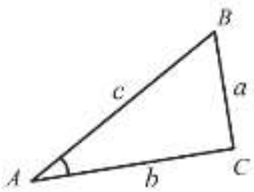
(66)三角形面積

在這一章，我們要介紹各種求三角形面積的做法。

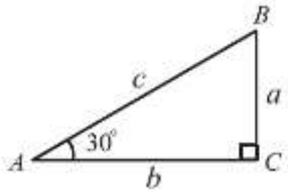
第一類:已知兩邊夾一角

在講義第 13 章，我們就有了一個公式，在已知兩邊夾一角的情形之下，求三角形的面積。請看下圖:



假設已知 b, c 和∠A，則此三角形的面積是$\frac{1}{2}bc\sin A$

(1)請看以下的三角形:



假設 b=1，因為$\cos A=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{b}{c}$，所以$c=\frac{2b}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\sin A=\sin 30°$

$\therefore \triangle$ABC 的面積是$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}(1)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{3}}$

我們可以求證一下答案的正確性

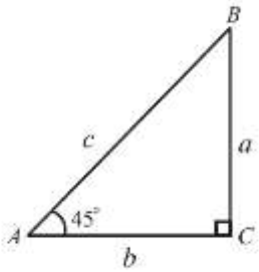
$$a^2=c^2-b^2=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-1=\frac{4}{3}-\frac{3}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore a=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

因為△ABC是一直角三角形，△ABC 的面積是$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1)=\frac{1}{2\sqrt{3}}$

故答案是正確的。

(2)看下圖:



已知$\angle A=45°$以及 b=1，因為△ABC是一等腰三角形，a=b

∴ a=b=1，$c^2=a^2+b^2=1^2+1^2=2$

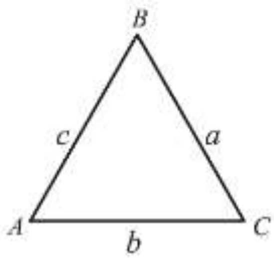
$\therefore c=\sqrt{2}$

∴△ABC 的面積是$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}(1)(\sqrt{2})\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$

驗證:因為△ABC是直角三角形，∴△ABC 的面積是$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}(1)(1)=\frac{1}{2}$

答案是正確的。

(3)請看下圖:

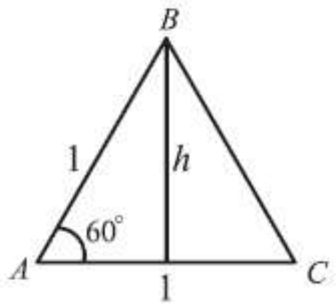


a=b=c

∴△ABC是一正三角形，因此$\angle A=60°$

$\triangle$ABC 的面積是$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}(1)(1)\sin 60°=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

驗證



$\sin 60°=\frac{h}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore \mathrm{h}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}hb=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1)=\frac{\sqrt{3}}{4}$

答案是正確的。

第二類:已知三邊

假如我們只知三角形的三邊，如何求得此三角形的面積式?這也不難，在前面，我們介紹了已知兩邊夾一角的三角形面積公式，$\triangle$ABC 的面積是$\frac{1}{2}bc\sin A$。

以上的公式中，已有兩邊，我們只要設法將$\sin A$用邊來表示就夠了。

$\sin A=\sqrt{sin^2A}=\sqrt{1-cos^2A}$

問題是:如何將$\cos A$轉換成與三角形有關的公式，我們可以用餘弦定理:

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

這個定理在我的講義第 13 章可以找到，由餘弦定理，我們得知

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

∴△ABC 的面積是$\frac{1}{2}bc\sqrt{1-(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc})^2}$

