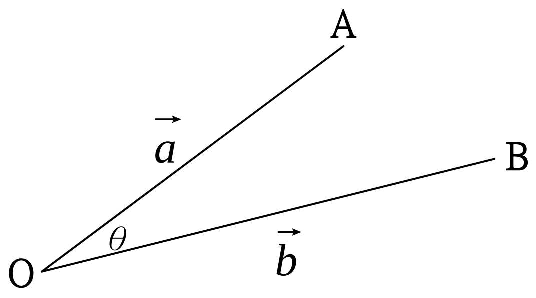
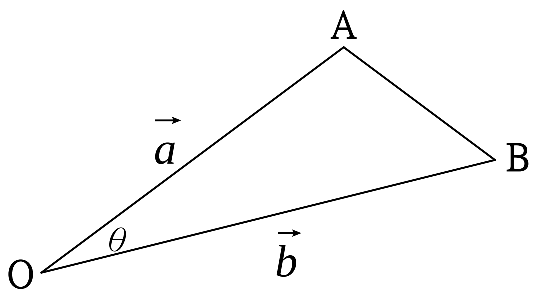
(23)　向量的內積

請看下圖:



圖中有有兩個向量:A 和 B，他們的起點在同一點，我們希望知道他們的夾角。要知道θ，我們可以連接 A 和 B，形成一個三角形如下圖：



根據三角函數的餘弦定律

$$\overline{AB}^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - \overline{AB}^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|} \text{--(1)}$$

$\vec{a} = (a_1, a_2)$
$\vec{b} = (b_1, b_2)$

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2} \text{--(2)}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2} \text{--(3)}$$

我們仍要知道$\overline{AB}^2$，須知我們並不知道 A 和 B 的座標，只知道$\vec{a} = (a_1, a_2)$ 以及$\vec{b} = (b_1, b_2)$

假設 OAB 的座標如下；

$O = (x_0, y_0)$
$A = (x_a, y_a)$
$B = (x_b, y_b)$

我們又知$a_1 = x_a - x_0, a_2 = y_a - y_0$, $b_1 = x_b - x_0, b_2 = y_b - y_0$

從上式可得

$(a_1 - b_1)^2 = (x_a - x_b)^2$
$(a_2 - b_2)^2 = (y_a - y_b)^2$
$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 = \overline{AB}^2$
$\overline{AB}^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$---(4)

在方程式(1)中有

$\overline{|a|}^2 + \overline{|b|}^2 - |\overline{AB}|^2$--(5)

將(2)和(3)代入(5)

$a_1{}^2 + a_2{}^2 + b_1{}^2 + b_2{}^2 - (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2 + b_1{}^2 + b_2{}^2 - \left(a_1{}^2 - 2a_1b_1 + b_1{}^2\right) - \left(a_2{}^2 - 2a_2b_2 + b_2{}^2\right) = 2(a_1b_1 + a_2b_2)$--------------(6)

將(6)代入(1)，可得$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}$--(7)

$a_1b_1 + a_2b_2$ 是$\vec{a}$和$\vec{b}$的內積，我們可以用$\vec{a} \cdot \vec{b}$來表示$\vec{a}$和$\vec{b}$的內積。所以向量的內積之定義如下:

假設有$\vec{a} = (a_1, a_2)$和$\vec{b} = (b_1, b_2)$，則$\vec{a}$和$\vec{b}$的內積是

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1b_1 + a_2b_2)$---(8)

將(8)代入(7)，可得

$cos\,\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$--(9)

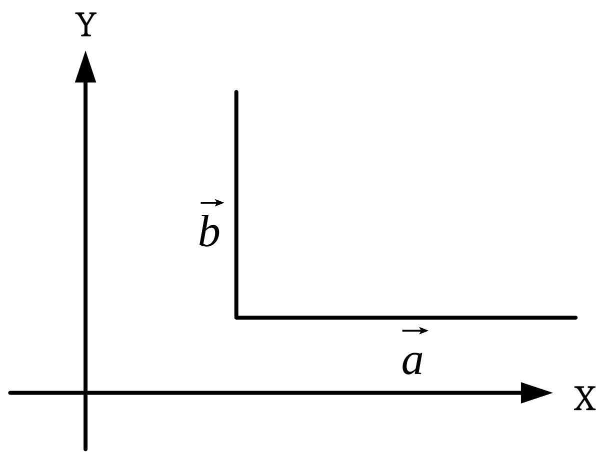
我們可以說兩個向量的內積和他們的夾角有關，內積有多種用途，我們的興趣其實只要知道這兩個向量是否互相垂直，如果互相垂直，則$cos\theta = 0$，也就是說，如果$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$，則$\vec{a}$和$\vec{b}$就是互相垂直的。

