

## (57) 複數的幾何意義

假設我們有兩個複數：

$$Z_1 = a_1 + b_1i$$

$$Z_2 = a_2 + b_2i$$

$$\text{則 } Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

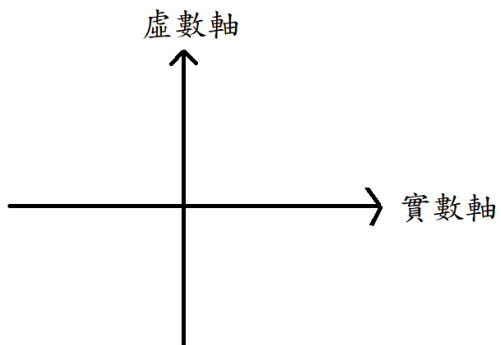
同學們一定會想起向量，假設我們有兩個向量：

$$V_1 = (a_1, b_1)$$

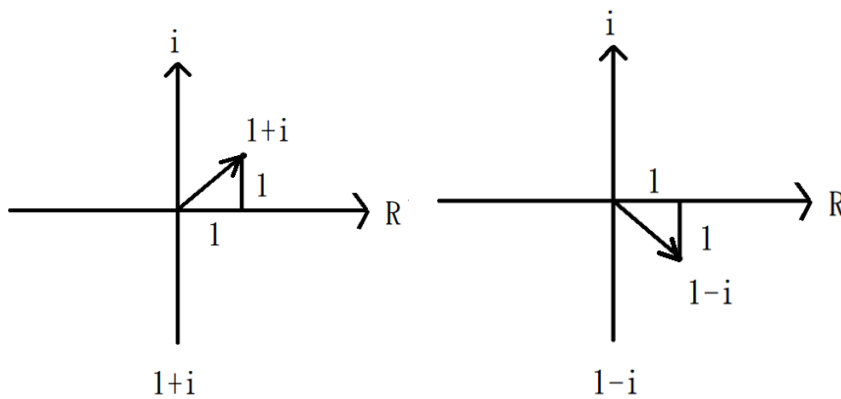
$$V_2 = (a_2, b_2)$$

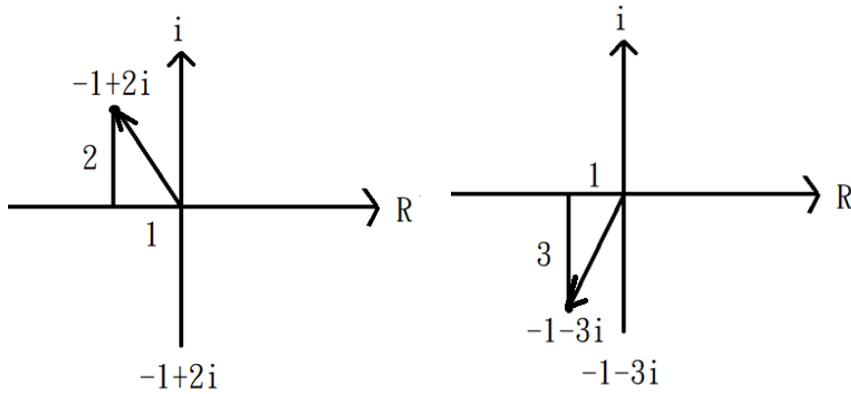
$$\text{則 } V_1 + V_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

因此，我們可以將實數放到平面上去，請看下圖

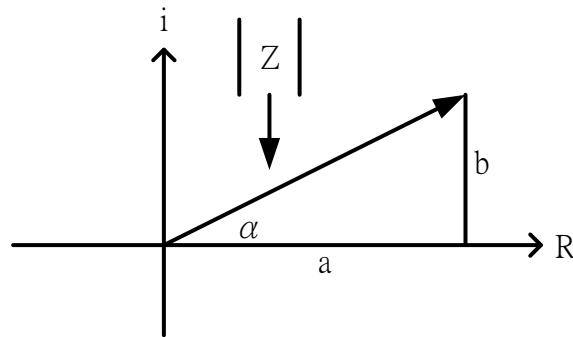


以下舉例說明





從以上的圖中，我們可以給複數一個絕對值和角度，這個角度對應實數軸



假設  $Z = a + ib$ ， $Z$  的絕對值  $|Z|$  的定義如下：

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = |Z|\cos\alpha$$

$$b = |Z|\sin\alpha$$

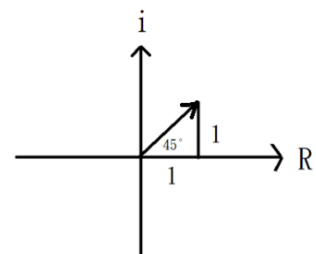
$$\alpha = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

