

代數第三章

目錄

第三章 二元一次聯立方程式	1
學習目標.....	1
3.1 節 二元一次式	2
3.1.1 節 二元一次式的列式	2
3.1.2 節 二元一次式的化簡	7
3.1.3 節 二元一次式的求值	15
3.1 節 習題	18
3.2 節 二元一次方程式.....	23
3.2.1 節 二元一次方程式的化簡	23
3.2.2 節 二元一次方程式的解	31
3.2.3 節 找出二元一次方程式的正整數解.....	34
3.2 節 習題	38
3.3 節 二元一次聯立方程式.....	41
3.3.1 節 二元一次聯立方程式的列式	42
3.3.2 節 二元一次聯立方程式的解	45
3.3 節 習題	50

3.4 節 代入消去法求解二元一次聯立方程式.....	53
3.4.1 節 直接型.....	54
3.4.2 節 乘除型.....	62
3.4 節 習題	67
3.5 節 加減消去法求解二元一次聯立方程式.....	69
3.5.1 節 直接型.....	71
3.5.2 節 單乘型.....	75
3.5.3 節 雙乘型.....	79
3.5.4 節 分數與小數型.....	85
3.5.5 節 變化型.....	91
3.5 節 習題	100
3.6 節 聯立不等式	104
3.6.1 節 聯立不等式的圖示	104
3.6.2 節 解含有絕對值的一元一次不等式.....	109
3.6 節 習題	113
3.7 節 二元一次聯立方程式的綜合題與應用題.....	114
3.7 節 習題	154
第三章綜合習題.....	160
基測與會考模擬試題	167
習題解答.....	179

第三章 二元一次聯立方程式

在本章中，我們將從含一個未知數的一元一次方程式延伸，介紹含有兩個未知數的二元一次方程式，來解決更多的問題。並教導代入消去法及加減消去法，找出二元一次聯立方程式的解。

學習目標

1. 能在情境中列出二元一次聯立方程式，並瞭解其解的意義
2. 能以代入消去法與加減消去法找出二元一次聯立方程式的解。
3. 能利用二元一次方程式處理生活中的應用問題

3.1 節 二元一次式

第一章我們學習了如何利用符號來代表一個未知數之後，接著我們來看看利用兩個符號來代表兩個未知數的情況。

3.1.1 節 二元一次式的列式

本小節我們先來認識什麼是二元一次式，接著再練習從情境中列出二元一次式。

二元一次式：指含有二個未知數(二元)，且未知數的次數是 1(一次)的式子。

例如 $2x + y$ 、 $8x - y$ 、 $3a + 5b$ 等。

未知數相乘除者非二元一次式。例如 $xy + 1$ 非二元一次式。

例題 3.1.1-1

下列何者為二元一次式？

- (A) $5x + 4$ (B) $x^2 - 2x + 1$ (C) $x + y + 1$
(D) $15a - 3b - 10$ (E) $2x + 3y + 4z + 5$

詳解：

- (A) 只有 1 個未知數，是一元一次式，非二元一次式。
(B) 只有 1 個未知數且未知數有平方，是一元二次式，非二元一次式。
(C) 有 2 個未知數且都是一次，是二元一次式。
(D) 有 2 個未知數且都是一次，是二元一次式。
(E) 有 3 個未知數，是三元一次式。

答：(C)、(D) 為二元一次式。

【練習】3.1.1-1

下列何者為二元一次式？

- (A) $x + 1$ (B) $x^2 + y - 6$ (C) $x + y + z$
(D) $3m + 2n$ (E) $2x + 3y + 7$

例題 3.1.1-2

撲滿裡原本有 x 元，再存了 y 元進去後，現在撲滿裡面有多少元？

(答案用 x 、 y 表示)

詳解：

題目問撲滿裡面有多少元，我們只要將原有的錢，再加上存入的錢，就能得到答案。

原有 x 元，存入 y 元，因此撲滿裡有 $(x+y)$ 元。

答： $(x+y)$ 元。

【練習】3.1.1-2

撲滿裡原本有 x 元，拿出了 y 元後，現在撲滿裡面有多少元？

(答案用 x 、 y 表示)

例題 3.1.1-3

假設 1 枝鉛筆的價格是 x 元，1 枝原子筆的價格是 y 元，今天小花要買 2 枝鉛筆跟 3 枝原子筆，那麼總共需花費多少元？

(答案用 x 、 y 表示)

詳解：

1 枝鉛筆 x 元，2 枝鉛筆即是 $2x$ 元。

1 枝原子筆 y 元，3 枝原子筆即是 $3y$ 元。

2 枝鉛筆跟 3 枝原子筆，共是 $(2x+3y)$ 元。

答：需花費 $(2x+3y)$ 元。

【練習】3.1.1-3

假設 1 杯紅茶 x 元，1 杯奶茶 y 元，今天小昭要買 3 杯紅茶跟 1 杯奶茶，請問總共需花費多少元？

(答案用 x 、 y 表示)

例題 3.1.1-4

小君帶著 100 元出門逛街，先買了每張 x 元的貼紙 2 張和每張 y 元的卡片 1 張，之後又到冰店吃了 1 碗 30 元的刨冰，則小君的身上剩下多少元？

(答案用 x 、 y 表示)

詳解：

每張 x 元的貼紙 2 張需 $2x$ 元，每張 y 元的卡片 1 張需 y 元。

1 碗 30 元的刨冰需 30 元，總共花費 $(2x+y+30)$ 元。

100 元減去花費的錢就是剩下的錢： $100-(2x+y+30)$ (元)。

答：剩下 $100-(2x+y+30)$ 元。

【練習】3.1.1-4

小文帶著 x 元出門，先買了每顆 y 元的西瓜 2 顆，接著再買每顆 20 元的蘋果 3 顆，請問小文的身上剩下多少元？(答案用 x 、 y 表示)

例題 3.1.1-5

每顆巧克力糖賣 5 元，每顆水果糖賣 3 元，買了 x 顆巧克力和 y 顆水果糖，總共需花費多少元？(答案用 x 、 y 表示)

詳解：

每顆巧克力糖賣 5 元， x 顆巧克力是 $5x$ 元。

每顆水果糖賣 3 元， y 顆水果糖是 $3y$ 元。

x 顆巧克力和 y 顆水果糖共 $(5x+3y)$ 元。

答：總共需花費 $(5x+3y)$ 元。

【練習】3.1.1-5

便當店每份雞腿便當賣 x 元，每份排骨便當賣 y 元，小華買了 2 份雞腿便當和 5 份排骨便當，總共需花費多少元？(答案用 x 、 y 表示)

例題 3.1.1-6

若桌上有 10 元硬幣 x 個，5 元硬幣 y 個，那麼桌上總共有多少元？
(答案用 x 、 y 表示)

詳解：

10 元硬幣 x 個共 $10x$ 元；5 元硬幣 y 個共 $5y$ 元。

因此桌上總共有 $(10x+5y)$ 元。

答：桌上總共有 $(10x+5y)$ 元。

【練習】3.1.1-6

若桌上有 100 元鈔票 x 張，500 元鈔票 y 張，那麼桌上總共有多少元？
(答案用 x 、 y 表示)

例題 3.1.1-7

博幼冰店歡慶開幕一週年，全店商品八折。冰店紅豆冰每碗原價 30 元，芒果冰每碗原價 40 元，小新買了 x 碗紅豆冰及 y 碗芒果冰，那麼總共需要多少元？

(答案用 x 、 y 表示)

詳解：

每碗 30 元的紅豆冰 x 碗，需 $30x$ 元。

每碗 40 元的芒果冰 y 碗，需 $40y$ 元。

紅豆冰 x 碗及芒果冰 y 碗共需 $(30x+40y)$ 元。

全店商品八折，所以只需付 $(30x+40y) \times 80\%$ 元，也可以表示成 $(30x+40y) \times 0.8$

答：總共需要 $(30x+40y) \times 0.8$ 元。

【練習】3.1.1-7

便利商店 1 瓶蘋果汁 x 元，1 瓶西瓜汁 y 元。今有促銷活動，買相同的飲料，全面 6 折。小華買了 2 瓶蘋果汁和 1 瓶西瓜汁，請問共需付多少元？

(答案用 x 、 y 表示)

3.1.2 節 二元一次式的化簡

本小節我們練習將相同的未知數分類合併，來化簡二元一次式。

例如化簡下面這個式子

$$\begin{aligned} & 3x+5y+7+2x+y+4 \\ = & (3x+2x)+(5y+y)+(7+4) \quad (\text{分別將 } x、y \text{ 與常數分類}) \\ = & (3+2)x+(5+1)y+(7+4) \quad (\text{再做合併}) \\ = & 5x+6y+11 \end{aligned}$$

例題 3.1.2-1

化簡下列各式：

$$(1) 4x+2y+5x+3y$$

$$(2) 5x+4y+3y-2x$$

$$(3) 3x-6y+7-6x-4y+2$$

$$(4) -3x-2y-5+6x-y-1$$

詳解：

$$(1) 4x+2y+5x+3y$$

$$= (4x+5x)+(2y+3y)$$

$$= 9x+5y$$

$$(2) 5x+4y+3y-2x$$

$$= (5x-2x)+(4y+3y)$$

$$= 3x+7y$$

$$(3) 3x-6y+7-6x-4y+2$$

$$= (3x-6x)+(-6y-4y)+(7+2)$$

$$= (-3x)+(-10y)+9$$

$$= -3x-10y+9$$

$$(4) -3x-2y-5+6x-y-1$$

$$= (-3x+6x)+(-2y-y)+(-5-1)$$

$$= 3x+(-3y)+(-6)$$

$$= 3x-3y-6$$

【練習】3.1.2-1

化簡下列各式：

$$(1) x+2y+3x+4y$$

$$(2) 7x+3y+2y-x$$

$$(3) 2x-3y+6-4x+2y-2$$

$$(4) -6x-3y-7+x-2y-5$$

例題 3.1.2-2

化簡下列各式：

$$(1) \frac{2}{3}x + 2y + \frac{1}{3}x + 5y$$

$$(3) \frac{1}{2}x - 2y + 7 - \frac{3}{2}x + \frac{2}{5}y - 3$$

$$(2) 2x + 4y + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y$$

$$(4) \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}y + \frac{7}{4}x - \frac{2}{5}y$$

詳解：

$$\begin{aligned}(1) \quad & \frac{2}{3}x + 2y + \frac{1}{3}x + 5y \\ &= \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x\right) + (2y + 5y) \\ &= x + 7y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad & 2x + 4y + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y \\ &= \left(2x + \frac{1}{3}x\right) + \left(4y - \frac{1}{2}y\right) \\ &= 2\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{2}y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \quad & \frac{1}{2}x - 2y + 7 - \frac{3}{2}x + \frac{2}{5}y - 3 \\ &= \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x\right) + \left(-2y + \frac{2}{5}y\right) + (7 - 3) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)x + \left(-2 + \frac{2}{5}\right)y + (7 - 3) \\ &= -x - \frac{8}{5}y + 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) \quad & \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}y + \frac{7}{4}x - \frac{2}{5}y \\ &= \left(\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}x\right) + \left(\frac{7}{5}y - \frac{2}{5}y\right) \\ &= 2x + y\end{aligned}$$

【練習】3.1.2-2

化簡下列各式：

$$(1) \frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2}x + 2y$$

$$(3) \frac{3}{4}x - 3y + 9 - \frac{1}{4}x + \frac{9}{5}y - 2$$

$$(2) 3x + 2y + \frac{1}{4}x - \frac{4}{5}y$$

$$(4) \frac{5}{6}x - \frac{1}{5}y + \frac{7}{6}x + \frac{6}{5}y$$

例題 3.1.2-3

化簡下列各式：

$$(1) \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y$$

$$(2) \frac{2}{5}x + \frac{5}{6}y + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y$$

詳解：

$$\begin{aligned}(1) \quad & \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y \\ &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x\right) + \left(\frac{1}{4}y + \frac{1}{5}y\right) \\ &= \left(\frac{3}{6}x + \frac{2}{6}x\right) + \left(\frac{5}{20}y + \frac{4}{20}y\right) \\ &= \frac{5}{6}x + \frac{9}{20}y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad & \frac{2}{5}x + \frac{5}{6}y + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y \\ &= \left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{2}x\right) + \left(\frac{5}{6}y - \frac{1}{3}y\right) \\ &= \left(\frac{4}{10}x + \frac{5}{10}x\right) + \left(\frac{5}{6}y - \frac{2}{6}y\right) \\ &= \frac{9}{10}x + \frac{3}{6}y \\ &= \frac{9}{10}x + \frac{1}{2}y\end{aligned}$$

【練習】3.1.2-3

化簡下列各式：

$$(1) \frac{3}{5}x + \frac{4}{7}y + \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y$$

$$(2) \frac{5}{9}x + \frac{4}{5}y - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y$$

與一元一次式相同，**分配律**也可用在二元一次式的化簡

1. 加法分配律： $(a+b)\times c = a\times c + b\times c$ 或 $a\times(b+c) = a\times b + a\times c$

2. 減法分配律： $(a-b)\times c = a\times c - b\times c$ 或 $a\times(b-c) = a\times b - a\times c$

例如化簡 $2(x+2y+3)$ ：

$$\begin{aligned} & 2(x+2y+3) \\ &= 2\times x + 2\times 2y + 2\times 3 \\ &= 2x + 4y + 6 \end{aligned}$$

例題 3.1.2-4

化簡下列各式：

(1) $7(3x+y-6)$

(2) $2(-3x+2y-1)$

(3) $-(3x-2y+2)$

(4) $-3(-2x+3y-1)$

詳解：

$$\begin{aligned} (1) \quad & 7(3x+y-6) \\ &= 7\times 3x + 7\times y + 7\times(-6) \\ &= 21x + 7y - 42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & 2(-3x+2y-1) \\ &= 2\times(-3x) + 2\times 2y + 2\times(-1) \\ &= -6x + 4y - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & -(3x-2y+2) \\ &= (-1)\times 3x + (-1)\times(-2y) + (-1)\times 2 \\ &= -3x + 2y - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad & -3(-2x+3y-1) \\ &= (-3)\times(-2x) + (-3)\times 3y + (-3)\times(-1) \\ &= 6x - 9y + 3 \end{aligned}$$

【練習】3.1.2-4

化簡下列各式：

(1) $3(2x+y-1)$

(2) $5(-x+2y-3)$

(3) $-(2x-7y+1)$

(4) $-3(-x+2y-6)$

例題 3.1.2-5

化簡下列各式：

$$(1) \frac{1}{2}(2x-8y+4)$$

$$(2) \frac{2}{5}(10x+15y-10)$$

$$(3) -\frac{3}{4}(8x-4y+16)$$

$$(4) -\frac{3}{7}(-7x+14y+49)$$

詳解：

$$(1) \frac{1}{2}(2x-8y+4)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \times 2x + \frac{1}{2} \times (-8y) + \frac{1}{2} \times 4 \\ &= x - 4y + 2 \end{aligned}$$

$$(2) \frac{2}{5}(10x+15y-10)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{5} \times 10x + \frac{2}{5} \times 15y + \frac{2}{5} \times (-10) \\ &= 4x + 6y - 4 \end{aligned}$$

$$(3) -\frac{3}{4}(8x-4y+16)$$

$$\begin{aligned} &= \left(-\frac{3}{4}\right) \times 8x + \left(-\frac{3}{4}\right) \times (-4y) + \left(-\frac{3}{4}\right) \times 16 \\ &= -6x + 3y - 12 \end{aligned}$$

$$(4) -\frac{3}{7}(-7x+14y+49)$$

$$\begin{aligned} &= \left(-\frac{3}{7}\right) \times (-7x) + \left(-\frac{3}{7}\right) \times 14y + \left(-\frac{3}{7}\right) \times 49 \\ &= 3x - 6y - 21 \end{aligned}$$

【練習】3.1.2-5

化簡下列各式：

$$(1) \frac{1}{3}(6x-3y+9)$$

$$(2) \frac{5}{6}(42x+18y-6)$$

$$(3) -\frac{2}{3}(9x-6y+12)$$

$$(4) -\frac{2}{11}(-11x+22y+33)$$

例題 3.1.2-6

化簡下列各式：

$$(1) 2(x+3y)-3(x-y)$$

$$(2) -2(3x+4y)+(2x+y)$$

$$(3) 2(-4x+2y-3)+3(x+y-7)$$

$$(4) -(2x-10y-6)-5(-3x+2y+1)$$

詳解：

$$\begin{aligned}(1) \quad & 2(x+3y)-3(x-y) \\ & = 2(x+3y)+(-3)(x-y) \\ & = 2 \times x + 2 \times 3y + (-3) \times x + (-3) \times (-y) \\ & = 2x + 6y - 3x + 3y \\ & = (2x - 3x) + (6y + 3y) \\ & = -x + 9y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad & -2(3x+4y)+(2x+y) \\ & = (-2) \times 3x + (-2) \times 4y + 2x + y \\ & = -6x - 8y + 2x + y \\ & = (-6x + 2x) + (-8y + y) \\ & = -4x - 7y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \quad & 2(-4x+2y-3)+3(x+y-7) \\ & = 2 \times (-4x) + 2 \times 2y + 2 \times (-3) \\ & \quad + 3 \times x + 3 \times y + 3 \times (-7) \\ & = -8x + 4y - 6 + 3x + 3y - 21 \\ & = (-8x + 3x) + (4y + 3y) + (-6 - 21) \\ & = -5x + 7y - 27\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) \quad & -(2x-10y-6)-5(-3x+2y+1) \\ & = -(2x-10y-6) + (-5) \times (-3x+2y+1) \\ & = (-1) \times 2x + (-1) \times (-10y) + (-1) \times (-6) \\ & \quad + (-5) \times (-3x) + (-5) \times 2y + (-5) \times 1 \\ & = -2x + 10y + 6 + 15x - 10y - 5 \\ & = (-2x + 15x) + (10y - 10y) + (6 - 5) \\ & = 13x + 1\end{aligned}$$

【練習】3.1.2-6

化簡下列各式：

$$(1) 3(2x+y)-2(x-2y)$$

$$(2) -2(x+3y)+(2x+7y)$$

$$(3) 2(-2x+3y-5)+3(x-2y-1)$$

$$(4) -(3x+y-2)-3(-2x+3y+5)$$

例題 3.1.2-7

化簡下列各式：

$$(1) 4\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y\right) - 7\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y\right)$$

$$(2) 3\left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{2}y - 1\right) - 2\left(x - 2y - \frac{2}{3}\right)$$

詳解：

$$(1) 4\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y\right) - 7\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y\right)$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y\right) + (-7)\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y\right)$$

$$= 4 \times \frac{1}{2}x + 4 \times \frac{1}{3}y + (-7) \times \frac{1}{2}x + (-7) \times \frac{2}{3}y$$

$$= 2x + \frac{4}{3}y - \frac{7}{2}x - \frac{14}{3}y$$

$$= \left(2x - \frac{7}{2}x\right) + \left(\frac{4}{3}y - \frac{14}{3}y\right)$$

$$= \left(\frac{4}{2}x - \frac{7}{2}x\right) + \left(\frac{4}{3}y - \frac{14}{3}y\right)$$

$$= -\frac{3}{2}x - \frac{10}{3}y$$

$$(2) 3\left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{2}y - 1\right) - 2\left(x - 2y - \frac{2}{3}\right)$$

$$= 3\left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{2}y - 1\right) + (-2)\left(x - 2y - \frac{2}{3}\right)$$

$$= 3 \times \frac{2}{5}x + 3 \times \frac{1}{2}y + 3 \times (-1) + (-2) \times x$$

$$+ (-2) \times (-2y) + (-2) \times \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{6}{5}x + \frac{3}{2}y - 3 - 2x + 4y + \frac{4}{3}$$

$$= \left(\frac{6}{5}x - 2x\right) + \left(\frac{3}{2}y + 4y\right) + \left(-3 + \frac{4}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{6}{5}x - \frac{10}{5}x\right) + \left(\frac{3}{2}y + \frac{8}{2}y\right) + \left(-\frac{9}{3} + \frac{4}{3}\right)$$

$$= -\frac{4}{5}x + \frac{11}{2}y - \frac{5}{3}$$

【練習】3.1.2-7

化簡下列各式：

$$(1) 3\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{5}y\right) - 2\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}y\right)$$

$$(2) 2\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y - 1\right) - (2x - 3y - \frac{2}{5})$$

例題 3.1.2-8

化簡下列各式：

$$(1) \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$$

$$(2) \frac{5x+2y}{3} - \frac{3x-y}{2}$$

詳解：

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \\ &= \frac{(x+y)+(x-y)}{2} \\ &= \frac{2x}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{5x+2y}{3} - \frac{3x-y}{2} \\ &= \frac{(5x+2y) \times 2}{3 \times 2} - \frac{(3x-y) \times 3}{2 \times 3} \quad (\text{通分}) \\ &= \frac{10x+4y}{6} - \frac{9x-3y}{6} \\ &= \frac{(10x+4y)-(9x-3y)}{6} \\ &= \frac{10x+4y-9x+3y}{6} \\ &= \frac{x+7y}{6} \end{aligned}$$

除了上面的解法外，我們也可以先將分數拆開再化簡，如下：

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \\ &= \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \\ &= \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) + \left(\frac{y}{2} - \frac{y}{2}\right) \\ &= \frac{2x}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{5x+2y}{3} - \frac{3x-y}{2} \\ &= \frac{5x}{3} + \frac{2y}{3} - \frac{3x}{2} + \frac{y}{2} \\ &= \left(\frac{5x}{3} - \frac{3x}{2}\right) + \left(\frac{2y}{3} + \frac{y}{2}\right) \\ &= \left(\frac{10x}{6} - \frac{9x}{6}\right) + \left(\frac{4y}{6} + \frac{3y}{6}\right) \\ &= \frac{x}{6} + \frac{7y}{6} \\ &= \frac{x+7y}{6} \end{aligned}$$

【練習】3.1.2-8

化簡下列各式：

$$(1) \frac{x-y}{3} - \frac{x-y}{3}$$

$$(2) \frac{2x-y}{3} - \frac{2x-3y}{4}$$

3.1.3 節 二元一次式的求值

本小節我們會給予未知數之值，來求出二元一次式的值

例題 3.1.3-1

假設 $x=3$ 且 $y=1$ ，求下列各式的值：

$$(1) x+5y$$

$$(2) 5x-5y$$

詳解：

$$(1) \quad x+5y$$

$$= (3)+5 \times (1)$$

$$= 3+5$$

$$= 8$$

$$(2) \quad 5x-5y$$

$$= 5 \times (3) - 5 \times (1)$$

$$= 15-5$$

$$= 10$$

【練習】3.1.3-1

假設 $x=2$ 且 $y=3$ ，求下列各式的值：

$$(1) 2x+3y$$

$$(2) 3x-2y$$

例題 3.1.3-2

假設 $x=3$ 且 $y=-1$ ，求下列各式的值：

$$(1) -x + 2y$$

$$(2) 3x - y$$

詳解：

$$(1) -x + 2y$$

$$= -(3) + 2 \times (-1)$$

$$= -3 - 2$$

$$= -5$$

$$(2) 3x - y$$

$$= 3 \times (3) - (-1)$$

$$= 9 + 1$$

$$= 10$$

【練習】3.1.3-2

假設 $x=-2$ 且 $y=3$ ，求下列各式的值：

$$(1) 2x - 3y$$

$$(2) -3x - 2y$$

例題 3.1.3-3

假設 $x=6$ 且 $y=-8$ ，求下列各式的值：

$$(1) \frac{1}{3}x - \frac{3}{4}y$$

$$(2) -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$$

詳解：

$$(1) \frac{1}{3}x - \frac{3}{4}y$$

$$= \frac{1}{3} \times (6) - \frac{3}{4} \times (-8)$$

$$= 2 + 6$$

$$= 8$$

$$(2) -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) \times (6) + \frac{1}{2} \times (-8)$$

$$= -3 - 4$$

$$= -7$$

【練習】3.1.3-3

假設 $x = -5$ 且 $y = -6$ ，求下列各式的值：

(1) $-\frac{2}{5}x + \frac{1}{2}y$

(2) $\frac{1}{5}x - \frac{2}{3}y$

3.1 節 習題

習題 3.1-1

下列何者為二元一次式？

- (A) $a+b+3$ (B) $3y-5$ (C) $a+b+c+10$
(D) $4x+5y-2$ (E) x^2-y^2-1

習題 3.1-2

抽屜裡原本有 a 元，再放入 b 元進去後，現在抽屜裡面有多少元？

(答案用 a 、 b 表示)

習題 3.1-3

假設 1 顆蘋果的價格是 x 元，1 顆橘子的價格是 y 元，今天小華要買 3 顆蘋果跟 3 顆橘子，那麼總共需花費多少元？

(答案用 x 、 y 表示)

習題 3.1-4

小美帶著 100 元去書局，先買了每枝 x 元的原子筆 5 枝和每枝 y 元的鉛筆 2 枝，又再買了 1 本 40 元的筆記本，則小美的身上剩下多少元？

(答案用 x 、 y 表示)

習題 3.1-5

每顆牛奶糖賣 4 元，每顆軟糖賣 5 元，買了 x 顆牛奶糖和 y 顆軟糖，總共需花費多少元？

(答案用 x 、 y 表示)

習題 3.1-6

若桌上有 50 元硬幣 x 個，10 元硬幣 y 個，那麼桌上總共有多少元？

(答案用 x 、 y 表示)

習題 3.1-7

博幼書局週年慶，全店商品八折。鉛筆每枝原價 10 元，原子筆每枝原價 15 元，小新買了 x 枝鉛筆及 y 枝原子筆，那麼總共需要多少元？

(答案用 x 、 y 表示)

習題 3.1-8

化簡下列各式：

(1) $3x+2y+3x+4y$

(2) $7x+8y+3y-5x$

(3) $2x-4y+5-4x-y+3$

(4) $-5x-2y-3+x-y-2$

習題 3.1-9

化簡下列各式：

$$(1) \frac{1}{4}x + y + \frac{3}{4}x + 2y$$

$$(2) 5x + 2y + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$$

$$(3) \frac{1}{7}x - 2y + 7 - \frac{5}{7}x + \frac{1}{2}y - 2$$

$$(4) \frac{3}{5}x + \frac{5}{4}y + \frac{2}{5}x - \frac{1}{4}y$$

習題 3.1-10

化簡下列各式：

$$(1) \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y$$

$$(2) \frac{2}{7}x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$$

習題 3.1-11

化簡下列各式：

$$(1) 2(3x + 2y - 5)$$

$$(2) 5(-2x + 3y - 2)$$

$$(3) -(x - y + 1)$$

$$(4) -4(-2x + y - 5)$$

習題 3.1-12

化簡下列各式：

$$(1) \frac{1}{4}(4x - 8y + 16)$$

$$(2) \frac{2}{3}(9x + 3y - 18)$$

$$(3) -\frac{1}{5}(10x - 5y + 25)$$

$$(4) -\frac{2}{7}(-14x + 7y + 35)$$

習題 3.1-13

化簡下列各式：

$$(1) 3(x+y) - 2(x-y)$$

$$(2) -2(2x+3y) + (3x+2y)$$

$$(3) 4(2x+3y-3) + 3(x+y-1)$$

$$(4) -(3x+5y-2) - 2(x+y+1)$$

習題 3.1-14

化簡下列各式：

$$(1) 3\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{5}y\right) - 2\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}y\right)$$

$$(2) 4\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{7}y - 1\right) - 3\left(x + y + \frac{1}{2}\right)$$

習題 3.1-15

化簡下列各式：

$$(1) \frac{2x+y}{3} + \frac{2x-y}{3}$$

$$(2) \frac{x+y}{2} - \frac{3x-y}{4}$$

習題 3.1-16

假設 $x=2$ 且 $y=3$ ，求下列各式的值：

$$(1) x + 2y$$

$$(2) 3x - 3y$$

習題 3.1-17

假設 $x=1$ 且 $y=-1$ ，求下列各式的值：

(1) $x+y$ (2) $x-y$

習題 3.1-18

假設 $x=4$ 且 $y=6$ ，求下列各式的值：

(1) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y$ (2) $-\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}y$

3.2 節 二元一次方程式

3.1 節我們已經學過二元一次式，本節我們將學習有關二元一次方程式的運算。

◆二元一次方程式：指含有兩個未知數(二元)，且未知數的次數是 1(一次)的等式(等號左右邊含有未知數或數字的式子)。

例如 $x + y = 1$ 、 $3x - 2y + 3 = 0$ 等都是二元一次方程式。

而像 $x + y - 1$ 、 $3x - 2y + 3$ 這些沒有等號，不是二元一次方程式，是屬於二元一次式。

3.2.1 節 二元一次方程式的化簡

本小節將練習二元一次方程式的化簡與移項，將未知數都移到等號的左側，不含未知數的部份移到等號右側，表示成 $ax + by = c$ 的形式，例如： $2x + 3y = 5$ 。

化簡二元一次方程式時可運用前章學過的等量公理或移項法則。

例題 3.2.1-1

化簡下列二元一次方程式：

$$(1) 2x + 3y = 5 + x$$

$$(2) 6x - 2y = -3x + 4y$$

$$(3) 4(5x - 3y + 1) = 3x - 4y$$

詳解：

$$(1) 2x + 3y = 5 + x$$

$$2x + 3y - x = 5 \quad (+x \text{ 移到另一邊變成 } -x)$$

$$(2 - 1)x + 3y = 5$$

$$x + 3y = 5$$

$$(2) 6x - 2y = -3x + 4y$$

$$6x - 2y + 3x = 4y \quad (-3x \text{ 移到另一邊變成 } +3x)$$

$$6x - 2y + 3x - 4y = 0 \quad (+4y \text{ 移到另一邊變成 } -4y)$$

$$(6+3)x + (-2-4)y = 0$$

$$9x - 6y = 0$$

$$(3) 4(5x - 3y + 1) = 3x - 4y$$

$$4 \times 5x + 4 \times (-3y) + 4 \times 1 = 3x - 4y$$

$$20x - 12y + 4 = 3x - 4y$$

$$20x - 12y + 4 - 3x = -4y \quad (+3x \text{ 移到另一邊變成 } -3x)$$

$$20x - 12y + 4 - 3x + 4y = 0 \quad (-4y \text{ 移到另一邊變成 } +4y)$$

$$(20-3)x + (-12+4)y + 4 = 0$$

$$17x + (-8)y + 4 = 0$$

$$17x - 8y = -4 \quad (+4 \text{ 移到另一邊變成 } -4)$$

【練習】3.2.1-1

化簡下列二元一次方程式：

$$(1) x + 2y = 2 + 4y$$

$$(2) -3x + 2y = -4x + y$$

$$(3) 2(3x - 4y + 5) = 2x - 4y$$

例題 3.2.1-2

化簡下列二元一次方程式：

$$(1) \frac{2}{3}(3x - 6y + 9) = \frac{1}{4}(4x - 4y + 12) \quad (2) \frac{x}{3} = 1 - \frac{y}{5}$$

$$(3) \frac{2x + y}{2} + \frac{2x - y}{3} = 1$$

詳解：

$$(1) \frac{2}{3}(3x - 6y + 9) = \frac{1}{4}(4x - 4y + 12)$$

$$\frac{2}{3} \times 3x + \frac{2}{3} \times (-6y) + \frac{2}{3} \times 9 = \frac{1}{4} \times 4x + \frac{1}{4} \times (-4y) + \frac{1}{4} \times 12$$

$$2x - 4y + 6 = x - y + 3$$

$$2x - 4y + 6 - x = -y + 3 \quad (+x \text{ 移到另一邊變成 } -x)$$

$$2x - 4y + 6 - x + y = 3 \quad (-y \text{ 移到另一邊變成 } +y)$$

$$2x - 4y - x + y = 3 - 6 \quad (+6 \text{ 移到另一邊變成 } -6)$$

$$(2 - 1)x + (-4 + 1)y = 3 - 6$$

$$x + (-3)y = -3$$

$$x - 3y = -3$$

$$(2) \frac{x}{3} = 1 - \frac{y}{5}$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$$

$$-\frac{y}{5} \text{ 移到另一邊變成 } +\frac{y}{5}$$

$$\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{5}\right) \times 15 = 1 \times 15$$

$$(等號二邊同 \times 15, \text{ 消去分母})$$

$$\frac{x}{3} \times 15 + \frac{y}{5} \times 15 = 15$$

$$5x + 3y = 15$$

$$(3) \frac{2x+y}{2} + \frac{2x-y}{3} = 1$$

$$\left(\frac{2x+y}{2} + \frac{2x-y}{3}\right) \times 6 = 1 \times 6$$

(等號二邊同 $\times 6$ ，消去分母)

$$\frac{2x+y}{2} \times 6 + \frac{2x-y}{3} \times 6 = 6$$

$$(2x+y) \times 3 + (2x-y) \times 2 = 6$$

$$2x \times 3 + y \times 3 + 2x \times 2 - y \times 2 = 6$$

$$6x + 3y + 4x - 2y = 6$$

$$(6+4)x + (3-2)y = 6$$

$$10x + y = 6$$

【練習】3.2.1-2

化簡下列二元一次方程式：

$$(1) \frac{3}{5}(10x - 20y + 15) = \frac{1}{3}(3x - 6y + 9) \quad (2) \frac{x}{4} = 3 - \frac{y}{5}$$

$$(3) \frac{3x+y}{3} + \frac{3x-y}{4} = 1$$

第 1 章中我們學過交叉相乘法化簡一元一次方程式，交叉相乘也可以運用在二元一次方程式的化簡：

$$\text{若 } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (\text{其中 } b \neq 0 \text{ 且 } d \neq 0)$$

