(42)數學歸納法

我們常常要證明一個數學公式的成立，如果用數學歸納法，做法如下:

第一步:證明此公式在 n 為起始值成立。

第二步:證明如果此公式在 n=m 時可以成立，則可導出此公式在 n=m+1 時可以成立。

以下是一些例子:

(1) $a_i = 1$
$a_{i+1} = 2a_i + 1$
$a_n = 2^n - 1$，$(n \geq 1)$

用數學歸納法:

第一步：檢查此式的第一項，式子是否成立

此式第一項是當$n = 1$
左式 $= a_1 = 1$，右式 $= 2^1 - 1 = 1$
左式 $=$ 右式 $= 1$
$\therefore a_n = 2^n - 1$ 在 $n = 1$ 時成立

第二步　假設此式在$\boldsymbol{n = m}$時，式子仍成立

假設$a_n = 2^n - 1$ 在$n = m$時成立　，$a_m = 2^m - 1$成立，(其中m是自然數)

第三步：驗證此式在$\boldsymbol{n = m + 1}$時，式子依然成立

$a_{m+1} = 2a_m + 1$
$\quad = 2(2^m - 1) + 1 = 2^{m+1} - 2 + 1 = 2^{m+1} - 1$
$\therefore\ a_n = 2^n - 1$ 在$n = m + 1$ 也成立

第四步：說明根據數學歸納法，此式永遠成立

故根據數學歸納法，$a_n = 2^n - 1$ 此式恆成立

(2) $S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$，$(n \geq 1)$

這個公式可以用等差級數來證明，現在我們用數學歸納法

第一步：檢查此式的第一項，式子是否成立

此式第一項是當$n = 1$

$$S_1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$$

$\therefore\ S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$，在 $n = 1$ 時成立

第二步：假設此式在$\boldsymbol{n = m}$時，式子仍成立

假設$S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$，在$n = m$時成立，$S_m = \dfrac{m(m+1)}{2}$，(其中m是自然數)

第三步：驗證此式在$\boldsymbol{n = m + 1}$時，式子依然成立

$$\begin{aligned} S_{m+1} = S_m + (m+1) &= \frac{m(m+1)}{2} + \frac{2(m+1)}{2} = \frac{(m+1)(m+2)}{2} \\ &= \frac{(m+1)[(m+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

$\therefore\ S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$，在$n = m + 1$ 也成立

第四步：說明根據數學歸納法，此式永遠成立

故根據數學歸納法，$S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$恆成立

(3) $1+h+h^2+\cdots+h^n=\frac{1-h^{n+1}}{1-h}$，$(n\geq 1)$

這個公式在前面討論等比級數時證明過，現在我們用數學歸納法

第一步：檢查此式的第一項，式子是否成立

此式第一項是當$n=1$

左式 $=1+h$

$$右式=\frac{1-h^{1+1}}{1-h}=\frac{1-h^2}{1-h}=\frac{(1+h)(1-h)}{1-h}=1+h=左式$$

$\therefore\ 1+h+h^2+\cdots+h^n=\frac{1-h^{n+1}}{1-h}$，在$n=1$ 時成立

第二步：假設此式在$\boldsymbol{n=m}$時，式子仍成立

假設 $1+h+h^2+\cdots+h^n=\frac{1-h^{n+1}}{1-h}$，在$n=m$時成立，也就是$1+h+h^2+\cdots+h^m=\frac{1-h^{m+1}}{1-h}$，(其中$m$是自然數)

第三步：驗證此式在$\boldsymbol{n=m+1}$時，式子依然成立

$1+h+h^2+\cdots+h^m+h^{m+1}=\frac{1-h^{m+1}}{1-h}+h^{m+1}$

$$=\frac{1-h^{m+1}}{1-h}+\frac{(1-h)h^{m+1}}{1-h}=\frac{1-h^{m+1}+h^{m+1}-h^{m+2}}{1-h}=\frac{1-h^{m+2}}{1-h}$$

