(61)更多的矩陣例題

(1)已知$\begin{bmatrix} 1 & y \\ x & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & 5 \\ 3 & r \end{bmatrix}$，求 x, y, u, r

x=3

y=5

u=1

r=2

(2)已知$\begin{bmatrix} a & d+a \\ c & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ b+3 & b \end{bmatrix}$，求 a, b, c, d

a=1

b=2

c=b+3=2+3=5

d+a=7

∴d=7−a=7−1=6

(3)已知$\begin{bmatrix} a & a+b \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & c \\ 2 & c-b-1 \end{bmatrix}$，求 a, b, c, d

b=2

a=b=2

c=a+b=2+2=4

d=c−b−1=4−2−1=1

(4)已知$\begin{bmatrix} a & c \\ c+a & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+c & 5 \\ 3 & b+d \end{bmatrix}$，求 a, b, c, d

c=5

c+a=3

∴a=3−5=−2

a=b+c

−2=b+5

∴b=−7

6=b+d

∴d=6−(−7)=6+7=13

(5)已知$\begin{bmatrix} a & b \\ 3 & d-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+c & 2 \\ c & a \end{bmatrix}$，求 a, b, c, d

b=2
c=3
a=b+c=2+3=5
d−c=a
d=a+c=5+3=8

(6)$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$，A+X=B，求 X

∵A+X=B
∴X=B−A=$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-3 & 1-1 \\ 6-4 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(7)已知$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$，2(X−A)=B+X，求 X

2X−2A=B+X

∴X=B+2A=$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 1+0 \\ -1+4 & 2+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

(8)已知$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$，X−A=2(X+B)，求 X

X−A=2X+2B

∴X=−2B−A=−(2B+A)

2B+A=$2\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

(9) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix}$，求 x. y

5x+2y=9……(1)

3x-y=1……(2)

$(1)+(2)\times 2$ 11x=11, x=1……(3)

代(3)入(1) 5+2y=9

2y=4, y=2

∴x=1, y=2

(10)$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & u\\y & r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 3\\1 & 5\end{bmatrix}$，求 x, y, u, r

先求 x 和 y

x+y=3
x-y=1

可得 x=2, y=1

再求 u 和 r
u+r=3
u-r=5

可得 u=4, r=-1

(11) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & 3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}$，BX=AB，求 X

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times 0+2\times 3 & 1\times 2+2\times 1\\-2\times 0+3\times 3 & -2\times 2+3\times 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 4\\9 & -1\end{bmatrix}$$

令 X=$\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}$

$$\mathrm{BX}=\begin{bmatrix}0 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_{21} & 2x_{22}\\3x_{11}+x_{21} & 3x_{12}+x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 4\\9 & -1\end{bmatrix}$$

$\therefore 2x_{21} = 6$，$x_{21} = 3$

$2x_{22} = 4$，$x_{22} = 2$

$3x_{11} + x_{21} = 9$

$3x_{11} + 3 = 9$

$3x_{11} = 6$，$x_{11} = 2$

$3x_{12} + x_{22} = -1$

$3x_{12} + 2 = -1$

$3x_{12} = -3$，$x_{12} = -1$

$\therefore X=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(12) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$，求$A^4$

$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$A^4 = A^2A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -A$

(13) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，求$A^4$

$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

$A^3 = A^2 \times A = IA = A$

$A^4 = A^3 \times A = A^2 = I$

（14） $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，求$A^2$

$A^2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$

（15） $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$，求$A^4$

$A^2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

$A^4=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}=A$

（16） $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

已知$A^2=aA+bI$，求 a 和 b

$A^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix}$

$aA=\begin{bmatrix}a & 2a\\ 2a & a\end{bmatrix}$

$aA+bI=\begin{bmatrix}a+b & 2a\\ 2a & a+b\end{bmatrix}$

$\therefore\begin{bmatrix}a+b & 2a\\ 2a & a+b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix}$

∴a+b=5

2a=4

∴a=2，b=3

(17) $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，假如$A^2=\begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}$，證明 a=d，b=c=0

$$A^2=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{bmatrix}$$

因為$A^2=\begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}$

$\therefore a^2+bc=bc+d^2$

a=d 或 a=−d

假設 a=d

因為$A^2=\begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}$

$ac+dc=0$

$(a+d)c=0$

c=0

因為$A^2=\begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}$

∴ab+bd=0

b(a+d)=0

∴b=0

可知，如 a=b，則 b=c=0

例：$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

求證$A^2 = I$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\times1+0\times0 & 1\times0+0\times1\\0\times1+1\times0 & 0\times0+1\times1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\times1+0\times0 & 1\times0+0\times(-1)\\0\times1+(-1)\times0 & 0\times0+(-1)\times(-1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

