：

若有兩多項式相等，則代表各項係數都會相等，也就是同類項係數相等。

因此由 x 項係數相等，可得 $b=2$

例題 5.5-5

有兩多項式 A、B，已知 $A=ax^2+5x+c$， $B=-2x^2-bx+7$，若 $A=B$ ，求 a、b、c 之值。

詳解：

若有兩多項式相等，則代表各項係數都會相等，也就是同類項係數相等。

由 x^2 項係數相等，可得 $a=-2$

由 x 項係數相等，可得 $-b=5 \Rightarrow b=-5$

由常數項係數相等，可得 $c=7$ 。

即 $a=-2$ 、$b=-5$、 $c=7$

例題 5.5-6

求 $(2x^2+3x+7)(12x^2-4x+5)$ 展開式中 x^3 項的係數。

詳解：

本題只有求 x^3 項的係數，因此不需要將此展開式計算出來，只要計算展開後會成為 x^3 的項即可。

$$2x^2\times(-4x)=-8x^3$$

$$3x\times 12x^2=36x^3$$

$$-8x^3+36x^3=28x^3$$

得 x^3 項係數為 28。

例題 5.5-7

若$(2x^2+ax+7)(x^2-2x+5)$展開式中各項係數的總和是 48，求 a 之值。

詳解：

本題需要計算$(2x^2+ax+7)(x^2-2x+5)$，我們利用$A(a+b+c)=Aa+Ab+Ac$展開。

$$
\begin{aligned}
& (2x^2+ax+7)(x^2-2x+5) \\
= \quad & (2x^2+ax+7)(x^2)+(2x^2+ax+7)(-2x)+(2x^2+ax+7)(5) \\
= \quad & 2x^4+ax^3+7x^2-4x^3-2ax^2-14x+10x^2+5ax+35 \\
= \quad & 2x^2+(a-4)x^3+(7-2a+10)x^2+(-14+5a)x+35 \\
= \quad & 2x^2+(a-4)x^3+(-2a+17)x^2+(5a-14)x+35
\end{aligned}
$$

由各項係數的總和是 48，可列出

$$2+(a-4)+(-2a+17)+(5a-14)+35=48$$

$$36+4a=48$$

$$4a=12$$

$$a=3$$

得到$a=3$。

例題 5.5-8

已知$3x^3-x^2+ax+12$能被x^2-2x+b整除，求 a、b 之值。

詳解：

寫成直式計算

$$
\begin{array}{r|llll}
 & 3x & +5 & & \\
\hline
x^2-2x+b & 3x^3 & -x^2 & +ax & +12 \\
 & 3x^2 & -6x^2 & +3bx & \\
\hline
 & & 5x^2 & +(a-3b)x & +12 \\
 & & 5x^2 & -10x & +5b \\
\hline
 & & & (a-3b+10)x & +(12-5b)
\end{array}
$$

整除表示餘式為 0

$12-5b=0$，解得 $b=\dfrac{12}{5}$ 。

$a-3b+10=0$ ，代入 $b=\dfrac{12}{5}$ ，解得 $a=-\dfrac{14}{5}$ 。

因此 $b=\dfrac{12}{5}$ 、$a=-\dfrac{14}{5}$ 。

例題 5.5-9

已知 B 為一多項式(非零多項式)，且 $\dfrac{x^2+2x+3}{B}=x+1+\dfrac{2}{B}$ ，求多項式 B。

詳解：

5.2 節我們曾經學過：
在一個多項式除法中，被除式為 A，除式為 B，商式為 Q，餘式為 R。(B 不為 0)
可以將這些多項式關係式寫成 $\dfrac{A}{B}=Q+\dfrac{R}{B}$

對照題目的式子，可以發現題目中的 x^2+2x+3 是被除式，B 是除式，$x+1$ 是商，2 是餘式。
我們知道：　（被除式－餘式）÷ 除式＝商式
也可以寫成：（被除式－餘式）÷ 商式＝除式（商式不為 0）

因此要求多項式 B，可以列式：

$$\begin{aligned} & B \\ = \ & [(x^2+2x+3)-2]\div(x+1) \\ = \ & (x^2+2x+1)\div(x+1) \end{aligned}$$

直式計算 $(x^2+2x+1)\div(x+1)$

$$\begin{array}{r|l} & x \quad +1 \\ \hline x+1 & x^2 \quad +2x \quad +1 \\ & x^2 \quad +x \\ \hline & \qquad x \quad +1 \\ & \qquad x \quad +1 \\ \hline & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

得 $B=x+1$

例題 5.5-10

已知 A 為一多項式。若 A 除以 x^3-x^2+x+1 所得之商式為 x^2+4x，餘式為 $-3x+1$，求多項式 A。

詳解：

5.2 節我們曾經學過：

在一個多項式除法中，被除式為 A，除式為 B，商式為 Q，餘式為 R。（B 不為 0）

可以將這些多項式關係式寫成 $A=B\times Q+R$。

因此本題的 $A=(x^3-x^2+x+1)\times(x^2+4x)+(-3x+1)$

$$=(x^3-x^2+x+1)\times x^2+(x^3-x^2+x+1)\times 4x+(-3x+1)$$

$$=x^5-x^4+x^3+x^2+4x^4-4x^3+4x^2+4x-3x+1$$

$$=x^5-x^4+4x^4+x^3-4x^3+x^2+4x^2+4x-3x+1$$

$$=x^5+3x^4-3x^3+5x^2+x+1$$

得 $A=x^5+3x^4-3x^3+5x^2+x+1$

例題 5.5-11

若 $(2x+1)(x-a)$ 展開可得 $2x^2-x-b$，試求 b 之值。

詳解：

$$(2x+1)(x-a)=2x^2-2ax-a=2x^2+(-2a+1)x-a$$

對照 $2x^2-x-b$ 的 x 項係數，可知 $-2a+1=-1$，解得 $a=1$。

對照常數項係數，可知 $-a=-b$，代入 $a=1$，解得 $b=1$。

因此 b 之值為 1。

例題 5.5-12

若$876.5^2=876^2+A$，則A之值為何？

詳解：

利用乘法公式$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

$$\begin{aligned}876.5^2 &= (876+0.5)^2\\ &= (876)^2+2\times(876)\times(0.5)+(0.5)^2\\ &= 876^2+876+0.25\\ &= 876^2+876.25\end{aligned}$$