$\therefore\ 1+h+h^2+\cdots+h^n=\frac{1-h^{n+1}}{1-h}$，在$n=m+1$ 也成立

第四步：說明根據數學歸納法，此式永遠成立

故根據數學歸納法，$1+h+h^2+\cdots+h^n=\frac{1-h^{n+1}}{1-h}$恆成立

(4) $1+5+9+\cdots+(4n-3)=n(2n-1)$ ，$(n\geq 1)$

第一步：檢查此式的第一項，式子是否成立

此式第一項是當$n=1$

左式 $=1$

右式 $=1(2\times 1-1)=1$

$\therefore$ $1+5+9+\cdots+(4n-3)=n(2n-1)$，在$n=1$ 時成立

第二步：假設此式在$\boldsymbol{n=m}$時，式子仍成立

假設 $1+5+9+\cdots+(4n-3)=n(2n-1)$，在$n=m$時成立，也就是$1+5+9+\cdots+(4m-3)=m(2m-1)$，(其中$m$是自然數)

第三步：驗證此式在$\boldsymbol{n=m+1}$時，式子依然成立

$1+5+9+\cdots+[4(m+1)-3]$
$=1+5+9+\cdots+(4n-3)+[4(m+1)-3]$
$=m(2m-1)+(4m+1)=2m^2+3m+1=(m+1)(2m+1)$
$=(m+1)[2(m+1)-1]$

$\therefore$ $1+5+9+\cdots+(4n-3)=n(2n-1)$，在$n=m+1$ 也成立

第四步：說明根據數學歸納法，此式永遠成立

故根據數學歸納法，$1+5+9+\cdots+(4n-3)=n(2n-1)$恆成立

(5) 費波那契數列(Fibonacci)

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_i = F_{i-2} + F_{i-1} \end{cases}$$

$F_2 = F_0 + F_1 = 0 + 1 = 1$
$F_3 = F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2$
$F_4 = F_2 + F_3 = 1 + 2 = 3$
$F_5 = F_3 + F_4 = 2 + 3 = 5$
$\vdots$
公式是$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$，$(n \geq 2)$

第一步：檢查此式的第一項，式子是否成立

此式第一項是當$n = 2$
左式 $= 0 + 1 + 1 = 2$
右式 $= \mathrm{F}_4 - 1 = 3 - 1 = 2$

$\therefore\ F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$，在$n = 2$ 時成立

第二步：假設此式在$\boldsymbol{n = m}$時，式子仍成立

假設$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$，在$n = m$時成立，也就是$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_m = F_{m+2} - 1$，(其中$m$是自然數)

第三步：驗證此式在$\boldsymbol{n = m + 1}$時，式子依然成立

$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_{m+1}$
$= F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_m + F_{m+1}$
$= F_{m+2} - 1 + F_{m+1} = F_{m+2} + F_{m+1} - 1 = F_{m+3} - 1$
$= F_{(m+2)+1} - 1$

$\therefore\ F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$，在$n = m + 1$ 也成立

第四步：說明根據數學歸納法，此式永遠成立

故根據數學歸納法，$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$恆成立

(6) $\sum_{h=1}^{n}(-1)^{h}h^{2}=(-1)^{n}\times\frac{n(n+1)}{2}$，$(n\geq 1)$

我們先看這個公式

n=5

左式 $=\sum_{h=1}^{5}(-1)^{h}h^{2}$

$=(-1)^{1}\times 1^{2}+(-1)^{2}\times 2^{2}+(-1)^{3}\times 3^{2}+(-1)^{4}\times 4^{2}+(-1)^{5}\times 5^{2}$

$=-1+4-9+16-25$

$=-15$

右式 $=(-1)^{5}\times\dfrac{5\times(5+1)}{2}=-15$

第一步：檢查此式的第一項，式子是否成立

此式第一項是當$n=1$

左式 $=(-1)^{1}\times 1^{2}=-1$

右式 $=(-1)^{1}\times\dfrac{1\times(1+1)}{2}=-1$

$\therefore\ \sum_{h=1}^{n}(-1)^{h}h^{2}=(-1)^{n}\times\frac{n(n+1)}{2}$，在$n=1$ 時成立