(1)  $Z = 1 + i$

$$a = 1, b = 1$$

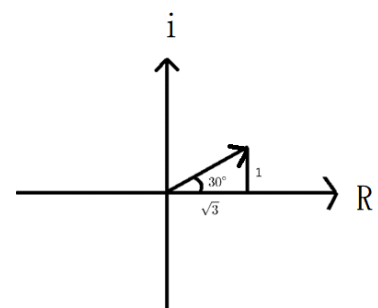
$$|Z| = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{b}{a} = \tan^{-1}\frac{1}{1} = 45^\circ$$



(2)  $Z = \sqrt{3} + i$

$$|Z| = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

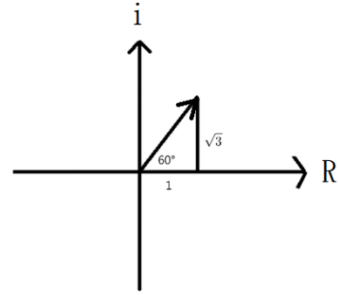


$$\alpha = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3} = 30^\circ$$

$$(3) Z = 1 + \sqrt{3}i$$

$$|Z| = \sqrt{1+3} = 2$$

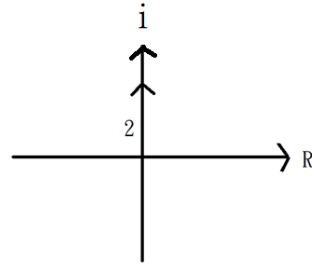
$$\alpha = \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{1} = 60^\circ$$



$$(4) Z = 2i$$

$$|Z| = \sqrt{2^2} = 2$$

$$\alpha = \tan^{-1} \infty = 90^\circ$$

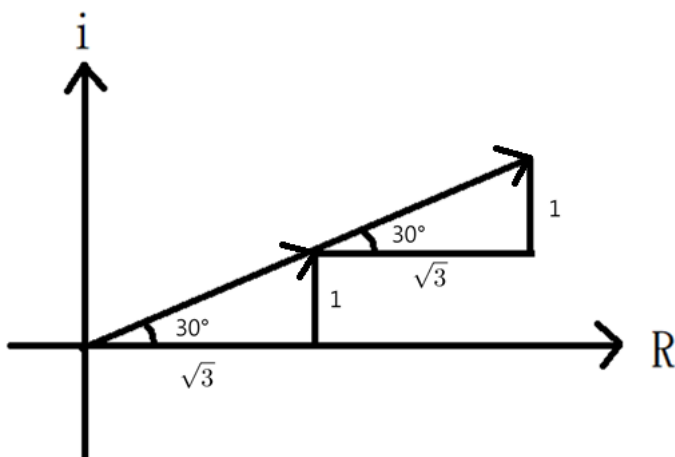


## 複數的加減

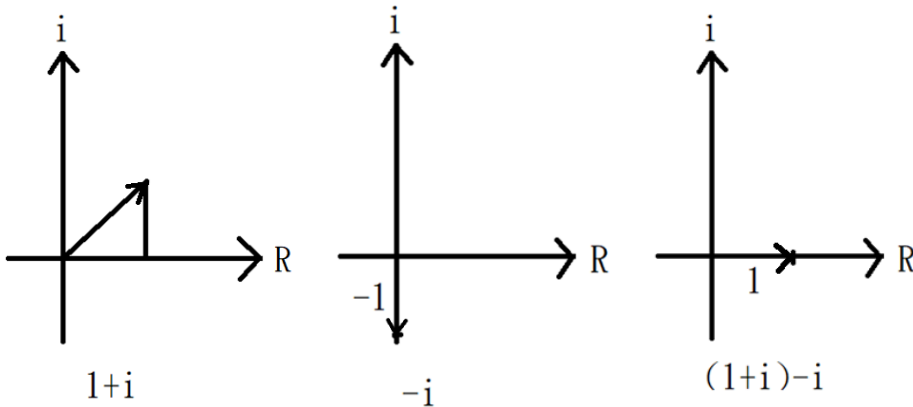
複數可以用向量來表示，因此複數的加減和向量加減是相像的。

$$(5) (1 + \sqrt{3}i) + (1 + \sqrt{3}i) = 2 + 2\sqrt{3}i = 2(1 + \sqrt{3}i)$$

同學們可以看出兩個複數的角度都是 $30^\circ$ ，相加以後角度仍然是 $30^\circ$ ，如下圖示意



$$(6)(1+i) - i = 1$$



## 複數的乘法

在前面，我們提到複數的角度，複數的乘法和角度是有關的，我們先以一個例子來說明：

$$Z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\text{這個複數的角度是 } \alpha = \tan^{-1} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3} = 30^\circ$$