對照$876.5^2=876^2+A$

可知$A=876.25$

例題 5.5-13

化簡下列各式：

(1) $(2x+3y)^2-(2x-3y)^2$ (2) $\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$ ($a+b\neq 0$)

詳解：

(1)利用乘法公式$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

$$\begin{aligned}&(2x+3y)^2-(2x-3y)^2\\ =\ &[(2x+3y)+(2x-3y)][(2x+3y)-(2x-3y)]\\ =\ &[2x+3y+2x-3y][2x+3y-2x+3y]\\ =\ &[4x][6y]\\ =\ &24xy\end{aligned}$$

(2)利用乘法公式$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

$$\begin{aligned}&\frac{a^2-b^2}{a+b}\\ =\ &\frac{(a+b)(a-b)}{a+b}\\ =\ &a-b \qquad (a+b\neq 0)\end{aligned}$$

例題 5.5-14

求下列各式之值：

(1) $\dfrac{155^2-45^2}{255^2-145^2}$　　(2) $\dfrac{85^2-35^2}{85^2+85\times70+35^2}$

詳解：

(1)利用乘法公式 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

$$\frac{155^2-45^2}{255^2-145^2}$$
$$=\frac{(155+45)(155-45)}{(255+145)(255-145)}$$
$$=\frac{200\times110}{400\times110}$$
$$=\frac{200}{400}$$
$$=\frac{1}{2}$$

(2) 利用乘法公式 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ 與 $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

$$\frac{85^2-35^2}{85^2+85\times70+35^2}$$
$$=\frac{(85+35)(85-35)}{85^2+2\times85\times35+35^2}$$
$$=\frac{(85+35)(85-35)}{(85+35)^2}$$
$$=\frac{120\times50}{120^2}$$
$$=\frac{50}{120}$$
$$=\frac{5}{12}$$

例題 5.5-15

(1) 若 $(3-1)\times(3+1)\times(3^2+1)\times(3^4+1)=3^n-1$，則 n＝？

(2) 若 $(4-1)\times(4+1)\times(4^2+1)\times(4^4+1)\times(4^8+1)=2^m-1$，則 m＝？

詳解：

(1)利用乘法公式 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$

$(3-1)\times(3+1)\times(3^2+1)\times(3^4+1)$

$=\ (3^2-1^2)\times(3^2+1)\times(3^4+1)$

$=\ (3^2-1)\times(3^2+1)\times(3^4+1)$ （$1^2=1$）

$=\ ((3^2)^2-(1)^2)\times(3^4+1)$

$=\ (3^4-1^2)\times(3^4+1)$ （指數律 $(a^m)^n=a^{mn}$）

$=\ (3^4-1)\times(3^4+1)$

$=\ ((3^4)^2-(1)^2)$

$=\ 3^8-1^2$

$=\ 3^8-1$

$=\ 3^n-1$ 可知 n＝8

(2)利用乘法公式 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$

$(4-1)\times(4+1)\times(4^2+1)\times(4^4+1)\times(4^8+1)$

$=\ (4^2-1^2)\times(4^2+1)\times(4^4+1)\times(4^8+1)$

$=\ (4^2-1)\times(4^2+1)\times(4^4+1)\times(4^8+1)$ （$1^2=1$）

$=\ ((4^2)^2-(1)^2)\times(4^4+1)\times(4^8+1)$

$=\ (4^4-1)\times(4^4+1)\times(4^8+1)$

$=\ ((4^4)^2-(1)^2)\times(4^8+1)$

$=\ (4^8-1)\times(4^8+1)$

$=\ (4^8)^2-(1)^2$

$=\ 4^{16}-1$

$=\ (2^2)^{16}-1$ （$4=2^2$）

$=\ 2^{32}-1$

$=\ 2^m-1$ 可知 m＝32

例題 5.5-16

如圖 5.5-1，為一大等腰直角三角形，內部包一小等腰直角三角形。大等腰直角三角形的腰長為 76 公分，小等腰直角三角形的腰長為 24 公分，則著色部份的面積為何？

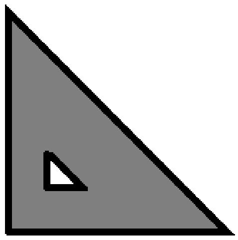


圖 5.5-1

詳解：

著色部份面積 ＝大等腰直角三角形面積－小等腰直角三角形面積

$$= 76 \times 76 \times \frac{1}{2} - 24 \times 24 \times \frac{1}{2}$$

$$= (76^2 - 24^2) \times \frac{1}{2}$$

$$= (76 + 24)(76 - 24) \times \frac{1}{2} \qquad (x^2 - y^2 = (x+y)(x-y))$$

$$= (100)(52) \times \frac{1}{2}$$

$$= 2600$$

著色部份面積為 2600 平方公分。

例題 5.5-17

如圖 5.5-2，為一大圓內部再包一小圓。大圓半徑為 64 公分，小圓半徑為 36 公分，則著色部份的面積為何？(答案以 π 表示)

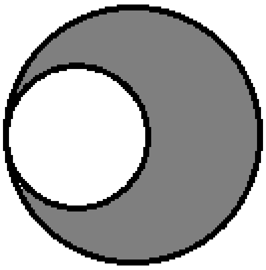


圖 5.5-2

詳解：

圓面積＝πr^2 （r 為半徑）

著色部份面積 ＝大圓面積－小圓面積

$$=\pi\times 64^2-\pi\times 36^2$$

$$=\pi\times(64^2-36^2)$$

$$=\pi\times(64+36)\times(64-36) \qquad (x^2-y^2=(x+y)(x-y))$$

$$=\pi\times(100)\times(28)$$

$$=2800\pi$$

著色部份面積為 2800π 平方公分。

例題 5.5-18

將下列各式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ (2) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

詳解：

像這種有雙重根號的題目，為了消去根號，我們可以試著利用乘法公式，將根號內的部份化為完全平方數。

(1) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

$$=\sqrt{3-2\sqrt{6}+2} \qquad (\text{設法利用乘法公式 } x^2-2xy+y^2=(x-y)^2)$$

$$=\sqrt{(\sqrt{3})^2-2\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$$

$$=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

(2) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

$= \sqrt{2-2\sqrt{2}+1}$ （設法利用乘法公式 $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$）