矩陣乘法的一些定律

如 r,s 為實數，A,B,C 都是矩陣，則以下之定律都成立:
(1)(AB)C=A(BC)
(2)A(B+C)=AB+AC
(3)(A+B)C=AC+BC
(4)(rA)(sB)=(rs)(AB)

以上的定律證明並不難，但是很長，我們在下面用例子來說明:

在以下的例子中，

$A = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}$，$C = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$

(18)測驗(AB)C=A(BC)

$$AB = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\times1+1\times(-1) & 1\times0+1\times1\\0\times1+(-1)\times(-1) & 0\times0+(-1)\times1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\times1+1\times0 & 0\times1+1\times1\\1\times1+(-1)\times0 & 1\times1+(-1)\times1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\times1+0\times0 & 1\times1+0\times1\\(-1)\times1+1\times0 & (-1)\times1+1\times1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\times1+1\times(-1) & 1\times1+1\times0\\0\times1+(-1)\times(-1) & 0\times1+(-1)\times0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

由上可知(AB)C=A(BC)

(19)測驗 A(B+C)=AB+AC

由(18)題，$AB=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

$$B+C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$A(B+C)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times 2+1\times(-1) & 1\times 1+1\times 2\\ 0\times 2+(-1)\times(-1) & 0\times 1+(-1)\times 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

$$AC=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times 1+1\times 0 & 1\times 1+1\times 1\\ 0\times 1+(-1)\times 0 & 0\times 1+(-1)\times 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$AB+AC=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

∴ A(B+C)=AB+AC

(20)測驗(A+B)C=AC+BC

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$(A+B)C=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times 1+1\times 0 & 2\times 1+1\times 1\\ (-1)\times 1+0\times 0 & (-1)\times 1+0\times 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

由(19)可知$AC=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

由(18)可知$BC=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

$\therefore\ AC+BC=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{bmatrix}$

∴ (A+B)C=AC+BC

(21)已知$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$AB=C$，求 B

因為 AB=C

$\therefore\ A^{-1}AB=A^{-1}C$

$\therefore\ B=A^{-1}C$

$$A^{-1}=\frac{1}{1\times 0-1(-1)}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$B=A^{-1}C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\times(-1)+1\times 0 & 0\times 1+1\times 1\\ (-1)\times(-1)+1\times 0 & (-1)\times 1+1\times 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

驗證$AB=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times 0+(-1)\times 1 & 1\times 1+(-1)\times 0\\ 1\times 0+0\times 1 & 1\times 1+0\times 0\end{bmatrix}=$

$\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=C$

可見答案正確

(22)

已知$B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$BA=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，$CA=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，求 A

∵ (B+C)A=BA+CA

$\therefore\ (B+C)^{-1}(B+C)A=(B+C)^{-1}(BA+CA)$

$\therefore\ A=(B+C)^{-1}(BA+CA)$

$BA+CA=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

$B+C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

$(B+C)^{-1}=\dfrac{1}{0\times 0-1\times(-1)}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

$\therefore\ A=(B+C)^{-1}(BA+CA)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

驗證$(B+C)A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=BA+CA$

(23)證明 A,B 如為矩陣，則$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$不成立

證明：$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$

因為 AB=BA 不成立，故$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$不成立……Q.E.D.

(24)證明 A,B 如為矩陣，則$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$不成立

證明：$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$

但 AB=BA 不成立，因此-AB+BA=0 不成立，因此$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$不成立

(25)已知$A^2=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，$A^3=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，求 A

$A^2A=A^3$

$(A^2)^{-1}A^2A=(A^2)^{-1}A^3$

$\therefore A=(A^2)^{-1}A^3$

$$(A^2)^{-1} = \frac{1}{0 \times (-1) - 1 \times (-1)} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A = (A^2)^{-1} \mathrm{A}^3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

同學們可以驗證答案的正確性

(26)已知A$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$，A$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$，求 A

令A $= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

a+3b=5……(1)
c+3d=−2……(2)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3a+2b=8……(3)
3c+2d=1……(4)

從(1)和(3)

a+3b=5……(1)
3a+2b=8……(3)

可得 a=2, b=1

從(2)和(4)

c+3d=−2……(2)
3c+2d=1……(4)

可得 c=1，d=−1

$\therefore \ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

同學可以自行驗證答案正確與否

(27)已知$[1 \quad 2]A = [5 \quad 5]$，$[2 \quad 1]A = [4 \quad 1]$，求 A

令$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$[1 \quad 2]\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [5 \quad 5]$

a+2c=5……(1)
b+2d=5……(2)

$[2 \quad 1]\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [4 \quad 1]$

2a+c=4……(3)
2b+d=1……(4)

從(1)和(3)

a+2c=5……(1)
2a+c=4……(3)

可得 a=1，c=2

從(2)和(4)

b+2d=5……(2)
2b+d=1……(4)

可得 b=−1，d=3

$\therefore \ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(28)已知$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，求 A

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \times 1 - 0 \times 1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(29)試證，對任何矩陣 AB，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

