

(62) 循環小數化成分數

(1) $x=0.666\cdots$

$$10x=6.666\cdots$$

$$-)x=0.666\cdots$$

$$9x=6$$

$$x=\frac{6}{9}$$

(2) $x=0.222\cdots$

$$10x=2.222\cdots$$

$$-)x=0.222\cdots$$

$$9x=2$$

$$x=\frac{2}{9}$$

(3) $x=1.555\cdots$

$$10x=15.555\cdots$$

$$-)x=1.555\cdots$$

$$9x=14$$

$$x=\frac{14}{9}$$

(4) $x=0.13444\cdots$

$$1000x=134.444\cdots$$

$$-)100x=13.444\cdots$$

$$900x=121$$

$$x=\frac{121}{900}$$

(5) $x=12.111\cdots$

$$10x=121.111\cdots$$

$$-)x=12.111\cdots$$

$$9x=109$$

$$x=\frac{109}{9}$$

(6) $x=0.12343434\cdots$

$$10000x=1234.343434\cdots$$

$$-)100x=12.343434\cdots$$

$$9900x=1222$$

$$x=\frac{1222}{9900}$$

$$(7) x=1.52414141\cdots$$

$$10000x=15241.414141\cdots$$

$$-)100x=152.414141\cdots$$

$$9900x=15089$$

$$x=\frac{15089}{9900}$$

$$(8) x=1.14333\cdots$$

$$1000x=1143.333\cdots$$

$$-)100x=114.333\cdots$$

$$900x=1029$$

$$x=\frac{1029}{900}$$

$$(9) x=3.141666\cdots$$

$$10000x=31416.666\cdots$$

$$-)1000x=3141.666\cdots$$

$$9000x=28275$$

$$x=\frac{28275}{9000}$$

$$(10) x=0.151515\cdots$$

$$100x=15.151515\cdots$$

$$-)x=0.151515\cdots$$

$$99x=15$$

$$x=\frac{15}{99}$$

我們現在將以上的例子寫成一個演算法，以後同學們可以用這種演算法。

假設 $x=a.bcc\cdots c$

a 代表小數點前的數字，
b 代表非循環數字，
c 代表循環數字

例 1 $x=3.1222\cdots$

$a=3$ ， $b=1$ ， $c=2$

例 2 $x=1.32252525\cdots$

$a=1$ ， $b=32$ ， $c=25$

例 3 $x=0.777\cdots$

$a=0$ ， b =空數字， $c=7$

令 bc 的長度為 i ， b 的長度為 j ，

例 4 $x=3.1222\cdots$

$bc=12$ ，故 $i=2$

$b=1$ ，故 $j=1$

例 5 $x=1.32252525\cdots$

$bc=3225$ ，故 $i=4$

$b=32$ ，故 $j=2$

例 6 $x=0.7$

$bc=7$ ，故 $i=1$

b =空數字，故 $j=0$

例 7 $x=1.7222\cdots$

$$abc=172$$

$$ab=17$$

$$bc=72, \text{ 故 } i=2$$

$$b=7, \text{ 故 } j=1$$

$$x = \frac{abc-ab}{10^i-10^j} = \frac{172-17}{10^2-10^1} = \frac{155}{90}$$

$$\text{例 8 } x=0.777\cdots$$

$$abc=7$$

$$ab=0$$

$$bc=7, i=1$$

$$b=\text{空數字}, j=0$$

$$x = \frac{abc-ab}{10^i-10^j} = \frac{7-0}{10^1-10^0} = \frac{7}{9}$$

$$\text{例 9 } x=1.2323232\cdots$$

$$abc=1232$$

$$ab=12$$

$$bc=232, \text{ 故 } i=3$$

$$b=2, \text{ 故 } j=1$$

$$x = \frac{abc-ab}{10^i-10^j} = \frac{1232-12}{10^3-10^1} = \frac{1220}{990} = \frac{122}{99}$$

$$\text{例 10 } x=5.031111\cdots$$

$$abc=5031$$

$$ab=503$$

$$bc=031, \text{ 故 } i=3$$

$$b=03, \text{ 故 } j=2$$

$$x = \frac{abc-ab}{10^i-10^j} = \frac{5031-503}{10^3-10^2} = \frac{4528}{900}$$

$$\text{例 11 } x=0.31212121\cdots$$

$$abc=3121$$

$$ab=31$$

$$bc=3121, \text{ 故 } i=4$$

$$b=31, \text{ 故 } j=2$$

$$x = \frac{abc-ab}{10^i-10^j} = \frac{3121-31}{10^4-10^2} = \frac{3090}{9900} = \frac{103}{330}$$

$$\text{例 12 } x=0.31515151\cdots$$

$$abc=315$$

$$ab=3$$

$$bc=315, \text{ 故 } i=3$$

$$b=3, \text{ 故 } j=1$$

$$x = \frac{abc-ab}{10^i-10^j} = \frac{315-3}{10^3-10^1} = \frac{312}{990} = \frac{104}{330}$$

$$\text{例 13 } x=0.123123123\cdots$$

$$abc=123$$

$$ab=0$$

$$bc=123, \text{ 故 } i=3$$

$$b=\text{空數字}, \text{ 故 } j=0$$

$$x = \frac{abc-ab}{10^i-10^j} = \frac{123-0}{10^3-10^0} = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$$

$$\text{例 14 } x=1.1222\cdots$$

$$abc=112$$

$$ab=11$$

$$bc=12, \text{ 故 } i=2$$

$$b=1, \text{ 故 } j=1$$

$$x = \frac{abc-ab}{10^i-10^j} = \frac{112-11}{10^2-10^1} = \frac{101}{90}$$

同學們學了很多將循環小數轉換成分數的技巧，也許大家好奇，是否每一個分數都有循環小數？答案是肯定的，為了要讓同學們看清楚，我們用以下的符號：

$$x=0.51666\cdots=0.51\bar{6}$$

$$x=3.1222\cdots=3.1\bar{2}$$

$$x=1.565656\cdots=1.\bar{56}$$

現在看一些例子

$$\frac{25}{7} = 3.\overline{571428}$$

$$\frac{6}{7} = 0.\overline{857142}$$

$$\frac{17}{3} = 5.\overline{66}$$

$$\frac{194}{7} = 27.\overline{714285}$$

大家有沒有發現，假如分母是 3，循環小數的長度是 2，假如分母是 7，循環小數的長度是 6，有趣嗎？到大學去唸數學系，就會知道其中的奧妙了。

練習題

將下列的循環小數轉換成分數，要將過程寫下來，不能只有答案。

1. 1.034444...
2. 3.525252...
3. 2.141111...
4. 0.352222...
5. 6.123333...
6. 1.125125125...