(1) $\overrightarrow{a} = (2,0)$ ，$\vec{b} = (0,1)$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (2\times 0 + 0\times 1) = (0\times 0) = 0$

$\vec{a}$和$\vec{b}$互相垂直

下圖可以顯示這兩個向量互相垂直

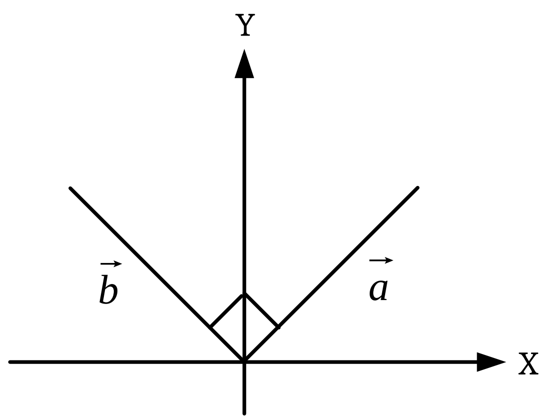


請注意，向量只要方向和長度，在平面上的座標是不重要的。

(2) $\vec{a} = (1,1)$，$\vec{b} = (-2,2)$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (1\times(-2) + 1\times(2)) = (-2+2) = 0$

$\vec{a}$和$\vec{b}$互相垂直，$\vec{a}$和$\vec{b}$的圖如下:



(3) $\vec{a} = (1,1)$ $\vec{b} = (0,1)$

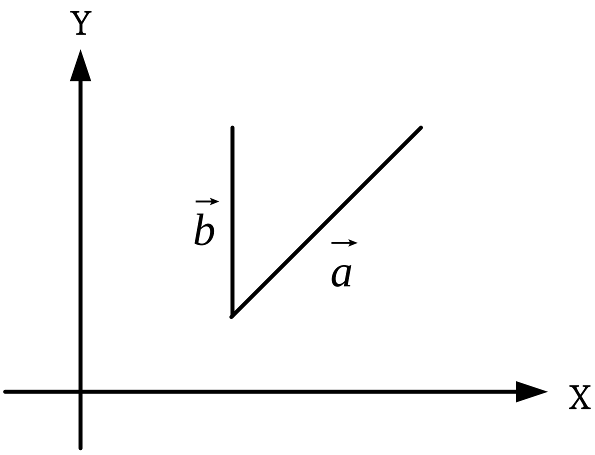
$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (1\times 0 + 1\times 1) = (0+1) = 1$
$|\vec{a}| = \sqrt{2}$ $|\vec{b}| = 1$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = 45^{\circ}$

各向量如下圖所示:



(4) $\vec{a} = (1,0)$ $\vec{b} = (2,0)$

$$cos\,\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (1\times 2 + 0\times 0) = 2$
$|\vec{a}| = 1$ $|\vec{b}| = 2$

$$cos\,\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{2}{1\times 2} = 1$$

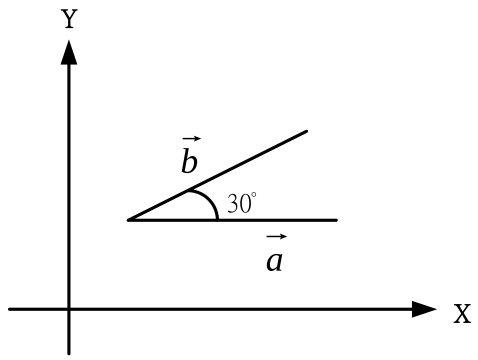
$\theta = 0^{\circ}$
可知兩向量互相平行

(5) $\vec{a} = (1,0)$ $\vec{b} = (\sqrt{3}, 1)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(1 \times \sqrt{3} + 0 \times 1\right) = \sqrt{3}$
$|\vec{a}| = 1$ $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{3+1}$=2

$\cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{\sqrt{3}}{1 \times 2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = 30^{\circ}$
各向量如下圖