$= \sqrt{(\sqrt{2})^2-2\times\sqrt{2}\times 1+(1)^2}$

$= \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$

$= \sqrt{2}-1$

例題 5.5-19

化簡下列各式

(1) $\sqrt{47\frac{1}{49}}$ (2) $\sqrt{223\frac{1}{225}}$

詳解：

與前一例題類似，我們利用乘法公式，設法消去根號。

(1) $\sqrt{47\frac{1}{49}}$

$= \sqrt{(49-2)+\frac{1}{49}}$

$= \sqrt{7^2-2+\frac{1}{7^2}}$

$= \sqrt{7^2-2\times 7\times\frac{1}{7}+(\frac{1}{7})^2}$

$= \sqrt{(7-\frac{1}{7})^2}$ （利用乘法公式 $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$）

$= 7-\frac{1}{7}$

$= 6\frac{6}{7}$

（2） $\sqrt{223\frac{1}{225}}$

$= \sqrt{(225-2)+\frac{1}{225}}$

$= \sqrt{15^2-2+\frac{1}{15^2}}$

$= \sqrt{15^2-2\times 15\times\frac{1}{15}+(\frac{1}{15})^2}$

$= \sqrt{(15-\frac{1}{15})^2}$ （利用乘法公式 $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$）

$= 15-\frac{1}{15}$

$= 14\frac{14}{15}$

例題 5.5-20

若 $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ， $y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ，求 $x^2+y^2=?$

詳解：

根據乘法公式 $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$ ，可以推得 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$x^2+y^2 = (x+y)^2-2xy$

$= ((\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2}))^2-2(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$= (2\sqrt{3})^2-2(3-2)$ （$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$）

$= 12-2$

$= 10$

5.5 節 習題

習題 5.5-1

(1)設 A 為一個多項式，且 $(x^2+x+1)+A=x^3+3x^2+6x-5$，求多項式 A。

(2)設 B 為一個多項式，且 $(x^2-5x-2)+B=x^3-x+1$，求多項式 B。

習題 5.5-2

已知多項式 $(a+5)x^2+(a+b)x+(a+b+c)$ 為零多項式，求 a、b、c 之值。

習題 5.5-3

有兩多項式 A、B，已知 $A+B=x^3+2x^2+4x+7$，$A-B=-x^3+4x^2-2x-3$，回答下列問題。

(1)求多項式 A、B。

(2)求 $A+2B$ 之值。

習題 5.5-4

有兩多項式 A、B，已知 $A=3x^2+2x+5$，$B=ax^2+2x+5$，若 $A=B$，求 a 之值。

習題 5.5-5

有兩多項式 A、B，已知 $A=7x^2+5x+c$ ，$B=ax^2-bx+5$ ，若 $A=B$ ，求 a、b、c 之值。

習題 5.5-6

求 $(x^2+5x+1)(3x^2-4x-2)$ 展開式中 x^3 項的係數。

習題 5.5-7

若 $(2x^2+ax-2)(x^2+4x+4)$ 展開式中各項係數的總和是 27，求 a 之值。

習題 5.5-8

已知 $3x^3-14x^2+ax+6$ 能被 x^2-4x+b 整除，求 a、b 之值。

習題 5.5-9

已知 B 為一多項式(非零多項式)，且 $\dfrac{x^2+7x+17}{B}=x+3+\dfrac{5}{B}$ ，求多項式 B。

習題 5.5-10

已知 A 為一多項式。若 A 除以 x^3-2x^2+x-3 所得之商式為 x^2+3，餘式為 $2x-1$，求多項式 A。

習題 5.5-11

若 $(3x+5)(2x-a)$ 展開可得 $6x^2+7x-b$，試求 b 之值。

習題 5.5-12

若 $567.5^2=567^2+A$，則 A 之值為何？

習題 5.5-13

化簡下列各式：

(1) $(5x+2y)^2-(5x-2y)^2$

(2) $\dfrac{m^2-n^2}{m+n}$ （$m+n\neq 0$）

習題 5.5-14

求下列各式之值：

(1) $\dfrac{168^2-32^2}{268^2-132^2}$

(2) $\dfrac{75^2-25^2}{75^2+75\times 50+25^2}$

習題 5.5-15

(1) 若 $(2-1)\times(2+1)\times(2^2+1)\times(2^4+1)=2^n-1$，則 n＝？

(2) 若 $(9-1)\times(9+1)\times(9^2+1)\times(9^4+1)\times(9^8+1)=3^m-1$，則 m＝？

習題 5.5-16

如圖 5.5-3，為一大等腰直角三角形，內部包一小等腰直角三角形。大等腰直角三角形的腰長為 85 公分，小等腰直角三角形的腰長為 25 公分，則著色部份的面積為何？

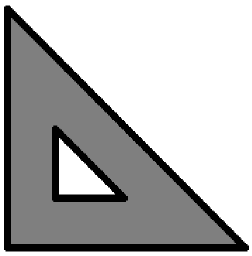


圖 5.5-3

習題 5.5-17

如圖 5.5-4，為一大圓內部再包一小圓。大圓半徑為 36 公分，小圓半徑為 16 公分，則著色部份的面積為何？(答案以 π 表示)

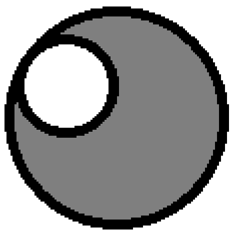


圖 5.5-4

習題 5.5-18

將下列各式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$　　　　(2) $\sqrt{13-2\sqrt{30}}$

習題 5.5-19

化簡下列各式

(1) $\sqrt{23\frac{1}{25}}$　　　　(2) $\sqrt{194\frac{1}{196}}$

習題 5.5-20

若 $x=\sqrt{5}+\sqrt{3}$，$y=\sqrt{5}-\sqrt{3}$，求 $x^2+y^2=?$

第五章綜合習題

習題1：

計算下列各式：

(1) $7x\cdot 3y$　(2) $(-2x)\cdot 3$　(3) $7x\cdot 2x$　(4) $(-3x)\cdot(-2x)\cdot 6x$

(5) $6x^2\div 2x$　(6) $-10x^3\div(-5x)$

習題2：

利用乘法公式，計算下列各式：

(1) $(100\frac{1}{3})^2$　(2) 80.5^2　(3) 198^2　(4) 9.5^2

(5) $\dfrac{210^2-10^2}{210^2+210\times 20+10^2}$

習題3：

將下列各式化為最簡根式：

(1) $(\sqrt{13}-\sqrt{11})^2$　(2) $(\sqrt{21}+\sqrt{7})^2$　(3) $(\sqrt{11}+\sqrt{8})(\sqrt{11}-\sqrt{8})$