(4)已知正三角形的三邊都是 1，因此 a=b=c=1

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1^2+1^2-1^2}{2\times 1\times 1}=\frac{1}{2}$$

$$\sin A=\sqrt{1-cos^2 A}=\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

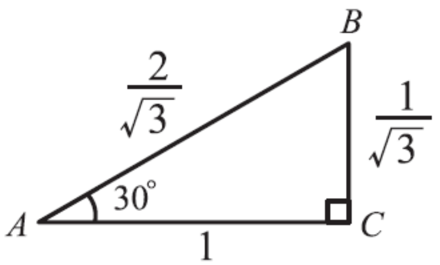
∴△ABC 的面積是$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

這個答案和第 3 題的答案是一樣的。

同學們也應該發現前面的計算中，$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$

正三角形中，每一個角都是$60°$，所以$\sin A=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(5)第 1 題的三角形如下圖:



$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1^2+(\frac{2}{\sqrt{3}})^2-(\frac{1}{\sqrt{3}})^2}{2\times 1\times\frac{2}{\sqrt{3}}}=\frac{1+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}{\frac{4}{\sqrt{3}}}=\frac{2}{\frac{4}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin A=\sqrt{1-cos^2 A}=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

$\therefore\triangle$ ABC 的面積是 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$

這個答案和第 1 題的答案是一樣的

以上的計算方法很簡單，但不夠漂亮，一般老師會介紹海龍公式。假設我們已知三角形的三邊 a,b,c，令 S=$\frac{1}{2}(a+b+c)$

則三角形的面積是$\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

在推導這個公式以前，我們先做一個例題。

(6)利用海龍公式求正三角形的面積

正三角形三邊相等，因 a=b=c=1，S=$\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{3}{2}$

$$S-a=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}=S-b=S-c$$

$\therefore$正三角形的面積是$\sqrt{\frac{3}{2}(\frac{1}{2})^3}=\sqrt{\frac{3}{16}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

這個答案是對的。

現在我們來推導海龍定理，根據公式，

$\triangle$ ABC 的面積是$\frac{1}{2}bc\sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}$

$$=\frac{1}{2}bc\sqrt{\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}$$

$$=\frac{bc}{2}\sqrt{\left(\frac{(b^2+2bc+c^2)-a^2}{2bc}\right)\left(\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{2bc}\right)}$$

$$=\frac{bc}{2}\sqrt{\left(\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}\right)\left(\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}\right)}$$

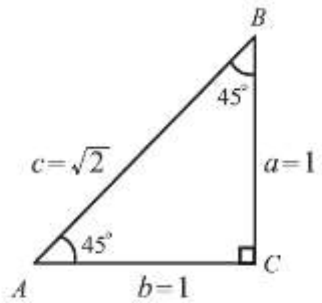
$$=\frac{1}{4}\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{2S(2S-2a)(2S-2b)(2S-2c)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{16S(S-a)(S-b)(S-c)}=\frac{4}{4}\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

(7)我們重做第 2 題



S=$\frac{1}{2}(a+b+C)=\frac{1}{2}\left(1+1+\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2}\right)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$S-a=1+\frac{\sqrt{2}}{2}-1=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S-b=1+\frac{\sqrt{2}}{2}-1=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

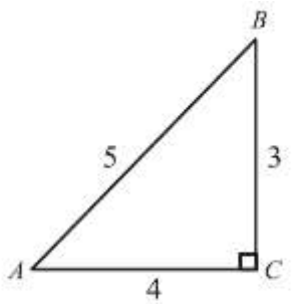
$S-c=1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\therefore \triangle \mathrm{ABC}=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}=\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$=\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{2}{4}\right)\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\sqrt{\left(1-\frac{2}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