我們可以將虛線連結的部份相乘： $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ ，得到 $ad = bc$

例題 3.2.1-3

化簡下列二元一次方程式：

$$(1) \frac{x+2}{3} = \frac{y}{2}$$

$$(2) \frac{x}{3} = y + 2$$

$$(3) \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \quad (y \neq 0)$$

$$(4) \frac{x-15}{y+15} = \frac{2}{5} \quad (y+15 \neq 0)$$

詳解：

$$(1) \frac{x+2}{3} = \frac{y}{2}$$

$$2(x+2) = 3y \quad (\text{運用交叉相乘})$$

$$2x+4 = 3y$$

$$2x-3y+4 = 0 \quad (+3y \text{ 移到另一邊變成 } -3y)$$

$$2x-3y = -4 \quad (+4 \text{ 移到另一邊變成 } -4)$$

$$(2) \frac{x}{3} = y + 2$$

$$\frac{x}{3} = \frac{y+2}{1}$$

$$x = 3(y+2) \quad (\text{運用交叉相乘})$$

$$x = 3y + 6$$

$$x - 3y = 6 \quad (+3y \text{ 移到另一邊變成 } -3y)$$

$$(3) \frac{x}{y} = \frac{2}{3}$$

$$3x = 2y \quad (\text{運用交叉相乘})$$

$$3x - 2y = 0 \quad (y \neq 0) \quad (+2y \text{ 移到另一邊變成 } -2y)$$

$$(4) \frac{x-15}{y+15} = \frac{2}{5}$$

$$5(x-15) = 2(y+15) \quad (\text{運用交叉相乘})$$

$$5x - 75 = 2y + 30$$

$$5x - 75 - 2y = 30 \quad (+2y \text{ 移到另一邊變成 } -2y)$$

$$5x - 2y = 30 + 75 \quad (-75 \text{ 移到另一邊變成 } +75)$$

$$5x - 2y = 105 \quad (y + 15 \neq 0)$$

【練習】3.2.1-3

化簡下列二元一次方程式：

$$(1) \frac{x-1}{4} = \frac{y}{3}$$

$$(2) \frac{x}{3} = y - 2$$

$$(3) -\frac{x}{y} = \frac{4}{5} \quad (y \neq 0)$$

$$(4) \frac{x+6}{y-6} = -\frac{2}{3} \quad (y-6 \neq 0)$$

例題 3.2.1-4

已知二元一次方程式 $x+4y=6$ ，試回答下列問題：

(1) $2x+8y=?$

(2) $-x-4y=?$

(3) $\frac{x}{4}+y=?$

(4) $\frac{x}{2}+2y+7=?$

詳解：

(1) 觀察可以發現， $x+4y=6$ 的左式乘以 2 剛好就是題目要求的 $2x+8y$ 。

$$(x+4y) \times 2 = 6 \times 2 \quad (\text{運用等量公理，左右都乘以 } 2)$$

$$2x+8y=12$$

(2) 觀察可以發現， $x+4y=6$ 的左式乘以 (-1) 剛好就是題目要求的 $-x-4y$ 。

$$(x+4y) \times (-1) = 6 \times (-1) \quad (\text{運用等量公理，左右都乘以 } -1)$$

$$-x-4y=-6$$

(3) 觀察可以發現， $x+4y=6$ 的左式除以 4 剛好就是題目要求的 $\frac{x}{4}+y$ 。

$$(x+4y) \div 4 = 6 \div 4 \quad (\text{運用等量公理，左右都除以 } 4)$$

$$\frac{x}{4} + y = \frac{6}{4}$$

$$\frac{x}{4} + y = \frac{3}{2}$$

(4) 題目式子是 $\frac{x}{2}+2y+7$ ，我們先只看有 x 、 y 的部份，也就是 $\frac{x}{2}+2y$ ，

$x+4y=6$ 的左式除以 2 剛好就是 $\frac{x}{2}+2y$ 。

$$(x+4y) \div 2 = 6 \div 2 \quad (\text{運用等量公理，左右都除以 } 2)$$

$$\frac{x}{2} + 2y = 3$$

$$\text{題目原式} = \frac{x}{2} + 2y + 7$$

$$= 3 + 7 \quad (\text{將 } \frac{x}{2} + 2y = 3 \text{ 代入})$$

$$= 10$$

【練習】3.2.1-4

已知二元一次方程式 $2x - 8y = 4$ ，試回答下列問題：

(1) $4x - 16y = ?$

(2) $x - 4y = ?$

(3) $-\frac{x}{2} + 2y = ?$

(4) $\frac{x}{4} - y + 5 = ?$

3.2.2 節 二元一次方程式的解

若將 x 、 y 分別以 a 、 b 代入二元一次方程式，可使等號成立，則我們稱 $x = a$ 、 $y = b$ 為方程式的解，我們習慣以數對 (a, b) 表示。

例題 3.2.2-1

下列哪些未知數的值是方程式 $-2x + 3y = 5$ 的解？

- (A) $x = 0$ ， $y = 0$ (B) $x = -1$ ， $y = 1$ (C) $x = 2$ ， $y = 1$
(D) $x = 5$ ， $y = 5$ (E) $x = 1$ ， $y = 3$

詳解：

(A) $-2x + 3y = (-2) \times (0) + 3 \times (0) = 0 + 0 = 0$
 $0 \neq 5$ ， $(0, 0)$ 不是此方程式的解。

(B) $-2x + 3y = (-2) \times (-1) + 3 \times (1) = 2 + 3 = 5$
 $5 = 5$ ， $(-1, 1)$ 是此方程式的解。

(C) $-2x + 3y = (-2) \times (2) + 3 \times (1) = -4 + 3 = -1$
 $-1 \neq 5$ ， $(2, 1)$ 不是此方程式的解。

(D) $-2x + 3y = (-2) \times (5) + 3 \times (5) = -10 + 15 = 5$
 $5 = 5$ ， $(-5, 5)$ 是此方程式的解。

(E) $-2x + 3y = (-2) \times (1) + 3 \times (3) = -2 + 9 = 7$
 $7 \neq 5$ ， $(1, 3)$ 不是此方程式的解。

所以(B)、(D)都是此方程式的解。

【練習】3.2.2-1

下列哪些未知數的值是方程式 $3x - 4y = 7$ 的解？

- (A) $x = 5$, $y = 2$ (B) $x = 0$, $y = 1$ (C) $x = -3$, $y = -2$
(D) $x = 1$, $y = -1$ (E) $x = 2$, $y = 0$

例題 3.2.2-2

若 $x = 3$, $y = -8$ 為方程式 $ax - 2y - 20 = 0$ 的解，試求 a 之值。

詳解：

$x = 3$, $y = -8$ 為方程式 $ax - 2y - 20 = 0$ 的解

也就是代入方程式會讓等式成立，我們將 $x = 3$, $y = -8$ 代入方程式：

$$ax - 2y - 20 = 0$$

$$a \times (3) - 2 \times (-8) - 20 = 0 \quad (\text{將 } x = 3, y = -8 \text{ 代入})$$

$$3a + 16 - 20 = 0$$

$$3a - 4 = 0$$

$$3a = 4 \quad (-4 \text{ 移到另一邊變成 } +4)$$

$$a = 4 \div 3 \quad (\times 3 \text{ 移到另一邊變成 } \div 3)$$

$$a = \frac{4}{3}$$

驗算：

將 $a = \frac{4}{3}$ 代入原方程式： $ax - 2y - 20 = 0$

檢查 $x = 3$, $y = -8$ 是否為方程式 $\frac{4}{3}x - 2y - 20 = 0$ 的解

$$\frac{4}{3}(3) - 2(-8) - 20 = 0$$

$$4 + 16 - 20 = 0$$

$$0 = 0$$

故得 $(3, -8)$ 是方程式 $\frac{4}{3}x - 2y - 20 = 0$ 的解

【練習】3.2.2-2

若 $x = 3$, $y = -2$ 為方程式 $ax - 3y - 9 = 0$ 的解，試求 a 之值。

例題 3.2.2-3

若 $x = 3$ ， $y = b$ 為方程式 $5x + 2y + 10 = 0$ 的解，試求 b 之值。

詳解：

$x = 3$ ， $y = b$ 為方程式 $5x + 2y + 10 = 0$ 的解

也就是代入方程式會讓等式成立，我們將 $x = 3$ ， $y = b$ 代入方程式：

$$5x + 2y + 10 = 0$$

$$5 \times (3) + 2 \times (b) + 10 = 0 \quad (\text{將 } x = 3, y = b \text{ 代入})$$

$$15 + 2b + 10 = 0$$

$$2b + 15 + 10 = 0$$

$$2b + 25 = 0$$

$$2b = -25 \quad (+25 \text{ 移到另一邊變成 } -25)$$

$$b = (-25) \div 2 \quad (\times 2 \text{ 移到另一邊變成 } \div 2)$$

$$b = -\frac{25}{2}$$

【練習】3.2.2-3

若 $x = 2$ ， $y = -b$ 為方程式 $x - 2y - 6 = 0$ 的解，試求 b 之值。

3.2.3 節 找出二元一次方程式的正整數解

前小節我們學習了如何判斷是否為二元一次方程式的解，本小節我們會練習如何從二元一次方程式找出正整數解，並應用在一些日常生活的數學問題。

例題 3.2.3-1

請找出 $2x + y = 6$ 的所有正整數解。

詳解：

因為是要找出正整數解，

我們將正整數 $x = 1$ 、 $x = 2$ 、 $x = 3 \cdots$ 依序代入方程式找出對應的 y 值。

當 $x = 1$ 時， $2 \times (1) + y = 6$ ，解得 $y = 4$ ， $(1, 4)$ 為一組正整數解。

當 $x = 2$ 時， $2 \times (2) + y = 6$ ，解得 $y = 2$ ， $(2, 2)$ 為一組正整數解。

當 $x = 3$ 時， $2 \times (3) + y = 6$ ，解得 $y = 0$ ， 0 不是正整數，不合題目要求。

當 $x = 4$ 時， $2 \times (4) + y = 6$ ，解得 $y = -2$ ， -2 不是正整數，不合題目要求。

列表：

x	1	2	3	4
y	4	2	0	-2

根據 y 值的規律，再往下找， y 之值都會是負數，故不再往下找。正整數解只有 $(1, 4)$ 和 $(2, 2)$ 。

【練習】3.2.3-1

請找出 $3x + 2y = 12$ 的所有正整數解。

x				
y				

例題 3.2.3-2

包子每個 20 元，饅頭每個 15 元，老李買一些包子與饅頭，共花 100 元，請寫出所有可能的買法。

詳解：

設包子買了 x 個，饅頭 y 個

購買包子的金額 + 購買饅頭的金額 = 總共花的金額

可依題意列式： $20x + 15y = 100$

老李包子與饅頭都有買，因此 x 、 y 不會是 0

又買包子饅頭的數量必須是整數，且不會是負數

故可知本題要求的是正整數解

我們將 $x = 1$ 、 $x = 2$ 、 $x = 3 \cdots$ 依序代入方程式找出對應的 y 值。

當 $x = 1$ 時， $20 \times (1) + 15y = 100$ ，解得 $y = \frac{16}{3}$ ，非整數。

當 $x = 2$ 時， $20 \times (2) + 15y = 100$ ，解得 $y = 4$ ，(2,4) 為一組正整數解。

當 $x = 3$ 時， $20 \times (3) + 15y = 100$ ，解得 $y = \frac{8}{3}$ ，非整數。

當 $x = 4$ 時， $20 \times (4) + 15y = 100$ ，解得 $y = \frac{4}{3}$ ，非整數。

當 $x = 5$ 時， $20 \times (5) + 15y = 100$ ，解得 $y = 0$ ，0 不合(題目說不能買 0 個)。

根據 y 值的規律，再往下找，會發現 y 之值都為負數，故我們不再往下找解。

列表：

x	1	2	3	4	5
y	$\frac{16}{3}$	4	$\frac{8}{3}$	$\frac{4}{3}$	0

正整數解只有 (2,4)。

也就是買法只有 2 個包子和 4 個饅頭這一種。

答：只有 1 種買法，買 2 個包子和 4 個饅頭。

【練習】3.2.3-2

原子筆 1 枝 15 元，鉛筆 1 枝 10 元，姊姊買了一些鉛筆和原子筆，共花 90 元，請寫出所有可能的買法。

x						
y						

例題 3.2.3-3

某飲料店 1 杯鮮奶茶 25 元，1 杯紅茶 10 元，哥哥今天這二種飲料各買了一些，若總共花 120 元，請問：

- (1) 哥哥有幾種買法？
- (2) 若二種飲料總共買了 9 杯，則鮮奶茶與奶茶各買了幾杯？

詳解：

- (1) 設鮮奶茶買了 x 杯，紅茶買了 y 杯

購買奶茶的金額 + 購買紅茶的金額 = 總共花的金額

可依題意列式： $25x + 10y = 120$

杯數需為正整數，因此要找出方程式的正整數解。

當 $x = 1$ 時， $25 \times (1) + 10y = 120$ ，解得 $y = \frac{19}{2}$ ，非整數。

當 $x = 2$ 時， $25 \times (2) + 10y = 120$ ，解得 $y = 7$ ， $(2, 7)$ 為一組正整數解。

當 $x = 3$ 時， $25 \times (3) + 10y = 120$ ，解得 $y = \frac{9}{2}$ ，非整數。

當 $x = 4$ 時， $25 \times (4) + 10y = 120$ ，解得 $y = 2$ ， $(4, 2)$ 為一組正整數解。

當 $x = 5$ 時， $25 \times (5) + 10y = 120$ ，解得 $y = -\frac{1}{2}$ ，非整數。

根據 y 值的規律，再往下找，會發現 y 之值都為負數，故我們不再往下找解。

列表：

x	1	2	3	4	5
y	$\frac{19}{2}$	7	$\frac{9}{2}$	2	$-\frac{1}{2}$

因此共有 2 種買法： 1. 買 2 杯鮮奶茶、7 杯紅茶。
2. 買 4 杯鮮奶茶、2 杯紅茶。

(2) 題目說二種飲料總共買了 9 杯

我們觀察第 1 小題中的二種買法：

1. 買 2 杯鮮奶茶、7 杯紅茶。總共是 9 杯。

2. 買 4 杯鮮奶茶、2 杯紅茶。總共是 6 杯。

可知符合共 9 杯的買法是買 2 杯鮮奶茶、7 杯紅茶。

答：(1) 有 2 種買法。

(2) 買 2 杯鮮奶茶、7 杯紅茶。

我們觀察例題 3.2.3-3

原本在二元一次方程式 $25x + 10y = 120$ 找 x 、 y 之解時，找到的解不只一組。

但若是加上第 2 小題的條件，二種飲料總共買了 9 杯，則可以找到特定一組解。

二種飲料總共買了 9 杯，可依題意將奶茶杯數 + 紅茶杯數 = 總共杯數，列式成

$$x + y = 9$$

也就是若 x 、 y 同時滿足方程式 $25x + 10y = 120$ 與 $x + y = 9$ ，

則 x 、 y 可找到特定一組解。

下一節我們將介紹 x 、 y 同時滿足二個二元一次方程式的情形，解二元一次聯立方程式。

3.2 節 習題

習題 3.2-1

化簡下列二元一次方程式：

$$(1) 4x + y = 1 + 2x$$

$$(2) 5x - 2y = -x + 2y$$

$$(3) 5(x + y + 1) = 4x - 3y$$

習題 3.2-2

化簡下列二元一次方程式：

$$(1) \frac{1}{2}(4x + 6y + 8) = \frac{1}{3}(3x - 3y - 9)$$

$$(2) \frac{x}{3} = 2 - \frac{y}{4}$$

$$(3) \frac{x + 2y}{3} + \frac{2x - y}{4} = 1$$

習題 3.2-3

化簡下列二元一次方程式：

$$(1) \frac{3x + 1}{4} = \frac{y}{3}$$

$$(2) \frac{x}{5} = y - 1$$

$$(3) \frac{x}{y} = \frac{1}{5} \quad (y \neq 0)$$

$$(4) \frac{x - 1}{y + 1} = \frac{3}{4} \quad (y + 1 \neq 0)$$

習題 3.2-4

下列哪些未知數的值是方程式 $5x + 2y = 0$ 的解？

- (A) $x = 1, y = 1$ (B) $x = 0, y = 0$ (C) $x = 3, y = -5$
(D) $x = 2, y = -5$ (E) $x = 1, y = -5$

習題 3.2-5

若 $x = 3, y = -2$ 為方程式 $ax - 2y - 19 = 0$ 的解，試求 a 之值。

習題 3.2-6

若 $x = 4, y = b$ 為方程式 $2x + 3y - 14 = 0$ 的解，試求 b 之值。

習題 3.2-7

請找出 $3x + y = 9$ 的所有正整數解。

習題 3.2-8

橘子每個 15 元，柳丁每個 10 元，小李買一些橘子與柳丁，共花 50 元，請寫出所有可能的買法。

習題 3.2-9

哥哥今天到郵局買了一些 5 元及 10 元的郵票，若總共花 30 元，請問：

(1) 哥哥有幾種買法？

(2) 若二種郵票總共買了 5 張，則 5 元及 10 元的郵票各買了幾張？

3.3 節 二元一次聯立方程式

本節中我們將介紹二元一次聯立方程式，讓我們先看一個常見的雞兔同籠題目：

某農場裡面有養雞和兔子共 20 隻，且雞和兔子共有 64 隻腳，請問雞和兔子各有幾隻？

以前同學可能學過用列表或一元一次的方式來解，這裡我們來用剛學過的二元一次方程式列式：

設雞有 x 隻，兔有 y 隻，

雞和兔子共有 20 隻，可列式： $x + y = 20$

雞和兔子共有 64 隻腳，可列式： $2x + 4y = 64$

因為這二個方程式的解是相同的，所以我們可以將它們並列：

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 2x + 4y = 64 \end{cases}$$

像這樣可以列出兩個二元一次方程式來表達題目中的數量關係，我們將兩個並列在一起，稱為二元一次聯立方程式或二元一次方程組。

本節我們會練習二元一次聯立方程式的列式與解的判別，至於從方程組解出 x 、 y 將會在 3.4 節及 3.5 節介紹。

3.3.1 節 二元一次聯立方程式的列式

例題 3.3.1-1

- (1) 小寶在街上某雜貨店買了 x 元的餅乾 3 包，又買了 y 元的麵包 2 個，總共是 35 元，可以怎麼列式？
- (2) 小綠在同一間雜貨店買了 x 元的餅乾 2 包，又買了 y 元的麵包 4 個，總共是 50 元，可以怎麼列式？
- (3) 如何寫成二元一次聯立方程式？

詳解：

- (1) x 元的餅乾 3 包，是 $3x$ 元。 y 元的麵包 2 個，是 $2y$ 元，總共是 35 元，列式： $3x + 2y = 35$
- (2) x 元的餅乾 2 包，是 $2x$ 元。 y 元的麵包 4 個，是 $4y$ 元，總共是 50 元，列式： $2x + 4y = 50$

$$(3) \begin{cases} 3x + 2y = 35 \\ 2x + 4y = 50 \end{cases}$$

【練習】3.3.1-1

- (1) 哥哥在文具店買了 x 元的鉛筆 2 枝，又買了 y 元的橡皮擦 3 個，總共是 35 元，可以怎麼列式？
- (2) 弟弟在同一間文具店買了 x 元的鉛筆 5 枝，又買了 y 元的橡皮擦 4 個，總共是 70 元，可以怎麼列式？
- (3) 如何寫成二元一次聯立方程式？

例題 3.3.1-2

小麗帶著 200 元到冰果室，買了 25 元的花生刨冰 x 碗和 30 元的牛奶刨冰 y 碗，之後剩下 10 元。若小麗共買了 7 碗刨冰，請問：

- (1) 小麗總共買了 7 碗刨冰，可以如何列出方程式？
- (2) 小麗買了刨冰之後剩下 10 元，可以如何列出方程式？
- (3) 如何寫成二元一次聯立方程式？

詳解：

- (1) 花生刨冰 x 碗、牛奶刨冰 y 碗，共 7 碗，可以列式： $x + y = 7$
- (2) 25 元的花生刨冰 x 碗和 30 元的牛奶刨冰 y 碗，共是 $(25x + 30y)$ 元。
原本帶著 200 元，之後剩下 10 元，也就是花了 $(200 - 10)$ 元。
列式： $25x + 30y = 200 - 10$

$$(3) \begin{cases} x + y = 7 \\ 25x + 30y = 200 - 10 \end{cases}$$

【練習】3.3.1-2

小陳帶著 170 元到麵包店，買了 30 元的培根麵包 x 個和 20 元的草莓麵包 y 個，之後剩下 20 元。若小陳共買了 6 個麵包，請問：

- (1) 小陳總共買了 6 個麵包，可以如何列出方程式？
- (2) 小陳買了麵包之後剩下 20 元，可以如何列出方程式？
- (3) 如何寫成二元一次聯立方程式？

例題 3.3.1-3

設一個二位數的十位數字為 x ，個位數字為 y ，兩個數字的和為 14，若將十位數字與個位數字對調後，所得新數比原數大 18，則：

- (1) 十位數字與個位數字的和為 14，可以如何列出方程式？
- (2) 對調前，此二位數之值如何以 x 、 y 表示？
- (3) 對調後，此二位數之值如何以 x 、 y 表示？
- (4) 所得新數比原數大 18，可以如何列出方程式？
- (5) 如何寫成二元一次聯立方程式？

詳解：

- (1) 十位數字為 x ，個位數字為 y ，兩個數字的和為 14，列式： $x + y = 14$
- (2) 十位數字為 x ，個位數字為 y ，二位數之值為 $(10x + y)$
- (3) 對調後，十位數字為 y ，個位數字為 x ，二位數之值為 $(10y + x)$
- (4) 新數之值為 $(10y + x)$ ，原數之值為 $(10x + y)$ ，所得新數比原數大 18，列式：

$$(10y + x) - (10x + y) = 18$$

$$(5) \begin{cases} x + y = 14 \\ (10y + x) - (10x + y) = 18 \end{cases}$$

【練習】3.3.1-3

設一個二位數的十位數字為 x ，個位數字為 y ，兩個數字的和為 11，若將十位數字與個位數字對調後，所得新數比原數大 9，則：

- (1) 十位數字與個位數字的和為 11，可以如何列出方程式？
- (2) 對調前，此二位數之值如何以 x 、 y 表示？
- (3) 對調後，此二位數之值如何以 x 、 y 表示？
- (4) 所得新數比原數大 9，可以如何列出方程式？
- (5) 如何寫成二元一次聯立方程式？

3.3.2 節 二元一次聯立方程式的解

本小節我們會練習將 x 、 y 之值代入二元一次方程式，判斷是否為聯立方程式的解。

若 x 、 y 之值代入後，可使二方程式的等號都成立，則為其解。

例題 3.3.2-1

$$x=1, y=1 \text{ 是否為聯立方程式 } \begin{cases} 3x-2y=1 \\ x+2y=3 \end{cases} \text{ 的解?}$$

詳解：

我們將題目給的 $x=1$ 、 $y=1$ 之值，代入方程組，看看等式是否成立。

$$3x-2y=3 \times (1)-2 \times (1)=3-2=1$$

$$x+2y=(1)+2 \times (1)=1+2=3$$

二個方程式都符合，可知 $x=1$ ， $y=1$ 是此聯立方程式的解。

【練習】3.3.2-1

$$x=2, y=1 \text{ 是否為聯立方程式 } \begin{cases} 3x-2y=4 \\ 4x+y=9 \end{cases} \text{ 的解?}$$

例題 3.3.2-2

$$x=3, y=-1 \text{ 是否為聯立方程式 } \begin{cases} x-y=4 \\ 2x+y=7 \end{cases} \text{ 的解?}$$

詳解：

我們將題目給的 $x=3$ 、 $y=-1$ 之值，代入方程組，看看等式是否成立。

$$x-y=(3)-(-1)=3+1=4$$

$$2x+y=2 \times (3)+(-1)=6-1=5 \neq 7$$

第二個方程式不符合，因此可知 $x=3$ ， $y=-1$ 不是此聯立方程式的解。

【練習】3.3.2-2

$x = 2$ ， $y = -2$ 是否為聯立方程式 $\begin{cases} 2x - 3y = -2 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$ 的解？

例題 3.3.2-3

$x = 1$ ， $y = 1$ 為下列哪一個二元一次聯立方程式的解？

- (A) $\begin{cases} 19x - 11y = 30 \\ 21x + 4y = 25 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 29x - 18y = 11 \\ 23x + 17y = 40 \end{cases}$
- (C) $\begin{cases} 15x + 17y = 32 \\ 16x - 11y = 27 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 37x + 17y = 20 \\ 16x - 15y = 31 \end{cases}$

詳解：

我們將題目給的 x 、 y 之值，代入每個選項的方程組，看看等式是否成立。

(A) $19x - 11y = 19 \times (1) - 11 \times (1) = 19 - 11 = 8 \neq 30$

$21x + 4y = 21 \times (1) + 4 \times (1) = 21 + 4 = 25$

第一個方程式不符合，不是此方程組的解

(B) $29x - 18y = 29 \times (1) - 18 \times (1) = 29 - 18 = 11$

$23x + 17y = 23 \times (1) + 17 \times (1) = 23 + 17 = 40$

二方程式都符合，是此方程組的解

(C) $15x + 17y = 15 \times (1) + 17 \times (1) = 15 + 17 = 32$

$16x - 11y = 16 \times (1) - 11 \times (1) = 16 - 11 = 5 \neq 27$

第二個方程式不符合，不是此方程組的解

(D) $37x + 17y = 37 \times (1) + 17 \times (1) = 37 + 17 = 54 \neq 20$

$16x - 15y = 16 \times (1) - 15 \times (1) = 16 - 15 = 1 \neq 31$

兩方程式都不符合，不是此方程組的解

答案為(B)

【練習】3.3.2-3

$x=1$ ， $y=-1$ 為下列哪一個二元一次聯立方程式的解？

$$(A) \begin{cases} 12x - 18y = -6 \\ 20x + 16y = 4 \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} 12x - 18y = -6 \\ 20x + 16y = 36 \end{cases}$$

$$(C) \begin{cases} 12x - 18y = 30 \\ 20x + 16y = 36 \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} 12x - 18y = 30 \\ 20x + 16y = 4 \end{cases}$$

例題 3.3.2-4

若 $x=2$ 、 $y=1$ 為二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 3x + ay = 7 \\ 2x + by = 6 \end{cases}$ 的解，試求 a 、 b 之值。

詳解：

題目已說明 $(2,1)$ 是聯立方程式的解，因此代入後等號會成立。

我們可在代入後再用解一元一次方程式的方法找出 a 、 b 之值。

找出 a ： $3x + ay = 7$

$$3 \times (2) + a \times (1) = 7 \quad (\text{將}(2,1)\text{代入})$$

$$6 + a = 7$$

$$a = 7 - 6$$

$$a = 1$$

找出 b ： $2x + by = 6$

$$2 \times (2) + b \times (1) = 6 \quad (\text{將}(2,1)\text{代入})$$

$$4 + b = 6$$

$$b = 6 - 4$$

$$b = 2$$

得到 $a=1$ 、 $b=2$ 。

驗算：為了驗證答案的正確性，我們將算出的 a 、 b 值代入原式驗算

將 $a = 1$ 、 $b = 2$ 代入聯立方程式，得：

$$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

將 $x = 2$ 、 $y = 1$ 代入 $3x + y = 7$

$$3 \times (2) + (1) = 7$$

$$7 = 7 \quad (\text{符合})$$

將 $x = 2$ 、 $y = 1$ 代入 $2x + 2y = 6$

$$2 \times (2) + 2 \times (1) = 6$$

$$6 = 6 \quad (\text{符合})$$

【練習】3.3.2-4

若 $x = 2$ 、 $y = -1$ 為二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x + ay = 1 \\ 5x - by = 13 \end{cases}$ 的解，試求 a 、 b 之值。

例題 3.3.2-5

若 $x = a$ 、 $y = 3$ 為二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 3x - 4y = -18 \\ 4x + by = 7 \end{cases}$ 的解，試求 a 、 b 之值。

詳解：

題目已說明 $(a, 3)$ 是聯立方程式的解，因此代入後等號會成立。

我們可先將 $(a, 3)$ 代入方程式 $3x - 4y = -18$ 中，來找出 a

之後再用與上題相同的方法找出 b

找出 a ： $3x - 4y = -18$

$$3 \times (a) - 4 \times (3) = -18 \quad (\text{將}(a, 3)\text{代入})$$

$$3a - 12 = -18$$

$$3a = -18 + 12$$

$$3a = -6$$

$$a = (-6) \div 3$$

$$a = -2$$

找出 b : $4x + by = 7$

$$4 \times (-2) + b \times (3) = 7 \text{ (剛剛解出 } a = -2 \text{ , 將 } (a, 3) \text{ 也就是 } (-2, 3) \text{ 代入)}$$

$$-8 + 3b = 7$$

$$3b = 7 + 8$$

$$3b = 15$$

$$b = 15 \div 3$$

$$b = 5$$

得到 $a = -2$ 、 $b = 5$ 。

驗算： 為了驗證答案的正確性，我們將算出的 a 、 b 值代入原式驗算

將 $b = 5$ 代入聯立方程式，得：

$$\begin{cases} 3x - 4y = -18 \\ 4x + 5y = 7 \end{cases}$$

將 $x = a = -2$ 、 $y = 3$ 代入 $3x - 4y = -18$

$$3 \times (-2) - 4 \times (3) = -18$$

$$-18 = -18 \quad (\text{符合})$$

將 $x = -2$ 、 $y = 3$ 代入 $4x + 5y = 7$

$$4 \times (-2) + 5 \times (3) = 7$$

$$7 = 7 \quad (\text{符合})$$

【練習】3.3.2-5

若 $x = a$ 、 $y = 3$ 為二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 3x - 5y = -9 \\ 4x + by = 11 \end{cases}$ 的解，試求 a 、 b 之值。

3.3 節 習題

習題 3.3-1

- (1) 小美在街上某水果攤買了 x 元的蘋果 4 顆，又買了 y 元的橘子 2 顆，總共是 150 元，可以怎麼列式？
- (2) 小玉在同一間水果攤買了 x 元的蘋果 1 顆，又買了 y 元的橘子 4 顆，總共是 90 元，可以怎麼列式？
- (3) 如何寫成二元一次聯立方程式？

習題 3.3-2

小芳帶著 150 元到書局，買了 35 元的筆記本 x 本和 20 元的原子筆 y 枝，之後剩下 20 元。若小芳共買了 5 樣商品，請問：

- (1) 小芳總共買了 5 樣商品，可以如何列出方程式？
- (2) 小芳買了筆記本及原子筆之後剩下 20 元，可以如何列出方程式？
- (3) 如何寫成二元一次聯立方程式？

習題 3.3-3

設一個二位數的十位數字為 x ，個位數字為 y ，兩個數字的和為 12，若將十位數字與個位數字對調後，所得新數比原數大 18，則：

- (1) 十位數字與個位數字的和為 12，可以如何列出方程式？
- (2) 對調前，此二位數之值如何以 x 、 y 表示？
- (3) 對調後，此二位數之值如何以 x 、 y 表示？
- (4) 所得新數比原數大 18，可以如何列出方程式？
- (5) 如何寫成二元一次聯立方程式？