(4) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$　(5) $\sqrt{14\frac{1}{16}}$　(6) $\dfrac{\sqrt{12}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

習題 4：

計算下列各式，並將結果按降冪排列。

(1) $(2x^2-x+4)+(x^3+2x+3)$

(2) $(-2x+5+3x^2)-(x-2x^4+x^3)$

習題 5：

計算下列各式：(1) $(-4a-5)(-3a+6)$　　(2) $(3x+\frac{1}{2})(2x-4)$

習題 6：

$2x^2+4x+6$ 與 $8x^3-4x^2-4$ 相乘的積，其係數和為多少？

習題 7：

假設 a、b 皆為整數，若 x 的多項式 $(a+3)x^4+(b-2)x^3-ax+b$ 為一次多項式，則 $a+b$ 的值為？

習題 8：

如果多項式 ax^3+bx^2+3x+4 與 $2x^3+4x^2+cx-d$ 相等，求 a、b、c、d 的值。

習題 9：

假設 B 為一個多項式，且 $B-(x^2+3x-2)=4x^2+2x+8$，求多項式 B。

習題 10：

若多項式 $9x^3-2x+5$ 除以 $3x$，則求其商式與餘式。

習題 11：

若 $2094\times1906=2000^2-a^2$，則 $a=$？

習題 12：

若 $(a+b)^2=29$，$(a-b)^2=11$，則 $a^2+b^2=$？

習題 13：

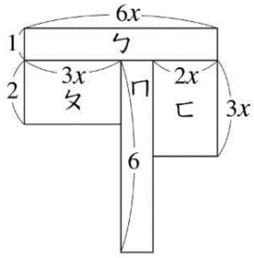
有一長方形面積為 $(3x^2-4x-15)$ 平方公分，若寬為 $(x-3)$ 公分，則長為多少公分。

習題 14：

有一三角形的底邊長為 $(2x+1)$ 公分，面積為 $6x^2+13x+5$ 平方公分，則高為多少公分。

基測與會考模擬試題

(　) 1.　如圖(一)，ㄅ、ㄆ、ㄇ、ㄈ是四個長方形。若用 x 的多項式來表示它們的面積，則下列哪一個長方形的面積不是$6x$？【91(二)基測】



圖(一)

(A)ㄅ　(B)ㄆ　(C)ㄇ　(D)ㄈ

(　) 2.　下列四個敘述，哪一個是正確的？【92(一)基測】

(A)$3x$表示$3+x$　　(B)x^2表示$x+x$

(C)$3x^2$表示$3x\cdot 3x$　　(D)$3x+5$表示$x+x+x+5$

(　) 3.　求$536\times 0.52-364\times 0.48+364\times 0.52-536\times 0.48$之值為何？【93(一)基測】

(A)0　(B)20　(C)36　(D)40

(　) 4.　若多項式A除以$2x+1$得商式為$3x-4$，餘式為5，則$A=$？【93(二)基測】

(A)$6x^2-5x-4$　(B)$6x^2-5x-9$　(C)$6x^2+5x+1$　(D)$6x^2-5x+1$

(　) 5.　計算$\frac{1}{389}+\frac{390\times 388}{389}-379$之值為何？【94(二)基測】

(A)1　(B)10　(C)$\frac{1}{389}$　(D)$\frac{12}{389}$

(　) 6.　下列四個式子，哪一個值最大？【96(二)基測】

(A) 777^2-27^2　(B) 852^2-48^2　(C) 1001^2-599^2　(D) 1006^2-604^2

(　) 7.　計算 $(320^2-160^2)\times\dfrac{1}{160}$ 之值為何？【97(二)基測】

(A)3　(B)160　(C)320　(D)480

(　) 8.　化簡 $(4x^2-5x+7)-(-2x^2+x-4)$ 之後，可得下列哪一個結果？

【98(二)基測】

(A) $2x^2-4x+3$　(B) $2x^2-6x+11$　(C) $6x^2-4x+3$　(D) $6x^2-6x+11$

(　) 9.　已知有一多項式與 $(2x^2+5x-2)$ 的和為 $(2x^2+5x+4)$，求此多項式為何？

【99(一)基測】

(A)2　(B)6　(C) $10x+6$　(D) $4x^2+10x+2$

(　) 10.　若 $4x^2+3x-16$ 除以一多項式，得商式為 $x+2$，餘式為 -6，則此多項式為何？

【99(二)基測】

(A) $4x-5$　(B) $4x-11$　(C) $4x^3+11x^2-10x-26$　(D) $4x^3+11x^2-10x-38$

(　) 11.　若 a 滿足 $(383-83)^2=383^2-83a$，則 a 值為何？【99(二)基測】

(A)83　(B) 383　(C) 683　(D) 766

(　) 12.　若 $(7x-a)^2=49x^2-bx+9$，則 $|a+b|$ 之值為何？【100(一)基測】

(A) 18　(B) 24　(C) 39　(D) 45

(　) 13.　計算多項式 $2x^3-6x^2+3x+5$ 除以 $(x-2)^2$ 後，得餘式為何？【100(一)基測】

(A) 1　(B) 3　(C) $x-1$　(D) $3x-3$

(　) 14.　計算 $x^2(3x+8)$ 除以 x^3 後，得商式和餘式分別為何？【100 北北基】

(A) 商式為 3，餘式為 $8x^2$　(B) 商式為 3，餘式為 8

(C) 商式為 $3x+8$，餘式為 $8x^2$　(D) 商式為 $3x+8$，餘式為 0

(　) 15.　若多項式 $2x^3-10x^2+20x$ 除以 $ax+b$，得商式為 x^2+10，餘式為 100，則 $\frac{b}{a}$ 之值為何？【100(二)基測】

(A)0　(B)－5　(C)－10　(D)－15

(　) 16.　下列何者是方程式 $(\sqrt{5}-1)x=12$ 的解？【100(二)基測】

(A)3　(B)6　(C) $2\sqrt{5}-1$　(D) $3\sqrt{5}+3$

(　) 17.　已知甲、乙、丙三數，甲＝$5+\sqrt{15}$，乙＝$3+\sqrt{17}$，丙=$1+\sqrt{19}$，則甲、乙、丙的大小關係，下列何者正確？【101 基測】