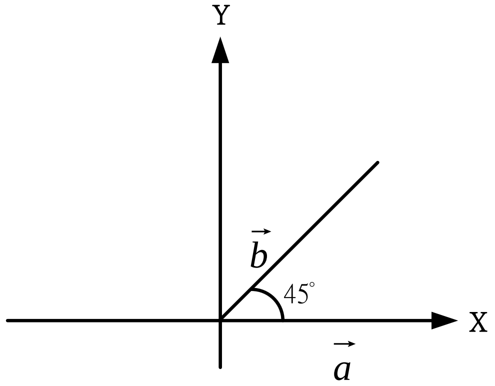
(6) $\vec{a} = (1,0)$ $\vec{b} = (1,1)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1 \times 1 + 0 \times 1) = 1$
$|\vec{a}| = \sqrt{1}$ $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{1}{1 \times \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

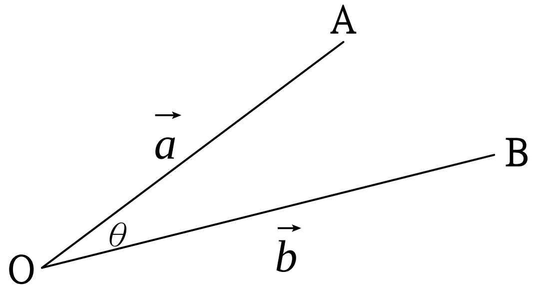
$\theta = \frac{\pi}{4}$

各向量如下圖



內積的另一解釋

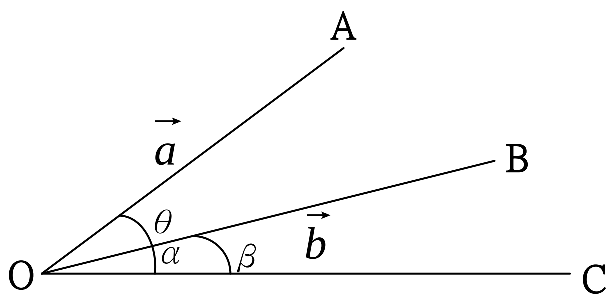
內積的推導與兩個向量的夾角有關，請看下圖



在過去，我們要想知道$cos\theta$的大小，是將 A 和 B 連接起來得到一個三角形 *OAB* 然後我們利用餘弦函數定理，而得到以下公式:

$$cos\,\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

我們從 *O* 點畫出一條與 *X* 軸平行的直線



假設$\angle AOC = \alpha$，$\angle BOC = \beta$，則$\alpha - \beta = \theta$

假設

$O = (x_0, y_0)$

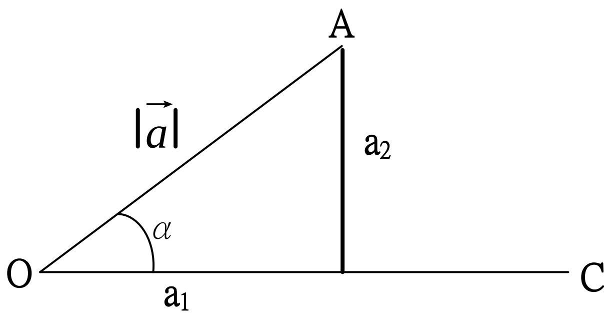
$A = (x_a, y_a)$

$B = (x_b, y_b)$

則 $\vec{a} = (a_1, a_2) = (x_a - x_0, y_a - y_0)$

$\vec{b} = (b_1, b_2) = (x_b - x_0, y_b - y_0)$

$\angle AOC=\alpha$，如下圖



$$cos\,\alpha=\frac{a_1}{|\vec{a}|}$$

$$sin\,\alpha=\frac{a_2}{|\vec{a}|}$$

同理所得

$$cos\,\beta=\frac{b_1}{|\vec{b}|}$$

$$sin\,\beta=\frac{b_2}{|\vec{b}|}$$

按照三角函數的和差公式

$$cos(\alpha-\beta)=cos\,\alpha\,cos\,\beta+sin\,\alpha\,sin\,\beta$$

$$\therefore\ cos(\alpha-\beta)=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{|\overrightarrow{a}|\,|\vec{b}|}$$

$$cos\,\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{|\overrightarrow{a}|\,|\vec{b}|}$$

故得

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_1b_1+a_2b_2)\text{及}\,cos\,\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