第二步：假設此式在$\boldsymbol{n=m}$時，式子仍成立

假設$\sum_{h=1}^{n}(-1)^{h}h^{2}=(-1)^{n}\times\frac{n(n+1)}{2}$，在$n=m$時成立，也就是

$\sum_{h=1}^{m}(-1)^{h}h^{2}=(-1)^{m}\times\frac{m(m+1)}{2}$，(其中$m$是自然數)

第三步：驗證此式在$\boldsymbol{n=m+1}$時，式子依然成立

$\sum_{h=1}^{m+1}(-1)^{h}h^{2}$

$=(-1)^{1}\times 1^{2}+(-1)^{2}\times 2^{2}+\cdots+(-1)^{m}\times m^{2}+(-1)^{m+1}\times(m+1)^{2}$

$=(-1)^{m}\times\frac{m(m+1)}{2}+(-1)^{m+1}\times(m+1)^{2}$

$=(-1)^{m}\times\frac{m(m+1)}{2}+(-1)^{m}\times(-1)\times(m+1)^{2}$

$=(-1)^{m}\times[\frac{m(m+1)}{2}+(-1)\times(m+1)^{2}]$

$$= (-1)^m \times \left[\frac{-m^2-3m-2}{2}\right] = (-1)^m \times \left[(-1) \times \frac{(m+1)(m+2)}{2}\right]$$

$$= (-1)^{m+1} \times \frac{(m+1)[(m+1)+1]}{2}$$

$\therefore\ \sum_{h=1}^{n}(-1)^h h^2 = (-1)^n \times \frac{n(n+1)}{2}$，在$n = m + 1$ 也成立

第四步：說明根據數學歸納法，此式永遠成立

故根據數學歸納法，$\sum_{h=1}^{n}(-1)^h h^2 = (-1)^n \times \frac{n(n+1)}{2}$恆成立

(7) $1 \times 4 + 2 \times 7 + 3 \times 10 + \cdots + n(3n+1) = n(n+1)^2$，$n \geq 1$

此式第一項是當$n = 1$
左式 $= 1 \times 4 = 4$
右式 $= 1(1+1)^2 = 4$

∴　此式在$n = 1$ 時成立

假設此式在$n = m$時成立，也就是$1 \times 4 + 2 \times 7 + 3 \times 10 + \cdots + \mathrm{m}(3\mathrm{m} + 1) = \mathrm{m}(m+1)^2$，(其中$m$是自然數)

則$n = m + 1$ 時
$1 \times 4 + 2 \times 7 + 3 \times 10 + \cdots + (m+1)[(3m+1)+1]$
$= 1 \times 4 + 2 \times 7 + 3 \times 10 + \cdots + m(3m+1) + (m+1)[3(m+1)+1]$
$= \mathrm{m}(m+1)^2 + (m+1)[3(m+1)+1]$
$= (m+1)[\mathrm{m}(m+1) + 3(m+1) + 1]$
$= (m+1)[m^2 + 4m + 4]$
$= (m+1)(m+2)^2$

∴ 此式在$n = m + 1$ 也成立
故根據數學歸納法，此式恆成立

(8) $\sum_{h=1}^{n} h^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，$n \geq 1$

此式第一項是當$n = 1$
左式 $= 1^2 = 1$
右式 $= \dfrac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} = 1$

∴　此式在$n = 1$ 時成立

假設此式在$n = m$時成立，也就是$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$，(其中$m$是自然數)

則$n = m + 1$ 時
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (m+1)^2$
$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + m^2 + (m+1)^2$
$= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2$

$= \frac{(m+1)}{6}[m(2m+1) + 6(m+1)]$

$= \frac{(m+1)}{6}(2m^2 + 7m + 6) = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$