(A) 丙＜乙＜甲　(B) 乙＜甲＜丙　(C) 甲＜乙＜丙(D) 甲＝乙＝丙

(　)18.　若一多項式除以$2x^2-3$，得到的商式為$7x-4$，餘式為$-5x+2$，則此多項式為何？【102 基測】

(A)$14x^3-8x^2-26x+14$　　(B) $14x^3-8x^2-26x-10$

(C)$-10x^3+4x^2-8x-10$　　(D)$-10x^3+4x^2+22x-10$

(　)19.　<u>陳</u>老師作一個多項式除法示範後，擦掉計算過程中的六個係數，並以a、b、c、d、e、f表示，求$a+b+d+e=$？【91(一)基測】

$$\begin{array}{r@{}l}
 & 2x+3 \\
bx+5 & \overline{)6x^2+ax+d} \\
 & \underline{cx^2+10x} \\
 & ex+d \\
 & \underline{fx+15} \\
 & -2
\end{array}$$

(A)18　(B)26　(C)38　(D)44

(　)20.　下列哪一個選項為$[(2x^2+x-3)-(-x^2-3x+4)]\div(x-1)$的商式？【92(二)基測】

(A)$3x-7$　(B)$3x+7$　(C)$x-1$　(D)$x+1$

(　)21.　求$2001\times2002-1999\times2004$之值為何？【92(二)基測】

(A)6　(B)16　(C)26　(D)36

(　)22.　已知有一多項式除以$(x-2)$得商式為$(2x-3)$，餘式為3，若此多項式除以

$(2x+3)$，得商式為何？【93(一)基測】

(A)$x+5$　(B)$x-5$　(C)$x+2$　(D)$x-2$

(　) 23.　若$1999^2-2000^2=1333\times a$，則$a=$？【93(二)基測】

(A)1　(B)－1　(C)3　(D)－3

(　) 24.　計算899^2-101^2之值為何？【94(一)基測】

(A)788000　(B)798000　(C)888000　(D)898000

(　) 25.　$(69\frac{17}{23})\times(70\frac{6}{23})=a+b$，若 a 為正整數且$0<b<1$，則$a=$？【95(一)基測】