證明$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$

$\because \ (AB)(AB)^{-1} = I$

$\therefore \ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(30)假設$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，證明$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ (AB)^{-1} = \frac{1}{3 \times 3 - 2 \times 4} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{1 \times 2 - 1 \times 1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2 \times 1 - 1 \times 1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times1+(-1)\times(-1) & 2\times(-1)+(-1)\times2\\ (-1)\times1+1\times(-1) & (-1)\times(-1)+1\times2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

$\therefore\ (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(31) $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ a & b\end{bmatrix}$，$AB=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 5 & 2\end{bmatrix}$，求 a 和 b

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ a & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times2+1\times a & 1\times1+1\times b\\ 2\times2+(-1)\times a & 2\times1+(-1)\times b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+a & 1+b\\ 4-a & 2-b\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 5 & 2\end{bmatrix}$$

∴ 2+a=1，a=-1

1+b=1，b=0

$\therefore\ B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

(32)已知$B^{-1}A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，求 A

因為$BB^{-1}A=A$

$\therefore A=B(B^{-1}A)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

驗證:

$$B^{-1}=\frac{1}{1\times1-1\times0}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

答案是對的

（33）已知$B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，求$(AB)^{-1}$

$ABB^{-1}A^{-1}=I$

$\therefore (AB)(B^{-1}A^{-1})=I$

$\therefore\ (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

驗證:

$B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，$\therefore B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$\therefore A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$AB=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

$\therefore\ (AB)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

答案是對的。

(34)已知$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$，3x−A=2x+B，求 x

3x−2x=A+B

$\therefore x=A+B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix}$

（35）已知$B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，$AB+2AC=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$，求 A

答案是對的

A(B+2C)=AB+2AC

$$A(B+2C)(B+2C)^{-1}=(AB+2AC)(B+2C)^{-1}$$

$$A=(AB+2AC)(B+2C)^{-1}$$

$$B+2C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ (B+2C)^{-1}=\frac{1}{3\times(-3)-0\times(-1)}\begin{bmatrix}-3 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{9}\\ 0 & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A=(AB+2AC)(B+2C)^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{9}\\ 0 & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3\times\frac{1}{3}+(-2)\times 0 & 3\times\frac{1}{9}+(-2)\times(-\frac{1}{3})\\ 3\times\frac{1}{3}+1\times 0 & 3\times\frac{1}{9}+1\times(-\frac{1}{3})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

驗證 A(B+2C)=AB+2AC

$$A(B+2C)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

已知$AB+2AC=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$

∴A(B+2C)=AB+2AC

答案是對的

(36)已知$C^{-1}B^{-1}A^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，求 ABC

因$ABC(C^{-1}B^{-1}A^{-1}) = I$

$\therefore \ (C^{-1}B^{-1}A^{-1}) = (ABC)^{-1}$

$\therefore \ ABC = (C^{-1}B^{-1}A^{-1})^{-1} = \frac{1}{(-1)\times 1 - 0 \times 2}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(37) $A = C^{-1}BC$，已知 BC，求 CA

$A = C^{-1}BC$

$\therefore \ CA = CC^{-1}BC = BC$

$\therefore \ CA = BC$

(38)證明$A = C^{-1}BC$，則$A^2 = C^{-1}B^2C$

$A = C^{-1}BC$

$A^2 = (C^{-1}BC)(C^{-1}BC) = C^{-1}BBC = C^{-1}B^2C$

(39)試證$(A + I)^2 = A^2 + 2IA + I^2$

$(A + I)^2 = (A + I)(A + I) = A^2 + AI + IA + I^2$

因為 AI=IA

$\therefore \ (A + I)^2 = A^2 + 2IA + I^2$

(40)舉一例，驗證$(A + I)^2 = A^2 + 2IA + I^2$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$A + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$(A+I)^2=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times2+1\times1 & 2\times1+1\times1\\1\times2+1\times1 & 1\times1+1\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 3\\3 & 2\end{bmatrix}$

$A^2=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times1+1\times1 & 1\times1+1\times0\\1\times1+0\times1 & 1\times1+0\times0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$

$2IA=2\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\2 & 0\end{bmatrix}$

$I^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

$\therefore\ A^2+2IA+I^2=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 2\\2 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+2+1 & 1+2+0\\1+2+0 & 1+0+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 3\\3 & 2\end{bmatrix}$

$\therefore\ (A+I)^2=A^2+2IA+I^2$

(41)試證$(A+I)(A-I)=A^2-I^2$

$(A+I)(A-I)=A^2-AI+IA-I^2$

因為 AI=IA
$\therefore\ (A+I)(A-I)=A^2-I^2$

(42)舉一例，驗證$(A+I)(A-I)=A^2-I^2$

$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$

$A+I=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}$

$A-I=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$

$(A+I)(A-I)=\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\2 & 0\end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - I^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (A + I)(A - I) = A^2 - I^2$$