答案和第 2 題的答案相符

(8)請看下圖:



a=3，b=4，c=5

S=$\frac{1}{2}(a+b+C)=\frac{1}{2}(3+4+5)=6$

$S-a=6-3=3$

$S-b=6-4=2$

$S-c=6-5=1$

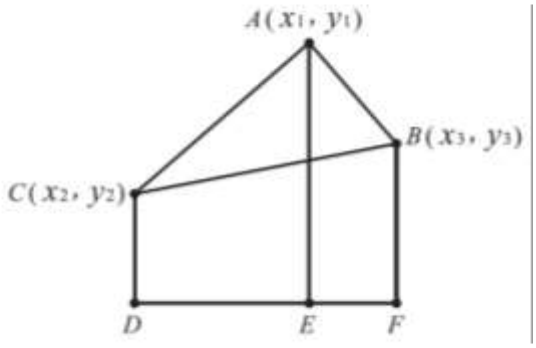
$\therefore \triangle$ ABC 的面積 $=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}=\sqrt{6\times3\times2\times1}=\sqrt{36}=6$

驗證，此三角形的面積$\frac{1}{2}(\overline{BC}\times\overline{AC})=\frac{1}{2}(3\times4)=6$

∴ 答案是對的

第三類:已知三角形三頂點的坐標

請看下圖:



上圖有三個梯形:梯形 AEDC、梯形 ABFE 和梯形 CBFD

△ABC的面積=梯形 AEDC 面積+梯形 ABFE 面積-梯形 CBFD 面積

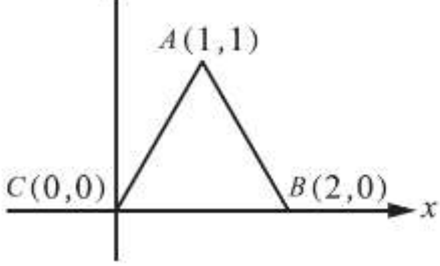
$$\text{AEDC 面積} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_1 - x_2)$$

$$\text{ABFE 面積} = \frac{1}{2}(y_3 + y_1)(x_3 - x_1)$$

$$\text{CBFD 面積} = \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_3 - x_2)$$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle \text{ABC 面積} &= \frac{1}{2}\big((y_1 + y_2)(x_1 - x_2) + (y_3 + y_1)(x_3 - x_1) \\ &\quad - (y_3 + y_2)(x_3 - x_2)\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\big)\end{aligned}$$

(9)請看下圖:



$x_1 = (1，1)$

$x_2 = (0，0)$

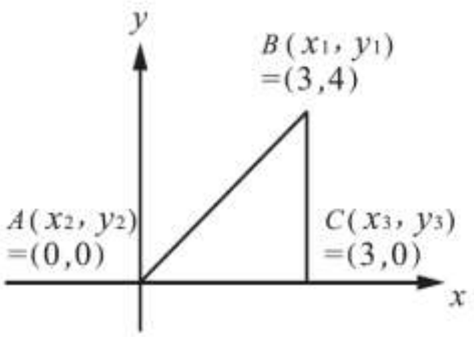
$x_3 = (2，0)$

$$\triangle \text{ABC 面積} = \frac{1}{2}\big(x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\big)$$

$$= \frac{1}{2}\big(1(0-0) + 0(0-1) + 2(1-0)\big) = \frac{1}{2}(0+0+2) = 1$$

答案顯然是正確，因為三角形的高是 1，底是 2。

(10)請看下圖:



$(x_1，y_1) = (3，4)$

$(x_2，y_2) = (0，0)$

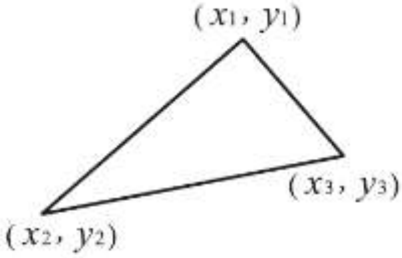
$(x_3，y_3) = (3，0)$

$$\triangle \text{ABC 面積} = \frac{1}{2}\big(x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\big)$$

$$= \frac{1}{2}\big(3(0-0) + 0(0-4) + 3(4-0)\big) = \frac{1}{2}(0+0+12) = 6$$

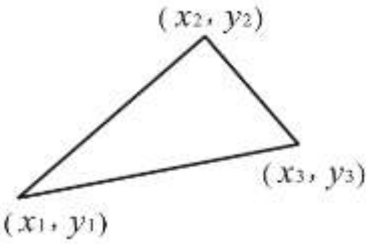
答案是對的，因為△ABC 面積 $= \frac{1}{2}(\overline{BC} \times \overline{AC}) = \frac{1}{2}(3 \times 4) = 6$

