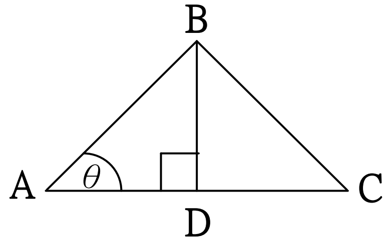
(24) 向量的應用

我們首先要討論向量的應用:求三角形的面積，請看下圖:



$\triangle ABC$ 的面積是$\frac{1}{2}\overline{BD}\times\overline{AC}$

假設我們已知$\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 以及$\angle BAC=\theta$

我們就可以求出$\overline{BD}$，因為

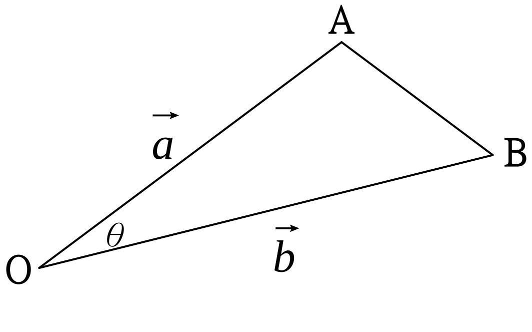
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\sin\theta$$

$$\therefore \overline{BD}=\overline{AB}\sin\theta$$

因此，$\triangle ABC$ 的面積是$\frac{1}{2}(\overline{AB}\times\overline{AC})\sin\theta$

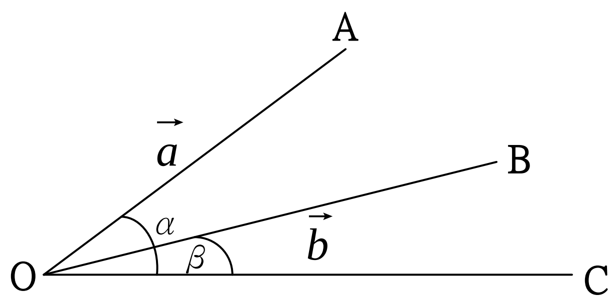
問題是$\sin\theta$如何可知道?

如果我們使用向量來表示三角形，三角形就會像下圖:



$\triangle OAB$ 的面積是$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

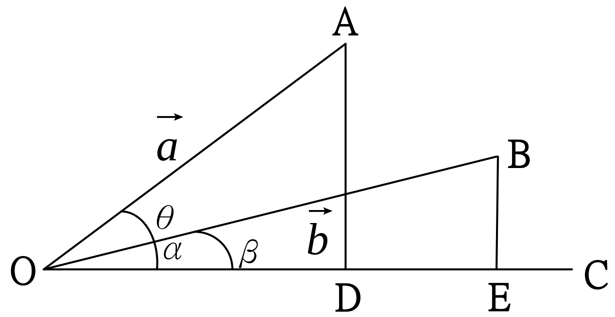
要求得$sin\,\theta$，可以用下圖:



在上圖，$\overline{OC}$是 x 軸，$\angle AOC = \alpha$，$\angle BOC = \beta$

$\therefore \angle AOB = \alpha - \beta = \theta$

我們再從 A 和 B 作垂直於$\overline{OC}$的垂直線，如下圖:



$\vec{a}=(a_1, a_2)$

$\vec{b}=(b_1, b_2)$

$$sin\,\alpha = \frac{\overline{AD}}{|\vec{a}|} = \frac{a_2}{|\vec{a}|}$$

$$cos\,\alpha = \frac{\overline{OD}}{|\vec{a}|} = \frac{a_1}{|\vec{a}|}$$

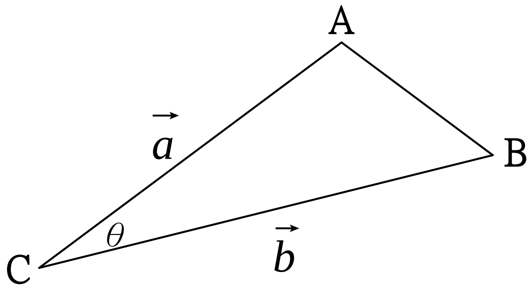
$$sin\,\beta = \frac{\overline{BE}}{|\vec{b}|} = \frac{b_2}{|\vec{b}|}$$

$$cos\,\beta = \frac{\overline{OE}}{|\vec{b}|} = \frac{b_1}{|\vec{b}|}$$

我們可以利用三角加減公式: $sin\,\theta = sin(\alpha-\beta) = sin\,\alpha\,cos\,\beta - cos\,\alpha\,sin\,\beta$

$$\therefore sin\,\theta = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

根據以上的公式，我們可以知道如果△ABC 如下圖:



則△ABC 的面積是

$$\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\,sin\,\theta = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1}{2}(a_2b_1 - a_1b_2)$$

(1)假設$A=(1,2)$，$B=(4,6)$，$C=(6,5)$

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (4-1, 6-2) = (3,4) = (\,a_1, a_2)$　$a_1 = 3$，$a_2 = 4$

$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (6-1, 5-2) = (5,3) = (\,b_1, b_2)$　$b_1 = 5$，$b_2 = 3$

$\therefore \triangle\,ABC$的面積 $= \frac{1}{2}(a_2b_1 - a_1b_2) = \frac{1}{2}(4\times5 - 3\times3) = \frac{1}{2}(20-9) = \frac{11}{2}$

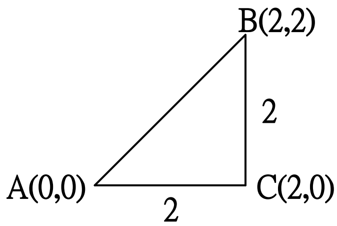
(2)假設$A=(0,0)$，$B=(2,2)$，$C=(2,0)$

$\vec{a}=(2-0,2-0)=(2,2)$ $a_1=2$，$a_2=2$

$\vec{b}=(2-0,0-0)=(2,0)$ $b_1=2$，$b_2=0$

$\therefore \triangle ABC$的面積$=\frac{1}{2}(a_2b_1-a_1b_2)=\frac{1}{2}(2\times 2-2\times 0)=\frac{1}{2}\times 4=2$

這個三角形如下圖:

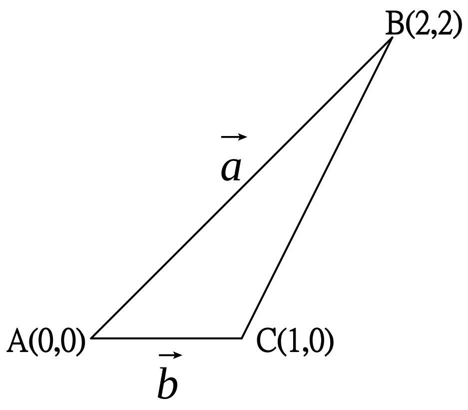


大家可以很容易地證明△ABC 的面積是

$\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$

所以我們用向量的算法是正確的

(3)請看下圖:



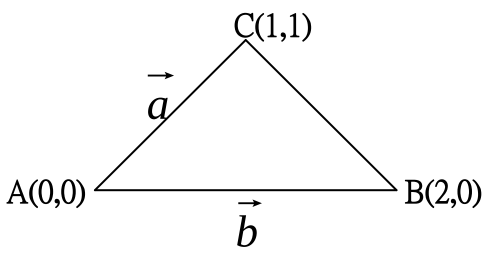
$\vec{a}=(2-0,\quad 2-0)=(2,2)$ $a_1=2$，$a_2=2$

$\vec{b}=(1-0,\quad 0-0)=(1,0)$ $b_1=1$，$b_2=0$

△ABC 的面積是

$$\frac{1}{2}(a_2b_1-a_1b_2)=\frac{1}{2}(2\times1-2\times0)=1$$

(4)請看下圖:



$\vec{a}=(1-0,\ 1-0)=(1,1)$ $a_1=1$，$a_2=1$

$\vec{b}=(2-0,\ 0-0)=(2,0)$ $b_1=2$，$b_2=0$

△ABC 的面積是 $\frac{1}{2}(a_2b_1-a_1b_2)=\frac{1}{2}(1\times2-1\times0)=1$