(67)有理數和無理數

有理數和無理數都是實數，我們先給有理數下一個定義:

如數x是一有理數，則x可以表示成$x=\frac{p}{q}$，p和q都是整數，而且p和q的公因數是1。

根據以上的定義，我們得知整數是有理數，因為整數一定可以成分母為1的分數。

$5=\frac{5}{1}$(5和1都是整數，它們的公因數都是1)

$131=\frac{131}{1}$(131和1都是整數，它們的公因數都是1)

同理，分數也是無理數。

$\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$(5和2都是整數，它們的公因數都是1)

$\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$(1和3都是整數，它們的公因數都是1)

$\frac{20}{4}=\frac{5}{1}$(5和1都是整數，它們的公因數都是1)

小數點也是無理數

$0.2=\frac{0.2}{1}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$(1和5都是整數，它們的公因數都是1)

$3.2=\frac{3.2}{1}=\frac{32}{10}=\frac{16}{5}$(16和5都是整數，它們的公因數都是1)

$3.75=\frac{3.75}{1}=\frac{375}{100}=\frac{75}{20}=\frac{15}{4}$(15和4都是整數，它們的公因數都是1)

$1.21=\frac{1.21}{1}=\frac{121}{100}$(121和100都是整數，它們的公因數都是1)

有些小數點是循環小數點，我們曾經在第62章討論過，現在我們再討論為何循環小數點是有理數。

$x=0.2333\cdots$

我們可以用以下的方法表示循環小數

(1)$x=0.2\hat{3}$

$$\begin{array}{r} 100x=23.33\cdots \\ -\ 10x=2.33\cdots \\ \hline 90x=21 \end{array}$$

$$x=\frac{21}{90}=\frac{7}{30}$$

因為7和30都是整數，而且公因數是1，所以$x=0.2\hat{3}$是有理數。

(2)$x=3.555\cdots=3.\hat{5}$

$$\begin{array}{r} 10x=35.555\ldots \\ -x=3.555\ldots \\ \hline 9x=32 \end{array}$$

$$x=\frac{32}{9}$$

因為32和9都是整數，而且公因數是1，所以$x=3.\hat{5}$是有理數。

(3)$x=0.12444=0.12\hat{4}$

$$\begin{array}{r} 1000x=124.444\ldots \\ -100x=12.444\ldots \\ \hline 900x=112 \end{array}$$

$x = \frac{112}{900} = \frac{28}{225}$

因為28和225都是整數，而且公因數是1，所以$x = 0.12\hat{4}$是有理數。

$(4) x = 32.444 \cdots = 32.\hat{4}$

$$\begin{array}{r} 10x = 324.444\ldots \\ -\ x = 32.444\ldots \\ \hline 9x = 292 \end{array}$$

$x = \frac{292}{9}$

因為292和9都是整數，而且公因數是1，所以$x = 32.\hat{4}$是有理數。

要證明一個數是無理數就難得多了，我們知道$\sqrt{2}$是無理數，如何證明呢?我們可以用反證法，也就是說，我們要證明$\sqrt{2}$不可能是有理數。

我們先假設$\sqrt{2}$是一個有理數，根據有理數的定義，$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$，p和q都是整數，而且p和q的公用數是1。

$\therefore\ \sqrt{2} = \frac{p}{q}$

$(\sqrt{2})^2 = \frac{p^2}{q^2}$

$\therefore\ p^2 = 2q^2 \cdots\cdots\cdots (67-1)$

由$(67-1)$，可知p^2是偶數

因為p^2是偶數，p不可能是奇數，一定也是偶數。

我們令$p = 2k \cdots\cdots\cdots (67-2)$

將$(67-2)$代入$(67-1)$得

$4k^2 = 2q^2$

$\therefore\ q^2 = 2k^2$
可知q也是偶數

p和q都是偶數，而且不相等，p和q之間的公因數一定不是1，所以$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$是不可能成立的，因此我們可以確定$\sqrt{2}$不是有理數，而是無理數。