在前面，三角形的$(x_1，y_1)$、$(x_2，y_2)$和$(x_3，y_3)$排列如下:

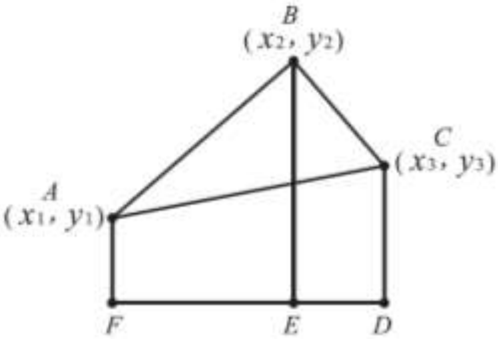


我們因此知道這三個端點順序是按反時鐘方向排列的,假如端點是按順時鐘排列的話，三角形面積會不會有問題呢?

請看下圖:



這次，三個端點排列的順序是順時鐘的。



梯形 ABEF 的面積 $=\frac{1}{2}(y_1+y_2)(x_1-x_2)$

梯形 BCDE 的面積 $=\frac{1}{2}(y_3+y_1)(x_3-x_1)$

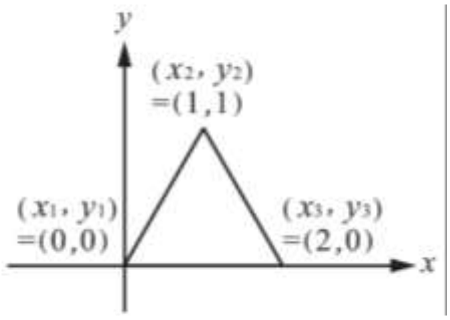
梯形 ACDF 的面積 $=\frac{1}{2}(y_3+y_2)(x_3-x_2)$

△ABC的面積=梯形ABEF面積+梯形BCDE面積-梯形ACDF面積

$\therefore \triangle$ ABC 面積 $=\frac{1}{2}\big(x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\big)$

我們看看這是怎麼一回事，我們重做前面的兩個例題:

(11)重做第 9 題

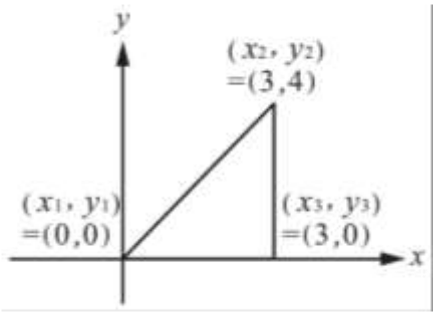


這次三端點是按順時鐘排列的，和第 9 題不一樣。

$$\triangle \mathrm{ABC}\ 面積 = -\frac{1}{2}\big(x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\big)$$

$$= -\frac{1}{2}\big(0(1-0) + 1(0-0) + 2(0-1)\big) = -\frac{1}{2}(-2) = 1$$

(12)重做第 10 題



這次三端點排列是順時鐘的

$$\triangle \mathrm{ABC}\ 面積 = -\frac{1}{2}\big(x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\big)$$

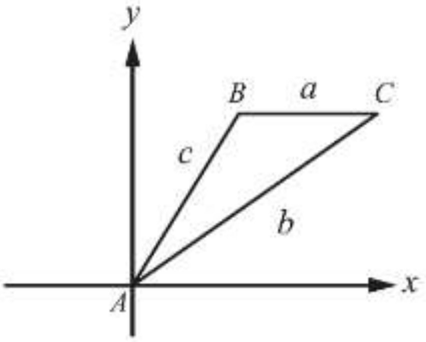
$$= -\frac{1}{2}\big(0(4-4) + 3(0-0) + 3(0-4)\big) = -\frac{1}{2}(-12) = 6$$