$= \frac{(m+1)[(m+1)+1][2(m+1)+1]}{6}$

∴ 此式在$n = m + 1$ 也成立
故根據數學歸納法，此式恆成立

(9) $\sum_{h=1}^{n} h^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$，$n \geq 1$

此式第一項是當$n = 1$
左式 $= 1^3 = 1$
右式 $= [\frac{1(1+1)}{2}]^2 = 1$

∴　此式在$n = 1$ 時成立

假設此式在$n = m$時成立，也就是$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + m^3 = [\frac{m(m+1)}{2}]^2$，(其中$m$是自然數)

則$n = m + 1$ 時
$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (m+1)^3$
$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + m^3 + (m+1)^3$
$= [\frac{m(m+1)}{2}]^2 + (m+1)^3$
$= \frac{(m+1)^2}{4}[m^2 + 4(m+1)]$
$= \frac{(m+1)^2}{4}(m^2 + 4m + 4) = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$
$= \{\frac{(m+1)[(m+1)+1]}{2}\}^2$

∴ 此式在$n = m + 1$ 也成立
故根據數學歸納法，此式恆成立

(10) $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{2n}{n+1}$，$n \geq 1$

此式第一項是當$n=1$

左式 $=\frac{1}{1}=1$

右式 $=\frac{2\times 1}{1+1}=1$

∴　此式在$n=1$ 時成立

假設此式在$n=m$時成立，也就是$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+m}=\frac{2m}{m+1}$ ，(其中m是自然數)

則$n=m+1$ 時

$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+(m+1)}$

$=\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+m}+\frac{1}{1+2+\cdots+(m+1)}$

$=\frac{2m}{m+1}+\frac{1}{1+2+\cdots+(m+1)}$

$=\frac{2m}{m+1}+\frac{1}{\frac{[1+(m+1)](m+1)}{2}}$

$=\frac{2m}{m+1}+\frac{2}{[1+(m+1)](m+1]}$

$=\frac{2m(m+2)+2}{(m+1)(m+2)}=\frac{2m^2+4m+2}{(m+1)(m+2)}=\frac{2(m+1)^2}{(m+1)(m+2)}=\frac{2(m+1)}{m+2}$

$=\frac{2(m+1)}{(m+1)+1}$

∴ 此式在$n=m+1$ 也成立
故根據數學歸納法，此式恆成立

(11) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}$，$n\geq 2$

此式第一項是當$n=1$

左式 $=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

右式 $=\frac{2\times 2}{2+1}=\frac{4}{3}$

$\therefore\ \frac{3}{2}>\frac{4}{3}$，此式在$n=2$ 時成立

假設此式在$n=m$時成立，也就是$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}>\frac{2m}{m+1}$，(其中$m$是自然數)

則$n=m+1$ 時

左式$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m+1}$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}$

$>\frac{2m}{m+1}+\frac{1}{m+1}=\frac{2m+1}{m+1}=\frac{(2m+1)(m+2)}{(m+1)(m+2)}=\frac{2m^2+5m+2}{(m+1)(m+2)}$

右式$=\frac{2(m+1)}{(m+1)+1}=\frac{(2m+2)(m+1)}{(m+2)(m+1)}=\frac{2m^2+4m+2}{(m+1)(m+2)}$

因為左式$>\frac{2m^2+5m+2}{(m+1)(m+2)}>\frac{2m^2+4m+2}{(m+1)(m+2)}$，所以左式>右式

$\therefore$ 此式在$n=m+1$ 也成立
故根據數學歸納法，此式恆成立

(12) $1\times 3+2\times 4+3\times 5+\cdots+n(n+2)=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$，$n\geq 1$

此式第一項是當$n=1$

左式$=1\times 3=3$

右式$=\dfrac{1(1+1)(2\times 1+7)}{6}=3$

$\therefore$ 此式在$n=1$時成立

假設此式在$n=m$時成立，也就是$1\times 3+2\times 4+3\times 5+\cdots+m(m+2)=\frac{m(m+1)(2m+7)}{6}$，(其中$m$是自然數)