習題 3.3-4

$x = 3$, $y = 2$ 是否為聯立方程式 $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$ 的解？

習題 3.3-5

$x = 1$, $y = 1$ 是否為聯立方程式 $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$ 的解？

習題 3.3-6

$x = 1$, $y = -1$ 為下列哪一個二元一次聯立方程式的解？

(A) $\begin{cases} 5x + 6y = -1 \\ 3x - 3y = 6 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} 4x + 5y = -1 \\ 4x + 3y = 7 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 5x + 6y = 11 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ 4x - 3y = 7 \end{cases}$

習題 3.3-7

若 $x = 2$ 、 $y = 3$ 為二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 3x + ay = 18 \\ 2x + by = 13 \end{cases}$ 的解，試求 a 、 b 之值。

習題 3.3-8

若 $x = a$ 、 $y = 2$ 為二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 3x + by = 7 \end{cases}$ 的解，試求 a 、 b 之值。

3.4 節 代入消去法求解二元一次聯立方程式

本節開始，我們將正式學習如何從二元一次聯立方程式求出解。

一般常用的方法有代入消去法與加減消去法兩種。

本節先介紹代入消去法：

在解聯立方程式的時候，我們可以將其中一個方程式中的某個未知數以另一個未知數與已知數來表示，將這個方程式化成一元一次方程式求出未知數的解，再代入另一個方程式中求出另一個未知數。

$$\text{例如要解} \begin{cases} x + y = 3 \dots\dots(1) \\ x - y = 1 \dots\dots(2) \end{cases}$$

(為了方便稱呼，將 $x + y = 3$ 設為(1)式， $x - y = 1$ 設為(2)式)

我們先將(1)式移項，將 x 用 $(-y + 3)$ 表示：

$$x + y = 3$$

$$x = -y + 3 \dots\dots(3)$$

如此便得到將 x 用 $(-y + 3)$ 表示的(3)式，再將(3)式代入(2)式中：

$$x - y = 1$$

$$(-y + 3) - y = 1 \quad (\text{將 } x \text{ 用 } (-y + 3) \text{ 取代})$$

$$-y + 3 - y = 1$$

$$-2y = -2$$

$$y = 1$$

這樣就求出了 y 之值，接著還要求出 x ，我們將 $y = 1$ 代回(1)式 (代入(2)、(3)式也可以)

$$x + y = 3$$

$$x + (1) = 3$$

$$x = 3 - 1$$

$$x = 2$$

於是我們使用代入消去法得到了聯立方程式 $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 的解是 $x = 2$ 、 $y = 1$

驗算：

與解一元一次方程式時相同，這裡我們也可以將解代回原式做驗算，來確認算出來的答案是否正確。

$$\begin{cases} x + y = 3 \dots\dots(1) \\ x - y = 1 \dots\dots(2) \end{cases}$$

將解 $x = 2$ 、 $y = 1$ 代入(1)式： $x + y = (2) + (1) = 3$

將解 $x = 2$ 、 $y = 1$ 代入(2)式： $x - y = (2) - (1) = 1$

(1) (2) 兩式等號都可成立，可確認所算出的解為正確答案。

3.4.1 節 直接型

本小節中，我們先從代入消去法較基本的直接型開始練習，也就是聯立方程式中其中有一式是可以直接代入的。

例題 3.4.1-1

(1) 解聯立方程式 $\begin{cases} x = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$

(2) 解聯立方程式 $\begin{cases} y = -2 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$

詳解：

(1)

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} x = 3 \dots\dots\dots(1) \\ x + y = 4 \dots\dots(2) \end{cases}$$

將(1)代入(2)：

$$x + y = 4$$

$$(3) + y = 4 \quad (\text{將 } x \text{ 用 } 3 \text{ 取代})$$

$$3 + y = 4$$

$$y = 4 - 3$$

$$y = 1$$

解得 $x = 3$ 、 $y = 1$ (請同學自行驗算看答案是否正確。)

(2)

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} y = -2 \dots\dots\dots(1) \\ 2x - y = 6 \dots\dots(2) \end{cases}$$

將(1)代入(2)：

$$2x - y = 6$$

$$2x - (-2) = 6 \quad (\text{將 } y \text{ 用 } -2 \text{ 取代})$$

$$2x + 2 = 6$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

解得 $x = 2$ 、 $y = -2$ (請同學自行驗算看答案是否正確。)

【練習】3.4.1-1

(1)解聯立方程式 $\begin{cases} x = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$

(2)解聯立方程式 $\begin{cases} y = -3 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$

例題 3.4.1-2

(1)解聯立方程式 $\begin{cases} y = 3x \\ 2x + y = 10 \end{cases}$

(2)解聯立方程式 $\begin{cases} x = 2y \\ 3x - y = 10 \end{cases}$

詳解：

(1)

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} y = 3x \dots\dots\dots(1) \\ 2x + y = 10 \dots\dots(2) \end{cases}$$

將(1)代入(2)：

$$2x + y = 10$$

$$2x + (3x) = 10 \quad (\text{將 } y \text{ 用 } 3x \text{ 取代})$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

再將 $x = 2$ 代回(1)，求出 y

$$y = 3x$$

$$y = 3 \times (2)$$

$$y = 6$$

解得 $x = 2$ 、 $y = 6$ (請同學自行驗算看答案是否正確。)

(2)

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} x = 2y \dots\dots\dots(1) \\ 3x - y = 10 \dots\dots(2) \end{cases}$$

將(1)代入(2)：

$$3x - y = 10$$

$$3 \times (2y) - y = 10 \quad (\text{將 } x \text{ 用 } 2y \text{ 取代})$$

$$6y - y = 10$$

$$5y = 10$$

$$y = 2$$

再將 $y = 2$ 代回(1)，求出 x

$$x = 2y$$

$$x = 2 \times (2)$$

$$x = 4$$

解得 $x = 4$ 、 $y = 2$

(請同學自行驗算看答案是否正確。)

【練習】3.4.1-2

$$(1) \text{解聯立方程式} \begin{cases} y = 2x \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

$$(2) \text{解聯立方程式} \begin{cases} x = 4y \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

例題 3.4.1-3

$$(1) \text{解聯立方程式} \begin{cases} 3y = 2x \\ 5x + 3y = 21 \end{cases}$$

$$(2) \text{解聯立方程式} \begin{cases} 5x = -2y \\ 5x - y = 15 \end{cases}$$

詳解：

(1)

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} 3y = 2x \dots\dots\dots(1) \\ 5x + 3y = 21 \dots\dots(2) \end{cases}$$

因為(1)與(2)中都有 $3y$ ，我們直接將 $3y = 2x$ 代入(2)：

$$5x + 3y = 21$$

$$5x + (2x) = 21 \quad (\text{將} 3y \text{用} 2x \text{取代})$$

$$7x = 21$$

$$x = 3$$

再將 $x = 3$ 代回(1)，求出 y

$$3y = 2x$$

$$3y = 2 \times (3)$$

$$3y = 6$$

$$y = 2$$

解得 $x = 3$ 、 $y = 2$ (請同學自行驗算看答案是否正確。)

(2)

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} 5x = -2y \dots\dots\dots(1) \\ 5x - y = 15 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

因為(1)與(2)中都有 $5x$ ，我們直接將 $5x = -2y$ 代入(2)：

$$5x - y = 15$$

$$(-2y) - y = 15 \quad (\text{將 } 5x \text{ 用 } -2y \text{ 取代})$$

$$-2y - y = 15$$

$$-3y = 15$$

$$y = -5$$

再將 $y = -5$ 代回(1)，求出 x

$$5x = -2y$$

$$5x = -2 \times (-5)$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

解得 $x = 2$ 、 $y = -5$ (請同學自行驗算看答案是否正確。)

【練習】3.4.1-3

(1)解聯立方程式 $\begin{cases} 2y = 3x \\ 7x + 2y = 20 \end{cases}$

(2)解聯立方程式 $\begin{cases} 3x = -y \\ 3x - 4y = 15 \end{cases}$

例題 3.4.1-4

$$(1) \text{解聯立方程式} \begin{cases} y = 5x + 2 \\ x + y = 20 \end{cases}$$

$$(2) \text{解聯立方程式} \begin{cases} y = 2x + 3 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$$

詳解：

(1)

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} y = 5x + 2 \dots\dots\dots(1) \\ x + y = 20 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

將(1)代入(2)：

$$x + y = 20$$

$$x + (5x + 2) = 20 \quad (\text{將 } y \text{ 用 } (5x + 2) \text{ 取代})$$

$$6x + 2 = 20$$

$$6x = 18$$

$$x = 3$$

再將 $x = 3$ 代回(1)，求出 y

$$y = 5x + 2$$

$$y = 5 \times (3) + 2$$

$$y = 15 + 2$$

$$y = 17$$

解得 $x = 3$ 、 $y = 17$ (請同學自行驗算看答案是否正確。)

(2)

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \dots\dots\dots(1) \\ 3x - y = -1 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

將(1)代入(2)：

$$3x - y = -1$$

$$3x - (2x + 3) = -1 \quad (\text{將 } y \text{ 用 } (2x + 3) \text{ 取代})$$

$$3x - 2x - 3 = -1$$

$$3x - 2x = -1 + 3$$

$$x = 2$$

再將 $x = 2$ 代回(1)，求出 y

$$y = 2x + 3$$

$$y = 2 \times (2) + 3$$

$$y = 4 + 3$$

$$y = 7$$

解得 $x = 2$ 、 $y = 7$

(請同學自行驗算看答案是否正確。)

【練習】3.4.1-4

(1)解聯立方程式 $\begin{cases} y = x + 1 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

(2)解聯立方程式 $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$

3.4.2 節 乘除型

本小節我們會練習需要先將式子移項或乘除才能代入的題目。

例題 3.4.2-1

$$(1) \text{解聯立方程式} \begin{cases} x - y = 5 \\ 3x + y = 23 \end{cases}$$

$$(2) \text{解聯立方程式} \begin{cases} 3x - y = 200 \\ 2x + y = 400 \end{cases}$$

詳解：

(1)

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} x - y = 5 \dots\dots\dots(1) \\ 3x + y = 23 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

兩式無法直接代入，但我們可將(1)式移項，將 y 用 x 表示，再代入(2)式

$$x - y = 5$$

移項得到： $y = x - 5 \dots\dots\dots(3)$

將(3)代入(2)：

$$3x + y = 23$$

$$3x + (x - 5) = 23 \quad (\text{將 } y \text{ 用 } (x - 5) \text{ 取代})$$

$$3x + x - 5 = 23$$

$$3x + x = 23 + 5$$

$$4x = 28$$

$$x = 7$$

再將 $x = 7$ 代回(3)，求出 y

$$y = x - 5$$

$$y = (7) - 5$$

$$y = 2$$

解得 $x = 7$ 、 $y = 2$

(請同學自行驗算看答案是否正確。)

(2)

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} 3x - y = 200 \dots\dots\dots(1) \\ 2x + y = 400 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

兩式無法直接代入，但我們可將(1)式移項，將 y 用 x 表示，再代入(2)式

$$3x - y = 200$$

移項得到： $y = 3x - 200 \dots\dots\dots(3)$

將(3)代入(2)：

$$2x + y = 400$$

$$2x + (3x - 200) = 400 \quad (\text{將 } y \text{ 用 } (3x - 200) \text{ 取代})$$

$$2x + 3x - 200 = 400$$

$$2x + 3x = 400 + 200$$

$$5x = 600$$

$$x = 120$$

再將 $x = 120$ 代回(3)，求出 y

$$y = 3x - 200$$

$$y = 3 \times (120) - 200$$

$$y = 360 - 200$$

$$y = 160$$

解得 $x = 120$ 、 $y = 160$ (請同學自行驗算看答案是否正確。)

【練習】3.4.2-1

(1)解聯立方程式 $\begin{cases} x - y = 2 \\ 4x + y = 14 \end{cases}$

(2)解聯立方程式 $\begin{cases} 6x - y = 400 \\ 3x + y = 500 \end{cases}$

例題 3.4.2-2

$$(1) \text{解聯立方程式} \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x + 5y = 17 \end{cases}$$

$$(2) \text{解聯立方程式} \begin{cases} 9x - 5y = 13 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases}$$

詳解：

(1)

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \dots\dots\dots(1) \\ 4x + 5y = 17 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

兩式的未知數係數都不一樣，但觀察一下可以發現，若將(1)式乘以 2，則兩式的 x 係數會相同。我們可先將(1)式乘以 2 後再移項，便可代入(2)式。

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 3 \\ (2x - 3y) \times 2 &= 3 \times 2 \\ 4x - 6y &= 6 \end{aligned}$$

移項得到： $4x = 6y + 6 \dots\dots\dots(3)$

將(3)代入(2)：

$$\begin{aligned} 4x + 5y &= 17 \\ (6y + 6) + 5y &= 17 \quad (\text{將 } 4x \text{ 用 } (6y + 6) \text{ 取代}) \\ 6y + 6 + 5y &= 17 \\ 6y + 5y &= 17 - 6 \\ 11y &= 11 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

再將 $y = 1$ 代回(3)，求出 x

$$\begin{aligned} 4x &= 6y + 6 \\ 4x &= 6 \times (1) + 6 \\ 4x &= 12 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

解得 $x = 3$ 、 $y = 1$ (請同學自行驗算看答案是否正確。)

(2)

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} 9x - 5y = 13 \dots\dots\dots(1) \\ 3x + 4y = 10 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

兩式的未知數係數都不一樣，但觀察一下可以發現，若將(2)式乘以3，則兩式的 x 係數會相同。我們可先將(2)式乘以3後再移項，便可代入(1)式。

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 10 \\ (3x + 4y) \times 3 &= 10 \times 3 \\ 9x + 12y &= 30 \end{aligned}$$

移項得到： $9x = 30 - 12y \dots\dots\dots(3)$

將(3)代入(1)：

$$\begin{aligned} 9x - 5y &= 13 \\ (30 - 12y) - 5y &= 13 && \text{(將 } 9x \text{ 用 } (30 - 12y) \text{ 取代)} \\ 30 - 12y - 5y &= 13 \\ -12y - 5y &= 13 - 30 \\ -17y &= -17 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

再將 $y = 1$ 代回(3)，求出 x

$$\begin{aligned} 9x &= 30 - 12y \\ 9x &= 30 - 12 \times (1) \\ 9x &= 30 - 12 \\ 9x &= 18 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

解得 $x = 2$ 、 $y = 1$ (請同學自行驗算看答案是否正確。)

【練習】3.4.2-2

(1)解聯立方程式
$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x + 5y = 11 \end{cases}$$

(2)解聯立方程式
$$\begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ 7x + 10y = 31 \end{cases}$$

3.4 節 習題

習題 3.4-1

$$(1) \text{解聯立方程式} \begin{cases} x = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$(2) \text{解聯立方程式} \begin{cases} y = -1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

習題 3.4-2

$$(1) \text{解聯立方程式} \begin{cases} y = 5x \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

$$(2) \text{解聯立方程式} \begin{cases} x = 2y \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

習題 3.4-3

$$(1) \text{解聯立方程式} \begin{cases} 2y = 5x \\ 5x + 2y = 10 \end{cases}$$

$$(2) \text{解聯立方程式} \begin{cases} 2x = -3y \\ 2x - 3y = -6 \end{cases}$$

習題 3.4-4

$$(1) \text{解聯立方程式} \begin{cases} y = x - 2 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$$

$$(2) \text{解聯立方程式} \begin{cases} y = x + 1 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

習題 3.4-5

(1) 解聯立方程式 $\begin{cases} x + y = 5 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$

(2) 解聯立方程式 $\begin{cases} 2x - y = 10 \\ x + y = 8 \end{cases}$

習題 3.4-6

(1) 解聯立方程式 $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x + 5y = 16 \end{cases}$

(2) 解聯立方程式 $\begin{cases} 4x + 3y = 24 \\ 8x - y = 20 \end{cases}$

3.5 節 加減消去法求解二元一次聯立方程式

在上一節裡我們學會利用代入消去法解二元一次聯立方程式，接下來我們介紹另一種解二元一次聯立方程式的方法—加減消去法。

加減消去法是在解聯立方程式的時候，我們將兩個式子相加或相減，消去其中一個未知數，以求出解。

例如：我們要解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x + 2y = 4 \dots\dots(1) \\ x - y = 1 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$

因為兩式中 x 的係數都相同，若兩式相減則可消去 x ：

$$\begin{aligned} (1)-(2) \quad & (x + 2y) - (x - y) = 4 - 1 \quad (\text{兩式等號左邊相減，右邊也相減}) \\ & x + 2y - x + y = 4 - 1 \\ & (x - x) + (2y + y) = 4 - 1 \\ & 3y = 3 \\ & y = 1 \end{aligned}$$

再將 $y = 1$ 代入(2)式，求出 x ：

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x - (1) &= 1 \\ x &= 1 + 1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

於是我們使用加減消去法解出了 $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 的解是 $x = 2$ 、 $y = 1$

加減消去法的原理是什麼呢？

我們先回顧以前學過的等量公理

如果現在有兩式 $a = b$ 與 $c = d$

由等量公理可以知道：

$$a + c = b + c \quad (\text{在等號二邊同加 } c, \text{ 等式仍會成立})$$

$$\text{因為 } c = d, \text{ 將等號右邊的 } c \text{ 用 } d \text{ 取代, 所以 } a + c = b + d$$

相減的情形也相同：

$$a - c = b - c \quad (\text{在等號二邊同減 } c, \text{ 等式仍會成立})$$

$$\text{因為 } c = d, \text{ 將等號右邊的 } c \text{ 用 } d \text{ 取代, 所以 } a - c = b - d$$

也就是說，如果有聯立方程式 $\begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases}$

則兩式相加或相減也會相等：

$$\text{相加： } a + c = b + d$$

$$\text{相減： } a - c = b - d$$

3.5.1 節 直接型

本小節將練習解未知數係數相同，可直接使用加減消去法的二元一次聯立方程式。

例題 3.5.1-1

$$(1) \text{解聯立方程式} \begin{cases} 2x + y = 10 \\ x + y = 9 \end{cases}$$

$$(2) \text{解聯立方程式} \begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

詳解：

(1)

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \dots\dots(1) \\ x + y = 9 \dots\dots(2) \end{cases}$$

因為兩式中 y 的係數都相同，若兩式相減則可消去 y ：

$$(1) - (2) \quad (2x + y) - (x + y) = 10 - 9$$

$$2x + y - x - y = 10 - 9$$

$$(2x - x) + (y - y) = 10 - 9$$

$$x = 1$$

再將 $x = 1$ 代入(2)式，求出 y ：

$$x + y = 9$$

$$(1) + y = 9$$

$$y = 9 - 1$$

$$y = 8$$

得到解為 $x = 1$ 、 $y = 8$

驗算：

與解一元一次方程式時相同，這裡我們也可以將解代回原式做驗算，來確認算出來的答案是否正確。

將解 $x = 1$ 、 $y = 8$ 代入(1)式： $2x + y = 2 \times (1) + 8 = 2 + 8 = 10$

將解 $x = 1$ 、 $y = 8$ 代入(2)式： $x + y = 1 + 8 = 9$

(1) (2) 兩式等號都可成立，可確認所算出的解為正確答案。

同學在練習時也要自行對各題做驗算檢查答案是否正確。

(2)

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \dots\dots(1) \\ x - 2y = 0 \dots\dots(2) \end{cases}$$

因為兩式中 x 的係數都相同，若兩式相減則可消去 x ：

$$(1) - (2) \quad (x + 3y) - (x - 2y) = 5 - 0$$

$$x + 3y - x + 2y = 5 - 0$$

$$(x - x) + (3y + 2y) = 5 - 0$$

$$5y = 5$$

$$y = 1$$

再將 $y = 1$ 代入(2)式，求出 x ：

$$x - 2y = 0$$

$$x - 2 \times (1) = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

得到解為 $x = 2$ 、 $y = 1$ (請同學自行驗算看答案是否正確。)

【練習】3.5.1-1

(1)解聯立方程式 $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$

(2)解聯立方程式 $\begin{cases} 5x + 2y = -3 \\ 7x + 2y = -5 \end{cases}$

例題 3.5.1-2

$$(1) \text{解聯立方程式} \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$(2) \text{解聯立方程式} \begin{cases} x + 5y = 6 \\ -x - 2y = -3 \end{cases}$$

詳解：

(1)

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \dots\dots(1) \\ x - y = 2 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

因為兩式中 y 的係數剛好是相反數，若兩式相加則可消去 y ：

$$\begin{aligned} (1) + (2) \quad (2x + y) + (x - y) &= 7 + 2 \\ 2x + y + x - y &= 7 + 2 \\ (2x + x) + (y - y) &= 7 + 2 \\ 3x &= 9 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

再將 $x = 3$ 代入(2)式，求出 y ：

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ (3) - y &= 2 \\ -y &= 2 - 3 \\ -y &= -1 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

得到解為 $x = 3$ 、 $y = 1$ (請同學自行驗算看答案是否正確。)

(2)

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} x + 5y = 6 \dots\dots\dots(1) \\ -x - 2y = -3 \dots\dots(2) \end{cases}$$

因為兩式中 x 的係數剛好是相反數，若兩式相加則可消去 x ：

$$(1) + (2) \quad (x + 5y) + (-x - 2y) = 6 + (-3)$$

$$x + 5y - x - 2y = 6 - 3$$

$$(x - x) + (5y - 2y) = 6 - 3$$

$$3y = 3$$

$$y = 1$$

再將 $y = 1$ 代入(2)式，求出 x ：

$$-x - 2y = -3$$

$$-x - 2 \times (1) = -3$$

$$-x - 2 = -3$$

$$-x = -3 + 2$$

$$-x = -1$$

$$x = 1$$

得到解為 $x = 1$ 、 $y = 1$ (請同學自行驗算看答案是否正確。)

【練習】3.5.1-2

$$(1) \text{解聯立方程式} \begin{cases} x - 5y = 1 \\ -x + 7y = 1 \end{cases}$$

$$(2) \text{解聯立方程式} \begin{cases} 4x + 3y = 11 \\ 5x - 3y = 7 \end{cases}$$

3.5.2 節 單乘型

本小節將練習解一個未知數係數成倍數關係的聯立方程式。

例題 3.5.2-1

$$(1) \text{解聯立方程式} \begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + 5y = 3 \end{cases}$$

$$(2) \text{解聯立方程式} \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 5x - 6y = 9 \end{cases}$$

詳解：

(1)

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \dots\dots\dots(1) \\ 2x + 5y = 3 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

兩式未知數係數都不相同。但觀察可發現，若將(1)式乘以 2，則 x 係數會相同，便可相減消去 x ：

$$(1) \times 2 \quad (x + 3y) \times 2 = 2 \times 2 \\ 2x + 6y = 4 \dots\dots\dots(3)$$

$$(3) - (2) \quad (2x + 6y) - (2x + 5y) = 4 - 3 \\ 2x + 6y - 2x - 5y = 4 - 3 \\ (2x - 2x) + (6y - 5y) = 4 - 3 \\ y = 1$$

再將 $y = 1$ 代入(1)式，求出 x ：

$$x + 3y = 2 \\ x + 3 \times (1) = 2 \\ x + 3 = 2 \\ x = 2 - 3 \\ x = -1$$

得到解為 $x = -1$ 、 $y = 1$

(請同學自行驗算看答案是否正確。)

(2)

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \dots\dots(1) \\ 5x - 6y = 9 \dots\dots(2) \end{cases}$$

兩式未知數係數都不相同。但觀察可發現，若將(1)式乘以 2，則 y 係數會相同，便可相減消去 y ：

$$\begin{aligned} (1) \times 2 & \quad (2x - 3y) \times 2 = 3 \times 2 \\ & \quad 4x - 6y = 6 \dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) - (2) & \quad (4x - 6y) - (5x - 6y) = 6 - 9 \\ & \quad 4x - 6y - 5x + 6y = 6 - 9 \\ & \quad (4x - 5x) + (-6y + 6y) = 6 - 9 \\ & \quad -x = -3 \\ & \quad x = 3 \end{aligned}$$

再將 $x = 3$ 代入(1)式，求出 y ：

$$\begin{aligned} 2x - 3y & = 3 \\ 2 \times (3) - 3y & = 3 \\ 6 - 3y & = 3 \\ -3y & = 3 - 6 \\ -3y & = -3 \\ y & = 1 \end{aligned}$$

得到解為 $x = 3$ 、 $y = 1$ (請同學自行驗算看答案是否正確。)

【練習】3.5.2-1

(1)解聯立方程式 $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 6x + 5y = 17 \end{cases}$

(2)解聯立方程式 $\begin{cases} 7x + 8y = -1 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$

例題 3.5.2-2

$$(1) \text{解聯立方程式} \begin{cases} 3x + 5y = -1 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$$

$$(2) \text{解聯立方程式} \begin{cases} 4x - 3y = 11 \\ -2x - 7y = 3 \end{cases}$$

詳解：

(1)

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} 3x + 5y = -1 \dots\dots\dots(1) \\ 2x - y = -5 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

兩式未知數係數都不相同。但觀察可發現，若將(2)式乘以5，則y係數會是相反數，相加便可消去y：

$$(2) \times 5 \quad (2x - y) \times 5 = (-5) \times 5 \\ 10x - 5y = -25 \dots\dots\dots(3)$$

$$(1) + (3) \quad (3x + 5y) + (10x - 5y) = (-1) + (-25) \\ 3x + 5y + 10x - 5y = -1 - 25 \\ (3x + 10x) + (5y - 5y) = -1 - 25 \\ 13x = -26 \\ x = -2$$

再將 $x = -2$ 代入(1)式，求出y：

$$3x + 5y = -1 \\ 3 \times (-2) + 5y = -1 \\ -6 + 5y = -1 \\ 5y = -1 + 6 \\ 5y = 5 \\ y = 1$$

得到解為 $x = -2$ 、 $y = 1$ (請同學自行驗算看答案是否正確。)

(2)

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} 4x - 3y = 11 \dots\dots(1) \\ -2x - 7y = 3 \dots\dots(2) \end{cases}$$

兩式未知數係數都不相同。但觀察可發現，若將(2)式乘以2，則 x 係數會是相反數，相加便可消去 x ：

$$\begin{aligned} (2) \times 2 \quad & (-2x - 7y) \times 2 = 3 \times 2 \\ & -4x - 14y = 6 \dots\dots(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) + (3) \quad & (4x - 3y) + (-4x - 14y) = 11 + 6 \\ & 4x - 3y - 4x - 14y = 11 + 6 \\ & (4x - 4x) + (-3y - 14y) = 11 + 6 \\ & -17y = 17 \\ & y = -1 \end{aligned}$$

再將 $y = -1$ 代入(1)式，求出 x ：

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 11 \\ 4x - 3 \times (-1) &= 11 \\ 4x + 3 &= 11 \\ 4x &= 11 - 3 \\ 4x &= 8 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

得到解為 $x = 2$ 、 $y = -1$ (請同學自行驗算看答案是否正確。)

【練習】3.5.2-2

(1)解聯立方程式 $\begin{cases} 2x - 5y = -3 \\ -6x + 7y = 1 \end{cases}$

(2)解聯立方程式 $\begin{cases} 5x + 9y = -4 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$

3.5.3 節 雙乘型

前小節我們練習了需要一個方程式乘以整數後才能消去的題目，本小節我們會練習兩方程式都需要乘整數才能消去的題目類型。

例題 3.5.3-1

$$(1) \text{解聯立方程式} \begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$$

$$(2) \text{解聯立方程式} \begin{cases} 7x - 3y = 1 \\ 3x - 5y = -7 \end{cases}$$

詳解：

(1)

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \dots\dots\dots(1) \\ 3x - 2y = 5 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

兩式未知數係數都不相同。但觀察可發現，若將(1)式乘以3，(2)式乘以2，則 x 係數會相同，相減便可消去 x ：(也就是找最小公倍數)

$$(1) \times 3 \quad (2x + 3y) \times 3 = (-1) \times 3 \\ 6x + 9y = -3 \dots\dots\dots(3)$$

$$(2) \times 2 \quad (3x - 2y) \times 2 = 5 \times 2 \\ 6x - 4y = 10 \dots\dots\dots(4)$$

$$(3) - (4) \quad (6x + 9y) - (6x - 4y) = (-3) - (10) \\ 6x + 9y - 6x + 4y = -3 - 10 \\ (6x - 6x) + (9y + 4y) = -3 - 10 \\ 13y = -13 \\ y = -1$$

再將 $y = -1$ 代入(1)式，求出 x ：

$$2x + 3y = -1 \\ 2x + 3 \times (-1) = -1 \\ 2x - 3 = -1$$

$$2x = -1 + 3$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

得到解為 $x = 1$ 、 $y = -1$ (請同學自行驗算看答案是否正確。)

(2)

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} 7x - 3y = 1 \dots\dots\dots(1) \\ 3x - 5y = -7 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

兩式未知數係數都不相同。但觀察可發現，若將(1)式乘以5，(2)式乘以3，則 y 係數會相同，相減便可消去 y ：

$$\begin{aligned} (1) \times 5 & \quad (7x - 3y) \times 5 = (1) \times 5 \\ & \quad 35x - 15y = 5 \dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \times 3 & \quad (3x - 5y) \times 3 = (-7) \times 3 \\ & \quad 9x - 15y = -21 \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) - (4) & \quad (35x - 15y) - (9x - 15y) = (5) - (-21) \\ & \quad 35x - 15y - 9x + 15y = 5 + 21 \\ & \quad (35x - 9x) + (-15y + 15y) = 5 + 21 \\ & \quad 26x = 26 \\ & \quad x = 1 \end{aligned}$$

再將 $x = 1$ 代入(1)式，求出 y ：

$$\begin{aligned} 7x - 3y & = 1 \\ 7 \times (1) - 3y & = 1 \\ 7 - 3y & = 1 \\ -3y & = 1 - 7 \\ -3y & = -6 \\ y & = 2 \end{aligned}$$

得到解為 $x = 1$ 、 $y = 2$ (請同學自行驗算看答案是否正確。)

上面例題中，其實解法有許多種，例如第 2 題
$$\begin{cases} 7x - 3y = 1 \dots\dots\dots(1) \\ 3x - 5y = -7 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

我們也可以將(1)式乘以 3，(2)式乘以 7 來相減消去 x

或者若我們不拘泥於整數計算，也可以將(1)乘以 $\frac{3}{7}$ ，用單乘型的作法消去 x ：

$$\begin{aligned} (1) \times \frac{3}{7} \quad (7x - 3y) \times \frac{3}{7} &= (1) \times \frac{3}{7} \\ 3x - \frac{9}{7}y &= \frac{3}{7} \dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

$$(3) - (2) \quad (3x - \frac{9}{7}y) - (3x - 5y) = (\frac{3}{7}) - (-7)$$

$$3x - \frac{9}{7}y - 3x + 5y = \frac{3}{7} + 7$$

$$(3x - 3x) + (-\frac{9}{7}y + 5y) = \frac{3}{7} + 7$$

$$(-\frac{9}{7} + \frac{35}{7}y) = \frac{3}{7} + \frac{49}{7}$$

$$\frac{26}{7}y = \frac{52}{7}$$

$$y = 2$$

再將 $y = 2$ 代入(1)式，求出 x ：

$$7x - 3y = 1$$

$$7x - 3 \times (2) = 1$$

$$7x - 6 = 1$$

$$7x = 1 + 6$$

$$7x = 7$$

$$x = 1$$

我們一樣得到了解為 $x = 1$ 、 $y = 2$

但是因為乘上了分數會使得計算較為複雜，所以一般我們選擇讓兩式都乘以整數，以雙乘型來計算。

【練習】3.5.3-1

$$(1) \text{解聯立方程式} \begin{cases} 3x + 5y = 4 \\ 5x + 3y = 12 \end{cases}$$

$$(2) \text{解聯立方程式} \begin{cases} 6x + 2y = 26 \\ 5x - 3y = -11 \end{cases}$$

例題 3.5.3-2

$$(1) \text{解聯立方程式} \begin{cases} 2x - 5y = -11 \\ -3x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$(2) \text{解聯立方程式} \begin{cases} -2x - 7y = 19 \\ 5x + 2y = -1 \end{cases}$$

詳解：

(1)

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} 2x - 5y = -11 \dots\dots\dots(1) \\ -3x + 2y = 0 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