假設我們求  $Z \times Z = Z^2$

$$\begin{aligned} Z' = Z^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= \frac{3}{4} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}i\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 i^2 \\ &= \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

$$\text{我們求得 } Z' \text{ 的角度是 } \beta = \tan^{-1} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \tan^{-1} \sqrt{3} = 60^\circ$$

$Z$  的角度是  $30^\circ$ ， $Z' = Z \times Z$  的角度是  $60^\circ$ ，正好等於  $30^\circ + 30^\circ$ ，這究竟是怎麼一回事，我們在下面可以解釋清楚。

$$\text{假設 } Z_1 = (a_1 + b_1i)$$

$$Z_2 = (a_2 + b_2i)$$

$$Z_1 \text{ 的角度是 } \alpha = \tan^{-1} \frac{b_1}{a_1}$$

$$Z_2 \text{ 的角度是 } \beta = \tan^{-1} \frac{b_2}{a_2}$$

$$a_1 = |Z_1| \cos \alpha$$

$$b_1 = |Z_1| \sin \alpha$$

$$a_2 = |Z_2| \cos \beta$$

$$b_2 = |Z_2| \sin \beta$$

$$Z_1 \times Z_2 = (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (b_1a_2 + b_2a_1)i$$

$$a_1a_2 - b_1b_2 = \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{|Z_1| \cdot |Z_2|} = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{|Z_1| \cdot |Z_2|}$$

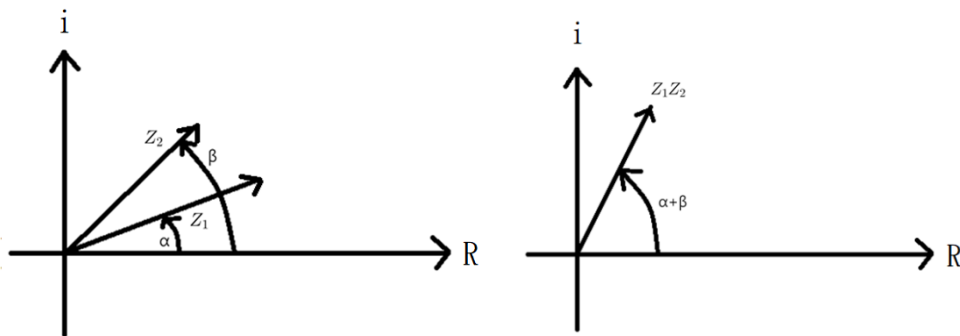
$$a_2b_1 + b_2a_1 = \frac{\cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha}{|Z_1| \cdot |Z_2|} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{|Z_1| \cdot |Z_2|} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{|Z_1| \cdot |Z_2|}$$

$$\text{因此, } Z' = Z_1 \times Z_2 = \frac{1}{|Z_1||Z_2|} ([\cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta) i])$$

由上式, 可以看出  $Z'$  的角度是  $(\alpha + \beta)$

換言之,  $Z'$  的角度是  $(Z_1 \text{ 的角度}) + (Z_2 \text{ 的角度})$

我們可以先想像  $Z_1 \times Z_2$  是將  $Z_1$  旋轉一個角度,  $Z_1$  原來的角度是  $\alpha$ ,  $Z_2$  的角度是  $\beta$ ,  $Z_1 \times Z_2$  的結果是將  $Z_1$  旋轉一個  $\beta$  的角度, 新的複數的角度是  $(\alpha + \beta)$ , 如下圖所示:



$$(7) Z_1 = (1 + i)$$

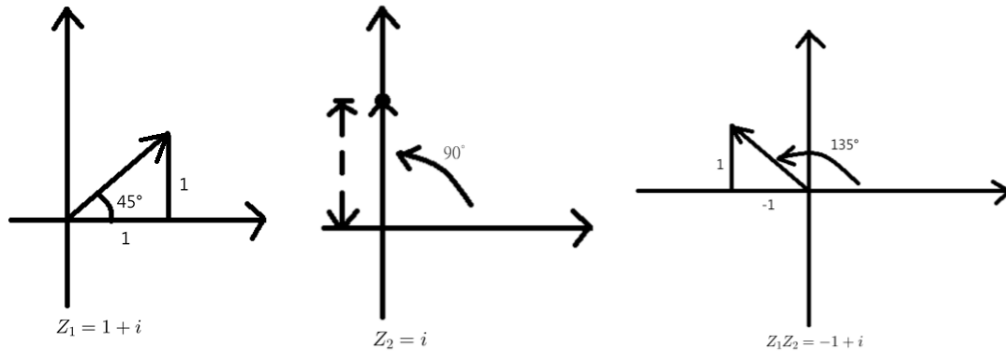
$$Z_2 = i$$

$Z_1$ 的角度是 $45^\circ$

$Z_2$ 的角度是 $90^\circ$

$$Z' = Z_1 \times Z_2 = (1 + i)i = -1 + i$$

以下的圖顯示了這個複數乘法的幾何意義



這個例子顯示了 $Z_1 \times Z_2$ 是將 $Z_1$ 旋轉了一個 $\beta = 90^\circ$ 的角，因此新的複數的角度是 $45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$ 。

$$(8) Z_1 = (1 + i)$$

$$Z_2 = (1 + i)$$

可以看出 $Z_1$ 和 $Z_2$ 的角度都是 $45^\circ$ ，相乘以後的角度應該是 $90^\circ$

$$Z' = Z_1 \times Z_2 = (1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$$

$Z'$ 的角度的確是 $90^\circ$

$$(9) Z_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$Z_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$Z_1 \text{ 的角度是 } \alpha = \tan^{-1} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ$$

$$Z_2 \text{ 的角度是 } \beta = \tan^{-1} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} = 60^\circ$$

$$Z' = Z_1 \times Z_2 \text{ 的角度應該是 } 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$$

$$\begin{aligned}
 Z' &= Z_1 \times Z_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i^2 \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i + \frac{1}{4}i = 0 + i = i
 \end{aligned}$$

所以 $Z'$ 的角度的確是 $90^\circ$ 。

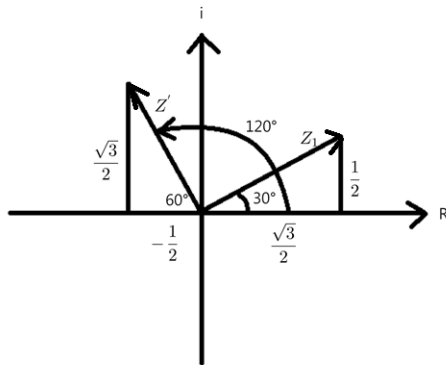
$$(10) Z_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$Z_2 = i$$

$Z_1$ 的角度是 $30^\circ$ ， $Z_2$ 的角度是 $90^\circ$

$Z'$ 的角度應該是 $120^\circ$

$$Z' = Z_1 \times Z_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) i = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



如上圖所示， $Z'$ 是 $Z_1$ 旋轉 $90^\circ$ 的結果。

同學們在高中時代，不可能知道複數旋轉的意義，複數旋轉在電路上有重大的意義，如果同學進入電機系，碰到電容和電感，就知道複數旋轉的意義了。

## 複數的除法

假設  $a_1 = |Z_1| \cos \alpha$

$$b_1 = |Z_1| \sin \alpha$$

$$a_2 = |Z_2| \cos \beta$$

$$b_2 = |Z_2| \sin \beta$$

$$Z_1 = a_1 + b_1 i$$

$$Z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + a_2 b_1 i - a_1 b_2 i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{|Z_2|^2}$$

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = |Z_1| |Z_2| (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = |Z_1| |Z_2| \cos(\alpha - \beta)$$

$$\begin{aligned} a_2 b_1 - a_1 b_2 &= |Z_1| |Z_2| (\cos \beta \sin \alpha + \cos \alpha \sin \beta) = |Z_1| |Z_2| (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) \\ &= |Z_1| |Z_2| \sin(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

$Z_1$  的角度是  $\alpha$ ， $Z_2$  的角度是  $\beta$ ， $\frac{Z_1}{Z_2}$  的角度是  $\alpha - \beta$ ，可見  $\frac{Z_1}{Z_2}$  的功能是產生另一複數，這個複數的角度是  $Z_1$  的角度減去  $Z_2$  的角度。

$$(11) Z_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$$

$$Z_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right)$$

$$Z' = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}-1-i}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}+1i}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}-1-i}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{4}(1+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}-i)}{\frac{\frac{3+1}{4}}{1}} = \frac{\frac{1}{4}(\sqrt{3}-i+3i-\sqrt{3}i^2)}{1} = \frac{1}{4}(2\sqrt{3} + 2i) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$Z_1$  的角度是  $60^\circ$ ， $Z_2$  的角度是  $30^\circ$ ， $Z'$  的角度是  $30^\circ$ ，正好是  $60^\circ - 30^\circ$ 。