同學們一定會問，何時在求面積時要加負號呢?解決的辦法很簡單，三角形面積是$\left|\frac{1}{2}\big(x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\big)\right|$，如此，我們可以不理會是否要加負號了。

同學們也許會覺得以下的例題可以用已知三邊的方法求得這個三角形的面積,以這題來說，用以下的公式比較簡單:

$\triangle$ABC 的面積 $=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

但是，請看下圖:



A=(0,0)
B=(1,1)
C=(2,1)

我們可以得到以下的資料:

a=1
$\mathrm{b}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$
$\mathrm{c}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\therefore$ S$=\frac{1}{2}(a+b+C)=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+\sqrt{2}+1)$

$$S-a=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+\sqrt{2}-1)$$

$$S-b=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1-\sqrt{5})$$

$$S-c=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1-\sqrt{2})$$

$\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

$$=\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1-\sqrt{5})(\sqrt{5}+1-\sqrt{2})}$$

以上的計算是相當麻煩的，但是我們可以利用以下的資料:

$(x_1，y_1)=(0，0)$

$(x_2，y_2)=(1，1)$

$(x_3，y_3)=(2，1)$

$x_1(y_2-y_3)=0(1-1)=0$

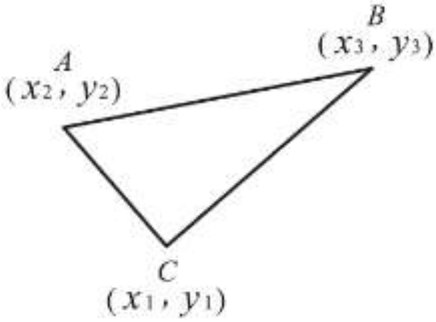
$x_2(y_3-y_1)=1(1-0)=1$

$x_3(y_1-y_2)=2(0-1)=-2$

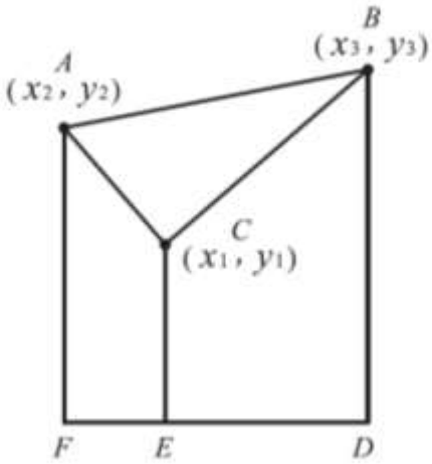
$$\therefore \triangle \mathrm{ABC} \text{ 的面積 } =\frac{1}{2}\big(x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\big)$$
$$=\frac{1}{2}\big(0+1+(-2)\big)=-\frac{1}{2}$$

以上的計算是很容易的。

在以上的三角形都是正三角形，請看下圖:



假如已知以上三角形的頂點座標，能不能用過去我們所介紹的公式，請看下圖:



上圖有三個梯形:ABDF、ACEF 和 BDEC

△ABC 的面積 = ABDF 面積 − ACEF 面積 − BDEC 面積

ABDF 面積 $=(y_2+y_3)(x_3-x_2)$
ACEF 面積 $=(y_1+y_2)(x_1-x_2)$

BDEC 面積 $=(y_1+y_3)(x_3-x_1)$

△ABC 的面積

$$=\frac{1}{2}|(y_2+y_3)(x_3-x_2)-(y_1+y_2)(x_1-x_2)+(y_1+y_3)(x_3-x_1)|$$

$$=\frac{1}{2}|x_1(-y_2+y_3)+x_2(-y_3+y_1)+x_3(-y_1+y_2)|$$

$$=\frac{1}{2}|-x_1(y_2-y_3)-x_2(y_3-y_1)-x_3(y_1-y_2)|$$

$$=\frac{1}{2}|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)|$$

∴ 我們求三角形的公式是可以用在不同形狀的三角形的,雖然推導的過程不同,結果是一樣的。

如果不談絕對值，已知三角形三頂點的坐標，此三角形的面積是$x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)$