則$n=m+1$時

$1\times 3+2\times 4+3\times 5+\cdots+(m+1)(m+3)$

$=1\times 3+2\times 4+3\times 5+\cdots+m(m+2)+(m+1)(m+3)$

$=\frac{m(m+1)(2m+7)}{6}+(m+1)(m+3)$

$=\frac{(m+1)}{6}[m(2m+7)+6(m+3)]$

$=\frac{(m+1)}{6}(2m^2+13m+18)=\frac{(m+1)(m+2)(2m+9)}{6}$

$=\frac{(m+1)[(m+1)+1][2(m+1)+7]}{6}$

$\therefore$ 此式在$n=m+1$也成立

故根據數學歸納法，此式恆成立

(13) $\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{2(n+2)}$，$n\geq1$

此式第一項是當$n=1$

左式 $=\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{6}$

右式 $=\frac{1}{2(1+2)}=\frac{1}{6}$

∴ 此式在$n=1$ 時成立

假設此式在$n=m$時成立，也就是$\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{(m+1)(m+2)}=\frac{m}{2(m+2)}$ ，(其中m是自然數)

則$n=m+1$ 時

$\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{[(m+1)+1][(m+1)+2]}$

$=\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\frac{1}{[(m+1)+1][(m+1)+2]}$

$=\frac{m}{2(m+2)}+\frac{1}{(m+2)(m+3)}$

$=\frac{m(m+3)+2}{2(m+2)(m+3)}$

$=\frac{m^2+3m+2}{2(m+2)(m+3)}=\frac{(m+1)(m+2)}{2(m+2)(m+3)}=\frac{m+1}{2(m+3)}$

$=\frac{m+1}{2[(m+1)]+2}$

∴ 此式在$n=m+1$ 也成立

故根據數學歸納法，此式恆成立

(14) 求證5^n+3是 4 的倍數，$n\geq 1$

此式第一項是當$n=1$
$5^1+3=8=4\times 2$

$\therefore$ 此式在$n=1$時成立

假設此式在$n=m$時成立，也就是$5^m+3=4\times p$，(其中m、p是自然數)

整理此式得到$5^m=4p-3$

則$n=m+1$時
$5^{m+1}+3$
$=5\times 5^m+3$
$=5\times(4p-3)+3$
$=5\times 4p-15+3$
$=20p-12$
$=4\times(5p-3)$

$\therefore$ 此式在$n=m+1$也成立
故根據數學歸納法，此式恆成立

(15) 試證$3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}$是 17 的倍數，$n\geq 1$

此式第一項是當$n=1$

$3\cdot 5^{2\times 1+1}+2^{3\times 1+1}=375+16=391=17\times 23$

∴ 此式在$n=1$ 時成立

假設此式在$n=m$時成立，也就是$3\cdot 5^{2m+1}+2^{3m+1}=17\times p$，(其中$m$、$p$是自然數)

則$n=m+1$ 時

$$
\begin{aligned}
&3\cdot 5^{2(m+1)+1}+2^{3(m+1)+1}\\
&=3\cdot 5^{2m+3}+2^{3m+4}\\
&=3\cdot 5^{2m+1}\cdot 5^2+2^{3m+1}\cdot 2^3\\
&=25\times 3\cdot 5^{2m+1}+8\times 2^{3m+1}\\
&=(17+8)\times 3\cdot 5^{2m+1}+8\times 2^{3m+1}\\
&=17\times 3\cdot 5^{2m+1}+8\times 3\cdot 5^{2m+1}+8\times 2^{3m+1}\\
&=17\times 3\cdot 5^{2m+1}+8\times(3\cdot 5^{2m+1}+2^{3m+1})\\
&=17\times 3\cdot 5^{2m+1}+8\times 17\times p\\
&=17\times[3\cdot 5^{2m+1}+8\times p]
\end{aligned}
$$