$$(12) Z_1 = i$$

$$Z_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right)$$

$$Z' = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{i\left(\frac{\sqrt{3}-1-i}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}+1i}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}-1-i}{2}\right)} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}{\frac{\frac{3+1}{4}}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$Z_1$  的角度是  $90^\circ$ ， $Z_2$  的角度是  $30^\circ$ ， $Z'$  的角度是  $60^\circ$ ，可見得  $\frac{Z_1}{Z_2}$  有將角度相減的功能。



$$(13) Z_1 = i$$

$$Z_2 = (1 + i)$$

要求 $Z_1$ 和 $Z_2$ 的夾角，可以用 $\frac{Z_1}{Z_2}$ 來求

$$Z' = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{i-i^2}{1+1} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$Z'$ 的角度是 $45^\circ$ ，可見得 $Z_1$ 和 $Z_2$ 的夾角是 $45^\circ$ ， $Z_1$ 的角度是 $90^\circ$ ， $Z_2$ 的角度是 $45^\circ$ ， $Z_1$ 和 $Z_2$ 的角度的確是 $45^\circ$ 。

## 複數的共軛值

$$Z = a + ib$$

$$\bar{Z} = a - ib$$

$\bar{Z}$ 是 $Z$ 的共軛值

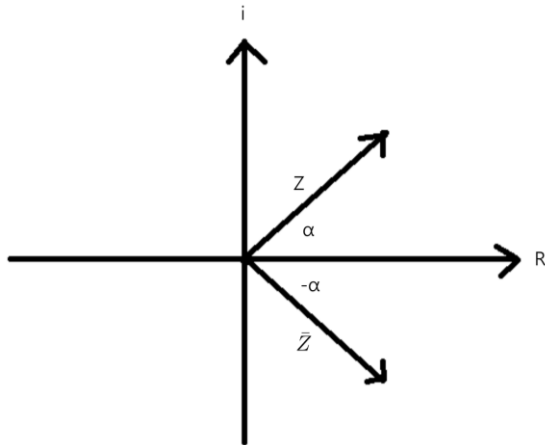
我們可以看 $Z$ 和 $\bar{Z}$ 間的角度

$$\frac{Z}{\bar{Z}} = \frac{a + ib}{a - ib} = \frac{(a + ib)(a + ib)}{(a - ib)(a + ib)} = \frac{a^2 - b^2 + 2abi}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{2ab}{a^2 + b^2}i$$

$Z$ 的角度是 $\tan^{-1} \frac{b}{a} = \alpha$ ， $\bar{Z}$ 的角度 $\tan^{-1} \frac{-b}{a} = -\alpha$

$$\frac{Z}{\bar{Z}} \text{ 的角度是 } \tan^{-1} \frac{\frac{2ab}{a^2+b^2}}{\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}} = \tan^{-1} \frac{2ab}{a^2-b^2} = \tan^{-1} \frac{\frac{2b}{a}}{1-\frac{b^2}{a^2}} = \tan^{-1} \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan^{-1}(\tan 2\alpha) = 2\alpha$$

因此，我們知道 $Z$ 和 $\bar{Z}$ 之間的夾角是 $2\alpha$ ，如下圖所示



共軛是一個重要的觀念，各位同學在大學裡常常會用到的，在前面，我們已討論過一元二次方程式會有複數的根，各位不妨再複習一下，就會發現這些根都是共軛的，因為如果方程式是  $ax^2 + bx + c = 0$ ，

$$\text{則 } x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$x_1$  和  $x_2$  是共軛的

因此，假設我們已知一個一元二次方程式有一個複數的根，則這個方程式一定有一個共軛的根。

(14) 已知某一元二次方程式有一個根是  $(1 + i)$ ，求此方程式

此方程式是  $(x - (1 + i))(x - (1 - i)) = x^2 - (1 + i + 1 - i)x + (1 + i)(1 - i)$

$$= x^2 - 2x + (1 - i^2) = x^2 - 2x + 2$$

我們可以用公式來求這個方程式的根：

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

可以看出這個方程式是對的

(15) 已知某方程式的一個根是  $1 + 2i$ ，求此方程式

$$\begin{aligned}\text{此方程式是}(x - (1 + 2i))(x - (1 - 2i)) &= x^2 - (1 + 2i + 1 - 2i)x + (1 + 2i)(1 - 2i) \\ &= x^2 - 2x + (1 - 4i^2) = x^2 - 2x + 5\end{aligned}$$

用公式可以求得此方程式的解：

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

可以看出此方程式是正確的