(28)平方根

如果$a^2 = x$ 那$\sqrt[2]{x} = a$ 通常我們也至少將$\sqrt[2]{x}$變成$\sqrt{x}$ 對於很多學生來說至少應該就得

$\sqrt{1} = 1$
$\sqrt{4} = 2$
$\sqrt{9} = 3$
$\sqrt{16} = 4$
$\sqrt{25} = 5$
$\sqrt{256} = 16$
$\sqrt{289} = 17$
$\sqrt{324} = 18$
$\sqrt{361} = 19$

但是相對於大家想知道，如果計算 $\sqrt{2}\,\sqrt{3}\ \sqrt{4}\dots\dots\dots..$等，這些你可以利用計算機查出任何一個整數的平方根，我們在這裡告訴大家如何求出一個數的平方根，我們將用例子來說明

(1) $x = 6$
要求 $\sqrt{6}$ 我們先找一個最大的整數a，而$a^2 < 6$ 這個a 一定是 2，因為$2^2 = 4 < 6$，$3^2 = 9 > 6$

我們可以說 $\sqrt{6} = 2 + b$
$(2 + b)^2 = 4 + 4b + b^2$
為了簡化意見，我們暫時不考慮b^2因為$b < 1$ 所以b^2很小
$(2 + b)^2 = 4 + 4b < b$
$4b < 6 - 4 = 2$
$b < \dfrac{2}{4} = 0.5$
令$b = 0.43$
則$x = 2 + 0.43 = 2.43$
我們再看$(2.43)^2 = 5.9049$，5.9049 很靠近 6 了，所以我們可以說 $\sqrt{6} = 2.43$

(2) $x = 21$
我們先找最大的整數 a，而$a^2 < 21$，$a = 4$，因為$4^2 = 16 < 21$，$5^2 = 25 > 21$
令 $\sqrt{21} = 4 + b$
$(4 + b)^2 = 16 + 8b + b^2 = 21$

不考慮b^2 只考慮

$16+8b<21$

$8b<5$

$b<\frac{5}{8}=0.625$

假設我們令$b=0.57$

則$\sqrt{x}=4.57$

我們再看$(4.57)^2=20.88$，20.88 很靠近 21 了，所以我們可以說 $\sqrt{21}=4.58$

(3) $x=54$

令 $\sqrt{54}=7+b$ ，因為$7^2=49<54$，$8^2=64>54$

54=$(7+b)^2=49+14b+b^2$

$14b<54-49=5$

$14b<5$

$b<\frac{5}{14}=0.354$

假設我們令$b=0.34$

則$\sqrt{54}=7.34$

$(7.34)^2=53.87$

53.87 很靠近 54 了，所以我們可以說 $\sqrt{54}=7.34$

(4) $x=85$

令 $\sqrt{85}=9+b$

$(9+b)^2=81+18b+b^2=85$

$18b<85-81=4$

$b<\frac{4}{18}=0.22$

假設我們令$b=0.21$

則$\sqrt{85}=9.21$

$(9.21)^2=84.82$

84.82 很靠近 85 了，所以我們可以說 $\sqrt{85}=9.21$

在第一個例子中，我們說

$\sqrt{6}=2.43$

$(2.43)^2=5.9049$

假設我們要求更精確 可以令

$\sqrt{6}=2.43$+c

$(2.43+c)^2=b$

$5.9049 + 4.86c < 6$

$4.86C < 6 - 5.9049$

$4.86C < 0.0951$

$C < \frac{0.0951}{4.86} = 0.019$

令$C = 0.015$

$\sqrt{6} = 2.43 + 0.015 = 2.445$，$(2.445)^2 = 5.9278025$，5.9278025 比 0.59049 更靠近 6，所以$\sqrt{6} = 2.445$ 是一個更精確的答案。

在以上 我們討論了平方根，在下面我們討論如何求一個數的三次方

$2^3 = 8$ $\sqrt[2]{8} = 2$

$3^3 = 27$ $\sqrt[3]{27} = 3$

$4^3 = 64$ $\sqrt[3]{64} = 4$

$5^3 = 125$ $\sqrt[3]{125} = 5$

$6^3 = 216$ $\sqrt[3]{216} = 6$

$7^3 = 343$ $\sqrt[3]{343} = 7$

$8^3 = 512$ $\sqrt[3]{512} = 8$

$9^3 = 729$ $\sqrt[3]{729} = 9$

$10^3 = 1000$ $\sqrt[3]{1000} = 10$

但如何求其他三次方根的答案，我們可以利用下面的公式

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

比方說 $a = 2$、$b = 3$、 $a + b = 5$，$5^3 = 125$ 用以上的公式 $(2 + 3)^3 = 2^3 + 3 *$
$(2 + 3)^3 = 2^3 + 3 * 2^2 * 3 + 3 * 2 * 3^2 + 3^3 = 8 + 36 + 54 + 27 = 125$

(5) 求$\sqrt[3]{10}$

我們可以看出$\sqrt[3]{10} = 2 + b$ ，因為$2^3 = 8 < 10$ ，而$3^3 = 27 > 10$

$\sqrt[3]{10} = 2 + x$

$10 = (2 + b)^3 = 8 + 3(2^2)b + 3(2)b^2 + b^3 = 10$

$8 + 3(2^2)b < 10$

$8 + 12b < 10$

$12b < 10 - 8$

$12b < 2$

$b < \frac{2}{12} = \frac{1}{6} = 0.166$

假設我們嘗試令$b = 0.1$，則$2 + b = 2.1$，$(2.1)^3 = 9.261 > 9$

所以我們要將 b 降一點，假設我們令$b = 0.8$，則$2 + b = 2.08$，$(2.08)^3 = 8.998912$ 這很靠近 10 了，所以我們可以說$\sqrt[3]{10} = 2.08$

(6) 求$\sqrt[3]{30}$

令$\sqrt[3]{30} = 3 + b$，因為$3^3 = 27 < 30$，而$4^3 = 64 > 30$

$\sqrt[3]{30} = 3 + b$

$30 = (3 + b)^3$

$3^3 + 3(3^2)b < 30$

$27 + 27b < 30$

$27b < 30 - 27 = 3$

$b < \frac{30}{27} = 0.11$

假設我們令 b=0.09，3+b=3.09，$(3.09)^3 = 29.503629$，這很靠近 30 了，所以我們可以說$\sqrt[3]{30} = 3.09$

(7) 求$\sqrt[3]{100}$

令$\sqrt[3]{100} = 4 + b$，因為$4^3 = 64 < 100$，而$5^3 = 125 > 100$

$(4 + b)^3 = 4^3 + 3(4)^2 b < 100$

$64 + 48b < 100$

$48b < 100 - 64$

$b < \frac{3}{4} = 0.75$

假設我們令$b = 0.75$，$4 + b = 4.7$，$(4.7)^3 = 103.823 > 100$

假設我們令$b = 0.6$，$4 + b = 4.6$，$(4.6)^3 = 97.336 < 100$ 很靠近 100 了，所以我們可以說$\sqrt[3]{100} = 4.6$

(8) 求$\sqrt[3]{150}$

令$\sqrt[3]{150} = 5 + b$，因為$5^3 = 125 < 150$，而$6^3 = 216 > 150$

$150 = (5 + b)^3$

$5^3 + 3(5)^2 b < 150$

$125 + 75b < 150$

$75b < 150 - 125$

$75b < 25$

$b < \frac{25}{75} = \frac{1}{3} = 0.333$

假設我們選 b=0.3，5+b=5.3，$(5.3)^3 = 148.877$，很靠近 150 了，所以我們可以說$\sqrt[3]{150} = 5.3$