(A)3583　(B)3584　(C)4899　(D)4900

(　) 26.　已知$1^2+1=2^2-2$，$2^2+2=3^2-3$，$3^2+3=4^2-4$，…，$99^2+99=100^2-100$。

若$1123^2+1123+2248+1125=a^2$，且$a>0$，則$a=$？【95(二)基測】

(A)1124　(B) 1125　(C) 1126　(D) 1136

(　) 27.　已知$119\times21=2499$，求$119\times21^3-2498\times21^2=$？【96(一)基測】

(A)431　(B) 441　(C) 451　(D) 461

(　) 28.　將一多項式$[(17x^2-3x+4)-(ax^2+bx+c)]$，除以$(5x+6)$後，得商式為$(2x+1)$，

餘式為0。求$a-b-c=$？【98(一)基測】

(A)3　(B)23　(C)25　(D)29

(　)29.　計算$(250+0.9+0.8+0.7)^2-(250-0.9-0.8-0.7)^2$之值為何？【100(二)基測】

(A)11.52　(B)23.04　(C)1200　(D)2400

(　)30.　計算$\sqrt{114^2-64^2-50^2}$之值為何？【101 基測】

(A) 0　(B) 25　(C) 50　(D) 80

(　)31.　若$A=101\times9996\times10005$，$B=10004\times9997\times101$，則$A-B$之值為何？

【102 基測】

(A) 101　(B)－101　(C) 808　(D)－808

習題解答

5.1 練習解答

練習 5.1.1-1

(1)是 (2)不是，因為 x 不能在根號內

(3)是 (4)是

(5)是 (6)不是，因為 x 不能在分母

(7)不是，因為 x 不能在絕對值內

(8)不是，因為 x 不能在指數內

(9)是 (10)是

練習 5.1.1-2

(1)6 次 (2)1 次 (3)0 次 (4)8 次

練習 5.1.1-3

(1)-5 (2)0 (3)3 (4)-4

練習 5.1.1-4

(1)C、D(2)A (3)C、E(4)B、F

練習 5.1.1-5

(1)$-15x^3-3x^2-7x+5$

(2)$5-7x-3x^2-15x^3$

練習 5.1.2-1

(1)B、D (2)A、E (3)C、F

練習 5.1.2-2

(1)$-4x^2+4x+4$ (2)$2x^2+3x+1$

(3)$-x^3-3x-4$ (4)$6x^2-7x+4$

5.1 習題解答

5.1-1 (1)是

(2)不是，因為 x 不能在絕對值內

(3)是 (4)不是，因為 x 不能在分母

(5)是 (6)是

(7)不是，因為 x 不能在根號內

(8)不是，因為 x 不能在指數內

(9)是 (10)是

5.1-2 (1)4 次 (2)0 次 (3)1 次 (4)2 次

5.1-3 (1)3 (2)-5 (3)4 (4)-2

5.1-4 (1) A (2) C、D

(3)C、E (4)B、F

5.1-5 (1) $-2x^3+5x^2+6x-3$

(2) $-3+6x+5x^2-2x^3$

5.1-6 (1) C、E (2) A、B (3) D、F

5.1-7 (1) $3x^3+3x+1$ (2) $7x^2+x-2$

(3) x^3+x-5 (4) $6x^2-2x-4$

5.2 練習解答

練習 5.2.1-1

(1) $3x^2+4x+10$ (2) $-3x^2+x-5$

練習 5.2.1-2

(1) $2x^2-6$ (2) $-9x^2+7x+2$

練習 5.2.1-3

(1) $2x^2+2x+1$ (2) $-5+x-x^2+3x^3$

練習 5.2.1-4

(1) $3x^3+x^2+12x-11$ (2) $5x^3+x-6$

練習 5.2.2-1

(1) $12x$ (2) $-6x$ (3) $30x$ (4) $-2x$

(5) $49x^2$ (6) $6x^4$ (7) $12x^3$

練習 5.2.2-2

(1) x^2+3x+2 (2) $3x^2+14x+8$

(3) $4x^2+23x+15$ (4) $6x^2+13x+6$

練習 5.2.2-3

(1) x^2+2x-8 (2) $-5x^2+13x+6$

(3) x^2-4x+4 (4) $9x^2-1$

練習 5.2.2-4

(1)x^3+1 (2)$-3x^2+12x-18$

練習 5.2.2-5

(1) $2x^2-13x+15$ (2) $6x^3+x^2+9x+5$

(3) $2x^3-8x^2+3x-12$

練習 5.2.3-1

(1) $4x^2$ (2) $5x$ (3) $5x$ (4) $9x$

練習 5.2.3-2

(1) $x+2$ (2) $3x^2-6x$

練習 5.2.3-3

(1)商式為$3x+1$，餘式為-3

驗算：$(3x+1)\times(6x+3)+(-3)=18x^2+15x$

(2)商式為$2x-\dfrac{5}{2}$，餘式為$-\dfrac{5}{2}$

驗算：$(2x-\dfrac{5}{2})\times(2x-1)+(-\dfrac{5}{2})=4x^2-7x$

練習 5.2.3-4

(1)商式為$5x-1$，餘式為4

驗算：$(x+2)\times(5x-1)+(4)=5x^2+9x+2$

(2)商式為$2x-2$，餘式為0

驗算：$(2x-2)\times(4x+3)+(0)=8x^2-2x-6$

練習 5.2.3-5

(1)商式為$4x-5$，餘式為$12x+12$

驗算：$(2x^2+3x+2)\times(4x-5)+(12x+12)$
$=8x^3+2x^2+5x+2$

練習 5.2.3-6

(1)商式為$4x-2$，餘式為8

驗算：$(2x+1)\times(4x-2)+8=8x^2+6$

(2)商式為$3x-1$，餘式為-1

驗算：$(3x-1)\times(3x+1)+(-1)=9x^2-2$

練習 5.2.3-7

(1)商式為$4Q$，餘式為$4R$

(2)商式為$\dfrac{Q}{2}$，餘式為R

5.2 習題解答

5.2-1 (1)$9x^2+3x+4$ (2)$-x^3+9x+1$

5.2-2 (1)$3x^2-x+8$ (2)$3x^2-7x-2$

5.2-3 (1)$7x^2+3x+1$
(2)$-4-x-3x^2+x^3$

5.2-4 (1)$-2x^2+4x-10$
(2)$-4x^2+5x-2$

5.2-5 (1)$8x$ (2)$-6x$ (3)$8x^2$ (4)$-6x^2$
(5)$9x^2$ (6)$15x^5$ (7)$8x^4$

5.2-6 (1)x^2+3x+2 (2)$2x^2+5x+3$
(3)$3x^2+14x+8$ (4)$3x^2+11x+6$

5.2-7 (1)x^2+x-2 (2)$-2x^2+5x-2$
(3)$-x^2-4x-3$ (4)$-6x^2+5x-1$

5.2-8 (1)x^3-3x-2 (2)$-10x+9$

5.2-9 (1)x^2+2x-3
(2)$2x^3+3x^2-x+2$
(3)x^3+2x^2-x-2

5.2-10 (1)$2x$ (2)-3 (3)$\dfrac{7}{3}x$

5.2-11 (1)$2x^2+3$ (2)$9x^2+2x$

5.2-12 (1)商式為$2x+1$，餘式為40
驗算：
$(2x+1)\times(x+2)+40=2x^2+5x+42$
(2)商式為$x+4$，餘式為10
驗算：
$(3x+1)\times(x+2)+10=3x^2+13x+14$

5.2-13 (1)商式為$6x+2$，餘式為0
驗算：
$(6x+2)\times(5x+1)+0=30x^2+16x+2$
(2)商式為$3x+2$，餘式為0
驗算：
$(3x+2)\times(8x+3)+0=24x^2+25x+6$

5.2-14 (1)商式為$5x-1$，餘式為4
驗算：$(5x-1)\times(5x+1)+4=25x^2+3$
(2)商式為$4x+1$，餘式為-1
驗算：$(4x+1)\times(4x-1)+(-1)=16x^2-2$

5.2-15 (1)$\dfrac{A}{B}=Q+\dfrac{R}{B}$
(2)商式為$3Q$，餘式為$3R$
(3)商式為$\dfrac{Q}{4}$，餘式為R

