

(43)排列-1(相異，全選，直線)

排列的問題有好幾種，我們先談完全相異物件的排列，假設我們有 n 個完全不同的物件，我們要將他們排成一列，一共有多少種排列的方法。

1. $n = 2$

我們將這幾種事物命名為 1 和 2，我們有以下兩種排列方式：

1, 2

2, 1

所以當 $n=2$ 時，共有兩種排列方法。

2. $n = 3$

我們將這幾種物件命名為 1 和 2 跟 3，我們有以下幾種排列方式：

1, 2, 3

1, 3, 2

2, 1, 3

2, 3, 1

3, 1, 2

3, 2, 1

所以當 $n = 3$ ，一種共有六種排列方法

如果我們有 n 個不同的物件，我們要將他們全部取出，排列方法的個數可以用以下的推理求得：

1. 對於排列的第一位，一共有 n 種選擇。
2. 對於排列的第二位，只能從 $(n - 1)$ 個物件中選擇，因此有 $(n - 1)$ 個選擇。
3. 對於排列的第三位，一共有 $(n - 2)$ 個選擇。
4. 對於排列的第 r 位，一共有 $(n - (r - 1))$ 個選擇。
5. 對於排列的第 n 位，有 $(n - (n - 1)) = 1$ 個選擇。

所以假設我們有 n 個不同的物件，將他們全部排列成一列，一共有 $n \times (n - 1) \times (n - 2) \dots \times 2 \times 1$ 個排列方法。

我們將 $n \times (n - 1) \times (n - 2) \dots \times 2 \times 1$ 稱為 N 階乘，也用以下的記號表示 $n \times (n - 1) \times (n - 2) \dots \times 2 \times 1 = n!$

結論： n 個不同物件的排列方法有 $n!$ 種。

3. $n = 4$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

4. $n = 6$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

5. $n = 10$

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800$$

6. 假設我們有 5 個英文字母 $ABCDE$ ，一共有多少種排列方法？

答案 $5! = 120$

7. 假設有 3 個數字 1, 2, 3 排列時 2 一定要在最前面，共有幾種排列法？

答案；因為第一個數字必須是 2 剩下的只有 1 和 3 作排列，1 和 3 的排列方法只有 $2! = 2$ 因此答案是 2

以下是這兩種排列的方法

2, 1, 3

2, 3, 1

請注意原來 3 個數字的排列有 $3! = 6$ 種而在這只有兩種

這種問題不限於第一個位置，如果我們要求第一個位置依定要放某物件，排列方的都是 $(n - 1)!$

(8) 假設我們有要排列的三個數字 1, 2, 3，3 不能出現在第一個位置共有幾種排列方法

答案；假設沒有這種規定，共有 $3! = 6$ 種排列方法，如果 3 一定要出現在一個位置，共有 $2! = 2$ 種排列方法，所以規定 3 不能出現在第一個位置的排列方法有 $3! - 2! = 4$ 種排列方法

以下是這四種排列

123

132

213

132

以上例子可以給我們一個定律

假設有 n 個相異物件，其中某一個必須出現在某一指定位置的排列方法共有 $(n-1)!$ 種

假設有 n 個相異物件，其中某一個不能出現在某一指定位置的排列方法共有 $n! - (n-1)! = (n-1)(n-1)!$ 種

我們可以想 $(n-1)(n-1)!$ 的意義。

假設某一位置不能有某一物件，取出這一位置的物件，剩下 $(n-1)$ 種物件，這 $(n-1)$ 物件有 $(n-1)!$ 種排列，置入那位置的物件有 $(n-1)$ 種，所以共有 $(n-1) \times (n-1)!$ 排列方法。

(9)假設1, 2, 3中3一定要出現在第2個位置排列是

132

231

共有 $(3-1)! = 2! = 2$ 種排列。

假設3不能出現在第2位置，排列方法如下

213

312

123

321

共有 $3! - 2! = 4$ 種排列方法。

也可以用 $(3-1)(3-1)! = 2 \times 2! = 4$ 來計算。

因為3不能出現在第2位置，我們仍有2個數字要在1和3的位置要排列，共有 $2! = 2$ 種排列方法，3不能出現在第2位置，我們有兩種選擇，故共有 $2 \times (2!)$ 種排列

(10) 假設有數字 1, 2, 3，1 和 2 必須相連共有幾種排列方法？

答案 我們可以將(1,2)看成一個物件，如此我們共有(1,2) 和 3，也就是說，我們只有 2 個物件，2 個物件的排列種數是 $2!=2$ ，但 1 和 2 也有 $2!$ 種排列，故共有 $2 \times (2!) = 2 \times 2 = 4$ 種排列。

以下是他們的排列

123

213

312

321

(11) 承上題，假設我們規定 1 和 2 不能相連共有幾種排列

答案 $3 \times 2 \times 1 - (2 \times 1)(2 \times 1) = 2$

它們的排列如下

132

231

我們可以得到以下的定律。

假設有 n 個相異的物件，其中 r 個物件必須互相連接排列的法有 $(n - r + 1)!r!$

假設有 n 個相異的物件，其中 r 個物件不可互相連接排列的法有 $n! - (n - r + 1)!r!$

(12) 假設有 $n = 7$ 、 $r = 3$ ，其中 r 個物件必須互相連接排列的法有 $(7 - 3 + 1)!3! = 5!3! = 720$ 種。

如果此三個物件，其中 r 個物件不可互相連接排列的法有 $7! - 5!3! = 4320$ 種。

(13) 假設有 4 個數字 1234，1 和 2 必須相連，3 和 4 必須相連共有多少排列

答案 我們可以將 1, 2 看成一個物件，3, 4 看成一個物件，那兩個物件共有 $2! = 2$ 種排列方法，但每物件又有 $2!$ 種排列方法，故共有 $2 \times 2! \times 2! = 8$ 種排列

這八種排列如下

1234

1243

2134

2143

3412

3421

4321

4312

(14)有一位業務員要訪問 5 個城市 1, 2, 3, 4, 5，他的訪問可以是 31254，也可以是 21345，請問他共有幾種訪問方法？

答案 5!