兩式未知數係數都不相同。但觀察可發現，若將(1)式乘以3，(2)式乘以2，則 x 係數會成相反數，相加便可消去 x ：

$$(1) \times 3 \quad (2x - 5y) \times 3 = (-11) \times 3 \\ 6x - 15y = -33 \dots\dots\dots(3)$$

$$(2) \times 2 \quad (-3x + 2y) \times 2 = 0 \times 2 \\ -6x + 4y = 0 \dots\dots\dots(4)$$

$$(3) + (4) \quad (6x - 15y) + (-6x + 4y) = (-33) + (0) \\ 6x - 15y - 6x + 4y = -33 + 0 \\ (6x - 6x) + (-15y + 4y) = -33$$

$$-11y = -33$$

$$y = 3$$

再將 $y = 3$ 代入(1)式，求出 x ：

$$2x - 5y = -11$$

$$2x - 5 \times (3) = -11$$

$$2x - 15 = -11$$

$$2x = -11 + 15$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

得到解為 $x = 2$ 、 $y = 3$ (請同學自行驗算看答案是否正確。)

(2)

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} -2x - 7y = 19 \dots\dots(1) \\ 5x + 2y = -1 \dots\dots(2) \end{cases}$$

兩式未知數係數都不相同。但觀察可發現，若將(1)式乘以 2，(2)式乘以 7，則 y 係數會成相反數，相加便可消去 y ：

$$\begin{aligned} (1) \times 2 & \quad (-2x - 7y) \times 2 = (19) \times 2 \\ & \quad -4x - 14y = 38 \dots\dots(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \times 7 & \quad (5x + 2y) \times 7 = (-1) \times 7 \\ & \quad 35x + 14y = -7 \dots\dots(4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) + (4) & \quad (-4x - 14y) + (35x + 14y) = (38) + (-7) \\ & \quad -4x - 14y + 35x + 14y = 38 - 7 \\ & \quad (-4x + 35x) + (-14y + 14y) = 38 - 7 \\ & \quad 31x = 31 \\ & \quad x = 1 \end{aligned}$$

再將 $x = 1$ 代入(2)式，求出 y ：

$$5x + 2y = -1$$

$$5 \times (1) + 2y = -1$$

$$5 + 2y = -1$$

$$2y = -1 - 5$$

$$2y = -6$$

$$y = -3$$

得到解為 $x = 1$ 、 $y = -3$

(請同學自行驗算看答案是否正確。)

【練習】3.5.3-2

(1) 解聯立方程式
$$\begin{cases} 7x - 2y = 3 \\ -5x + 3y = 1 \end{cases}$$

(2) 解聯立方程式
$$\begin{cases} -11x - 7y = 3 \\ 3x + 5y = -7 \end{cases}$$

3.5.4 節 分數與小數型

若是遇到分數或小數的題型，直接以分數或小數做的運算會比較複雜，因此我們可以
先將方程式化為整數後再運算。

例題 3.5.4-1

$$\text{解聯立方程式} \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 4 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 4 \end{cases}$$

詳解：

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 4 \dots\dots(1) \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 4 \dots\dots(2) \end{cases}$$

題目中有分數，為了方便計算，我們將兩方程式分別乘以分母的最小公倍數，以化為整數。

$$(1) \times 6 \quad \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right) \times 6 = 4 \times 6 \\ 3x + 2y = 24 \dots\dots(3)$$

$$(2) \times 4 \quad \left(\frac{x}{4} + \frac{y}{2}\right) \times 4 = 4 \times 4 \\ x + 2y = 16 \dots\dots(4)$$

於是我們要解的方程組就變成了：
$$\begin{cases} 3x + 2y = 24 \dots\dots(3) \\ x + 2y = 16 \dots\dots(4) \end{cases}$$

此方程組可以用加減法求解

$$(3) - (4) \quad (3x + 2y) - (x + 2y) = (24) - (16) \\ 3x + 2y - x - 2y = 24 - 16 \\ (3x - x) + (2y - 2y) = 24 - 16 \\ 2x = 8 \\ x = 4$$

再將 $x = 4$ 代入(4)式，求出 y ：

$$x + 2y = 16$$

$$(4) + 2y = 16$$

$$4 + 2y = 16$$

$$2y = 16 - 4$$

$$2y = 12$$

$$y = 6$$

得到解為 $x = 4$ 、 $y = 6$

(請同學自行驗算看答案是否正確。)

【練習】3.5.4-1

$$\text{解聯立方程式} \begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{y}{2} = \frac{5}{2} \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

例題 3.5.4-2

$$\text{解聯立方程式 } \begin{cases} \frac{x+1}{y} = \frac{7}{3} \\ x+y=9 \end{cases}$$

詳解：

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} \frac{x+1}{y} = \frac{7}{3} \dots\dots(1) \\ x+y=9 \dots\dots(2) \end{cases}$$

先利用交叉相乘化簡(1)式：

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{y} &= \frac{7}{3} \\ 3(x+1) &= 7y \\ 3x+3 &= 7y \\ 3x-7y &= -3 \dots\dots(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \times 3 \quad (x+y) \times 3 &= 9 \times 3 \\ 3x+3y &= 27 \dots\dots(4) \end{aligned}$$

$$\text{於是我們要解的方程組就變成了：} \begin{cases} 3x-7y = -3 \dots\dots(3) \\ 3x+3y = 27 \dots\dots(4) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (4) - (3) \quad (3x+3y) - (3x-7y) &= (27) - (-3) \\ 3x+3y-3x+7y &= 27+3 \\ (3x-3x) + (3y+7y) &= 27+3 \\ 10y &= 30 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

再將 $y=3$ 代入(2)式，求出 x ：

$$\begin{aligned} x+y &= 9 \\ x+(3) &= 9 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

得到解為 $x=6$ 、 $y=3$

(請同學自行驗算看答案是否正確。)

【練習】3.5.4-2

$$\text{解聯立方程式} \begin{cases} \frac{x+2}{y} = \frac{9}{2} \\ x-y = -9 \end{cases}$$

例題 3.5.4-3

$$\text{解聯立方程式} \begin{cases} \frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{5} \\ x+y = 14 \end{cases}$$

詳解：

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} \frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{5} \dots\dots(1) \\ x+y = 14 \dots\dots(2) \end{cases}$$

先利用交叉相乘化簡(1)式：

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{3} &= \frac{y+1}{5} \\ 5(x+1) &= 3(y+1) \\ 5x+5 &= 3y+3 \\ 5x-3y &= -2 \dots\dots(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \times 3 \quad (x+y) \times 3 &= 14 \times 3 \\ 3x+3y &= 42 \dots\dots(4) \end{aligned}$$

於是我們要解的方程組就變成了：

$$\begin{cases} 5x-3y = -2 \dots\dots(3) \\ 3x+3y = 42 \dots\dots(4) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(3) + (4) \quad & (5x - 3y) + (3x + 3y) = (-2) + (42) \\
& 5x - 3y + 3x + 3y = -2 + 42 \\
& (5x + 3x) + (-3y + 3y) = -2 + 42 \\
& 8x = 40 \\
& x = 5
\end{aligned}$$

再將 $x = 5$ 代入(2)式，求出 y ：

$$\begin{aligned}
& x + y = 14 \\
(5) + y &= 14 \\
& y = 9
\end{aligned}$$

得到解為 $x = 5$ 、 $y = 9$ (請同學自行驗算看答案是否正確。)

【練習】3.5.4-3

$$\text{解聯立方程式} \begin{cases} \frac{x+3}{4} = \frac{y+16}{7} \\ x + y = 14 \end{cases}$$

例題 3.5.4-4

$$\text{解聯立方程式} \begin{cases} 1.6x - 0.3y = 1 \\ -0.8x + 0.7y = 0.6 \end{cases}$$

詳解：

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} 1.6x - 0.3y = 1 \dots\dots\dots(1) \\ -0.8x + 0.7y = 0.6 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

題目係數為小數，為了方便計算，我們將兩方程式分別乘以 10，化為整數：

$$\begin{aligned}
(1) \times 10 \quad & (1.6x - 0.3y) \times 10 = 1 \times 10 \\
& 16x - 3y = 10 \dots\dots\dots(3)
\end{aligned}$$

$$(2) \times 2 \quad (-0.8x + 0.7y) \times 10 = 0.6 \times 10$$

$$-8x + 7y = 6 \dots \dots \dots (4)$$

於是我們要解的方程組就變成了：

$$\begin{cases} 16x - 3y = 10 \dots \dots (3) \\ -8x + 7y = 6 \dots \dots (4) \end{cases}$$

將(4)式乘以 2，再相加消去 x

$$(4) \times 2 \quad (-8x + 7y) \times 2 = 6 \times 2$$

$$-16x + 14y = 12 \dots \dots \dots (5)$$

$$(3) + (5) \quad (16x - 3y) + (-16x + 14y) = (10) + (12)$$

$$16x - 3y - 16x + 14y = 10 + 12$$

$$(16x - 16x) + (-3y + 14y) = 10 + 12$$

$$11y = 22$$

$$y = 2$$

再將 $y = 2$ 代入(3)式，求出 x ：

$$16x - 3y = 10$$

$$16x - 3 \times (2) = 10$$

$$16x - 6 = 10$$

$$16x = 10 + 6$$

$$16x = 16$$

$$x = 1$$

得到解為 $x = 1$ 、 $y = 2$ (請同學自行驗算看答案是否正確。)

【練習】3.5.4-4

解聯立方程式 $\begin{cases} 0.8x - 0.3y = 1.1 \\ -0.2x + 0.9y = -1.1 \end{cases}$

3.5.5 節 變化型

前面小節已經介紹完了二元一次聯立方程式的基本題型，本小節將繼續介紹一些較特殊的題型。

例題 3.5.5-1

$$\text{解聯立方程式} \begin{cases} 7x + 3y + 1 = 5x + 13 \\ 4x + y + 20 = 48 - 3y \end{cases}$$

詳解：

先將兩式設編號：

$$\begin{cases} 7x + 3y + 1 = 5x + 13 \dots\dots(1) \\ 4x + y + 20 = 48 - 3y \dots\dots(2) \end{cases}$$

本題屬於未化簡的題目，我們需要先化簡方程式才能運算：

$$\text{化簡(1)} \quad 7x + 3y + 1 = 5x + 13$$

$$7x + 3y - 5x = 13 - 1$$

$$2x + 3y = 12$$

$$\text{化簡(2)} \quad 4x + y + 20 = 48 - 3y$$

$$4x + y + 3y = 48 - 20$$

$$4x + 4y = 28$$

$$x + y = 7$$

$$\text{於是我們要解的方程組就變成了：} \begin{cases} 2x + 3y = 12 \dots\dots(3) \\ x + y = 7 \dots\dots(4) \end{cases}$$

將(4)式乘以 2，再相減消去 x

$$(4) \times 2 \quad (x + y) \times 2 = 7 \times 2$$

$$2x + 2y = 14 \dots\dots(5)$$

$$(3) - (5) \quad (2x + 3y) - (2x + 2y) = (12) - (14)$$

$$2x + 3y - 2x - 2y = 12 - 14$$

$$(2x - 2x) + (3y - 2y) = 12 - 14$$

$$y = -2$$

再將 $y = -2$ 代入(4)式，求出 x ：

$$x + y = 7$$

$$x + (-2) = 7$$

$$x - 2 = 7$$

$$x = 7 + 2$$

$$x = 9$$

得到解為 $x = 9$ 、 $y = -2$ (請同學自行驗算看答案是否正確。)

【練習】3.5.5-1

$$\text{解聯立方程式} \begin{cases} 2(x + y) - 7 = 6x - y + 5 \\ 4x + 3y - 2 = 3(x - 2y) + 8 \end{cases}$$

例題 3.5.5-2

已知 $2x + 10y + 3 = 6y - 5x + 1 = 3y + 20$ ，求 x 、 y 之值。

詳解：

這種由兩個等號連起來的方程式，我們可以擷取前半與後半來列出聯立方程式。

$$\text{前半段：} \quad 2x + 10y + 3 = 6y - 5x + 1$$

$$\text{化簡得} \quad 7x + 4y = -2$$

$$\text{後半段：} \quad 6y - 5x + 1 = 3y + 20$$

$$\text{化簡得} \quad -5x + 3y = 19$$

故我們可列出聯立方程式：

$$\begin{cases} 7x + 4y = -2 \dots\dots(1) \\ -5x + 3y = 19 \dots\dots(2) \end{cases}$$

$$(1) \times 5 \quad (7x + 4y) \times 5 = (-2) \times 5$$

$$35x + 20y = -10 \dots \dots (3)$$

$$(2) \times 7 \quad (-5x + 3y) \times 7 = 19 \times 7$$

$$-35x + 21y = 133 \dots \dots (4)$$

$$(3) + (4) \quad (35x + 20y) + (-35x + 21y) = (-10) + (133)$$

$$35x + 20y - 35x + 21y = -10 + 133$$

$$(35x - 35x) + (20y + 21y) = -10 + 133$$

$$41y = 123$$

$$y = 3$$

再將 $y = 3$ 代入(1)式，求出 x ：

$$7x + 4y = -2$$

$$7x + 4 \times (3) = -2$$

$$7x + 12 = -2$$

$$7x = -2 - 12$$

$$7x = -14$$

$$x = -2$$

得到解為 $x = -2$ 、 $y = 3$ (請同學自行驗算看答案是否正確。)

【練習】3.5.5-2

已知 $3x + 2y + 1 = 7x - 2y - 3 = x + 7$ ，求 x 、 y 之值。

例題 3.5.5-3

已知 $\frac{y-1}{4} = \frac{-x+6}{3} = \frac{x-y}{2}$ ，求 x 、 y 之值。

詳解：

這種由兩個等號連起來的方程式，我們可以擷取前半與後半來列出聯立方程式。

前半段：
$$\frac{y-1}{4} = \frac{-x+6}{3}$$

化簡
$$\frac{y-1}{4} \times 12 = \frac{-x+6}{3} \times 12$$

$$3y - 3 = -4x + 24$$

得到
$$4x + 3y = 27$$

後半段：
$$\frac{-x+6}{3} = \frac{x-y}{2}$$

化簡
$$\frac{-x+6}{3} \times 6 = \frac{x-y}{2} \times 6$$

$$-2x + 12 = 3x - 3y$$

得到
$$-5x + 3y = -12$$

故我們可列出聯立方程式：

$$\begin{cases} 4x + 3y = 27 \dots\dots(1) \\ -5x + 3y = -12 \dots\dots(2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \quad (4x + 3y) - (-5x + 3y) = (27) - (-12)$$

$$4x + 3y + 5x - 3y = 27 + 12$$

$$(4x + 5x) + (3y - 3y) = 27 + 12$$

$$9x = 39$$

$$x = \frac{39}{9}$$

$$x = \frac{13}{3}$$

再將 $x = \frac{13}{3}$ 代入(1)式，求出 y ：

$$4x + 3y = 27$$

$$4 \times \left(\frac{13}{3}\right) + 3y = 27$$

$$\frac{52}{3} + 3y = 27$$

$$3y = 27 - \frac{52}{3}$$

$$3y = \frac{81}{3} - \frac{52}{3}$$

$$3y = \frac{29}{3}$$

$$y = \frac{29}{9}$$

得到解為 $x = \frac{13}{3}$ 、 $y = \frac{29}{9}$ (請同學自行驗算看答案是否正確。)

【練習】3.5.5-3

已知 $\frac{3x+1}{2} = \frac{y+39}{5} = \frac{x+y+18}{3}$ ，求 x 、 y 之值。

【係數對稱型】

例題 3.5.5-4

$$\text{解聯立方程式} \begin{cases} 99x + 101y = 2 \\ 101x + 99y = -2 \end{cases}$$

詳解：

本題不論是要用加減消去法，還是代入消去法，運算都會非常複雜。但觀察一下可以發現方程組的係數呈現對稱型式。

對稱型題目我們可以直接將方程式相加或相減。

$$\begin{cases} 99x + 101y = 2 \dots\dots(1) \\ 101x + 99y = -2 \dots\dots(2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) + (2) \quad & (99x + 101y) + (101x + 99y) = (2) + (-2) \\ & 200x + 200y = 0 \\ & x + y = 0 \\ & y = -x \dots\dots(3) \end{aligned}$$

利用代入消去法，將 $y = -x$ 代入(1)式：

$$\begin{aligned} 99x + 101y &= 2 \\ 99x + 101 \times (-x) &= 2 \\ 99x - 101x &= 2 \\ -2x &= 2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

將 $x = -1$ 代入(3)式，求出 y ：

$$\begin{aligned} y &= -x \\ y &= -(-1) \\ y &= 1 \end{aligned}$$

得到解為 $x = -1$ 、 $y = 1$

(請同學自行驗算看答案是否正確。)

【練習】3.5.5-4

$$\text{解聯立方程式} \begin{cases} 221x + 35y = 221 \\ 35x + 221y = 35 \end{cases}$$

【已知解求未知數】

例題 3.5.5-5

若 (5,1) 是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} ax - 5by = 4 \\ bx + ay = 22 \end{cases}$ 的解，求 a 、 b 之值。

詳解：

本題已給解，我們可以直接將解 (5,1) 代入方程式。

$$ax - 5by = 4$$

$$a \times (5) - 5b \times (1) = 4$$

$$5a - 5b = 4$$

$$bx + ay = 22$$

$$b \times (5) + a \times (1) = 22$$

$$a + 5b = 22$$

得到聯立方程式：

$$\begin{cases} 5a - 5b = 4 \dots\dots(1) \\ a + 5b = 22 \dots\dots(2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \quad (5a - 5b) + (a + 5b) = (4) + (22)$$

$$5a - 5b + a + 5b = 4 + 22$$

$$(5a + a) + (-5b + 5b) = 4 + 22$$

$$6a = 26$$

$$a = \frac{13}{3}$$

將 $a = \frac{13}{3}$ 代入(2)式，求出 b ：

$$a + 5b = 22$$

$$\left(\frac{13}{3}\right) + 5b = 22$$

$$5b = 22 - \frac{13}{3}$$

$$5b = \frac{66}{3} - \frac{13}{3}$$

$$5b = \frac{53}{3}$$

$$b = \frac{53}{15}$$

得到解為 $a = \frac{13}{3}$ 、 $b = \frac{53}{15}$

驗算： 為了驗證答案的正確性，我們將算出的 a 、 b 值代入原式驗算

$$\text{代入後得到聯立方程式為：} \begin{cases} \frac{13}{3}x - \frac{53}{3}y = 4 \dots\dots(3) \\ \frac{53}{15}x + \frac{13}{3}y = 22 \dots\dots(4) \end{cases}$$

將 $x = 5$ 、 $y = 1$ 代入(3)式

$$\frac{13}{3} \times (5) - \frac{53}{3} \times (1) = \frac{65}{3} - \frac{53}{3} = \frac{12}{3} = 4 \quad (\text{符合})$$

將 $x = 5$ 、 $y = 1$ 代入(4)式

$$\frac{53}{15} \times (5) + \frac{13}{3} \times (1) = \frac{265}{15} + \frac{65}{15} = \frac{330}{15} = 22 \quad (\text{符合})$$

可確認答案無誤。

【練習】3.5.5-5

若 $(11, -1)$ 是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} ax - by = 21 \\ -\frac{ax}{2} + by = -10 \end{cases}$ 的解，求 a 、 b 之值。

3.5 節 習題

習題 3.5-1

$$(1) \text{解聯立方程式} \begin{cases} 2x - y = -1 \\ 5x - y = 2 \end{cases}$$

$$(2) \text{解聯立方程式} \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + 4y = -6 \end{cases}$$

習題 3.5-2

$$(1) \text{解聯立方程式} \begin{cases} 3x + y = 9 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

$$(2) \text{解聯立方程式} \begin{cases} x + y = 7 \\ -x + y = -3 \end{cases}$$

習題 3.5-3

$$(1) \text{解聯立方程式} \begin{cases} 3x + 2y = -7 \\ -x - 3y = 14 \end{cases}$$

$$(2) \text{解聯立方程式} \begin{cases} 5x + 3y = 7 \\ 10x - 8y = 28 \end{cases}$$

習題 3.5-4

$$(1) \text{解聯立方程式} \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$$

$$(2) \text{解聯立方程式} \begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ -x - 9y = 3 \end{cases}$$

習題 3.5-5

(1) 解聯立方程式 $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 2y = -1 \end{cases}$

(2) 解聯立方程式 $\begin{cases} 7x - 4y = -19 \\ 5x + 3y = 4 \end{cases}$

習題 3.5-6

(1) 解聯立方程式 $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -5x + 2y = -8 \end{cases}$

(2) 解聯立方程式 $\begin{cases} -7x - 4y = 5 \\ 5x + 3y = -4 \end{cases}$

習題 3.5-7

解聯立方程式 $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 7 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 4 \end{cases}$

習題 3.5-8

解聯立方程式 $\begin{cases} \frac{2x+5}{y} = \frac{11}{4} \\ x+y = 7 \end{cases}$

習題 3.5-9

$$\text{解聯立方程式} \begin{cases} \frac{x+6}{4} = \frac{y+3}{3} \\ x+y=5 \end{cases}$$

習題 3.5-10

$$\text{解聯立方程式} \begin{cases} x-0.5y=1 \\ 0.75x+y=3.5 \end{cases}$$

習題 3.5-11

$$\text{解聯立方程式} \begin{cases} 3x-y+1=2x+4 \\ 2x+7y-8=2y+12 \end{cases}$$

習題 3.5-12

已知 $x+y+2=2x+y-3=2y+4$ ，求 x 、 y 之值。

習題 3.5-13

已知 $\frac{2x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{x+y+1}{4}$ ，求 x 、 y 之值。

習題 3.5-14

解聯立方程式
$$\begin{cases} 77x + 144y = 211 \\ 144x + 77y = 10 \end{cases}$$

習題 3.5-15

若 $(6,4)$ 是二元一次聯立方程式
$$\begin{cases} ax - by = 14 \\ ax + by = 22 \end{cases}$$
 的解，求 a 、 b 之值。

3.6 節 聯立不等式

第二章中我們已經學過不等式，結合本章中學到的聯立觀念，便可以討論聯立不等式。

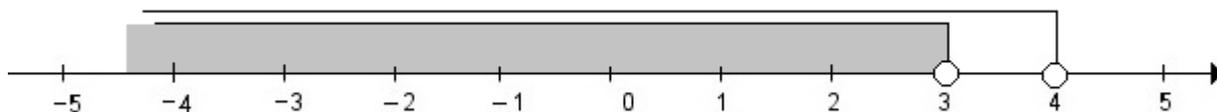
$$\text{例如 } \begin{cases} x < 3 \\ x < 4 \end{cases}$$

與二元一次聯立方程式相同，聯立不等式的解必須同時符合每個不等式。即滿足 $x < 3$ 且 $x < 4$ 。像是 $x = 2$ ，可以同時符合 $x < 3$ 與 $x < 4$ ，因此 $x = 2$ 是一個解而 $x = 3$ ，符合 $x < 4$ ，但不符合 $x < 3$ 與，因此 $x = 3$ 不是一個解

3.6.1 節 聯立不等式的圖示

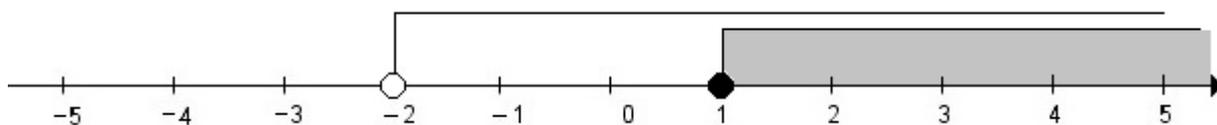
我們可以將聯立不等式圖示出來，解即為重疊的部份。

$$(1) \begin{cases} x < 3 \\ x < 4 \end{cases}$$



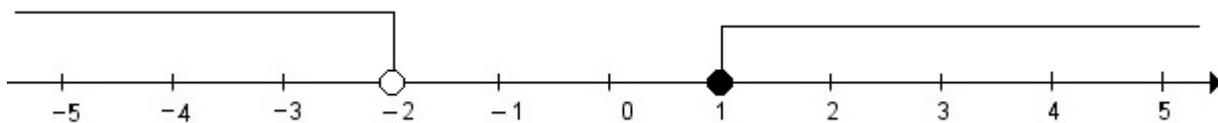
解即為二線重覆的部份，也就是 $x < 3$

$$(2) \begin{cases} x \geq 1 \\ x > -2 \end{cases}$$



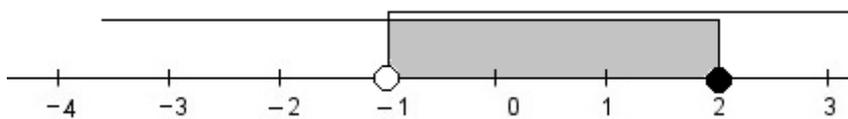
解即為二線重覆的部份，也就是 $x \geq 1$

$$(3) \begin{cases} x \geq 1 \\ x < -2 \end{cases}$$



二線沒有重覆的部份，故無解

$$(4) \begin{cases} x > -1 \\ x \leq 2 \end{cases}$$



解即為二線重覆的部份，也就是 $-1 < x \leq 2$

像 $-1 < x \leq 2$ 這種含有二個不等號的不等式，屬於合併後的不等式，也就是從 $x > -1$ 與 $x \leq 2$ 合併而來。

解這類合併的不等式時，我們可以將不等式分開來解。

例題 3.6.1-1

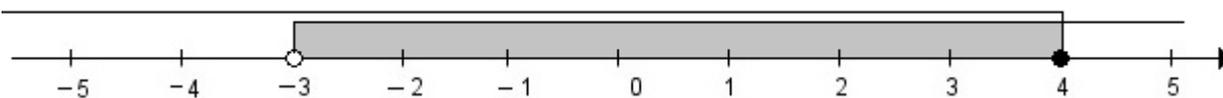
在數線上圖示不等式 $-3 < x \leq 4$ 的解。

詳解：

不等式 $-3 < x \leq 4$ ，可以分解成 $-3 < x$ 和 $x \leq 4$ 。

寫成聯立不等式：
$$\begin{cases} x > -3 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

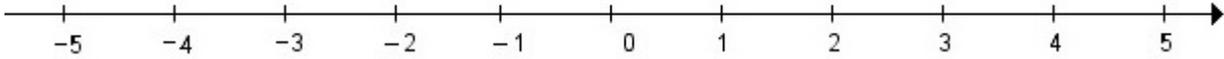
在數線上分別標出 $x > -3$ 和 $x \leq 4$ 的圖形。



二線重疊的部份即為解的範圍。

【練習】3.6.1-1

在數線上圖示不等式 $-1 \leq x < 3$ 的解。



例題 3.6.1-2

在數線上圖示不等式 $-13 \leq -3x - 1 \leq 5$ 的解。

詳解：

不等式 $-13 \leq -3x - 1 \leq 5$ ，可以分解成 $-13 \leq -3x - 1$ 和 $-3x - 1 \leq 5$ ，
分別化簡這二個不等式：

$$-13 \leq -3x - 1$$

$$-3x - 1 \geq -13$$

$$-3x - 1 + 1 \geq -13 + 1$$

$$-3x \geq -12$$

$$(-3x) \div (-3) \leq (-12) \div (-3)$$

$$x \leq 4$$

$$-3x - 1 \leq 5$$

$$-3x - 1 + 1 \leq 5 + 1$$

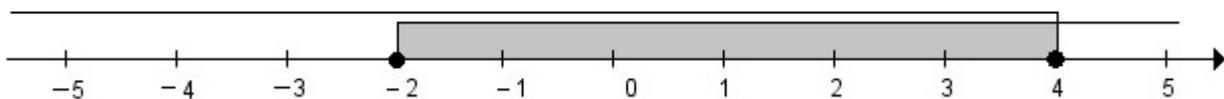
$$-3x \leq 6$$

$$(-3x) \div (-3) \geq 6 \div (-3)$$

$$x \geq -2$$

寫成聯立不等式：
$$\begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

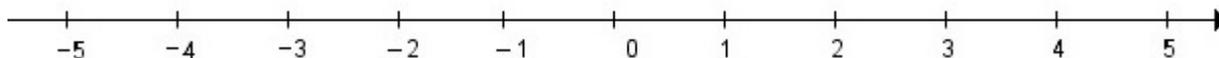
在數線上分別標出 $x \leq 4$ 和 $x \geq -2$ 的圖形。



二線重疊的部份即為解的範圍，即 $-2 \leq x \leq 4$ 。

【練習】3.6.1-2

在數線上圖示不等式 $-7 < 2x - 1 < 7$ 的解。



例題 3.6.1-3

$$\text{解聯立不等式 } \begin{cases} x+3 < 8 \\ x-2 > -1 \end{cases}$$

詳解：

解聯立不等式，我們先將兩式分別化簡，最後再合併條件。

$$x+3 < 8 \quad \Rightarrow \quad x < 5$$

$$x-2 > -1 \quad \Rightarrow \quad x > 1$$

因此答案為 $x < 5$ 且 $x > 1$ ，即 $1 < x < 5$ 。

【練習】3.6.1-3

$$\text{解聯立不等式 } \begin{cases} x-2 < -4 \\ 2x+1 > -15 \end{cases}$$

例題 3.6.1-4

$$\text{解聯立不等式 } \begin{cases} x-6 < 8 \\ x-2 < 4 \end{cases}$$

詳解：

解聯立不等式，我們先將兩式分別化簡，最後再合併條件。

$$x-6 < 8 \quad \Rightarrow \quad x < 14$$

$$x-2 > 4 \quad \Rightarrow \quad x < 6$$

因此答案為 $x < 14$ 且 $x < 6$ ，即 $x < 6$ 。

【練習】3.6.1-4

$$\text{解聯立不等式 } \begin{cases} x-3 < 4 \\ -x+1 > 10 \end{cases}$$

例題 3.6.1-5

$$\text{解聯立不等式 } \begin{cases} x+5 < 7 \\ x-6 > -1 \end{cases}$$

詳解：

解聯立不等式，我們先將兩式分別化簡，最後再合併條件。

$$x+5 < 7 \quad \Rightarrow \quad x < 2$$

$$x-6 > -1 \quad \Rightarrow \quad x > 5$$

因此答案為 $x < 2$ 且 $x > 5$ ，但沒有數滿足此條件，故無解。

【練習】3.6.1-5

$$\text{解聯立不等式 } \begin{cases} -x+2 < -5 \\ 2x+3 < 3 \end{cases}$$

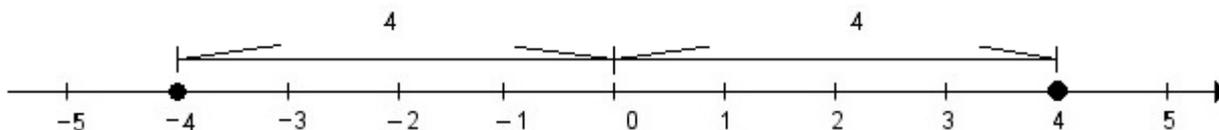
3.6.2 節 解含有絕對值的一元一次不等式

本節我們先來瞭解什麼是**絕對值**。

絕對值的意義是點與原點的**距離**。

數線上的 4 這個點，距離原點有 4 單位長，所以 4 的絕對值就是 4。用 $|4|=4$ 來表示。

而 -4 這個點距離原點也是 4 單位長，所以 -4 的絕對值也是 4。用 $|-4|=4$ 來表示。



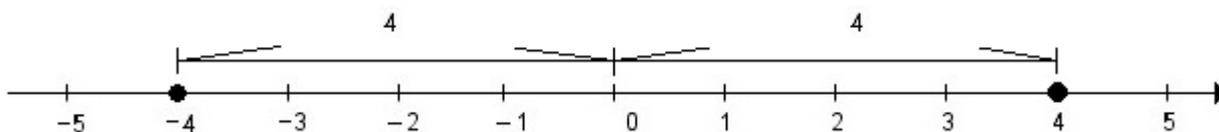
我們也可以得到 $|2|=2$ 、 $|-12|=12$ 、 $|\frac{2}{3}|=\frac{2}{3}$ 、 $|0.8|=0.8$ 、 $|0|=0$ 等。