5.3 練習解答

練習 5.3.1-1

(1) x^2+3x+2　(2) $2x^2-x-6$

(3) $5x^2-16x-16$　(4) $12x^2-16x+5$

練習 5.3.1-2

(1) 50250　(2) 117600

(3) 51000　(4) 76500

練習 5.3.1-3

(1) 12341　(2) 24549

練習 5.3.2-1

(1) x^2+4x+4　(2) $9x^2+24x+16$

(3) $4x^2+4xy+y^2$　(4) $9x^2-6x+1$

練習 5.3.2-2

(1) $p^2+2pq+q^2$

(2) $25a^2+30ab+9b^2$

練習 5.3.2-3

(1) 40401　(2) 2601

(3) 2510.01　(4) $330\frac{1}{36}$

練習 5.3.3-1

(1) x^2-4x+4　(2) $25x^2-10x+1$

(3) $36x^2-84x+49$　(4) $4x^2+20x+25$

練習 5.3.3-2

(1) $p^2-2pq+q^2$

(2) $9a^2-12ab+4b^2$

練習 5.3.3-3

(1)6241　(2) 39204

(3) 2490.01　(4) $395\frac{1}{64}$

練習 5.3.4-1

(1) x^2-1　(2) $4x^2-49$

(3) $16x^2-81$　(4) $4x^2-1$

練習 5.3.4-2

(1) p^2-q^2　(2) $9a^2-4b^2$

練習 5.3.4-3

(1) 2499　(2) 89996

(3) 9999.91　(4) $224\frac{8}{9}$

練習 5.3.4-4

(1) 200　(2) 2400

練習 5.3.5-1

(1) x^3-1　(2) $8a^3+1$

練習 5.3.5-2

(1) $8-12b+6b^2-b^3$

(2) $8m^3+36m^2n+54mn^2+27n^3$

練習 5.3.5-3

$a^2+9b^2+16c^2+6ab+24bc+8ac$

5.3 習題解答

5.3-1 (1) x^2+x-6　(2) $2x^2-5x+3$
(3) $3x^2+7x+2$　(4) $4x^2-7x-2$

5.3-2 (1) 45450　(2) 249750
(3) 19900　(4) 37800

5.3-3 (1) 8262　(2) 19899

5.3-4 (1) x^2+6x+9　(2) $x^2+8xy+16y^2$
(3) $9x^2+12x+4$　(4) $49x^2-14x+1$

5.3-5 (1) $a^2+2ab+b^2$
(2) $4a^2+12ab+9b^2$

5.3-6 (1) 90601　(2) 1681
(3) 906.01　(4) $1640\frac{1}{4}$

5.3-7 (1) x^2-6x+9　(2) $36x^2-12x+1$
(3) $9x^2-12x+4$　(4) $16x^2+16x+4$

5.3-8 (1) $a^2-2ab+b^2$
(2) $4a^2-12ab+9b^2$

5.3-9 (1) 9801　(2) 249001
(3) 9980.01　(4) $136\frac{1}{9}$

5.3-10 (1) x^2-16　(2) $4x^2-1$
(3) $9x^2-25$　(4) $36x^2-25$

5.3-11 (1) m^2-n^2　(2) $9m^2-4n^2$

5.3-12 (1) 39999　(2) 9991

(3) 39999.84　(4) $99\frac{9}{25}$

5.3-13 (1) 2600　(2) 23200

5.3-14 (1) x^3+8　(2) x^3-27

5.3-15 (1) x^3+3x^2+3x+1

(2) $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$

5.3-16 $9a^2+4b^2+c^2+12ab+4bc+6ac$

5.4 練習解答

練習 5.4.1-1

(1) $7\sqrt{2}$　(2) $3\sqrt{3}$

(3) $\frac{\sqrt{7}}{5}$　(4) 0.4

(5) $\frac{\sqrt{7}}{7}$　(6) $\frac{\sqrt{55}}{5}$

練習 5.4.2-1

(1) $7+2\sqrt{10}$　(2) $14-2\sqrt{33}$

練習 5.4.2-2

(1) 9　(2) -2

練習 5.4.2-3

(1) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　(2) $\sqrt{11}-2\sqrt{2}$

(3) $6+\sqrt{35}$　(4) $-\frac{9+\sqrt{65}}{4}$

5.4 習題解答

5.4-1 (1) $4\sqrt{3}$　(2) $6\sqrt{3}$

(3) $\frac{\sqrt{5}}{3}$　(4) 0.3

(5) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　(6) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

5.4-2 (1) $8+2\sqrt{15}$　(2) $9-6\sqrt{2}$

5.4-3 (1) 3　(2) -3

5.4-4 (1) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$　(2) $\sqrt{10}-\sqrt{3}$

(3) $5+2\sqrt{6}$　(4) $\frac{8+\sqrt{55}}{3}$

5.5 習題解答

5.5-1 答：(1) $A=x^3+2x^2+5x-6$

(2) $B=x^3-x^2+4x+3$

5.5-2 答：$a=-5$、$b=5$、$c=0$

5.5-3 答：(1) $A=3x^2+x+2$

$B=x^3-x^2+3x+5$

(2) $A+2B=2x^3+x^2+7x+12$

5.5-4 答：$a=3$

5.5-5 答：$a=7$、$b=-5$、$c=5$

5.5-6 答：11

5.5-7 答：$a=3$

5.5-8 答：$a=17$、$b=3$

5.5-9 答：$B=x+4$

5.5-10 答：$A=x^5-2x^4+4x^3-9x^2+5x-10$

5.5-11 答：$b=5$

5.5-12 答：$A=567.25$

5.5-13 答：(1) $40xy$　(2) $m-n$

5.5-14 答：(1) $\frac{1}{2}$　(2) $\frac{1}{2}$

5.5-15 答：(1) $n=8$　(2) $m=32$

5.5-16 答：3300 平方公分

5.5-17 答：1040π 平方公分

5.5-18 答：(1) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$　(2) $\sqrt{10}-\sqrt{3}$

5.5-19 答：(1) $4\frac{4}{5}$　(2) $13\frac{13}{14}$

5.5-20 答：16

第五章綜合習題

1. 答：(1) $21xy$　　(2) $-6x$

(3) $14x^2$　　(4) $36x^3$

(5) $3x$　　(6) $2x^2$

2. 答：(1) $10066\frac{7}{9}$　　(2) 6480.25

(3) 39204　　(4) 90.25

(5) $\frac{10}{11}$

3. 答：(1) $24-2\sqrt{143}$　　(2) $28+14\sqrt{3}$

(3) 3　　(4) $-3+2\sqrt{2}$

(5) $3\frac{3}{4}$　　(6) $2-\sqrt{2}$

4. 答：(1) x^3+2x^2+x+7

(2) $2x^4-x^3+3x^2-3x+5$

5. 答：(1) $12a^2-9a-30$ (2) $6x^2-11x-2$

6. 答：0

7. 答：$a+b=-1$

8. 答：$a=2$、$b=4$、$c=3$、$d=-4$

9. 答：$B=5x^2+5x+6$

10. 答：商式為 $3x^2-\frac{2}{3}$，餘式為 5

11. 答：$a=\pm 94$

12. 答：$a^2+b^2=20$

13. 答：$3x+5$ 公分

14. 答：$6x+10$ 公分

基測與會考模擬試題解答

1. 《答案》(D)

詳解： ㄅ$=6x\times1=6x$，ㄆ$=3x\times2=6x$，ㄇ$=6\times x=6x$，ㄈ$2x\times3x=6x^2$。僅有ㄈ不是$6x$。

2. 《答案》(D)

詳解： (A)$3x$表示$3+x$是錯的，應為$3\times x$

(B)x^2表示$x+x$是錯的，應為$x\times x$

(C)$3x^2$表示$3x\cdot3x$是錯的，應為$3\times x\times x$

(D)$3x+5$表示$x+x+x+5$是對的

3. 《答案》(C)

詳解：

$$\begin{aligned}&536\times0.52-364\times0.48+364\times0.52-536\times0.48\\=\ &0.52\times(536+364)-0.48\times(536+364)\\=\ &(536+364)\times(0.52-0.48)\\=\ &36\end{aligned}$$

4. 《答案》(D)

詳解：

$$\begin{aligned}A&=(2x+1)(3x-4)+5\\&=(6x^2-5x-4)+5\\&=6x^2-5x+1\end{aligned}$$

5. 《答案》(B)

詳解：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{389}+\frac{390\times388}{389}-379\\=&\frac{1}{389}+\frac{(389+1)\times(389-1)}{389}-379\\=&\frac{1}{389}+\frac{389^2-1^2}{389}-379\\=&\frac{389^2}{389}-379\\=&10\end{aligned}$$

6. 《答案》(B)

詳解： (A)$777^2-27^2=(777+27)(777-27)=804\times750$

(B)$852^2-48^2=(852+48)(852-48)=804\times900$

(C)$1001^2-599^2=(1001+599)(1001-599)=1600\times402=800\times804$

(D)$1006^2-604^2=(1006+604)(1006-604)=1610\times402=805\times804$

又因$900>805>800>750$，所以(B)是最大的

7. 《答案》(D)