∴ 此式在$n=m+1$ 也成立

故根據數學歸納法，此式恆成立

(16) $3^{4n+2}+5^{2n+1}$是 14 的倍數，$n\geq 1$

此式第一項是當$n=1$
$3^{4\times 1+2}+5^{2\times 1+1}=729+125=854=14\times 61$

$\therefore$　此式在$n=1$ 時成立

假設此式在$n=m$時成立，也就是$3^{4m+2}+5^{2m+1}=14\times p$，(其中$m$、$p$是自然數)

則$n=m+1$ 時
$3^{4(m+1)+2}+5^{2(m+1)+1}$
$=3^{4m+6}+5^{2m+3}$
$=3^{4m+2}\cdot 3^4+5^{2m+1}\cdot 5^2$
$=81\times 3^{4m+2}+25\times 5^{2m+1}$
$=(56+25)\times 3^{4m+2}+25\times 5^{2m+1}$
$=56\times 3^{4m+2}+25\times 3^{4m+2}+25\times 5^{2m+1}$
$=56\times 3^{4m+2}+25\times (3^{4m+2}+5^{2m+1})$
$=14\times 4\times 3^{4m+2}+25\times 14\times p$
$=14\times [4\times 3^{4m+2}+25\times p]$

$\therefore$ 此式在$n=m+1$ 也成立
故根據數學歸納法，此式恆成立

(17) $9^{n+1}-8n-9$ 為 4 的倍數，$n \geq 1$

此式第一項是當$n=1$
$9^{1+1}-8\times 1-9=81-8-9=64=4\times 16$

∴　此式在$n=1$ 時成立

假設此式在$n=m$時成立，也就是$9^{m+1}-8m-9=4\times p$，(其中m、p是自然數)

整理此式得到$9^{m+1}=4p+8m+9$

則$n=m+1$ 時
$9^{(m+1)+1}-8(m+1)-9$
$=9^{m+2}-8m-8-9$
$=9\times 9^{m+1}-8m-17$
$=9\times(4p+8m+9)-8m-17$
$=9\times 4p+64m+64$
$=4\times(9p+16m+16)$

∴ 此式在$n=m+1$ 也成立
故根據數學歸納法，此式恆成立

(18) 試證$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$是 9 的倍數，$n \geq 1$

此式第一項是當$n=1$
$1^3+(1+1)^3+(1+2)^3=1+8+27=36=9\times 4$

∴　此式在$n=1$ 時成立

假設此式在$n=m$時成立，也就是$m^3+(m+1)^3+(m+2)^3=9\times p$，(其中$m$、$p$是自然數)

則$n=m+1$ 時
$(m+1)^3+[(m+1)+1]^3+[(m+1)+2]^3$
$=(m+1)^3+(m+2)^3+(m+3)^3$
$=(m+1)^3+(m+2)^3+m^3+9m^2+27m+27$
$=9\times p+9m^2+27m+27$
$=9\times(p+m^2+3m+3)$

∴ 此式在$n=m+1$ 也成立
故根據數學歸納法，此式恆成立

(19) 試證$n > 2$，$5^n > 3^n + 4^n$

此式第一項是當$n = 3$
左式 $= 5^3 = 125$
右式 $= 3^3 + 4^3 = 27 + 64 = 91$
$125 > 91$

∴　此式在$n = 3$ 時成立

假設此式在$n = m$時成立，也就是$5^m > 3^m + 4^m$，(其中m是自然數)

則$n = m + 1$ 時
左式$= 5^{m+1}$
$= 5 \times 5^m$
$> 5 \times (3^m + 4^m) = 5 \times 3^m + 5 \times 4^m$
右式$= 3^{m+1} + 4^{m+1} = 3 \times 3^m + 4 \times 4^m$
因為$5 \times 3^m + 5 \times 4^m > 3 \times 3^m + 4 \times 4^m$，所以左式>右式

∴ 此式在$n = m + 1$ 也成立
故根據數學歸納法，此式恆成立