接著我們來看**含有絕對值的一元一次不等式**：

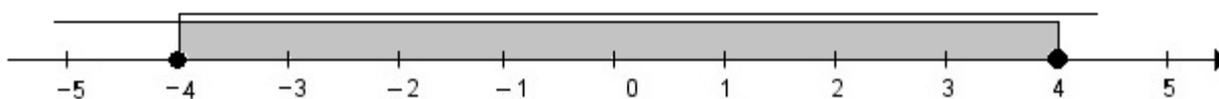
對於含有絕對值的不等式，我們可以用圖示找出解的範圍。

因為絕對值的意義是與原點的距離，

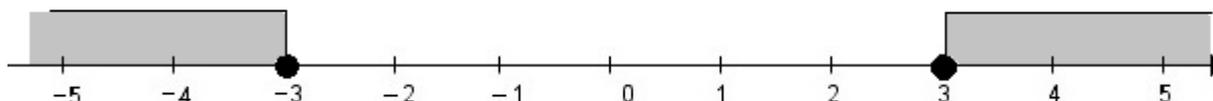
所以像 $|x|=4$ ，即代表與原點距離為 4 的點，也就是 4 或 -4 。



$|x|\leq 4$ ，代表與原點距離小於或等於 4 的點，可以看成是 $-4\leq x\leq 4$ ，也就是 $x\leq 4$ 與 $x\geq -4$ 的重疊部份。



$|x|\geq 3$ ，代表與原點距離大於或等於 3 的點，可以看成是 $x\geq 3$ 或 $x\leq -3$ 。



因此解絕對值不等式可整理如下： $(a > 0)$

1. $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$ ($-a \leq x$ 且 $x \leq a$)

2. $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$ ($-a < x$ 且 $x < a$)

3. $|x| \geq a \Rightarrow x \geq a$ 或 $x \leq -a$

4. $|x| > a \Rightarrow x > a$ 或 $x < -a$

※ 3.的 x 之解只需滿足其中一個式子即可，不需同時滿足 $x \geq a$ 與 $x \leq -a$ ，4.亦同。

例題 3.6.2-1

找出下列不等式的整數解：

(1) $|x| < 2$ (2) $|x| \leq 2$

詳解：

(1) $|x| < 2$ 也就是 $-2 < x < 2$ ，整數解有 $-1、0、1$

(2) $|x| \leq 2$ 也就是 $-2 \leq x \leq 2$ ，整數解有 $-2、-1、0、1、2$

【練習】3.6.2-1

找出下列不等式的整數解：

(1) $|x| < 3$ (2) $|x| \leq 3$

例題 3.6.2-2

解下列不等式：

(1) $|x| > 2$ (2) $|x| \geq 2$

詳解：

(1) $|x| > 2$ 也就是 $x < -2$ 或 $x > 2$

(2) $|x| \geq 2$ 也就是 $x \leq -2$ 或 $x \geq 2$

【練習】3.6.2-2

解下列不等式：

(1) $|x| > 3$ (2) $|x| \geq 3$

例題 3.6.2-3

解下列不等式，並圖示之：

(1) $|x+2| > 3$ (2) $|x-1| < 2$

詳解：

- (1) 絕對值內有多項時，可以將絕對值內的數字設成一個未知數，再依照前面學過的規則來解。

將 $x+2$ 設為 A ，題目就變成 $|A| > 3$ ，解為 $A < -3$ 或 $A > 3$

再將 A 換為原式 $x+2$ ，即解為 $x+2 < -3$ 或 $x+2 > 3$

$$x+2 < -3 \Rightarrow x < -3-2 \Rightarrow x < -5$$

$$x+2 > 3 \Rightarrow x > 3-2 \Rightarrow x > 1$$

$|x+2| > 3$ 的解為 $x < -5$ 或 $x > 1$



$|x+2| > 3$ 的意義即為 x 與 -2 的距離大於 3

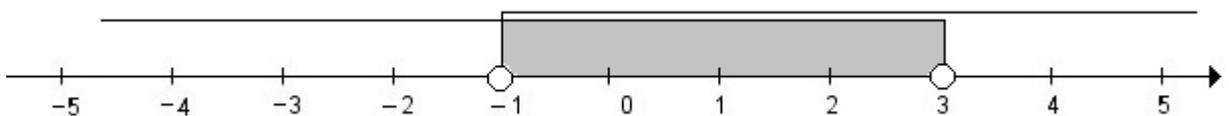
- (2) 將 $x-1$ 設為 B ，題目就變成 $|B| < 2$ ，解為 $-2 < B < 2$

再將 B 換為原式，即解為 $-2 < x-1 < 2$ ，可看成 $x-1 > -2$ 與 $x-1 < 2$

$$x-1 > -2 \Rightarrow x > -2+1 \Rightarrow x > -1$$

$$x-1 < 2 \Rightarrow x < 2+1 \Rightarrow x < 3$$

$|x-1| < 2$ 的解為 $x > -1$ 與 $x < 3$ 的重疊部份，也就是 $-1 < x < 3$



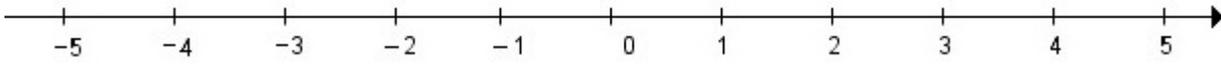
$|x-1| < 2$ 的意義即為 x 與 1 的距離小於 2

【練習】3.6.2-3

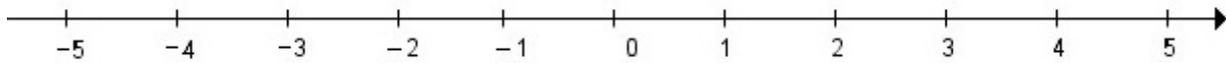
解下列不等式，並圖示之：

(1) $|x+3|>1$ (2) $|x-2|<3$

(1)



(2)



3.6 節 習題

習題 3.6-1

在數線上圖示不等式 $-5 \leq x < 3$ 的解。

習題 3.6-2

在數線上圖示不等式 $-1 < 2x - 3 < 3$ 的解。

習題 3.6-3

找出下列不等式的整數解：

(1) $|x| < 1$ (2) $|x| \leq 1$

習題 3.6-4

解下列不等式：

(1) $|x| > 1$ (2) $|x| \geq 1$

習題 3.6-5

解下列不等式，並圖示之：

(1) $|x+1| > 2$ (2) $|x+1| < 2$

3.7 節 二元一次聯立方程式的綜合題與應用題

前面各小節我們已經學會了各種二元一次聯立方程式的解法，本小節我們會將學會運用到各種綜合問題與生活中的應用問題。

綜合題型

例題 3.7-1

設 x 、 y 為整數，若 $|2x + 3y + 3| + |-5x + 4y + 50| = 0$ ，求 x 、 y 之值。

詳解：

我們先看一個例子，若是有一方程式 $A + B = 0$

我們列出幾個符合的解：

A	0	1	2	3	4
B	0	-1	-3	-3	-4

除了 $(0,0)$ 這組解以外，其他的解都會有負數，若我們限制 A 、 B 都必須大於等於 0，則解只有 $(0,0)$ 這組，也就是 $A=0$ 且 $B=0$ 。

回到題目，方程式為兩個絕對值相加等於 0，因為絕對值的值必大於或等於 0，由上面例子可知，必須兩個絕對值的值都為 0 才能讓等式成立，故我們可列出聯立方程式：

$$\begin{cases} 2x + 3y + 3 = 0 \\ -5x + 4y + 50 = 0 \end{cases}$$

將常數項移到等號右邊：

$$\begin{cases} 2x + 3y = -3 \dots\dots\dots(1) \\ -5x + 4y = -50 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

再利用雙乘型解法來求出 x 、 y 。

$$(1) \times 5 \quad (2x + 3y) \times 5 = (-3) \times 5$$

$$10x + 15y = -15 \dots\dots\dots(3)$$

$$(2) \times 2 \quad (-5x + 4y) \times 2 = (-50) \times 2$$

$$-10x + 8y = -100 \dots\dots\dots(5)$$

$$(3) + (4) \quad (10x + 15y) + (-10x + 8y) = (-15) + (-100)$$

$$10x + 15y - 10x + 8y = -15 - 100$$

$$(10x - 10x) + (15y + 8y) = -15 - 100$$

$$23y = -115$$

$$y = -5$$

再將 $y = -5$ 代入(1)式，求出 x ：

$$2x + 3y = -3$$

$$2x + 3 \times (-5) = -3$$

$$2x - 15 = -3$$

$$2x = -3 + 15$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

得到解為 $x = 6$ 、 $y = -5$ (請同學自行驗算看答案是否正確。)

【練習】3.7-1

設 x 、 y 為整數，若 $|-9x + 3y - 3| + |-2x - 3y - 19| = 0$ ，求 x 、 y 之值。

例題 3.7-2

設 x 、 y 為整數，若 $(2x-3y-32)^2 + (-x+5y+37)^2 = 0$ ，求 x 、 y 之值。

詳解：

與前面例題相同，平方數會大於或等於 0

(平方會小於 0 是虛數，但我們在這裡不討論虛數，超出我們的學習範圍。)

故我們可列出聯立方程式：

$$\begin{cases} 2x - 3y - 32 = 0 \\ -x + 5y + 37 = 0 \end{cases}$$

將常數項移到等號右邊：

$$\begin{cases} 2x - 3y = 32 \dots\dots(1) \\ -x + 5y = -37 \dots\dots(2) \end{cases}$$

再利用單乘型解法來求出 x 、 y 。

$$\begin{aligned} (2) \times 2 \quad & (-x + 5y) \times 2 = (-37) \times 2 \\ & -2x + 10y = -74 \dots\dots(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) + (3) \quad & (2x - 3y) + (-2x + 10y) = (32) + (-74) \\ & 2x - 3y - 2x + 10y = 32 - 74 \\ & (2x - 2x) + (-3y + 10y) = 32 - 74 \\ & 7y = -42 \\ & y = -6 \end{aligned}$$

再將 $y = -6$ 代入(1)式，求出 x ：

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 32 \\ 2x - 3 \times (-6) &= 32 \\ 2x + 18 &= 32 \\ 2x &= 32 - 18 \\ 2x &= 14 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

得到解為 $x = 7$ 、 $y = -6$

(請同學自行驗算看答案是否正確。)

【練習】3.7-2

設 x 、 y 為整數，若 $(10x + 2y - 2)^2 + (-5x + 3y - 43)^2 = 0$ ，求 x 、 y 之值。

應用題型

解題步驟：

1. 分析題意，將適當的未知數用符號(x 、 y)表示。
2. 根據題目給的條件，列出兩個二元一次方程式。
3. 列出二元一次聯立方程式。
4. 解二元一次聯立方程式，並寫出答案。
5. 檢查答案是否正確。

例題 3.7-3

阿達到便利商店買 7 罐可樂及 8 杯咖啡，共花了 227 元，小傑買了 4 罐可樂及 5 杯咖啡，共花了 137 元，請問一罐可樂及一杯咖啡各為多少元？

詳解：

題目問一罐可樂及一杯咖啡各為多少元。

我們可以設未知數為一罐可樂及一杯咖啡的價錢，

然後根據下列條件列出聯立方程式：

7 罐可樂及 8 杯咖啡，共花了 227 元

4 罐可樂及 5 杯咖啡，共花了 137 元

最後解二元一次聯立方程式得到答案。

設一罐可樂價格為 x 元，一杯咖啡價格為 y 元。

7 罐可樂及 8 杯咖啡，共花了 227 元

可列式： $7x + 8y = 227$

4 罐可樂及 5 杯咖啡，共花了 137 元

可列式： $4x + 5y = 137$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} 7x+8y=227\dots(1) \\ 4x+5y=137\dots(2) \end{cases}$$

利用加減消去法， $(1)\times 4-(2)\times 7$

可得 $32y-35y=908-959$ ，解得 $y=17$

將 $y=17$ 代入(1)式，解得 $x=13$

得解為 $x=13$ 、 $y=17$

答：一罐可樂 13 元、一杯咖啡 17 元。

驗算：

7 罐可樂及 8 杯咖啡，共花了 227 元

$$7\times 13+8\times 17 = 91+136 = 227$$

4 罐可樂及 5 杯咖啡，共花了 137 元

$$4\times 13+5\times 17 = 52+85 = 137$$

計算結果符合題意，故答案正確。

例題 3.7-4

小華買了 3 顆巧克力糖及 2 顆水果軟糖，共花了 29 元，小龍買了 5 顆巧克力糖及 4 顆水果軟糖，共花了 51 元，請問一顆巧克力糖及一顆水果軟糖各為多少元？

詳解：

題目問一顆巧克力糖及一顆水果軟糖各為多少元。

我們可以設未知數為一顆巧克力糖及一顆水果軟糖的價錢，

然後根據下列條件列出聯立方程式：

3 顆巧克力糖及 2 顆水果軟糖，共花了 29 元

5 顆巧克力糖及 4 顆水果軟糖，共花了 51 元

最後解二元一次聯立方程式得到答案。

設一顆巧克力糖為 x 元，一顆水果軟糖為 y 元。

3 顆巧克力糖及 2 顆水果軟糖，共花了 29 元

可列式： $3x+2y=29$

5 顆巧克力糖及 4 顆水果軟糖，共花了 51 元

可列式： $5x+4y=51$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} 3x+2y=29\dots\dots(1) \\ 5x+4y=51\dots\dots(2) \end{cases}$$

利用加減消去法， $(1)\times 2-(2)$

可得 $6x-5x=58-51$ ，解得 $x=7$

將 $x=7$ 代入(1)式，解得 $y=4$

得解為 $x=7$ 、 $y=4$

答：一顆巧克力糖 7 元、一顆水果軟糖 4 元。

請自行驗算答案是否正確。

例題 3.7-5

有兩團客人看電影，第一團買了 2 份爆米花及 3 杯可樂，付 135 元。第二團買了 4 份爆米花及 5 杯可樂，付 245 元，請問一份爆米花及一杯可樂各為多少元？

詳解：

題目問一份爆米花及一杯可樂各為多少元。

我們可以設未知數為一份爆米花及一杯可樂的價錢，

然後根據下列條件列出聯立方程式：

2 份爆米花及 3 杯可樂，付 135 元

4 份爆米花及 5 杯可樂，付 245 元

最後解二元一次聯立方程式得到答案。

設一份爆米花為 x 元，一杯可樂為 y 元。

2 份爆米花及 3 杯可樂，付 135 元

可列式： $2x+3y=135$

4 份爆米花及 5 杯可樂，付 245 元

可列式： $4x+5y=245$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} 2x+3y=135\dots\dots(1) \\ 4x+5y=245\dots\dots(2) \end{cases}$$

利用加減消去法， $(1)\times 2-(2)$

可得 $6y-5y=270-245$ ，解得 $y=25$

將 $y=25$ 代入(1)式，解得 $x=30$

得解為 $x=30$ 、 $y=25$

答：一份爆米花 30 元、一杯可樂 25 元。

請自行驗算答案是否正確。

例題 3.7-6

小真因為生病沒辦法上學參加第一天的開學典禮，但是她想知道全班男生與女生各有多少人，於是老師跟他說，班上男生的人數是女生的兩倍再多 1，且全班總共有 34 人，請幫小真算出班上男生與女生的人數各為多少？

詳解：

題目問班上男生與女生的人數各為多少。

我們可以設未知數為男生與女生的人數，

然後根據下列條件列出聯立方程式：

男生的人數是女生的兩倍再多 1

全班總共有 34 人

最後解二元一次聯立方程式得到答案。

設男生有 x 人，女生有 y 人。

男生的人數是女生的兩倍再多 1

可列式： $x = 2y + 1$

全班總共有 34 人

可列式： $x + y = 34$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \dots\dots(1) \\ x + y = 34 \dots\dots(2) \end{cases}$$

利用加減消去法，(2)-(1)

可得 $y - (-2y) = 34 - 1$ ，解得 $y = 11$

將 $y = 11$ 代入(1)式，解得 $x = 23$

得解為 $x = 23$ 、 $y = 11$

解方程式得 $x = 23$ 、 $y = 11$

答：男生有 23 人、女生有 11 人。

請自行驗算答案是否正確。

例題 3.7-7

袋子裡有黑棋與白棋共 96 顆，已知黑棋與白棋的數量比為 5：3，則黑棋和白棋各有多少顆？

詳解：

題目問黑棋和白棋各有多少顆。

我們可以設未知數為黑棋和白棋的數量，

然後根據下列條件列出聯立方程式：

黑棋與白棋共 96 顆

黑棋與白棋的數量比為 5：3

最後解二元一次聯立方程式得到答案。

設黑棋有 x 顆，白棋有 y 顆。

黑棋與白棋共 96 顆

可列式： $x + y = 96$

黑棋與白棋的數量比為 5 : 3

可列式： $x : y = 5 : 3$

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$$

化簡 $3x = 5y$

$$3x - 5y = 0$$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} x + y = 96 \dots\dots(1) \\ 3x - 5y = 0 \dots\dots(2) \end{cases}$$

利用加減消去法， $(1) \times 3 - (2)$

可得 $3y - (-5y) = 288 - 0$ ，解得 $y = 36$

將 $y = 36$ 代入(1)式，解得 $x = 60$

得解為 $x = 60$ 、 $y = 36$

答：黑棋有 60 顆、白棋有 36 顆。

驗算：

黑棋有 60 顆、白棋有 36 顆，合計 96 顆。

黑棋有 60 顆：白棋有 36 顆，黑棋與白棋數量比為 $60 : 36 = 5 : 3$

符合題意，故答案正確。

例題 3.7-8

有一個二位數，其十位數字的 2 倍與個位數字的 3 倍的和為 30，將它的十位數字與個位數字對調後，所得的新數比原數小 45，試求此二位數是多少？

詳解：

題目問此二位數是多少。

我們可以設未知數為十位數字和個位數字，

然後根據下列條件列出聯立方程式：

十位數字的 2 倍與個位數字的 3 倍的和為 30

十位數字與個位數字對調後，所得的新數比原數小 45

最後解二元一次聯立方程式得到答案。

設十位數字為 x ，個位數字為 y 。

十位數字的 2 倍與個位數字的 3 倍的和為 30

可列式： $2x+3y=30$

十位數字與個位數字對調後，所得的新數比原數小 45

原二位數之值： $10x+y$

對調後二位數之值： $10y+x$

可列式： $(10x+y)-(10y+x)=45$

化簡得 $x-y=5$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} 2x+3y=30\dots\dots(1) \\ x-y=5\dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

利用加減消去法， $(1)-(2)\times 2$

可得 $3y-(-2y)=30-10$ ，解得 $y=4$

將 $y=4$ 代入(1)式，解得 $x=9$

得解為 $x=9$ 、 $y=4$

十位數字為 9，個位數字為 4，因此二位數為 94

答：94。

驗算：

十位數字的 2 倍與個位數字的 3 倍的和為 30

$$9\times 2+4\times 3=18+12=30$$

十位數字與個位數字對調後，所得的新數比原數小 45

$$94-49=45$$

符合題意，故答案正確。

例題 3.7-9

有一個分數，分子的 5 倍等於分母的 2 倍，若將分子、分母同時加 6 後，其值與 $\frac{5}{8}$ 相等，試求此分數為何？

詳解：

題目問此分數為何。

我們可以設未知數為分子和分母，

然後根據下列條件列出聯立方程式：

分子的 5 倍等於分母的 2 倍

分子、分母同時加 6 後，其值與 $\frac{5}{8}$ 相等

最後解二元一次聯立方程式得到答案。

設分子為 x ，分母為 y 。

分子的 5 倍等於分母的 2 倍

可列式： $5x = 2y \Rightarrow 5x - 2y = 0$

分子、分母同時加 6 後，其值與 $\frac{5}{8}$ 相等

可列式： $\frac{x+6}{y+6} = \frac{5}{8}$

交差相乘 $8(x+6) = 5(y+6)$

化簡得 $8x - 5y = -18$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} 5x - 2y = 0 \dots\dots(1) \\ 8x - 5y = -18 \dots\dots(2) \end{cases}$$

利用加減消去法， $(1) \times 8 - (2) \times 5$

可得 $-16y - (-25y) = -(-90)$ ，解得 $y = 10$

將 $y = 10$ 代入(1)式，解得 $x = 4$

得解為 $x = 4$ 、 $y = 10$

分子為 4，分母為 10，因此分數為 $\frac{4}{10}$ （注意答案不需約分）

答：分數為 $\frac{4}{10}$ 。

請自行驗算答案是否正確。

例題 3.7-10

已知有大小兩數，大數的 2 倍比小數的 3 倍少 4，大數的 3 倍比小數的 4 倍多 7，求大小兩數為何？

詳解：

題目求大小兩數為何。

我們可以設未知數為大數和小數，

然後根據下列條件列出聯立方程式：

大數的 2 倍比小數的 3 倍少 4

大數的 3 倍比小數的 4 倍多 7

最後解二元一次聯立方程式得到答案。

設大數為 x ，小數為 y 。

大數的 2 倍比小數的 3 倍少 4

可列式： $2x=3y-4$

化簡得 $2x-3y=-4$

大數的 3 倍比小數的 4 倍多 7

可列式： $3x=4y+7$

化簡得 $3x-4y=7$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} 2x-3y=-4\dots\dots(1) \\ 3x-4y=7\dots\dots(2) \end{cases}$$

利用加減消去法， $(1)\times 3-(2)\times 2$

可得 $-9y-(-8y)=-12-(14)$ ，解得 $y=26$

將 $y=26$ 代入(1)式，解得 $x=37$

得解為 $x=37$ 、 $y=26$

答：大數為 37、小數為 26。

請自行驗算答案是否正確。

例題 3.7-11

老王將雞和兔子養在一個大籠子裡，他發現雞和兔子加起來共 13 隻，雞的腳和兔子的腳加起來共有 42 隻腳，請問籠子裡各有幾隻雞和兔子？

詳解：

題目求籠子裡各有幾隻雞和兔子。

我們可以設未知數為雞和兔子的數量，

然後根據下列條件列出聯立方程式：

雞和兔子加起來共 13 隻

雞的腳和兔子的腳加起來共有 42 隻腳(每隻雞有 2 隻腳，兔子有 4 隻腳)

最後解二元一次聯立方程式得到答案。

設雞有 x 隻，兔子有 y 隻。

雞和兔子加起來共 13 隻

可列式： $x + y = 13$

雞的腳和兔子的腳加起來共有 42 隻腳

可列式： $2x + 4y = 42$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} x + y = 13 \dots\dots(1) \\ 2x + 4y = 42 \dots\dots(2) \end{cases}$$

利用加減消去法， $(2) - (1) \times 2$

可得 $4y - 2y = 42 - 26$ ，解得 $y = 8$

將 $y = 8$ 代入(1)式，解得 $x = 5$

得解為 $x = 5$ 、 $y = 8$

答：雞有 5 隻，兔子有 8 隻。

請自行驗算答案是否正確。

例題 3.7-12

父子的年齡差 28 歲，4 年後父親的年齡正好是兒子的 3 倍，求父親、兒子今年各幾歲？

詳解：

題目求父親、兒子今年各幾歲。

我們可以設未知數為父親、兒子的年齡，

然後根據下列條件列出聯立方程式：

父子的年齡差 28 歲

4 年後父親的年齡正好是兒子的 3 倍

最後解二元一次聯立方程式得到答案。

設今年父 x 歲，子 y 歲。

父子的年齡差 28 歲

可列式： $x - y = 28$

父親 4 年後為 $(x+4)$ 歲，兒子 4 年後為 $(y+4)$ 歲；4 年後父親的年齡正好是兒子的 3 倍

可列式： $(x+4) = 3(y+4)$

化簡得 $x - 3y = 8$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} x - y = 28 \dots\dots(1) \\ x - 3y = 8 \dots\dots(2) \end{cases}$$

利用加減消去法，(1)-(2)

可得 $-y - (-3y) = 28 - 8$ ，解得 $y = 10$

將 $y = 10$ 代入(1)式，解得 $x = 38$

得解為 $x = 38$ 、 $y = 10$

答：今年父親 38 歲、兒子 10 歲。

請自行驗算答案是否正確。

例題 3.7-13

有父子兩人，五年前父親年齡是兒子年齡的 3 倍多 20；八年後，父親年齡是兒子年齡的 2 倍多 12，求父子今年各為多少歲？

詳解：

題目求父親、兒子今年各幾歲。

我們可以設未知數為父親、兒子的年齡，

然後根據下列條件列出聯立方程式：

五年前父親年齡是兒子年齡的 3 倍多 20

八年後，父親是兒子年齡的 2 倍多 12

最後解二元一次聯立方程式得到答案。

設今年父 x 歲，子 y 歲。

五年前父親年齡是 $(x-5)$ 歲，兒子是 $(y-5)$ 歲；五年前父親年齡是兒子年齡的 3 倍多 20

可列式： $(x-5)=3(y-5)+20$

化簡得 $x-3y=10$

八年後父親年齡是 $(x+8)$ 歲，兒子是 $(y+8)$ 歲；八年後，父親是兒子年齡的 2 倍多 12

可列式： $(x+8)=2(y+8)+12$

化簡得 $x-2y=20$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} x-3y=10 \dots\dots(1) \\ x-2y=20 \dots\dots(2) \end{cases}$$

利用加減消去法，(1)-(2)

可得 $-3y-(-2y)=10-20$ ，解得 $y=10$

將 $y=10$ 代入(1)式，解得 $x=40$

得解為 $x=40$ 、 $y=10$

答：今年父親 40 歲、兒子 10 歲。

請自行驗算答案是否正確。

例題 3.7-14

李伯伯去水果攤買水果，發現 5 顆蘋果與 3 顆橘子的價錢一樣，李伯伯買了 4 顆蘋果與 6 顆橘子付了 168 元，請問蘋果和橘子一顆各多少錢？

詳解：

題目求蘋果和橘子一顆各多少錢。

我們可以設未知數為一顆蘋果、橘子的價錢，

然後根據下列條件列出聯立方程式：

5 顆蘋果與 3 顆橘子的價錢一樣

4 顆蘋果與 6 顆橘子付了 168 元

最後解二元一次聯立方程式得到答案。

設一顆蘋果 x 元，一顆橘子 y 元。

5 顆蘋果與 3 顆橘子的價錢一樣

可列式： $5x=3y \Rightarrow 5x-3y=0$

4 顆蘋果與 6 顆橘子付了 168 元

可列式： $4x+6y=168$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} 5x-3y=0 & \dots\dots(1) \\ 4x+6y=168 & \dots\dots(2) \end{cases}$$

利用加減消去法， $(1)\times 2+(2)$

可得 $10x+4x=0+168$ ，解得 $x=12$

將 $x=12$ 代入(1)式，解得 $y=20$

得解為 $x=12$ 、 $y=20$

答：一顆蘋果 12 元，一顆橘子 20 元。

請自行驗算答案是否正確。

例題 3.7-15

李伯伯買水果，買了一顆西瓜之後，剩餘的錢為一顆西瓜價錢的兩倍。之後又花了 80 元買晚餐，剩下的錢為原有的一半，請問李伯伯原本有多少錢？

詳解：

題目求李伯伯原本有多少錢。

我們可以設未知數為李伯伯原有的錢、一顆西瓜的價錢，然後根據下列條件列出聯立方程式：

買了一顆西瓜之後，剩餘的錢為一顆西瓜價錢的兩倍
之後又花了 80 元買晚餐，剩下的錢為原有的一半

最後解二元一次聯立方程式得到答案。

設李伯伯原本有 x 元，一顆西瓜 y 元。

買了一顆西瓜之後，剩餘的錢為一顆西瓜價錢的兩倍

可列式： $x - y = 2y$

化簡得 $x - 3y = 0$

之後又花了 80 元買晚餐，剩下的錢為原有的一半

可列式： $x - y - 80 = \frac{1}{2}x$

化簡得 $x - 2y = 160$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} x - 3y = 0 & \dots\dots(1) \\ x - 2y = 160 & \dots\dots(2) \end{cases}$$

利用加減消去法，(1)-(2)

可得 $-3y - (-2y) = 0 - 160$ ，解得 $y = 160$

將 $y = 160$ 代入(1)式，解得 $x = 480$

得解為 $x = 480$ 、 $y = 160$

答：李伯伯原本有 480 元。

請自行驗算答案是否正確。

例題 3.7-16

甲與乙各有若干元，若甲給乙 20 元，則甲的錢是乙的錢的 3 倍；若乙給甲 50 元，則甲的錢是乙的錢的 2 倍多 290 元，問甲和乙原本各有多少錢？

詳解：

題目求甲和乙原本各有多少錢。

我們可以設未知數為甲原有的錢、甲原有的錢，

然後根據下列條件列出聯立方程式：

若甲給乙 20 元，則甲的錢是乙的錢的 3 倍

若乙給甲 50 元，則甲的錢是乙的錢的 2 倍多 290 元

最後解二元一次聯立方程式得到答案。

設甲原本有 x 元，乙原本有 y 元。

甲給乙 20 元，甲會減少 20 元，乙會增加 20 元；同理，乙給甲 50 元，甲會增加 50 元，乙會減少 50 元

若甲給乙 20 元，則甲的錢是乙的錢的 3 倍

可列式： $(x-20)=3(y+20)$

化簡得 $x-3y=80$

若乙給甲 50 元，則甲的錢是乙的錢的 2 倍多 290 元

可列式： $(x+50)=2(y-50)+290$

化簡得 $x-2y=140$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} x-3y=80 & \dots\dots(1) \\ x-2y=140 & \dots\dots(2) \end{cases}$$

利用加減消去法，(1)-(2)

可得 $-3y-(-2y)=80-140$ ，解得 $y=60$

將 $y=60$ 代入(1)式，解得 $x=260$

得解為 $x=260$ 、 $y=60$

答：甲原本有 260 元、乙原本有 60 元。

請自行驗算答案是否正確。

例題 3.7-17

小明參加數學競賽共 25 題，每答對一題得 4 分，答錯一題扣 1 分。已知小明全部作答，共得 75 分，則小明答對與答錯的題數各有幾題？

詳解：

題目求小明答對與答錯的題數各有幾題。

我們可以設未知數為答對的題數與答錯的題數，

然後根據下列條件列出聯立方程式：

共 25 題，全部作答

每答對一題得 4 分，答錯一題扣 1 分。全部作答，共得 75 分

最後解二元一次聯立方程式得到答案。

設小明答對 x 題，答錯 y 題。

共 25 題，全部作答

可列式： $x + y = 25$

每答對一題得 4 分，答錯一題扣 1 分。全部作答，共得 75 分

可列式： $4x - y = 75$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} x + y = 25 & \dots\dots(1) \\ 4x - y = 75 & \dots\dots(2) \end{cases}$$

利用加減消去法，(1)+(2)

可得 $x + 4x = 25 + 75$ ，解得 $x = 20$

將 $x = 20$ 代入(1)式，解得 $y = 5$

得解為 $x = 20$ 、 $y = 5$

答：小明答對 20 題，答錯 5 題。

請自行驗算答案是否正確。

例題 3.7-18

一艘在河中行駛的船，其船時速與水流時速關係如下：

順流時速 = 船在靜水中時速 + 水流時速

逆流時速 = 船在靜水中時速 - 水流時速

已知船在順流時速為 20 公里，逆流時速為 12 公里，求船在靜水中的時速為何？

詳解：

題目求船在靜水中的時速為何。

我們可以設未知數為船在靜水中的時速和水流時速，

然後根據下列條件列出聯立方程式：

順流時速 = 船在靜水中時速 + 水流時速 (順流時速為 20 公里)

逆流時速 = 船在靜水中時速 - 水流時速 (逆流時速為 12 公里)

最後解二元一次聯立方程式得到答案。

設船在靜水中的時速為 x ，水流時速為 y 。

順流時速 = 船在靜水中時速 + 水流時速 (順流時速為 20 公里)

可列式： $20 = x + y$

逆流時速 = 船在靜水中時速 - 水流時速 (逆流時速為 12 公里)

可列式： $12 = x - y$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} x + y = 20 \dots\dots(1) \\ x - y = 12 \dots\dots(2) \end{cases}$$

利用加減消去法，(1)+(2)

可得 $x + x = 20 + 12$ ，解得 $x = 16$

將 $x = 16$ 代入(1)式，解得 $y = 4$

得解為 $x = 16$ 、 $y = 4$

答：船在靜水中的時速為 16 公里。

請自行驗算答案是否正確。

進階問題

例題 3.7-19

李伯伯帶了一些錢要買蘋果，原本想買 7 顆蘋果，但發現帶的錢不足 6 元。然後李伯伯買了 6 顆蘋果，買完剩下 2 元，請問蘋果一顆多少元？李伯伯帶了多少錢去買蘋果？