詳解： $(320^2-160^2)\times\frac{1}{160}$

$=(320+160)\times(320-160)\times\frac{1}{160}=480\times160\times\frac{1}{160}$

$=480$

8. 《答案》(D)

詳解： 原式$=4x^2-5x+7+2x^2-x+4$

$=6x^2-6x+11$

9. 《答案》(B)

詳解： 設多項式為 A，$A+(2x^2+5x-2)=2x^2+5x+4$

$A=2x^2+5x+4-(2x^2+5x-2)=6$

10. 《答案》(A)

詳解： 設多項式為 A，$(4x^2+3x-16)\div A=(x+2)\ldots\ldots-6$

$A=[(4x^2+3x-16)-(-6)]\div(x+2)=4x-5$

11. 《答案》(C)

詳解： $(383-83)^2=383^2-2\times383\times83+83^2$

$(383-83)^2=383^2-83(2\times383+83)$

$a=2\times383+83=683$

12. 《答案》(D)

詳解： $(7x-a)^2=49x^2-14ax+a^2$

$a^2=9$，$b=14a \Rightarrow a=3$、$b=42$ 或 $a=-3$、$b=-42$

$|a+b|=45$

13. 《答案》(D)

詳解： $(2x^3-6x^2+3x+5)\div(x+2)^2=(2x+2)\ldots\ldots(3x-3)$

14. 《答案》(A)

詳解： $x^2(3x+8)\div x^3=3\ldots\ldots8x^2$

15. 《答案》(B)

詳解： $(2x^3-10x^2+20x)\div(ax+b)=(x^2+10)\ldots\ldots(100)$

$[(2x^3-10x^2+20x)-100]\div(x^2+10)=2x-10=ax+b$

$a=2$、$b=-10 \rightarrow \frac{b}{a}=\frac{-10}{2}=-5$

16. 《答案》(D)

詳解： $x=\dfrac{12}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{12(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\dfrac{12(\sqrt{5}+1)}{5-1}=3\sqrt{5}+3$

17. 《答案》(A)

詳解： 甲 $=5+\sqrt{15}\Rightarrow 3<\sqrt{15}<4\Rightarrow 8<5+\sqrt{15}<9$

乙 $=3+\sqrt{17}\Rightarrow 4<\sqrt{17}<5\Rightarrow 7<3+\sqrt{17}<8$

丙 $=1+\sqrt{19}\Rightarrow 4<\sqrt{19}<5\Rightarrow 5<1+\sqrt{15}<6$

所以丙 $<$ 乙 $<$ 甲

18. 《答案》(A)

詳解： 設多項式為 A，$A\div(2x^2-3)=(7x-4)\ldots\ldots(-5x+2)$

$A=(2x^2-3)(7x-4)+(-5x+2)$

$=14x^3-8x^2-21x+12+(-5x+2)$

$=14x^3-8x^2-26x+14$

19. 《答案》(D)

詳解： 由直式知 $c=6$、$2b=c$、$a-10=e$、$3b=f$、$e-f=0$、$d-15=-2$

綜合以上條件得解 $c=6$、$b=3$、$e=f=9$、$a=19$、$d=13$

$a+b+d+e=19+3+13+9=44$

20. 《答案》(B)

詳解： $[(2x^2+x-3)-(-x^2-3x+4)]\div(x-1)$

$=(3x^2+4x-7)\div(x-1)$

$=(3x+7)\ldots\ldots(7x-7)$

21. 《答案》(A)

詳解： 原式

$=(2000+1)(2000+2)-(2000-1)(2000+4)$

$=2000^2+3\times2000+2-2000^2-3\times2000+4$

$=6$

22. 《答案》(B)

詳解： 設多項式為 A，$A\div(x-2)=(2x-3)\ldots\ldots(3)$

$A=(2x-3)(x-2)+3=2x^2-7x+9$

則 $A\div(2x+3)=(x-5)\ldots\ldots(26)$

商式為 $x-5$

23. 《答案》(D)

詳解： $1999^2-2000^2=(1999+2000)\times(1999-2000)=3999\times(-1)=1333\times(-3)$，所以 $a=-3$

24. 《答案》(B)

詳解： 原式$=(899+101)\times(899-101)=1000\times798=798000$

25. 《答案》(C)

詳解： 原式$=(70-\frac{6}{23})\times(70+\frac{6}{23})$

$=70^2-(\frac{6}{23})^2$

$=4900-\frac{36}{529}$

$=4899\frac{493}{529}=a+b$，且 a 為正整數，$0<b<1$

故 $a=4899$

26. 《答案》(B)

詳解： $1123^2+1123+2248+1125$

$=1124^2-1124+2248+1125$

$=1124^2+1124+1125$

$=1125^2-1125+1125$

$=1125^2=a^2$，且 $a>0$，故 $a=1125$

27. 《答案》(B)

詳解： 已知 $119\times21=2499$

$119\times21^3-2498\times21^2$

$=2499\times21^2-2498\times21^2$

$=21^2\times(2499-2498)$

$=441$

28. 《答案》(D)

詳解： 設多項式為 A，$A\div(5x+6)=(2x+1)$

$A=(5x+6)(2x+1)=10x^2+17x+6$

$A=[(17x^2-3x+4)-(ax^2+bx+c)]=10x^2+17x+6$

$ax^2+bx+c=(17x^2-3x+4)-(10x^2+17x+6)=7x^2-20x-2$

得到 $a=7$、$b=-20$、$c=-2$

所以 $a-b-c=7-(-20)-(-2)=29$

29. 《答案》(D)

詳解： 原式$=(250+2.4)^2-(250-2.4)^2$

$=(250^2+2\times250\times2.4+2.4^2)-(250^2-2\times250\times2.4+2.4^2)$

$=4\times250\times2.4$

$=2400$

30. 《答案》(D)

詳解：　原式

$$=\sqrt{(114+64)(114-64)-50^2}$$
$$=\sqrt{178\times 50-50^2}$$
$$=\sqrt{50\times(178-50)}$$
$$=\sqrt{50\times 128}$$
$$=80$$

31. 《答案》(D)

詳解：　$A-B$

$=101\times 9996\times 10005-10004\times 9997\times 101$，設 $x=10000$代入

$$=101\times(x-4)\times(x+5)-101\times(x+4)\times(x-3)$$
$$=101\times[(x^2+x-20)-(x^2+x-12)]$$
$$=101\times(-20+12)$$
$$=-808$$