我們還有一個寫法如下:

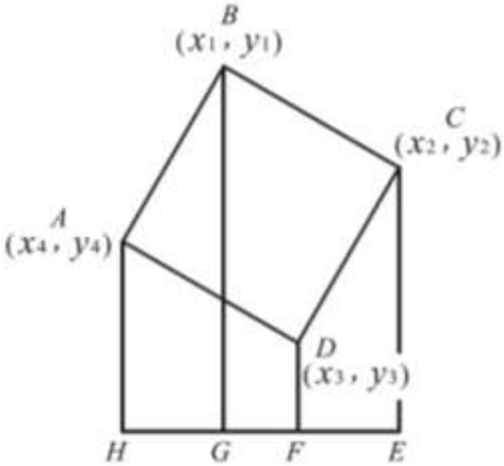
$x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_1y_3-x_2y_1-x_3y_1$

以上的公式不好記，我們可以用行列式來表示

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

以上矩陣的行列式是$x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_1$

現在，我們要看一個四邊形的面積，請看下圖:



以上的圖形有四個梯形:ABGH、BCEG、ADFH 和 DCEF

ABGH 面積=$\frac{1}{2}(y_1 + y_4)(x_1 - x_4)$

BCEG 面積=$\frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_2 - x_1)$

ADFH 面積=$\frac{1}{2}(y_3 + y_4)(x_3 - x_4)$

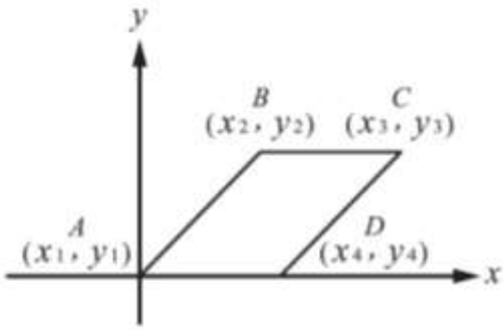
DCEF 面積=$\frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$

$$\text{ABCD 的面積} = \left|\frac{1}{2}(y_1+y_4)(x_1-x_4)+\frac{1}{2}(y_2+y_1)(x_2-x_1)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}(y_3+y_4)(x_3-x_4)-\frac{1}{2}(y_2+y_3)(x_3-x_2)\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|x_1(y_4-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_4)+x_4(y_1-y_3)\right|$$

以上的公式可以用行列式表示

ABCD 的面積 $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 x_2 x_3 x_4 \\ y_1 y_2 y_3 y_4 \end{vmatrix}$的絕對值

(13)求以下四邊形的面積



$(x_1，y_1)=(0，0)$

$(x_2，y_2)=(1，1)$

$(x_3，y_3)=(3，1)$

$(x_4，y_4)=(2，0)$

求 ABCD 面積$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 x_2 x_3 x_4 \\ y_1 y_2 y_3 y_4 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0132 \\ 0110 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}|(0\times 1+1\times 1+3\times 0+2\times 0-$

$0\times 1-1\times 0-3\times 1-2\times 1)|=\frac{1}{2}|(0+1+0+0-0-0-3-2)|=\frac{1}{2}|-4|=$

2

驗證:

ABCD 為一平行四邊形，∴ ABCD 面積$=(x_4-x_1)(y_2)=(2-0)(1)=2$

答案是對的

我們可以有以下的公式:

假如一個多邊形的順時針或逆時針順序的端點坐標是$(x_1，y_1)$、$(x_2，y_2)$……$(x_n，y_n)$，則此多邊形的面積是$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots\cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots\cdots & y_n \end{vmatrix}$的絕對值