詳解：

題目求蘋果一顆多少元、李伯伯帶了多少錢去買蘋果。

我們可以設未知數為蘋果一顆的價錢，李伯伯帶的錢

然後根據下列條件列出聯立方程式：

原本想買 7 顆蘋果，但發現帶的錢不足 6 元

買了 6 顆蘋果，買完剩下 2 元

最後解二元一次聯立方程式得到答案。

設一顆蘋果 x 元，李伯伯帶了 y 元。

原本想買 7 顆蘋果，但發現帶的錢不足 6 元

可列式： $7x = y + 6$

化簡得 $7x - y = 6$

買了 6 顆蘋果，買完剩下 2 元

可列式： $6x = y - 2$

化簡得 $6x - y = -2$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} 7x - y = 6 & \dots\dots(1) \\ 6x - y = -2 & \dots\dots(2) \end{cases}$$

利用加減消去法，(1)-(2)

可得 $7x - 6x = 6 - (-2)$ ，解得 $x = 8$

將 $x = 8$ 代入(1)式，解得 $y = 50$

得解為 $x = 8$ 、 $y = 50$

答：蘋果一顆 8 元，李伯伯帶了 50 元。

請自行驗算答案是否正確。

例題 3.7-20

一群學生分配宿舍，如果 4 人住一間，則有 2 人無宿舍可住；如果 5 人住一間，則有一間只住 2 人。求宿舍有多少間？學生有多少人？

詳解：

題目求宿舍有多少間、學生有多少人。

我們可以設未知數為宿舍的間數，學生的人數

然後根據下列條件列出聯立方程式：

4 人住一間，則有 2 人無宿舍可住

5 人住一間，則有一間只住 2 人

最後解二元一次聯立方程式得到答案。

設宿舍有 x 間，學生有 y 人。

4 人住一間，則有 2 人無宿舍可住

4 人住一間，宿舍有 x 間，也就是住了 $4x$ 人。另外有 2 人沒宿舍住，也就是總人數為 $(4x+2)$ 人

可列式： $y=4x+2 \Rightarrow 4x-y=-2$

5 人住一間，則有一間只住 2 人

若 5 人住 1 間住滿，則人數為 $5x$ 人。但有一間只住 2 人，也就是有 3 個空位，因此學生總人數為 $(5x-3)$ 人

可列式： $y=5x-3 \Rightarrow 5x-y=3$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} 4x-y=-2 & \dots\dots(1) \\ 5x-y=3 & \dots\dots(2) \end{cases}$$

利用加減消去法，(2)-(1)

可得 $5x-4x=3-(-2)$ ，解得 $x=5$

將 $x=5$ 代入(1)式，解得 $y=22$

得解為 $x=5$ 、 $y=22$

答：宿舍有 5 間、學生有 22 人。

請自行驗算答案是否正確。

例題 3.7-21

小明想調配食鹽水，甲食鹽水的濃度是 8%，乙食鹽水的濃度是 5%，若想調出濃度 6% 的食鹽水 300 公克，甲、乙食鹽水應各取多少公克來調配？

詳解：

做這一題之前，我們需要先瞭解濃度的意義
食鹽水由鹽和水組成，濃度則代表鹽的含量

例如說若有濃度 8% 的食鹽水 100 公克，則其中鹽就佔了 8 公克 ($100 \times \frac{8}{100} = 8$)

若有濃度 5% 的食鹽水 200 公克，則其中鹽就佔了 10 公克 ($200 \times \frac{5}{100} = 10$)

題目求甲、乙食鹽水應各取多少公克。

我們可以設未知數為甲、乙食鹽水的重量

然後根據下列條件列出聯立方程式：

調出的食鹽水是 300 公克

甲食鹽水濃度 8%，乙食鹽水濃度 5%，想調出濃度 6% 的食鹽水 300 公克
最後解二元一次聯立方程式得到答案。

設甲食鹽水 x 公克，乙食鹽水 y 公克。

調出的食鹽水是 300 公克

可列式： $x + y = 300$

甲食鹽水濃度 8%，乙食鹽水濃度 5%，想調出濃度 6% 的食鹽水 300 公克

濃度 6% 的食鹽水 300 公克，鹽共有 $300 \times \frac{6}{100}$ 公克

甲食鹽水濃度 8%， x 公克，鹽共有 $x \times \frac{8}{100}$ 公克

乙食鹽水濃度 5%， y 公克，鹽共有 $y \times \frac{5}{100}$ 公克

甲、乙食鹽水中的鹽重量相加，應等於調配後的鹽重量

可列式： $x \times \frac{8}{100} + y \times \frac{5}{100} = 300 \times \frac{6}{100}$

化簡得 $8x + 5y = 1800$ (左右同乘以 100)

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} x + y = 300 & \dots\dots(1) \\ 8x + 5y = 1800 & \dots\dots(2) \end{cases}$$

利用加減消去法， $(1) \times 8 - (2)$

可得 $8y - 5y = 2400 - 1800$ ，解得 $y = 200$

將 $y = 200$ 代入(1)式，解得 $x = 100$

得解為 $x = 100$ 、 $y = 200$

答：甲食鹽水取 100 公克，乙食鹽水取 200 公克。

請自行驗算答案是否正確。

例題 3.7-22

200 公克的純水，加入了濃度 3% 的甲食鹽水 x 公克，以及濃度 5% 的乙食鹽水 y 公克，最後成為濃度 2% 的食鹽水 400 公克。求 x 、 y 之值。

詳解：

題目求 x 、 y 之值，也就是甲、乙食鹽水的公克數。

根據下列條件列出聯立方程式：

最後成為 400 公克的食鹽水。

濃度 3% 的甲食鹽水 x 公克，以及濃度 5% 的乙食鹽水 y 公克，最後成為濃度 2% 的食鹽水 400 公克

最後解二元一次聯立方程式得到答案。

調出的食鹽水是 400 公克

可列式： $200 + x + y = 400$

化簡得 $x + y = 200$

濃度 3% 的甲食鹽水 x 公克，以及濃度 5% 的乙食鹽水 y 公克，最後成為濃度 2% 的食鹽水 400 公克

濃度 2% 的食鹽水 400 公克，鹽共有 $400 \times \frac{2}{100}$ 公克

甲食鹽水濃度 3%， x 公克，鹽共有 $x \times \frac{3}{100}$ 公克

乙食鹽水濃度 5%， y 公克，鹽共有 $y \times \frac{5}{100}$ 公克

甲、乙食鹽水中的鹽重量相加，應等於調配後的鹽重量

$$\text{可列式： } x \times \frac{3}{100} + y \times \frac{5}{100} = 400 \times \frac{2}{100}$$

$$\text{化簡得 } 3x + 5y = 800 \quad (\text{左右同乘以 } 100)$$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} x + y = 200 & \text{.....(1)} \\ 3x + 5y = 800 & \text{.....(2)} \end{cases}$$

利用加減消去法， $(1) \times 5 - (2)$

可得 $5x - 3x = 1000 - 800$ ，解得 $x = 100$

將 $x = 100$ 代入(1)式，解得 $y = 100$

得解為 $x = 100$ 、 $y = 100$

答： $x = 100$ 、 $y = 100$ 。

請自行驗算答案是否正確。

例題 3.7-23

有一群人和若干匹駱駝要越過路程為 80 公里的沙漠，但駱駝數少於人數，所以必須輪流騎，且一隻駱駝一次只能一個人乘騎。每人可以騎 50 公里。若人數增加 6 人，駱駝增加 2 隻，則每人可騎 40 公里。求原有人數和駱駝各有多少？

詳解：

題目求原有人數和駱駝各有多少。

根據下列條件列出聯立方程式：

輪流騎，每人可以騎 50 公里

若人數增加 6 人，駱駝增加 2 隻，則每人可騎 40 公里

最後解二元一次聯立方程式得到答案。

設原有人數為 x 人，駱駝有 y 隻。

全部人騎在駱駝上的總距離 = 全部駱駝移動的總距離

輪流騎，每人可以騎 50 公里

x 人，每人騎 50 公里，總距離是 $50x$ 公里

y 隻駱駝，每隻走 80 公里，總距離是 $80y$ 公里

可列式： $50x=80y \Rightarrow 5x-8y=0$

若人數增加 6 人，駱駝增加 2 隻，則每人可騎 40 公里

可列式： $40(x+6)=80(y+2)$

化簡得 $x-2y=-2$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} 5x - 8y = 0 \dots\dots(1) \\ x - 2y = -2 \dots\dots(2) \end{cases}$$

利用加減消去法， $(1)-(2)\times 5$

可得 $-8y-(-10y)=0-(-10)$ ，解得 $y=5$

將 $y=5$ 代入(1)式，解得 $x=8$

得解為 $x=8$ 、 $y=5$

答：原有人數 8 人、駱駝 5 隻。

請自行驗算答案是否正確。

例題 3.7-24

班上同學舉行同樂會，準備 5 箱飲料，每箱的飲料瓶數都相同，每人先發一瓶，發完 2 箱後，有 2 人沒拿到；全部發完後，每人各得 2 瓶，還剩下 20 瓶，請問有多少人參加同樂會，每箱飲料有多少盒？

詳解：

題目求有多少人參加同樂會，每箱飲料有多少盒。

根據下列條件列出聯立方程式：

每人先發一瓶，發完 2 箱後，有 2 人沒拿到

全部發完後，每人各得 2 瓶，還剩下 20 瓶

最後解二元一次聯立方程式得到答案。

設人數為 x 人，一箱飲料有 y 瓶。

每人先發一瓶，發完 2 箱後，有 2 人沒拿到

發完 2 箱，也就是發了 $2y$ 瓶

每人一瓶，有 2 人沒拿到，也就是拿了 $(x-2)$ 瓶

可列式： $2y = x - 2 \Rightarrow x - 2y = 2$

全部發完後，每人各得 2 瓶，還剩下 20 瓶

5 箱全部發完，也就是發了 $5y$ 瓶

每人各得 2 瓶，還剩下 20 瓶，也就是共有 $(2x+20)$ 瓶

可列式： $5y = 2x + 20 \Rightarrow 2x - 5y = -20$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} x - 2y = 2 & \dots\dots(1) \\ 2x - 5y = -20 & \dots\dots(2) \end{cases}$$

利用加減消去法， $(1) \times 2 - (2)$

可得 $-4y - (-5y) = 4 - (-20)$ ，解得 $y = 24$

將 $y = 24$ 代入(1)式，解得 $x = 50$

得解為 $x = 50$ 、 $y = 24$

答：人數 50 人、一箱飲料有 24 瓶。

請自行驗算答案是否正確。

例題 3.7-25

某班男女學生共有 50 人，在上次考試中，全班的平均分數是 86 分；其中男生的平均分數是 80 分，女生的平均分數是 90 分，求男生有多少人？女生有多少人？

詳解：

本題提到了平均分數，我們要先知道總分與平均分數的關係；

總分 = 平均分數 \times 人數

平均分數 = 總分 \div 人數

當然全班總分就是男生總分加上女生總分

全班總分 = 男生總分 + 女生總分

題目求男生有多少人、女生有多少人。

根據下列條件列出聯立方程式：

男女學生共有 50 人

全班的平均分數是 86 分；男生的平均分數是 80 分，女生的平均分數是 90 分
最後解二元一次聯立方程式得到答案。

設男生人數為 x 人，女生人數為 y 人。

男女學生共有 50 人

可列式： $x + y = 50$

全班的平均分數是 86 分；男生的平均分數是 80 分，女生的平均分數是 90 分

男生的平均分數是 80 分，男生總分可寫成 $80x$

女生的平均分數是 90 分，女生總分可寫成 $90y$

全班總分是 $(80x + 90y)$ ，全班平均是 $\frac{80x + 90y}{50}$

可列式： $\frac{80x + 90y}{50} = 86$

化簡 $80x + 90y = 4300$

得 $8x + 9y = 430$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} x + y = 50 & \dots\dots(1) \\ 8x + 9y = 430 & \dots\dots(2) \end{cases}$$

利用加減消去法， $(1) \times 8 - (2)$

可得 $8y - 9y = 400 - 430$ ，解得 $y = 30$

將 $y = 30$ 代入(1)式，解得 $x = 20$

得解為 $x = 20$ 、 $y = 30$

答：男生 20 人、女生 30 人。

請自行驗算答案是否正確。

例題 3.7-26

小明和小胖賽跑，已知小明的速度是小胖的兩倍。若小明先讓小胖跑 40 公尺後，再開始追趕小胖，10 秒後小明追上了小胖。問小明和小胖每秒各跑幾公尺？
(速度全程不變)

詳解：

距離 = 速率 × 時間

題目求小明和小胖每秒各跑幾公尺。

根據下列條件列出聯立方程式：

小明的速度是小胖的兩倍

小明先讓小胖跑 40 公尺後，再開始追趕小胖，10 秒後小明追上了小胖
最後解二元一次聯立方程式得到答案。

設小明的速度為每秒 x 公尺，小胖的速度為每秒 y 公尺。

小明的速度是小胖的兩倍

可列式： $x = 2y$

小明先讓小胖跑 40 公尺後，再開始追趕小胖，10 秒後小明追上了小胖

小胖先跑了 40 公尺，之後又過了 10 秒被追上，小胖 10 秒可跑 $10y$ 公尺
也就是小胖共跑了 $(40 + 10y)$

小明共跑了 10 秒，10 秒可跑 $10x$ 公尺，兩人跑的距離相同

可列式： $10x = 40 + 10y$

化簡得 $x = y + 4$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} x = 2y & \dots\dots(1) \\ x = y + 4 & \dots\dots(2) \end{cases}$$

利用代入消去法，將 $x = 2y$ 代入(2)

可得 $2y = y + 4$ ，解得 $y = 4$

將 $y = 4$ 代入(1)式，解得 $x = 8$

得解為 $x = 8$ 、 $y = 4$

答：小明每秒跑 8 公尺、小胖每秒跑 4 公尺。

請自行驗算答案是否正確。

例題 3.7-27

今有 A、B 兩地距離 120 公尺，小明從 A 地跑向 B 地，小胖則從 B 地跑向 A 地。已知小明的速度是小胖的兩倍，他們跑了 10 秒後相遇，請問小明和小胖每秒各跑幾公尺？(全程速度不變)

詳解：

題目求小明和小胖每秒各跑幾公尺。

根據下列條件列出聯立方程式：

小明的速度是小胖的兩倍

A、B 兩地距離 120 公尺，他們跑了 10 秒後相遇

最後解二元一次聯立方程式得到答案。

設小明的速度為每秒 x 公尺，小胖的速度為每秒 y 公尺。

小明的速度是小胖的兩倍

可列式： $x = 2y$

A、B 兩地距離 120 公尺，他們跑了 10 秒後相遇

小明 10 秒可跑 $10x$ 公尺，小胖 10 秒可跑 $10y$ 公尺

兩人共跑 $(10x + 10y)$ 公尺

可列式： $10x + 10y = 120$

化簡得 $x + y = 12$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} x = 2y & \dots\dots(1) \\ x + y = 12 & \dots\dots(2) \end{cases}$$

利用代入消去法，將 $x = 2y$ 代入(2)

可得 $2y + y = 12$ ，解得 $y = 4$

將 $y = 4$ 代入(1)式，解得 $x = 8$

得解為 $x = 8$ 、 $y = 4$

答：小明每秒跑 8 公尺、小胖每秒跑 4 公尺。

請自行驗算答案是否正確。

例題 3.7-28

大丁和小丁做兩個數的加法運算，大丁將加數後面多寫了一個 0，算出和為 545，而小丁則將加數後面少寫了一個 0，算出和為 50，求此兩數應該為何？

詳解：

題目求此兩數應該為何。

根據下列條件列出聯立方程式：

將加數後面多寫了一個 0，算出和為 545

將加數後面少寫了一個 0，算出和為 50

最後解二元一次聯立方程式得到答案。

數字後面多寫了一個 0，例如 50 寫成 500，會變成 10 倍

數字後面少寫了一個 0，例如 50 寫成 5，會變成 $\frac{1}{10}$ 倍

設加數為 x ，被加數為 y 。

將加數後面多寫了一個 0，算出和為 545

可列式： $x+10y=545$

將加數後面少寫了一個 0，算出和為 50

可列式： $x+\frac{1}{10}y=50$

化簡得 $10x+y=500$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} x+10y=545 \dots\dots(1) \\ 10x+y=500 \dots\dots(2) \end{cases}$$

利用係數對稱型的作法，(1)+(2)

可得 $11x+11y=1045$ ，化簡得 $x+y=95\dots(3)$

(1)-(3)，得 $10y-y=545-95$ ，解得 $y=50$

將 $y=50$ 代入(1)式，解得 $x=45$

得解為 $x=45$ 、 $y=50$

答：兩數為 45 和 50。

請自行驗算答案是否正確。

例題 3.7-29

小君和小糖同解一聯立方程式 $\begin{cases} mx+ny=8 \\ kx+5y=19 \end{cases}$ ，小君解得 $x=2$ 、 $y=1$ ，小糖解得 $x=4$ 、 $y=-2$ ，已知小君的答案正確，小糖的答案錯誤，經檢查才知小糖將係數 k 看錯了。求 m 、 n 、 k 之值。

詳解：

題目求 m 、 n 、 k 之值。

$$\begin{cases} mx+ny=8 \dots\dots(1) \\ kx+5y=19 \dots\dots(2) \end{cases}$$

小君的答案正確，我們可先將 $x=2$ 、 $y=1$ 代入(2)式，求出 k

$$kx+5y=19$$

$$k \times (2) + 5 \times (1) = 19$$

解得 $k=7$

接著再求 m 、 n 之值。

將小君的 $x=2$ 、 $y=1$ 代入(1)，得

$$2m+n=8$$

小糖的答案是因看錯(2)式的 k 值而錯誤，因此代入(1)式仍可使等號成立，

將 $x=4$ 、 $y=-2$ 代入(1)式，得

$$4m-2n=8$$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} 2m+n=8 \dots\dots(3) \\ 4m-2n=8 \dots\dots(4) \end{cases}$$

利用加減消去法， $(1) \times 2 + (2)$

可得 $4m+4m=16+8$ ，解得 $m=3$

將 $m=3$ 代入(1)式，解得 $n=2$

得解為 $m=3$ 、 $n=2$

答： $m=3$ 、 $n=2$ 、 $k=7$ 。

請自行驗算答案是否正確。

例題 3.7-30

小君解一聯立方程式 $\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 7x+5y=19 \end{cases}$ ，不小心將第二式中的 19 看錯，解得 $x=4$ 、 $y=k$ ，請問(1) k 為多少？(2)小君將 19 看成何數？

詳解：

小君只看錯了第二式的數字，因此答案代入第一式可使等號成立

我們將 $x=4$ 、 $y=k$ 代入第一式：

$$3x+2y=8$$

$$3 \times (4) + 2 \times (k) = 8$$

解得 $k=-2$

再來要求小君將 19 看成何數

因為此數看錯了，我們先將 19 設成 m ，並代入 $x=4$ 、 $y=k=-2$

$$7x+5y=m$$

$$7 \times (4) + 5 \times (-2) = m$$

解得 $m=18$

答：(1) $k=-2$ 、(2)小君將 19 看成 18。

例題 3.7-31

有一水槽，A 水管將水注入水槽，B 水管則以每分鐘 5 公升的速度將水送出水槽。若 A、B 兩水管一起運作，水槽 30 分鐘後會滿。若 A 水管先注水 10 分鐘後，B 水管才開始放水，這樣水槽再過 15 分鐘後就會滿了。請問水槽容量是幾公升？A 水管每分鐘可以注入多少水？(A 水管每分鐘的注水量是固定的)

詳解：

題目求水槽容量與 A 水管每分鐘注水量。

根據下列條件列出聯立方程式：

A、B 兩水管一起運作，水槽 30 分鐘後會滿

A 水管先注水 10 分鐘後，B 水管才開始放水，這樣水槽再過 15 分鐘後會滿

最後解二元一次聯立方程式得到答案。

設 A 水管每分鐘注水 x 公升，水槽容量為 y 公升。

A、B 兩水管一起運作，水槽 30 分鐘後會滿

A 水管注水 30 分鐘，共注水 $30x$ 公升

B 水管放水 30 分鐘，共放水 30×5 公升

可列式： $30x - 30 \times 5 = y$

化簡得 $30x - y = 150$

A 水管先注水 10 分鐘後，B 水管才開始放水，這樣水槽再過 15 分鐘後會滿

A 水管共注水 25 分鐘，也就是注水 $25x$ 公升

B 水管放水 15 分鐘，共放水 15×5 公升

可列式： $25x - 75 = y$

化簡得 $25x - y = 75$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} 30x - y = 150 & \dots\dots(1) \\ 25x - y = 75 & \dots\dots(2) \end{cases}$$

利用加減消去法，(1)-(2)

可得 $30x - 25x = 150 - 75$ ，解得 $x = 15$

將 $x = 15$ 代入(1)式，解得 $y = 300$

得解為 $x = 15$ 、 $y = 300$

答：水槽容量為 300 公升，A 水管每分鐘注水 15 公升。

請自行驗算答案是否正確。

例題 3.7-32

有一工程，原本有男工 2 人、女工 2 人共同做了 5 天，完成了 $\frac{8}{15}$ 的工程，後來增加了 2 名男工、3 名女工，這 9 人花了 2 天就把剩下的工程完成了，請問男工一人獨做需幾日完成？女工一人獨做又需幾日完成？

(每位男工獨做所需日數相同、每位女工獨做所需日數也相同)

詳解：

工程題目，5 天完成了 $\frac{8}{15}$ 的工程，也就是將整個工程量看成 1，

完成了 $\frac{8}{15}$ 後，還會剩下 $\frac{7}{15}$ 的工程。 $(1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15})$

題目求男工一人獨做與女工一人獨做需幾日完成。

根據下列條件列出聯立方程式：

原本有男工 2 人、女工 2 人共同做了 5 天，完成了 $\frac{8}{15}$ 的工程

增加了 2 名男工、3 名女工，這 9 人花了 2 天就把剩下的工程完成了
最後解二元一次聯立方程式得到答案。

設男工一人一日可完成 x 的工程，女工一人一日可完成 y 的工程。

原本有男工 2 人、女工 2 人共同做了 5 天，完成了 $\frac{8}{15}$ 的工程

男工 2 人、女工 2 人一日完成的工程是 $(2 \times x + 2 \times y)$

5 日完成了 $\frac{8}{15}$ 的工程可列式： $5 \times (2 \times x + 2 \times y) = \frac{8}{15}$

化簡得 $10x + 10y = \frac{8}{15}$

增加了 2 名男工、3 名女工，這 9 人花了 2 天就把剩下的工程完成了
總共變成 4 名男工、5 名女工，一日完成的工程是 $(4 \times x + 5 \times y)$

2 日完成了 $\frac{7}{15}$ 的工程可列式： $2 \times (4 \times x + 5 \times y) = \frac{7}{15}$

化簡得 $8 \times x + 10 \times y = \frac{7}{15}$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} 10x + 10y = \frac{8}{15} \dots\dots(1) \\ 8x + 10y = \frac{7}{15} \dots\dots(2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \quad (10x + 10y) - (8x + 10y) = \frac{8}{15} - \frac{7}{15}$$

$$2x = \frac{1}{15}$$

$$x = \frac{1}{30}$$

將 $x = \frac{1}{30}$ 代入(1)式可求得 $y = \frac{1}{50}$

因為男工一人一日可完成 $\frac{1}{30}$ 的工程，所以男工一人獨做需 30 日完成；

女工一人一日可完成 $\frac{1}{50}$ 的工程，所以女工一人獨做需 50 日完成。

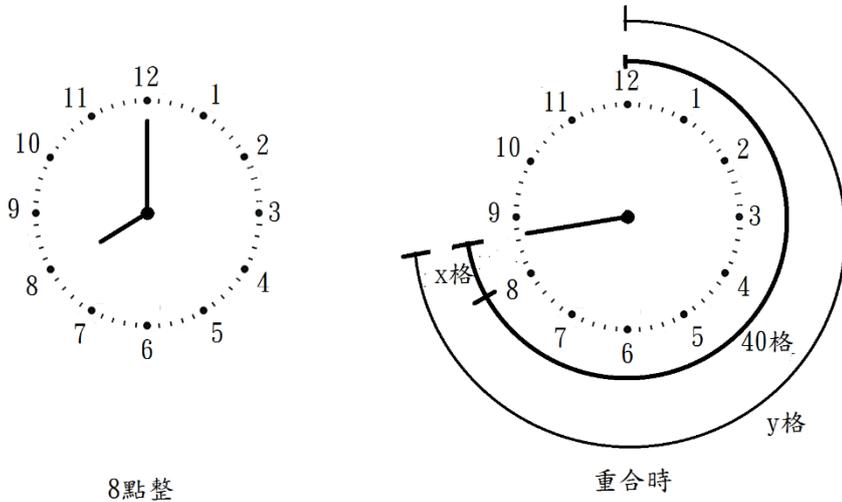
答：男工一人獨做需 30 日完成，女工一人獨做需 50 日完成。

例題 3.7-33

請問 8 點幾分，時鐘的分針會與時針重合？

詳解：

8 點整與重合時的時鐘如下圖：



從 8 點整開始走，設重合時，時針共走了 x 格，分針共走了 y 格
此處指的「格」是指分針走的小格。

一小時時針會走 5 格，分針會走 60 格

也就是走的格數比 $x:y=5:60=1:12$

$$\text{得 } y=12x \dots\dots(1)$$

重合時，分針所在的位置是第 y 格，時針是 $(40+x)$ 格，二者重合

$$\text{得 } y=40+x \dots\dots(2)$$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} y=12x \dots\dots(1) \\ y=40+x \dots\dots(2) \end{cases}$$

利用代入消去法，將 $y=12x$ 代入(2)

$$\text{可得 } 12x=40+x, \text{ 解得 } x=\frac{40}{11}$$

$$\text{將 } x=\frac{40}{11} \text{ 代入(1)式, 解得 } y=\frac{480}{11}。y \text{ 值大約是 } 43.64$$

答：8 點 $\frac{480}{11}$ 分時，時針與分針重合。

(大約是 8 點 43.64 分)

例題 3.7-34

$$\text{若 } \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \\ ax+2y=12 \end{cases} \text{ 恰有一組解，求 } a \text{ 之值。}$$

詳解：

本題我們可先從前兩個式子找出解，再代入第三個式子求出 a

解聯立方程式：

$$\begin{cases} x+y=3 \dots\dots(1) \\ x-y=1 \dots\dots(2) \end{cases}$$

利用加減消去法，(1)+(2)

可得 $x+x=3+1$ ，解得 $x=2$

將 $x=2$ 代入(1)式，解得 $y=1$ ，得解為 $x=2$ 、 $y=1$

再將解代入 $ax+2y=12$

$$ax+2y=12$$

$$a \times (2) + 2 \times (1) = 12$$

$$2a+2=12$$

$$2a=10$$

$$a=5$$

答： $a=5$ 。

例題 3.7-35

已知 $x:y=5:4$ ，求下列各比的比值：

(1) $3x:5y$

(2) $(2x+y):(x+2y)$

詳解：

$x:y=5:4$ ，我們可以令 $x=5r$ 、 $y=4r$ ($r \neq 0$)

(1) $3x:5y$

$$= 3 \times (5r) : 5 \times (4r)$$

$$= 15r : 20r$$

$$= 3r : 4r$$

$$= 3:4$$

(2) $(2x+y):(x+2y)$

$$= (2 \times 5r + 4r) : (5r + 2 \times 4r)$$

$$= (10r + 4r) : (5r + 8r)$$

$$= 14r : 13r$$

$$= 14:13$$

答：(1) $3:4$ 、(2) $14:13$ 。

3.7 節 習題

習題 3.7-1

設 x 、 y 為整數，若 $|2x - y + 3| + |4x + 3y - 19| = 0$ ，求 x 、 y 之值。

習題 3.7-2

設 x 、 y 為整數，若 $(4x - 7y + 5)^2 + (5x - 8y + 7)^2 = 0$ ，求 x 、 y 之值。

習題 3.7-3

小林到夜市買 3 個雞排及 2 杯紅茶，共花了 200 元，小夏買了 1 個雞排及 3 杯紅茶，共花了 125 元，請問一個雞排及一杯紅茶各為多少元？

習題 3.7-4

小力買了 2 顆牛奶糖及 3 顆軟糖，共花了 34 元，小王買了 4 顆牛奶糖及 7 顆軟糖，共花了 76 元，請問一顆牛奶糖及一顆軟糖各為多少元？

習題 3.7-5

有兩組客人到遊樂園，第一組買了 2 張全票及 1 張半票，付 370 元。第二組買了 1 張全票及 2 張半票，付 290 元，請問一張全票及一張半票各為多少元？

習題 3.7-6

小全到農場參觀，他想知道農場內有幾隻雞與幾隻鴨，於是農場主人跟他說，農場內雞的隻數是鴨的兩倍再多 4，且農場內總共有 46 隻雞與鴨，請幫小全算出農場內雞與鴨的數量各為多少？

習題 3.7-7

袋子裡有黑棋與白棋共 100 顆，已知黑棋與白棋的數量比為 3:1，則黑棋和白棋各有多少顆？

習題 3.7-8

有一個二位數，其十位數字與個位數字的和為 12，將它的十位數字與個位數字對調後，所得的新數比原數小 18，試求此二位數是多少？

習題 3.7-9

有一個分數，分子的 4 倍等於分母的 3 倍，若將分子、分母同時加 4 後，其值與 $\frac{5}{6}$ 相等，試求此分數為何？

習題 3.7-10

已知有大小兩數，大數的 2 倍比小數的 3 倍少 12，大數的 3 倍比小數的 2 倍多 22，求大小兩數為何？

習題 3.7-11

小王將鴨和兔子養在一個大籠子裡，他發現鴨和兔子加起來共 11 隻，鴨的腳和兔子的腳加起來共有 32 隻腳，請問籠子裡各有幾隻鴨和兔子？

習題 3.7-12

父子的年齡差 36 歲，3 年後父親的年齡正好是兒子的 3 倍，求父親、兒子今年各幾歲？

習題 3.7-13

有父子兩人，五年前父親年齡是兒子年齡的 10 倍；七年後，父親年齡是兒子年齡的 3 倍少 3，求父子今年各為多少歲？

習題 3.7-14

陳伯伯去飲料店買冷飲，發現 7 杯紅茶與 4 杯珍珠奶茶的價錢一樣，陳伯伯買了 2 杯紅茶與 2 杯珍珠奶茶付了 110 元，請問紅茶和珍珠奶茶一杯各多少錢？

習題 3.7-15

李伯伯去看電影，買了一張電影票之後，剩餘的錢為一張電影票價錢的三倍。之後又花了 500 元買書，剩下的錢為原有的四分之一，請問李伯伯原本有多少錢？

習題 3.7-16

甲與乙各有若干元，若甲給乙 10 元，則甲的錢是乙的錢的 3 倍；若乙給甲 10 元，則甲的錢是乙的錢的 5 倍，問甲和乙原本各有多少錢？

習題 3.7-17

小李參加數學競賽共 20 題，每答對一題得 5 分，答錯一題扣 2 分。已知小李全部作答，共得 86 分，則小李答對與答錯的題數各有幾題？

習題 3.7-18

一艘在河中行駛的船，其船時速與水流時速關係如下：

順流時速 = 船在靜水中時速 + 水流時速

逆流時速 = 船在靜水中時速 - 水流時速

已知船在順流時速為 18 公里，逆流時速為 12 公里，求船在靜水中的時速為何？

第三章綜合習題

習題 1：

解二元一次聯立方程式：

$$(1) \begin{cases} 3x + y = -3 \\ -20x - 5y = 10 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 5x + 4y = 13 \\ 4x + 5y = 23 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3(x+1) - y - 14 = 0 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 3x - 4y = 29 \\ 2x + 3y = -9 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} 3(2x - y) + 9 = 10 - 4y \\ 2y - x = 15 - 5(x + y) + 6y \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} 2x - y = \frac{11}{4} \\ \frac{2}{3}x + 4y = 2 \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{6} = \frac{7}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 6 \end{cases}$$

$$(8) \begin{cases} \frac{x}{6} + y = 4 \\ x + \frac{y}{2} = 13 \end{cases}$$

$$(9) \begin{cases} x + 0.2y = 2.6 \\ 0.2x + 3y = -5.4 \end{cases}$$

$$(10) \begin{cases} 32x + 68y = 132 \\ 68x + 32y = 168 \end{cases}$$

習題 2：

設 x 、 y 為整數，若 $|2x + y - 11| + |2(x + y) - 4| = 0$ ，求 x 、 y 之值。

習題 3：

設 x 、 y 為整數，若 $(3x + 2y - 5)^2 + |2x + y| = 0$ ，求 x 、 y 之值。

習題 4：

已知 $\frac{x+4}{3} = \frac{x+y+3}{6} = \frac{y+2}{4}$ ，求 x 、 y 之值。

習題 5：

小博 買了每張 10 元的聖誕卡，及每張 15 元的賀年卡各若干張，共花了 85 元，請問他可能有哪些買法？

習題 6：

解下列不等式：(1) $|2x+3|>1$ (2) $|x-5|<3$

習題 7：

已知 $\begin{cases} x = -6 \\ y = 1 \end{cases}$ 是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x + ay = 3b \\ bx - ay = 15 \end{cases}$ 的解，求 $a-b$ 的值。

習題 8：

已知 $\begin{cases} ax + by = 9 \\ -3x + 2y = 4 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} ax - by = -1 \\ 5x + 2y = 20 \end{cases}$ 有相同的解，求 $a-b$ 之值。

習題 9：

奶奶去水果攤買水果，發現 2 個西瓜與 5 個蘋果的價錢一樣，然後她買了 1 個西瓜與 3 個蘋果付了 121 元，請問西瓜和蘋果一個各多少錢？

習題 10：

七年甲班共有學生 36 人，此次考試中，英文成績及格與不及格的人數比為 7：2，則英文成績不及格的學生有多少人？

習題 11：

媽媽拿了 230 元給小新，剛好可以買 3 瓶鮮乳和 2 瓶可樂，但是小新記相反了，買了 2 瓶鮮乳和 3 瓶可樂回來，還剩下 10 元。請問一瓶鮮乳和一瓶可樂各為多少元？

習題 12：

有父子兩人，十年前父親是兒子年齡的 3 倍少 5；六年後，父親是兒子年齡的 2 倍少 6，求父子今年各為多少歲？

習題 13：

有一正三角形，它的三邊長度各為 $2(x+y)$ 、 $3y-x+1$ 、 $5(y-x)-1$ ，請問此正三角形的周長為多少？

習題 14：

一個二位數，其個位數字的 3 倍比十位數字的 2 倍多 5，若把它的個位數字與十位數字對調，所得的新數比原數少 9，求此原二位數應為多少？

習題 15：

一個二位數，其個位數字的 2 倍比十位數字多 6，若把它的個位數字與十位數字對調，所得的新數比原本多 9，求此原二位數應為多少？

習題 16：

小玉將雞和兔子養在一個大籠子裡，他發現雞比兔子多了 1 隻，雞的腳和兔子的腳加起來共有 26 隻腳，請問籠子裡各有幾隻雞和兔子？

習題 17：

小梅將雞和兔子養在一個大籠子裡，他發現雞的腳總數等於兔子的腳總數，又兔子的腳總數比雞的頭總數多 10，請問籠子裡各有幾隻雞和兔子？

習題 18：

設甲、乙兩人共有 210 元，如果甲給乙 30 元後，甲的錢剛好是乙的兩倍，問甲、乙原來各有多少錢？

習題 19：

今年佑佑與父親的年齡比是 4：9，而 3 年前佑佑與父親的年齡比是 5：12，則佑佑今年的年齡是多少歲？

習題 20：

有一個長方形的長比寬多 5 公分，其周長是 22 公分，求此長方形的面積？

習題 21：

一艘在河中行駛的船，若船在順流時速為 33 公里，逆流時速為 23 公里，求船在靜水中的時速和水流時速為何？

習題 22：

城市網咖店，收費標準如下：

(1)基本費用：每次 100 元(可使用 k 分鐘)

(2)超過 k 分鐘，每分鐘收 t 元(不足 1 分鐘以 1 分鐘計算)

莉莉到此店上網 90 分鐘花 145 元，圓圓上網 2 小時花 190 元，求 $k = ? t = ?$

基測與會考模擬試題

- () 1. 守守到郵局，買了 5 元與 12 元的兩種郵票共 29 張，花了 250 元；若 5 元郵票買 x 張，12 元郵票買 y 張，下列哪一個聯立方程式是正確的？

【90(一)基測】

(A) $\begin{cases} x + y = 250 \\ 5x + 12y = 29 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x + y = 29 \\ 5x + 12y = 250 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x + y = 250 \\ 12x + 5y = 29 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x + y = 29 \\ 12x + 5y = 250 \end{cases}$

- () 2. 已知二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x + \frac{1}{4}y = 9 \\ \frac{1}{5}x + y = 17 \end{cases}$ 的解為 $x = a$ ， $y = b$ ，則 $|a - b| = ?$

【91(二)基測】

(A) 1 (B) 11 (C) 13 (D) 16

- () 3. 小玲的錢包內有百元鈔票 x 張，拾元硬幣 y 個，請問錢包內有多少元？

【92(一)基測】

(A) $x + y$ (B) $10x + y$ (C) $100x + 10y$ (D) $110(x + y)$

- () 4. 求聯立方程式 $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ 的解為何？【92(二)基測】

(A) $x = 2$ ， $y = -\frac{3}{2}$ (B) $x = 3$ ， $y = 1$ (C) $x = 1$ ， $y = -1$ (D) $x = 3$ ， $y = -2$

- () 5. 三年一班有男生 a 人、女生 b 人；男生體重的算術平均數是 56 公斤，女生體重的算術平均數是 48 公斤；若全班體重的算術平均數是 54 公斤，則 a 與 b 的數量關係為何？【93(一)基測】

(A) $a = 3b$ (B) $3a = b$ (C) $7a = 6b$ (D) $6a = 7b$

- () 6. $x=1$ ， $y=1$ 為下列哪一個二元一次聯立方程式的解？【93(二)基測】

(A) $\begin{cases} 19x - 11y = 30 \\ 21x + 4y = 25 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 37x - 17y = 20 \\ 16x - 15y = 31 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 15x + 17y = 32 \\ 16x - 11y = 27 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 29x - 18y = 11 \\ 23x + 17y = 40 \end{cases}$

- () 7. 某人帶了 400 元到市場買水果，如果他買 3 個蘋果、5 個水梨，則剩下 30 元；如果他買 5 個蘋果、4 個水梨，則剛好把錢用完。設蘋果每個 x 元，水梨每個 y 元，則依題意可列出下列哪一組聯立方程式？【94(一)基測】

(A) $\begin{cases} 5x + 3y = 430 \\ 4x + 5y = 400 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 3x + 5y = 430 \\ 5x + 4y = 400 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 5x + 3y = 370 \\ 4x + 5y = 400 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 3x + 5y = 370 \\ 5x + 4y = 400 \end{cases}$

- () 8. 哥哥與弟弟各有數張紀念卡。已知弟弟給哥哥 10 張後，哥哥的張數就是弟弟的 2 倍；若哥哥給弟弟 10 張，兩人的張數就一樣多。設哥哥的張數為 x 張，弟弟的張數為 y 張，依題意下列列式何者正確？【94(二)基測】

(A) $\begin{cases} 2(y - 10) = x \\ y = x - 10 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} y - 10 = 2x \\ y = x - 10 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} y - 10 = 2x \\ x - 10 = y + 10 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 2(y - 10) = x + 10 \\ x - 10 = y + 10 \end{cases}$

() 9. 化簡 $(\frac{5}{3}x - \frac{25}{6}y) - (\frac{20}{3}x - \frac{11}{12}y)$ 之後，可得下列哪一個結果？

【95(一)基測】

(A) $-5x - \frac{13}{4}y$ (B) $-60x - 39y$

(C) $-70x - 14y$ (D) $-\frac{25}{3}x - \frac{61}{12}y$

() 10. 若二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+y=3 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$ 的解為 $x=a$ ， $y=b$ ，則 $a-b$ 之值

為何？【96(一)基測】

(A) 1 (B) 3 (C) $-\frac{1}{5}$ (D) $\frac{17}{5}$

() 11. 若二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 3x-4y=3 \end{cases}$ 的解為 $x=a$ ， $y=b$ ，則 $a+b=?$

【97(一)基測】

(A) 1 (B) 6 (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{12}{5}$

() 12. 若大軍買了數支 10 元及 15 元的原子筆，共花費 90 元，則這兩種原子筆的數量可能相差幾支？【97(一)基測】

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

() 13. 若二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x + \frac{5}{6}y = 7 \\ y = 18 \end{cases}$ 的解為 $x=a$ ， $y=b$ ，則 $a+b=?$

【97(二)基測】

(A)0 (B)7 (C)14 (D)22

- () 14. 小芬買 15 份禮物，共花了 900 元，已知每份禮物內都有 1 包餅乾及每支售價 20 元的棒棒糖 2 支。若每包餅乾的售價為 x 元，則依題意可列出下列哪一個一元一次方程式？【99(一)基測】

(A) $15(2x + 20) = 900$ (B) $15x + 20 \times 2 = 900$

(C) $15(x + 20 \times 2) = 900$ (D) $15 \times x \times 2 + 20 = 900$

- () 15. 解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 8x + 6y = 3 \\ 6x - 4y = 5 \end{cases}$ ，得 $y = ?$ 【99(一)基測】

(A) $-\frac{11}{2}$ (B) $-\frac{2}{17}$ (C) $-\frac{2}{34}$ (D) $-\frac{11}{34}$

- () 16. 在早餐店裡，王伯伯買 5 顆饅頭，3 顆包子，老闆少拿 2 元，只要 50 元。李太太買 11 顆饅頭，5 顆包子，老闆以售價的九折優待，只要 90 元。若饅頭每顆 x 元，包子每顆 y 元，則下列哪一個二元一次聯立方程式可表示題目中的數量關係？【100(一)基測】

(A) $\begin{cases} 5x + 3y = 50 + 2 \\ 11x + 5y = 90 \times 0.9 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 5x + 3y = 50 + 2 \\ 11x + 5y = 90 \div 0.9 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 5x + 3y = 50 - 2 \\ 11x + 5y = 90 \times 0.9 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 5x + 3y = 50 - 2 \\ 11x + 5y = 90 \div 0.9 \end{cases}$

- () 17. 某鞋店有甲、乙兩款鞋各 30 雙，甲鞋一雙 200 元，乙鞋一雙 50 元。該店促銷的方式：買一雙甲鞋，送一雙乙鞋；只買乙鞋沒有任何優惠。若打烊後得知，此兩款鞋共賣得 1800 元，還剩甲鞋 x 雙、乙鞋 y 雙，則依題意可列出下列哪一個方程式？【100 北北基】

(A) $200(30 - x) + 50(30 - y) = 1800$

(B) $200(30 - x) + 50(30 - x - y) = 1800$

(C) $200(30 - x) + 50(60 - x - y) = 1800$

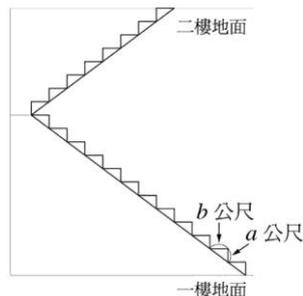
(D) $200(30 - x) + 50[30 - (30 - x) - y] = 1800$

- () 18. 若二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x-2y=7 \end{cases}$ 的解為 $x=a$ ， $y=b$ ，則 $a+b$ 之值為何？

【100(二)基測】

- (A)1 (B)3 (C)4 (D)6

- () 19. 圖(一)為某大樓一、二樓水平地面間的樓梯臺階位置圖，共 20 階水平臺階，每臺階的高度均為 a 公尺，寬度均為 b 公尺 ($a \neq b$)。求圖中一樓地面與二樓地面的距離為多少公尺？



圖(一)

【100(二)基測】

- (A) $20a$ (B) $20b$ (C) $\sqrt{a^2 + b^2} \times 20$ (D) $\frac{a+b}{2} \times 20$

- () 20. 解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 197x+4y=11 \\ 197x=19-2y \end{cases}$ ，得 $y=?$ 【101 基測】

- (A) -4 (B) $-\frac{4}{3}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) 5

- () 21. 已知每塊餅乾的重量都相同，每顆糖果的重量都相同。守守拿了一個等臂天平，測量餅乾與糖果的重量，得到結果如下：第一次：左邊秤盤放二塊餅乾，右邊秤盤放三顆糖果；結果天平兩臂平衡，如圖(二)。第二次：左邊秤盤放 10 公克砝碼，右邊秤盤放一塊餅乾和一顆糖果；結果天平兩臂平衡，如圖(三)。第三次：左邊秤盤放一顆糖果，右邊秤盤放一塊餅乾；下列哪一個方法可使天平兩臂再度平衡？【90(一)基測】



圖(二)



圖(三)

- (A) 在糖果的秤盤上加 2 公克砝碼 (B) 在餅乾的秤盤上加 2 公克砝碼

(C)在糖果的秤盤上加 5 公克砝碼

(D)在餅乾的秤盤上加 5 公克砝碼

- () 22. 已知二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$ 的解為 $x = a$ ， $y = b$ ，則 $a + b = ?$
【90(二)基測】
 (A) 3 (B) -1 (C) $\frac{19}{5}$ (D) $\frac{31}{13}$
- () 23. 羽毛球的售價分成兩種：比賽用球每打 300 元，練習用球每打 250 元。創創共買了 10 打羽毛球，結帳時店員將兩種價目看反了，結果使得創創多付了 100 元。設比賽用球買 x 打，練習用球買 y 打，則下列哪一個二元一次方程組可用來表示題目中的數量關係？**【90(二)基測】**
 (A) $\begin{cases} x + y = 10 \\ 300x + 250y = 3100 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x + y = 10 \\ 300x + 250y = 2600 \end{cases}$
 (C) $\begin{cases} x + y = 10 \\ 300x + 250y = 300y + 250x - 100 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x + y = 10 \\ 300x + 250y = 300y + 250x + 100 \end{cases}$
- () 24. 有甲、乙兩個完全相同的杯子，各裝不同量的水，若把甲杯中 $\frac{1}{5}$ 的水倒進乙杯，則兩杯的水位等高。設甲杯原來的水量為 a ，乙杯原來的水量為 b ，求 $\frac{b}{a} = ?$ **【91(一)基測】**
 (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{5}{4}$
- () 25. 小健全班在周末至墾丁與鵝鑾鼻郊遊，38 人共租了 16 輛協力車。同學協議每輛只能兩人共騎或三人共騎。請問在這 16 輛協力車中，由兩人共騎的有幾輛？**【91(一)基測】**
 (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12

- () 26. 超快網路咖啡店，提供順暢的上網服務，其收費標準如下：
 基本費用：每次 50 元(可使用 t 分鐘)
 超過 t 分鐘時，超過的部分每分鐘收費 s 元(不足 1 分鐘以 1 分鐘計)
小賢第一次至此店上網 120 分鐘，花了 130 元；第二次到同一家店上網 150 分鐘，花了 160 元。請問 t 為多少？【91(一)基測】
 (A)25 (B)30 (C)35 (D)40

- () 27. 表(一)是創創和守守比賽投籃球的記錄表。若以命中率(投進球數與投球次數的比值)來比較投球成績的好壞，得知他們的成績一樣好，則下列 x 與 y 的關係哪一項是錯誤的？【91(二)基測】

學生	投進球數	沒投進球數	投球次數
創創	20	10	30
守守	x	y	45

表(一)

- (A) $x - y = 10$ (B) $x + y = 45$ (C) $x : y = 20 : 10$ (D) $x : 45 = 20 : 30$
- () 28. 若 $x : y = 2 : 1$ ，且 $2x + y = 20$ ，則 $(x - 1) : (y + 1)$ 之比值為何？
 【93(一)基測】
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) 2 (C) $\frac{7}{5}$ (D) $\frac{5}{7}$
- () 29. 小嵐與小律現在的年齡分別為 x 歲、 y 歲，且 x 、 y 的關係式為 $3(x + 2) = y$ 。
 下列關於兩人年齡的敘述何者正確？【93(一)基測】
 (A) 兩年後，小律年齡是小嵐年齡的 3 倍
 (B) 小嵐現在年齡是小律兩年後年齡的 3 倍
 (C) 小律現在年齡是小嵐兩年後年齡的 3 倍
 (D) 兩年前，小嵐年齡是小律年齡的 3 倍

- () 30. 已知花生糖 1 顆 2 元，梅子糖 2 顆 1 元。若小詩買花生糖及梅子糖共 60 顆，花了 60 元，則此兩種糖果的數量關係為何？【93(二)基測】
- (A)花生糖和梅子糖一樣多 (B)花生糖比梅子糖多 30 顆
(C)花生糖比梅子糖少 20 顆 (D)花生糖比梅子糖少 30 顆

- () 31. 若 $\frac{3x-2y}{6} + \frac{2x-4y}{3} - \frac{x-2y}{2} = 10^5$ ，則 $x-y = ?$ 【94(二)基測】
- (A)0 (B)1 (C) 10^5 (D) 1.5×10^5

- () 32. 表(二)中有六件物品，顧客需任選兩件一起購買，其計價方式為：將選取的兩件物品之價格合計後，以 10 元為單位，用四捨五入法取一數值，此數值即為售價。若小明將他們做適當組合後，可用最低價購買此六件物品，求此最低價為何？【94(二)基測】

卡通錄影帶	99元	大白菜	66元
卡式音樂帶	80元	鮭魚	55元
襪子	24元	葡萄	47元

表(二)

- (A)350 元 (B)360 元 (C)370 元 (D)380 元
- () 33. 若二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 3x-2y=9 \\ 4x+3y=29 \end{cases}$ 的解為 $x=a$ ， $y=b$ ，則 $a+b = ?$ 【95(二)基測】
- (A)7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

- () 34. 表(三)為小美採買火鍋料的收據，但因污損導致幾個重要數據無法辨識。根據右表判斷粉絲與茼蒿的數量差異為何？【95(二)基測】

品名	售價(元/包)	數量(包)	金額(元)
綜合火鍋料	89	2	178
粉絲	39		
火鍋肉片		3	264
金針菇	25	3	75
茼蒿	30		
雞蛋	17	2	

購買包數：16
應付總額：740 表(三)

- (A)粉絲比茼蒿多 2 包 (B)茼蒿比粉絲多 2 包
(C)粉絲比茼蒿多 4 包 (D)茼蒿比粉絲多 4 包

- () 35. 甲、乙、丙、丁四人一起到冰店買紅豆與桂圓兩種冰棒。四人購買的數量及總價分別如表(四)所示。若其中一人的總價算錯了，則此人是誰？

【96(一)基測】

	甲	乙	丙	丁
紅豆冰棒(枝)	18	15	24	27
桂圓冰棒(枝)	30	25	40	45
總...價(元)	396	330	528	585

表(四)

- (A)甲 (B)乙 (C)丙 (D)丁

- () 36. 已知 x 、 y 的關係式為 $\frac{x-y}{3} - \frac{x-2y}{4} = \frac{x-3}{12}$ ，求 $y = ?$ 【96(二)基測】

- (A) $-\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 3

- () 37. 某班老師算出全班 40 位學生的數學成績後，決定每人加 8 分，加分後沒有人超過滿分。若全班成績加分前的總分為 A 分，平均為 a 分；加分後的總分為 B 分，平均為 b 分，則下列關係何者錯誤？【96(二)基測】

- (A) $A = 40a$ (B) $B = 40b$ (C) $b = a + 8$ (D) $B = A + 8$

- () 38. 若二元一次聯立方程式 $\begin{cases} \frac{2x-3y}{6} = 4 \\ \frac{15x+15y-5}{3} = 0 \end{cases}$ 的解為 $x = a$ ， $y = b$ ，則 $a - b = ?$

【98(一)基測】

- (A) $\frac{5}{3}$ (B) $\frac{9}{5}$ (C) $\frac{29}{3}$ (D) $-\frac{139}{3}$

- () 39. 有一丟銅板遊戲，其規則是丟出正面得 3 分，丟出反面得 2 分。小民參加此遊戲，共丟了 26 次，得 68 分，求小民共丟出幾次反面？【98(二)基測】

- (A) 6 (B) 10 (C) 13 (D) 20

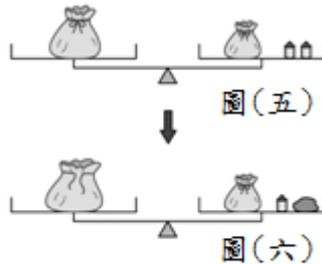
- () 40. 圖(四)表示小勳到商店購買2個單價相同的布丁和10根單價相同的棒棒糖的經過。根據圖(四)，判斷布丁和棒棒糖的單價相差多少元？【102基測】



圖(四)

- (A) 20 (B) 30 (C) 40 (D) 50

- () 41. 圖(五)的等臂天平呈平衡狀態，其中左側秤盤有一袋石頭，右側秤盤有一袋石頭和2個各10克的砝碼。將左側袋中一顆石頭移至右側秤盤，並拿走右側秤盤的1個砝碼後，天平仍呈平衡狀態，如圖(六)所示。求被移動石頭的重量為多少克？【102基測】



- (A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 20

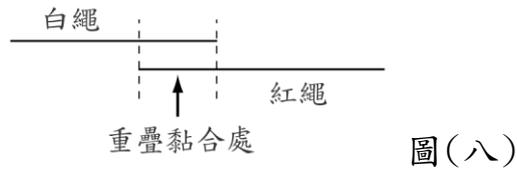
- () 42. 創創家有10人、守守家有8人，兩家人一同看表演，該場表演的票價如圖(七)所示。若創創家的總票價比守守家少60元，則創創家的半票比守守家的半票多幾張？【93(一)基測】

票價	
全票	60元/張
半票	30元/張

圖(七)

- (A)0 (B)2 (C)4 (D)6

- () 43. 圖(八)，將一白繩的 $\frac{3}{8}$ 與一紅繩的 $\frac{1}{3}$ 重疊並以膠帶黏合，形成一條長為 238 公分的繩子。求未黏合前，兩繩長度相差多少公分？【94(一)基測】



- (A)14 (B)17 (C)28 (D)34

- () 44. 某書店文具價格為：鉛筆一支 7 元、原子筆一支 15 元、橡皮擦一個 20 元。若有 5 位小朋友，每人各買一件文具，共花了 64 元，則其中有幾人買原子筆？【94(二)基測】

- (A)4 (B)3 (C)2 (D)1

- () 45. 張老闆以每顆 a 元的單價買進水蜜桃 100 顆。現以每顆比單價多兩成的價格賣出 70 顆後，再以每顆比單價低 b 元的價格將剩下的 30 顆賣出。求全部水蜜桃共賣多少元？(用 a 、 b 表示)【96(一)基測】

- (A) $70a + 30(a - b)$ (B) $70 \times (1 + 20\%) \times a + 30b$
 (C) $100 \times (1 + 20\%) \times a - 30(a - b)$ (D) $70 \times (1 + 20\%) \times a + 30(a - b)$

- () 46. 小華和小明到同一早餐店買饅頭和米漿。已知小華買了 5 個饅頭和 5 杯米漿；小明買了 7 個饅頭和 3 杯米漿，且小華花的錢比小明少 10 元。關於饅頭與米漿的價錢，下列敘述何者正確？【96(一)基測】

- (A) 2 個饅頭比 2 杯米漿多 10 元 (B) 2 個饅頭比 2 杯米漿少 10 元
 (C) 12 個饅頭比 8 杯米漿多 10 元 (D) 12 個饅頭比 8 杯米漿少 10 元

- () 47. 有甲、乙兩個大小不同的水桶，容量分別為 x 、 y 公升，且已各裝一些水。若將甲中的水全倒入乙後，乙只可再裝 20 公升的水；若將乙中的水倒入甲，裝滿甲水桶後，乙還剩 10 公升的水，則 x 、 y 的關係為何？【99(二)基測】

- (A) $y = 20 - x$ (B) $y = x + 10$ (C) $y = x + 20$ (D) $y = x + 30$

習題解答

3.1 練習解答

練習 3.1.1-1

(D)、(E)

練習 3.1.1-2

$(x-y)$ 元

練習 3.1.1-3

$(3x+y)$ 元

練習 3.1.1-4

$(x-2y-60)$ 元

練習 3.1.1-5

$(2x+5y)$ 元

練習 3.1.1-6

$(100x+500y)$ 元

練習 3.1.1-7

$(2x+y) \times 0.6$ 元

練習 3.1.2-1

(1) $4x+6y$ (2) $6x+5y$

(3) $-2x-y+4$ (4) $-5x-5y-12$

練習 3.1.2-2

(1) $2x+3y$ (2) $\frac{13}{4}x+\frac{6}{5}y$

(3) $\frac{1}{2}x-\frac{6}{5}y+7$ (4) $2x+y$

練習 3.1.2-3

(1) $\frac{11}{10}x+\frac{26}{21}y$ (2) $\frac{2}{9}x+\frac{3}{10}y$

練習 3.1.2-4

(1) $6x+3y-3$ (2) $-5x+10y-15$

(3) $-2x+14y-1$ (4) $3x-6y+18$

練習 3.1.2-5

(1) $x-2y+3$ (2) $35x+15y-5$

(3) $-6x+4y-8$ (4) $2x-4y-6$

練習 3.1.2-6

(1) $4x+7y$ (2) y

(3) $-x-13$ (4) $3x-10y-13$

練習 3.1.2-7

(1) $\frac{1}{2}x$ (2) $-\frac{2}{3}x+\frac{7}{2}y-\frac{8}{5}$

練習 3.1.2-8

(1) 0 (2) $\frac{2x+5y}{12}$

練習 3.1.3-1

(1) 13 (2) 0

練習 3.1.3-2

(1) -13 (2) 0

練習 3.1.3-3

(1) -1 (2) 3

3.1 習題解答

3.1-1 (A)、(D)

3.1-2 $a+b$ 元

3.1-3 $3x+3y$ 元

3.1-4 $100-(5x+2y+40)$ 元

3.1-5 $4x+5y$ 元

3.1-6 $50x+10y$ 元

3.1-7 $0.8(10x+15y)$ 元

3.1-8 (1) $6x+6y$ (2) $2x+11y$

(3) $-2x-5y+8$ (4) $-4x-3y-5$

3.1-9 (1) $x+3y$ (2) $\frac{11}{2}x+\frac{3}{2}y$

(3) $\frac{-4}{7}x-\frac{3}{2}y+5$ (4) $x+y$

3.1-10 (1) $\frac{7}{12}x+\frac{5}{6}y$ (2) $\frac{11}{14}x+\frac{1}{4}y$

3.1-11 (1) $6x+4y-10$ (2) $-10x+15y-10$

(3) $-x+y-1$ (4) $8x-4y+20$

3.1-12 (1) $x-2y+4$ (2) $6x+2y-12$

(3) $-2x+y-5$ (4) $4x-2y-10$

3.1-13 (1) $x+5y$ (2) $-x-4y$

(3) $11x+15y-15$ (4) $-5x-7y$

3.1-14 (1) $\frac{1}{2}x-\frac{3}{5}y$ (2) $-\frac{1}{3}x-\frac{17}{7}y-\frac{11}{2}$

3.1-15 (1) $\frac{4}{3}x$ (2) $\frac{-x+3y}{4}$

3.1-16 (1) 8 (2) -3

3.1-17 (1) 0 (2) 2

3.1-18 (1) 4 (2) -4

3.2 練習解答

練習 3.2.1-1

$$(1) x - 2y = 2 \quad (2) x + y = 0$$

$$(3) 4x - 4y = -10$$

練習 3.2.1-2

$$(1) 5x - 10y = -6 \quad (2) 5x + 4y = 60$$

$$(3) 21x + y = 12$$

練習 3.2.1-3

$$(1) 3x - 4y = 3 \quad (2) x - 3y = -6$$

$$(3) 5x + 4y = 0 \quad (y \neq 0)$$

$$(4) 3x + 2y = -6 \quad (y - 6 \neq 0)$$

練習 3.2.1-4

$$(1) 8 \quad (2) 2$$

$$(3) -1 \quad (4) 6$$

練習 3.2.2-1

(A)、(D)

練習 3.2.2-2

$$a = 1$$

練習 3.2.2-3

$$b = 2$$

練習 3.2.3-1

正整數解只有 (2,3)

練習 3.2.3-2

共有 2 種買法：

1. 原子筆買 2 枝、鉛筆買 6 枝。

2. 原子筆買 4 枝、鉛筆買 3 枝。

3.2 習題解答

$$3.2-1 \quad (1) 2x + y = 1 \quad (2) 6x - 4y = 0$$

$$(3) x + 8y = -5$$

$$3.2-2 \quad (1) x + 4y = -7 \quad (2) 4x + 3y = 24$$

$$(3) 10x + 5y = 12$$

$$3.2-3 \quad (1) 9x - 4y = -3 \quad (2) x - 5y = -5$$

$$(3) 5x - y = 0 \quad (y \neq 0)$$

$$(4) 4x - 3y = 7 \quad (y + 1 \neq 0)$$

$$3.2-4 \quad (B)、(D)$$

$$3.2-5 \quad a = 5$$

$$3.2-6 \quad b = 2$$

$$3.2-7 \quad (1,6) \text{ 和 } (2,3)$$

3.2-8 只有 1 種買法，買 2 個橘子和 2 個柳丁。

3.2-9 (1) 有 2 種買法：5 元 2 張和 10 元 2 張、5 元 4 張和 10 元 1 張。

(2) 買 5 元 4 張和 10 元 1 張。

3.3 練習解答

練習 3.3.1-1

$$(1) 2x + 3y = 35 \quad (2) 5x + 4y = 70$$

$$(3) \begin{cases} 2x + 3y = 35 \\ 5x + 4y = 70 \end{cases}$$

練習 3.3.1-2

$$(1) x + y = 6$$

$$(2) 30x + 20y = 170 - 20$$

$$(3) \begin{cases} x + y = 6 \\ 30x + 20y = 170 - 20 \end{cases}$$

練習 3.3.1-3

$$(1) x + y = 11 \quad (2) 10x + y$$

$$(3) 10y + x$$

$$(4) (10y + x) - (10x + y) = 9$$

$$(5) \begin{cases} x + y = 11 \\ (10y + x) - (10x + y) = 9 \end{cases}$$

練習 3.3.2-1

是

練習 3.3.2-2

否

練習 3.3.2-3

(D)

練習 3.3.2-4

$$a = 3、b = 3$$

練習 3.3.2-5

$$a = 2、b = 1$$

3.3 習題解答

3.3-1 (1) $4x + 2y = 150$ (2) $x + 4y = 90$

(3)
$$\begin{cases} 4x + 2y = 150 \\ x + 4y = 90 \end{cases}$$

3.3-2 (1) $x + y = 5$

(2) $35x + 20y = 150 - 20$

(3)
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 35x + 20y = 150 - 20 \end{cases}$$

3.3-3 (1) $x + y = 12$ (2) $10x + y$

(3) $10y + x$

(4) $(10y + x) - (10x + y) = 18$

(5)
$$\begin{cases} x + y = 12 \\ (10y + x) - (10x + y) = 18 \end{cases}$$

3.3-4 是

3.3-5 否

3.3-6 (A)

3.3-7 $a = 4$ 、 $b = 3$

3.3-8 $a = 1$ 、 $b = 2$

3.4 練習解答

練習 3.4.1-1

(1) $x = 5$ 、 $y = 2$ (2) $x = 1$ 、 $y = -3$

練習 3.4.1-2

(1) $x = 2$ 、 $y = 4$ (2) $x = 4$ 、 $y = 1$

練習 3.4.1-3

(1) $x = 2$ 、 $y = 3$ (2) $x = 1$ 、 $y = -3$

練習 3.4.1-4

(1) $x = 2$ 、 $y = 3$ (2) $x = 2$ 、 $y = 3$

練習 3.4.2-1

(1) $x = \frac{16}{5}$ 、 $y = \frac{6}{5}$ (2) $x = 100$ 、 $y = 200$

練習 3.4.2-2

(1) $x = 1$ 、 $y = 1$ (2) $x = 3$ 、 $y = 1$

3.4 習題解答

3.4-1 (1) $x = 5$ 、 $y = 2$ (2) $x = 1$ 、 $y = -1$

3.4-2 (1) $x = 1$ 、 $y = 5$ (2) $x = 2$ 、 $y = 1$

3.4-3 (1) $x = 1$ 、 $y = \frac{5}{2}$ (2) $x = \frac{-3}{2}$ 、 $y = 1$

3.4-4 (1) $x = 2$ 、 $y = 0$ (2) $x = 2$ 、 $y = 3$

3.4-5 (1) $x = 2$ 、 $y = 3$ (2) $x = 6$ 、 $y = 2$

3.4-6 (1) $x = 1$ 、 $y = 2$ (2) $x = 3$ 、 $y = 4$

3.5 練習解答

練習 3.5.1-1

(1) $x = 5$ 、 $y = 1$ (2) $x = -1$ 、 $y = 1$

練習 3.5.1-2

(1) $x = 6$ 、 $y = 1$ (2) $x = 2$ 、 $y = 1$

練習 3.5.2-1

(1) $x = 2$ 、 $y = 1$ (2) $x = 1$ 、 $y = -1$

練習 3.5.2-2

(1) $x = 1$ 、 $y = 1$ (2) $x = 1$ 、 $y = -1$

練習 3.5.3-1

(1) $x = 3$ 、 $y = -1$ (2) $x = 2$ 、 $y = 7$

練習 3.5.3-2

(1) $x = 1$ 、 $y = 2$ (2) $x = 1$ 、 $y = -2$

練習 3.5.4-1

$x = 9$ 、 $y = 2$

練習 3.5.4-2

$x = -11$ 、 $y = -2$

練習 3.5.4-3

$x = 9$ 、 $y = 5$

練習 3.5.4-4

$x = 1$ 、 $y = -1$

練習 3.5.5-1

$x = -2$ 、 $y = \frac{4}{3}$

練習 3.5.5-2

$x = 2$ 、 $y = 1$

練習 3.5.5-3

$x = 5$ 、 $y = 1$

練習 3.5.5-4

$x = 1$ 、 $y = 0$

練習 3.5.5-5

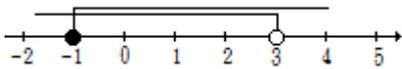
$a = 2$ 、 $b = -1$

3.5 習題解答

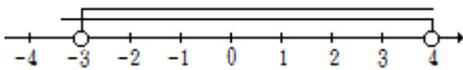
- 3.5-1 (1) $x=1$ 、 $y=3$ (2) $x=-2$ 、 $y=-1$
 3.5-2 (1) $x=2$ 、 $y=3$ (2) $x=5$ 、 $y=2$
 3.5-3 (1) $x=1$ 、 $y=-5$ (2) $x=2$ 、 $y=-1$
 3.5-4 (1) $x=-3$ 、 $y=3$ (2) $x=6$ 、 $y=-1$
 3.5-5 (1) $x=-1$ 、 $y=2$ (2) $x=-1$ 、 $y=3$
 3.5-6 (1) $x=2$ 、 $y=1$ (2) $x=1$ 、 $y=-3$
 3.5-7 $x=6$ 、 $y=12$
 3.5-8 $x=3$ 、 $y=4$
 3.5-9 $x=2$ 、 $y=3$
 3.5-10 $x=2$ 、 $y=2$
 3.5-11 $x=5$ 、 $y=2$
 3.5-12 $x=5$ 、 $y=3$
 3.5-13 $x=2$ 、 $y=1$
 3.5-14 $x=-1$ 、 $y=2$
 3.5-15 $a=3$ 、 $b=1$

3.6 練習解答

練習 3.6.1-1



練習 3.6.1-2



練習 3.6.1-3

$$-8 < x < -2$$

練習 3.6.1-4

$$x < -9$$

練習 3.6.1-5

無解

練習 3.6.2-1

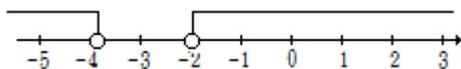
- (1) -2 、 -1 、 0 、 1 、 2
 (2) -3 、 -2 、 -1 、 0 、 1 、 -2 、 3

練習 3.6.2-2

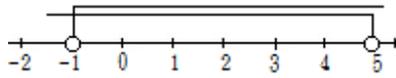
- (1) $x < -3$ 或 $x > 3$
 (2) $x \leq -3$ 或 $x \geq 3$

練習 3.6.2-3

- (1) $x < -4$ 或 $x > -2$

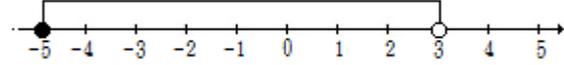


$$(2) -1 < x < 5$$

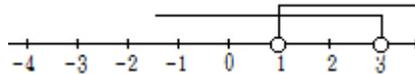


3.6 習題解答

3.6-1



3.6-2

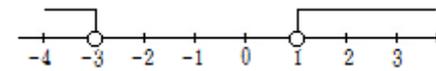


$$3.6-3 (1) 0 (2) -1, 0, 1$$

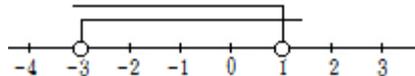
$$3.6-4 (1) x < -1 \text{ 或 } x > 1 (2) x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 1$$

3.6-5

$$(1) x < -3 \text{ 或 } x > 1$$



$$(2) -3 < x < 1$$



3.7 練習解答

練習 3.7-1

$$x = -2, y = -5$$

練習 3.7-2

$$x = -2, y = 11$$

3.7 習題解答

$$3.7-1 x = 1, y = 5$$

$$3.7-2 x = -3, y = -1$$

3.7-3 答：雞排一個 50 元，紅茶一杯 25 元。

3.7-4 答：牛奶糖一顆 5 元，軟糖一顆 8 元。

3.7-5 答：全票一張 150 元，半票一張 70 元。

- 3.7-6 答：雞有 32 隻，鴨有 14 隻。
 3.7-7 答：黑棋有 75 顆，白棋有 25 顆。
 3.7-8 答：75。
 3.7-9 答： $\frac{6}{8}$ 。
 3.7-10 答：大數為 18，小數為 16。
 3.7-11 答：鴨有 6 隻，兔子有 5 隻。
 3.7-12 答：今年父親 51 歲，兒子 15 歲。
 3.7-13 答：今年父親 35 歲，兒子 8 歲。
 3.7-14 答：紅茶一杯 20 元，珍奶一杯 35 元。
 3.7-15 答：原有 1000 元。
 3.7-16 答：甲原有 190 元，乙原有 50 元。
 3.7-17 答：答對 18 題，答錯 2 題。
 3.7-18 答：靜水中的時速為 15 公里。

第三章綜合習題

1. 答：(1) $x=1$ 、 $y=-6$ (2) $x=-3$ 、 $y=7$
 (3) $x=11$ 、 $y=22$ (4) $x=3$ 、 $y=-5$
 (5) $x=-7$ 、 $y=43$ (6) $x=\frac{3}{2}$ 、 $y=\frac{1}{4}$
 (7) $x=6$ 、 $y=9$ (8) $x=12$ 、 $y=2$
 (9) $x=3$ 、 $y=-2$ (10) $x=2$ 、 $y=1$
2. 答： $x=9$ 、 $y=-7$
3. 答： $x=-5$ 、 $y=10$
4. 答： $x=5$ 、 $y=10$
5. 答：共有三種買法。
 聖誕卡 1 張、賀年卡 5 張。
 聖誕卡 4 張、賀年卡 3 張。
 聖誕卡 7 張、賀年卡 1 張。
6. 答：(1) $x > -1$ 或 $x < -2$
 (2) $2 < x < 8$
7. 答： $a=3$ 、 $b=-3$
8. 答： $a=2$ 、 $b=1$
9. 答：西瓜一個 55 元、蘋果一個 22 元。
10. 答：8 人。
11. 答：鮮乳一瓶 50 元、可樂一瓶 40 元。
12. 答：今年父親 50 歲、兒子 25 歲。
13. 答：42
14. 答：87
15. 答：45

16. 答：雞有 5 隻、兔子有 4 隻。
 17. 答：雞有 10 隻、兔子有 5 隻。
 18. 答：甲有 170 元、乙有 40 元。
 19. 答：28 歲。
 20. 答：24 平方公分。
 21. 答：靜水中船時速 28 公里、水流時速 5 公里。
 22. 答： $k=60$ ， $t=1.5$

基測與會考模擬試題解答

1. 《答案》(B)

詳解：依題意，兩種總共 29 張，可列出式子 $x+y=29$

5 元郵票買 x 張，12 元郵票買 y 張，共花了 250 元，可列出式子 $5x+12y=250$

$$\text{寫成聯立方程式為 } \begin{cases} x+y=29 \\ 5x+12y=250 \end{cases}$$

2. 《答案》(B)

詳解：我們先解聯立方程式：

$$\begin{cases} x+\frac{1}{4}y=9\dots\dots(1) \\ \frac{1}{5}x+y=17\dots\dots(2) \end{cases}$$

$$(1)\times 4-(2)\text{得：}\frac{19}{5}x=19 \Rightarrow x=5, \text{代入}(1)\text{得}y=16$$

$$x=a=5, y=b=16, \text{所以}|a-b|=11$$

3. 《答案》(C)

詳解：佰元鈔票 x 張，拾元硬幣 y 個，共有 $(100x+10y)$ 元

4. 《答案》(D)

$$\text{詳解：}\begin{cases} x+2y=-1\dots\dots(1) \\ 3x+2y=5\dots\dots(2) \end{cases}, \text{將}(2)-(1)\text{得}2x=6 \rightarrow x=3$$

$$\text{代入}(1)\text{式}\Rightarrow 3+2y=-1 \rightarrow y=-2$$

$$\text{得解}x=3, y=-2$$

5. 《答案》(A)

詳解：體重的算術平均數=總體重÷人數

$$\text{男生體重算術平均數}=\text{男生總體重}\div\text{男生人數}\Rightarrow 56=\text{男生總體重}\div a \Rightarrow \text{男生總體重}=56a$$

$$\text{女生體重算術平均數}=\text{女生總體重}\div\text{女生人數}\Rightarrow 48=\text{女生總體重}\div b \Rightarrow \text{女生總體重}=48b$$

$$\text{全班體重的算術平均數}=\text{全班總體重}\div\text{全班人數}\Rightarrow 54=(56a+48b)\div(a+b)$$

$$54(a+b)=56a+48b \Rightarrow 54a+54b=56a+48b \Rightarrow 2a=6b \Rightarrow a=3b$$

6. 《答案》(D)

詳解：將 $x=1, y=1$ 代入各選項

$$(A) 19\times 1-11\times 1\neq 30, \text{不合。}$$

$$(B) 37\times 1+17\times 1\neq 20, \text{不合。}$$

$$(C) 15\times 1+17\times 1=32, \text{但}16\times 1-11\times 1\neq 27, \text{不合。}$$

$$(D) 29\times 1-18\times 1=11, \text{且}23\times 1+17\times 1=40。$$

7. 《答案》(D)

詳解： 蘋果每個 x 元，水梨每個 y 元

某人帶了 400 元，買了 3 個蘋果、5 個水梨，剩下 30 元，故用了 370 元，得 $3x + 5y = 370$

若買 5 個蘋果、4 個水梨，剛好用完，得 $5x + 4y = 400$

$$\text{故聯立方程式為} \begin{cases} 3x + 5y = 370 \\ 5x + 4y = 400 \end{cases}$$

8. 《答案》(D)

詳解： 哥哥有 x 張，弟弟有 y 張

弟弟給哥哥 10 張後，哥哥的張數是弟弟的兩倍，得 $x + 10 = 2(y - 10)$

哥哥給弟弟 10 張後，兩人張數相同，得 $x - 10 = y + 10$

$$\text{故聯立方程式為} \begin{cases} 2(y - 10) = x + 10 \\ x - 10 = y + 10 \end{cases}$$

9. 《答案》(A)

$$\begin{aligned} \text{詳解：} & \left(\frac{5}{3}x - \frac{25}{6}y\right) - \left(\frac{20}{3}x - \frac{11}{12}y\right) \\ &= \frac{5}{3}x - \frac{25}{6}y - \frac{20}{3}x + \frac{11}{12}y \\ &= \frac{5}{3}x - \frac{20}{3}x - \frac{50}{12}y + \frac{11}{12}y \\ &= \frac{-15}{3}x - \frac{39}{12}y \\ &= -5x - \frac{13}{4}y \end{aligned}$$

10. 《答案》(A)

詳解： 解聯立方程式：

$$\begin{cases} x + y = 3 \dots\dots\dots(1) \\ 3x - 2y = 4 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

$$(2) + (1) \times 2 \text{ 得 } 5x = 10 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{代入 (1) 式 } \Rightarrow y = 1$$

$$x = a = 2, y = b = 1, \text{ 所以 } a - b = 1$$

11. 《答案》(D)

詳解： 解聯立方程式：

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \dots\dots\dots(1) \\ 3x - 4y = 3 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

$$(1) \times 4 - (2) \text{ 得 } 5x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{5}$$

$$\text{代入 (1) 式 } \Rightarrow y = \frac{3}{5}$$

$$x = a = \frac{9}{5}, y = b = \frac{3}{5}, \text{ 所以 } a + b = \frac{12}{5}$$

12. 《答案》(C)

詳解： 設 10 元原子筆買了 x 支，15 元原子筆買了 y 支，依題意列式： $10x+15y=90$
支數需為正整數，因此要找出方程式的正整數解。

x	9	$7\frac{1}{2}$	6	$4\frac{1}{2}$	3	$1\frac{1}{2}$	0
y	0	1	2	3	4	5	6

正整數解為 $(x,y)=(6,2)$ 或 $(3,4)$ ，可能相差 1 支或 4 支。題目無 1 支的選項，故選(C)4 支。

13. 《答案》(C)

詳解： 解聯立方程式：

$$\begin{cases} 2x + \frac{5}{6}y = 7 \dots (1) \\ y = 18 \dots (2) \end{cases}$$

將(2)代入(1)式得 $2x + \frac{5}{6} \times 18 = 7 \Rightarrow 2x + 15 = 7 \Rightarrow x = -4$

$x = a = -4$ ， $y = b = 18$ ，所以 $a + b = 14$

14. 《答案》(C)

詳解： 每包餅乾售價 x 元，每份禮物有 1 包餅乾及 20 元棒棒糖兩支，
因此 1 份禮物價格為 $(x + 20 \times 2)$ 元
共有 15 份禮物，花費 900 元，可列式 $15(x + 20 \times 2) = 900$

15. 《答案》(D)

詳解：
$$\begin{cases} 8x + 6y = 3 \dots (1) \\ 6x - 4y = 5 \dots (2) \end{cases}$$

$(1) \times 3 - (2) \times 4$ 得 $34y = -11 \Rightarrow y = -\frac{11}{34}$

16. 《答案》(B)

詳解： 饅頭每顆 x 元，包子每顆 y 元。

王伯伯買 5 顆饅頭及 3 顆包子，原價為 $(5x + 3y)$ 元，老闆少拿 2 元，只要 50 元，所以原需 $(50 + 2)$ 元，列式 $5x + 3y = 50 + 2$

李太太買 11 顆饅頭及 5 顆包子，原價為 $(11x + 5y)$ 元，老闆九折優待，只要 90 元，所以原需 $(90 \div 0.9)$ 元，列式 $11x + 5y = 90 \div 0.9$

綜合以上條件得聯立方程式
$$\begin{cases} 5x + 3y = 50 + 2 \\ 11x + 5y = 90 \div 0.9 \end{cases}$$

17. 《答案》(D)

詳解： 原有甲、乙兩款鞋各 30 雙，甲一雙 200 元、乙一雙 50 元，打烊後剩甲 x 雙，乙 y 雙。

甲鞋共賣出 $(30 - x)$ 雙，即甲鞋賣得 $200(30 - x)$ 元。

買甲鞋時送一雙乙鞋，所以乙鞋賣出 $[30 - (30 - x) - y]$ 雙，即乙鞋賣得 $50[30 - (30 - x) - y]$ 元。

總共賣 1800 元，可列式 $200(30 - x) + 50[30 - (30 - x) - y] = 1800$

18. 《答案》(A)

詳解： 解聯立方程式：

$$\begin{cases} 2x+y=4\dots\dots(1) \\ x-2y=7\dots\dots(2) \end{cases}$$

將(1) \times 2+(2)得 $5x=15 \Rightarrow x=3$

代入(1)式 $\Rightarrow 2\times 3+y=4 \Rightarrow y=-2$

$x=a=3$ ， $y=b=-2$ ，所以 $a+b=1$

19. 《答案》(A)

詳解： 共20階水平臺階，每臺階高度均為 a 公尺，所以一樓地面與二樓地面的距離為 $20a$ 公尺。

20. 《答案》(A)

詳解：

$$\begin{cases} 197x+4y=11\dots\dots(1) \\ 197x=19-2y\dots\dots(2) \end{cases}$$

將(2)代入(1)得 $19-2y+4y=11 \Rightarrow y=-4$

21. 《答案》(A)

詳解： 設餅乾一塊 x 公克，糖果一顆 y 公克

由圖(二)可列式 $2x=3y$ ，圖(三)可列式 $x+y=10$ ，得聯立方程式 $\begin{cases} 2x=3y\dots\dots(1) \\ x+y=10\dots\dots(2) \end{cases}$

將(2) \times 2得 $2x+2y=20\dots\dots(3)$

將(1)代入(3)得 $3y+2y=20 \Rightarrow y=4$

代入(1) $\Rightarrow x=6$ ，所以餅乾一顆6公克、糖果一顆4公克。

第三次，將左邊放一顆4公克的糖果，右邊放一塊6公克的餅乾，在糖果的秤上再加2公克砝碼即可平衡。

22. 《答案》(A)

詳解：

$$\begin{cases} 4x+3y=10\dots\dots(1) \\ 3x-y=1\dots\dots(2) \end{cases}$$

將(2) \times 3+(1)得 $13x=13 \Rightarrow x=1$

代入(2)式 $\Rightarrow y=2$

$x=a=1$ ， $y=b=2$ ，所以 $a+b=3$

23. 《答案》(C)

詳解： 比賽用球每打300元，買 x 打；練習用球每打250元買 y 打。

創創共買10打，得式子 $x+y=10$

原本應付 $(300x+250y)$ 元，老闆將價目看反，變成付 $(250x+300y)$ 元，且多付100元，得式子 $300x+250y=250x+300y-100$

綜合以上條件得聯立方程式 $\begin{cases} x+y=10 \\ 300x+250y=250x+300y-100 \end{cases}$

24. 《答案》(B)

詳解： 甲杯原水量為 a ，乙杯原水量為 b ，若把甲的 $\frac{1}{5}$ 倒進乙，即甲減少 $\frac{1}{5}a$ ，乙增加 $\frac{1}{5}a$ 。

倒水後兩杯水水位等高。所以 $a-\frac{1}{5}a=b+\frac{1}{5}a \Rightarrow \frac{3}{5}a=b \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{3}{5}$

25. 《答案》(C)

詳解： 設兩人共騎的有 x 輛，三人共騎的有 y 輛。

有 16 輛協力車，得式子 $x + y = 16$

兩人共騎的有 x 輛，佔 $2x$ 人；三人共騎的有 y 輛，佔 $3y$ 人。總共 38 人，得式子 $2x + 3y = 38$ ，

$$\text{綜合以上條件得聯立方程式} \begin{cases} x + y = 16 \dots\dots(1) \\ 2x + 3y = 38 \dots\dots(2) \end{cases}$$

將 (2) - (1) $\times 2$ 得 $y = 6$

代入 (1) 式 $\Rightarrow x = 10$ ，所以兩人騎的有 10 輛

26. 《答案》(D)

詳解： 基本費 50 元可以使用 t 分鐘，超過 t 分鐘每分鐘收 s 元

小賢 第一次使用 120 分鐘，花了 130 元，因超過基本費 50 元，故使用超過 t 分鐘，先將基本費可使用的 t 分鐘時間扣除，多餘的時間才依每分鐘收 s 元，列式 $50 + s(120 - t) = 130$ ，

同理第二次使用可列式 $50 + s(150 - t) = 160$

$$\text{綜合以上條件得聯立方程式} \begin{cases} 50 + s(120 - t) = 130 \\ 50 + s(150 - t) = 160 \end{cases}$$

$$\text{化簡後得} \begin{cases} 120s - ts = 80 \dots\dots(1) \\ 150s - ts = 110 \dots\dots(2) \end{cases}$$

將 (2) - (1) 得 $30s = 30 \Rightarrow s = 1$

代入 (1) 式 $\Rightarrow t = 40$

27. 《答案》(A)

詳解： 以命中率來比較投球成績，創創 的命中率为 $20:30 = \frac{2}{3}$ ，守守 的命中率为 $x:45 = \frac{x}{45}$ 。

創創 與 守守 的成績一樣好，即 $\frac{2}{3} = \frac{x}{45}$ ，解得 $x = 30$ 。

又由表(一)可知 $x + y = 45$ (投進球數 + 沒投進球數 = 投球次數)，即 $30 + y = 45 \Rightarrow y = 15$
來逐一檢視選項：

(A) $x - y = 10$ ，是錯的， $x - y = 30 - 15 = 15$

(B) $x + y = 45$ ，是對的，因 守守 的投球次數是 45

(C) $x:y = 20:10$ ，是對的， $x:y = 30:15 = 2:1 = 20:10$

(D) $x:45 = 20:30$ ，是對的， $x:45 = 30:45 = 2:3 = 20:30$

28. 《答案》(C)

詳解： $x:y = 2:1 \Rightarrow x = 2y$ ，依題意 $2x + y = 20$ ，可列成聯立方程式：

$$\begin{cases} x = 2y \dots\dots(1) \\ 2x + y = 20 \dots\dots(2) \end{cases}$$

將 (1) 代入 (2) 得 $5y = 20 \Rightarrow y = 4$

代入 (1) 式 $\Rightarrow x = 8$

$$(x-1):(y+1) = (8-1):(4+1) = 7:5 = \frac{7}{5}$$

29. 《答案》(C)

詳解： 小嵐 x 歲，小律 y 歲，關係式為 $3(x+2) = y$

$x+2$ 表示 小嵐 兩年後的年齡， $3(x+2)$ 表示 小嵐 兩年後年齡的 3 倍； y 表示 小律 現在的年齡。

故 $3(x+2) = y$ 表示 小律 現在的年齡等於 小嵐 兩年後年齡的 3 倍。

30. 《答案》(C)

詳解：花生糖 1 顆 2 元，梅子糖 2 顆 1 元(即 1 顆 0.5 元)，設花生糖買 x 顆，梅子糖買 y 顆。
小詩共買 60 顆，得式子 $x + y = 60$ ；共 60 元，得式子 $2x + 0.5y = 60$ 。

$$\text{綜合以上條件得聯立方程式} \begin{cases} x + y = 60 \dots\dots(1) \\ 2x + 0.5y = 60 \dots(2) \end{cases}$$

$$(2) \times 2 - (1) \text{ 得 } 3x = 60 \Rightarrow x = 20$$

$$\text{代入 (1) 式 } \Rightarrow y = 40$$

所以花生糖買 20 顆、梅子糖買 40 顆，花生糖比梅子糖少 20 顆

31. 《答案》(D)

$$\text{詳解：} \frac{3x - 2y}{6} + \frac{2x - 4y}{3} - \frac{x - 2y}{2} = 10^5$$

$$\frac{(3x - 2y) + 2(2x - 4y) - 3(x - 2y)}{6} = 10^5 \quad (\text{通分與合併})$$

$$\frac{4x - 4y}{6} = 10^5$$

$$\frac{4}{6}(x - y) = 10^5$$

$$x - y = 1.5 \times 10^5$$

32. 《答案》(B)

詳解：本題想找出最低價，因此要盡量避免兩件商品價格合計後，個位數大於 5 的情形(因為四捨五入會進位)：

$$99 + 55 = 154 \rightarrow 150 \quad (\text{省 4 元})$$

$$80 + 24 = 104 \rightarrow 100 \quad (\text{省 4 元})$$

$$66 + 47 = 113 \rightarrow 110 \quad (\text{省 3 元})$$

$$150 + 100 + 110 = 360 \quad (\text{共省 11 元，為最低價})$$

33. 《答案》(B)

詳解：解聯立方程式：

$$\begin{cases} 3x - 2y = 9 \dots\dots(1) \\ 4x + 3y = 29 \dots(2) \end{cases}$$

$$\text{將 (1)} \times 3 + \text{(2)} \times 2 \text{ 得 } 17x = 85 \Rightarrow x = 5$$

$$\text{代入 (1) 式 } \Rightarrow y = 3$$

$$x = a = 5, y = b = 3, \text{ 所以 } a + b = 8$$

34. 《答案》(D)

詳解：設粉絲買 x 包，茼蒿買 y 包，總共買 16 包，得式子 $x + y = 16 \dots\dots(1)$ 。

應付 740 元，其中綜合火鍋料 178 元，粉絲 $39x$ 元，火鍋肉片 264 元，金針菇 75 元，茼蒿 $30y$ 元，雞蛋 $17 \times 2 = 34$ 元，可列式 $178 + 39x + 264 + 75 + 30y + 34 = 740$ ，化簡得 $39x + 30y = 189 \dots(2)$

$$\text{綜合 (1) 與 (2) 得聯立方程式} \begin{cases} x + y = 16 \dots\dots(1) \\ 39x + 30y = 189 \dots\dots(2) \end{cases}$$

$$(2) - (1) \times 30 \text{ 得 } 9x = 9 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{代入 (1) 式 } \Rightarrow y = 15$$

所以粉絲買 1 包，茼蒿買 15 包，茼蒿比粉絲多 14 包。

35. 《答案》(D)

詳解： 設紅豆冰棒買 x 枝，桂圓冰棒買 y 枝
 甲： $18x+30y=396$ ，化簡得 $3x+5y=66$
 乙： $15x+25y=330$ ，化簡得 $3x+5y=66$
 丙： $24x+40y=528$ ，化簡得 $3x+5y=66$
 丁： $27x+45y=585$ ，化簡得 $3x+5y=65$
 丁與其他三人化簡所得式子不同，故算錯的是丁。

36. 《答案》(A)

詳解： $\frac{x-y}{3} - \frac{x-2y}{4} = \frac{x-3}{12}$
 $\frac{4(x-y) - 3(x-2y)}{12} = \frac{x-3}{12}$ (通分與合併)
 $\frac{x+2y}{12} = \frac{x-3}{12}$
 $x+2y = x-3$
 $2y = -3$
 $y = -\frac{3}{2}$

37. 《答案》(D)

詳解： 全班 40 人，每人加 8 分；加分前總分 A 分、平均 a 分，加分後總分 B 分、平均 b 分。
 由"總分=平均×人數"，可得 $A=40a$ 、 $B=40b$
 全班 40 人，每人加 8 分，總分就加了 $40 \times 8 = 320$ ，可得 $B = A + 320$
 將 $A = 40a$ 、 $B = 40b$ 代入 $B = A + 320$ ，可得 $40b = 40a + 320$ ，化簡得 $b = a + 8$
 逐一檢視選項：
 (A) $A = 40a$ ，是對的
 (B) $B = 40b$ ，是對的
 (C) $b = a + 8$ ，是對的
 (D) $B = A + 8$ ，是錯的

38. 《答案》(C)

詳解： 解聯立方程式

$$\begin{cases} \frac{2x-3y}{6} = 4 \\ \frac{15x+15y-5}{3} = 0 \end{cases}, \text{化簡為} \begin{cases} 2x-3y = 24 \dots\dots(1) \\ 3x+3y = 1 \dots\dots(2) \end{cases}$$

 (1)+(2)得 $5x = 25 \Rightarrow x = 5$
 代入(1)式 $\Rightarrow y = -\frac{14}{3}$
 $x = a = 5$ ， $y = b = -\frac{14}{3}$ ，所以 $a - b = \frac{29}{3}$

39. 《答案》(B)

詳解：丟正面得3分、反面得2分，設正面 x 次、反面 y 次。
共丟26次，可列式 $x+y=26$ 。得68分，可列式 $3x+2y=68$

列出聯立方程式
$$\begin{cases} x+y=26\dots(1) \\ 3x+2y=68\dots(2) \end{cases}$$

(2)-(1) $\times 2$ 得 $x=16$
代入(1)式 $\Rightarrow y=10$ ，得小民丟出10次反面

40. 《答案》(B)

詳解：原2個布丁及10枝棒棒糖收200元，但多算了2枝棒棒糖的錢，退回了20元，可得2枝棒棒糖是20元。即1枝棒棒糖10元。
又因多收20元後是200元，可知2個布丁及10枝棒棒糖原價應為180元。扣掉10支棒棒糖100元($10\times 10=100$)，得2個布丁為80元，1個布丁40元。
1枝棒棒糖10元，1個布丁40元，單價相差30元。

41. 《答案》(A)

詳解：由圖(五)，左側放一袋石頭，右側放一袋石頭與2個各10克砝碼，呈平衡。可知左側的一袋石頭比右側的一袋石頭重20克，設右側的一袋石頭為 x 克，則左側的一袋石頭為 $(x+20)$ 克。
將左側袋中1顆石頭移到右側，拿走右側1顆砝碼，仍呈平衡。設移動的石頭 y 克，左側少了 y 克，左側重量為 $(x+20-y)$ 克。右側多了 x 克且拿走10克砝碼，右側重量為 $(x+20+y-10)$ 克。天秤呈平衡，即左側重量等於右側重量，列式：
 $x+20-y=x+20+y-10$
 $2y=10$
 $y=5$
被移動的石頭為5克

42. 《答案》(D)

詳解：設創創家半票 x 張、守守家半票 y 張，則創創家全票 $(10-x)$ 張、守守家全票 $(8-y)$ 張。
創創家的總票價為 $60(10-x)+30x$ (元)
守守家的總票價為 $60(8-y)+30y$ (元)
創創家的總票價比守守家少60元，可列式 $60(10-x)+30x+60=60(8-y)+30y$
化簡為 $x-y=6$ ，得知創創家的半票比守守家多6張

43. 《答案》(B)

詳解：設白繩長 x 公分、紅繩長 y 公分；
因兩繩重疊處等長，可知白繩的 $\frac{3}{8}$ 與紅繩的 $\frac{1}{3}$ 相等，列式 $\frac{3}{8}x=\frac{1}{3}y$
又兩繩接成一條238公分的繩子，列式 $x+\frac{2}{3}y=238$ (注意重疊處長度不要重覆計算)

得聯立方程式
$$\begin{cases} \frac{3}{8}x=\frac{1}{3}y\dots(1) \\ x+\frac{2}{3}y=238\dots(2) \end{cases}$$

(1) $\times 2$ 代入(2)式 $\Rightarrow \frac{14}{8}x=238 \Rightarrow x=136$
代入(1)式 $\Rightarrow y=153$ ，白繩長度136公分，紅繩長度153公分，兩繩相差17公分。

44. 《答案》(C)

詳解： 設 x 人買鉛筆、 y 人買原子筆、 $(5-x-y)$ 人買橡皮擦。

每人各買一件文具(x 、 y 為正整數)共花了 64 元。可列式 $7x+15y+20(5-x-y)=64$

化簡得 $13x+5y=36$

x	1	2	3
y	$4\frac{3}{5}$	2	$-\frac{3}{5}$

因為 x 、 y 為正整數，符合的解只有 $x=2$ 、 $y=2$ 。
有 2 人買原子筆。

45. 《答案》(D)

詳解： 題目問全部水蜜桃共賣多少元。

有 70 顆以比單價多兩成的價格賣出，即賣得 $70 \times (1+20\%) \times a$ (元)

有 30 顆以比單價低 b 元的價格賣出，即賣得 $30 \times (a-b)$ (元)

共賣得 $70 \times (1+20\%) \times a + 30(a-b)$ (元)

46. 《答案》(A)

詳解： 設饅頭 x 元、米漿 y 元。

小華 買了 5 個饅頭和 5 杯米漿，共花 $5x+5y$ (元)。

小明 買了 7 個饅頭和 3 杯米漿，共花 $7x+3y$ (元)。

小華 花的錢比 小明 少 10 元，得 $5x+5y+10=7x+3y \Rightarrow 2x-2y=10 \Rightarrow x-y=5$

得知 1 個饅頭比 1 杯米漿多 5 元，2 個饅頭比 2 杯米漿多 10 元。

47. 《答案》(D)

詳解： 甲水桶容量 x 公升，乙水桶容量 y 公升。

(1) 將甲中的水全部倒入乙，乙只能再裝 20 公升的水。

由(1)可知，甲、乙水桶中全部的水容量可寫為 $(y-20)$ 公升。

(2) 將乙中的水全部倒入甲，裝滿甲水桶後，乙還剩 10 公升的水。

由(2)可知，甲、乙水桶中全部的水容量可寫為 $(x+10)$ 公升。

列成方程式： $y-20=x+10$ ，化簡得 $y=x+30$