規格化的向量

向量可以有任意的長度，但有時我們需要一個長度為 1 的向量，方向仍需是原來的，我們用一個函數來解釋。

假設$\vec{a}=(3,4), |\vec{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

$$\overrightarrow{a'}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$$

我們可以看出$|\overrightarrow{a'}|=\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+(\frac{4}{5})^2}=\sqrt{\frac{9+16}{25}}=\sqrt{1}=1$

(7) $\vec{b}=(1,-3)$

$|\vec{b}|=\sqrt{1+(-3)^2}=\sqrt{10}$

$\overrightarrow{b'}=(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{-3}{\sqrt{10}})$

可以看出

$$|\vec{b}'|=\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{3}{10}}=\sqrt{\frac{10}{10}}=1$$

任意一個向量 A 都可以轉換成 A 的長度一定是 1，方向和 C 是一樣的，這種向量是規格化的向量。我們現在考慮另一個問題，假設我們只有一個向量$\vec{a}=(a_1,a_2)$，我們要有一個和$\vec{a}$垂直的向量$\vec{b}$，這種$\vec{b}$有兩個

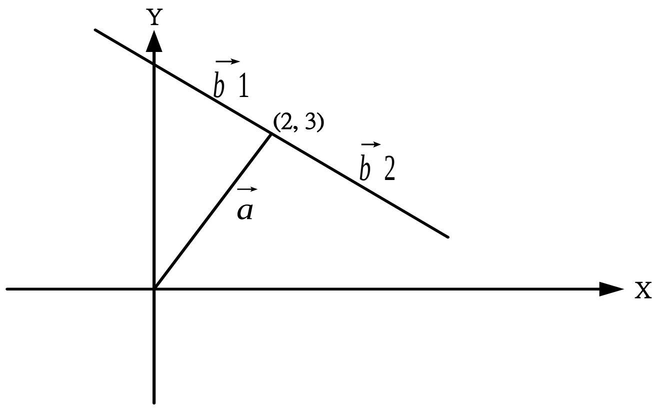
$\overrightarrow{b_1}=(-a_2,a_1)$
$\overrightarrow{b_2}=(a_2,-a_1)$
$\vec{a}\cdot\overrightarrow{b_1}=-a_1a_2+a_2a_1=0$
$\vec{a}\cdot\overrightarrow{b_2}=a_1a_2-a_2a_1=0$

$\vec{a}$和$\overrightarrow{b_1}$及$\overrightarrow{b_2}$都是垂直的

(8) $\vec{a}=(2,3)$

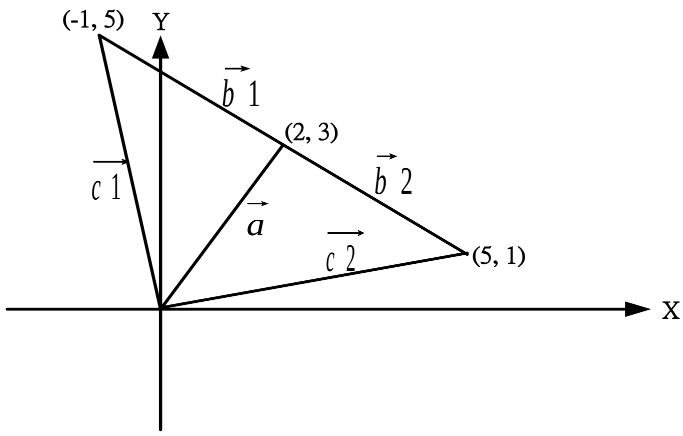
$\overrightarrow{b_1}=(-3,2)$
$\overrightarrow{b_2}=(3,-2)$
$\vec{a}\cdot\overrightarrow{b_1}=(2\times(-3)+3\times 2)=-6+6=0$
$\vec{a}\cdot\overrightarrow{b_2}=(2\times 3+3\times(-2))=6-6=0$

$\vec{a}$和$\overrightarrow{b_1}$及$\overrightarrow{b_2}$都是垂直的，這些向量可用下圖表示



我們可以看出對$\vec{a}$向量而言，是$\overrightarrow{b_1}$反時鐘旋轉的，而$\overrightarrow{b_2}$是順時鐘旋轉的。

我們也可以看出$\overrightarrow{c_1}=\vec{a}+\overrightarrow{b_1}$和$\overrightarrow{c_2}=\vec{a}+\overrightarrow{b_2}$ ，下圖顯示了$\overrightarrow{c_1}$和$\overrightarrow{c_2}$



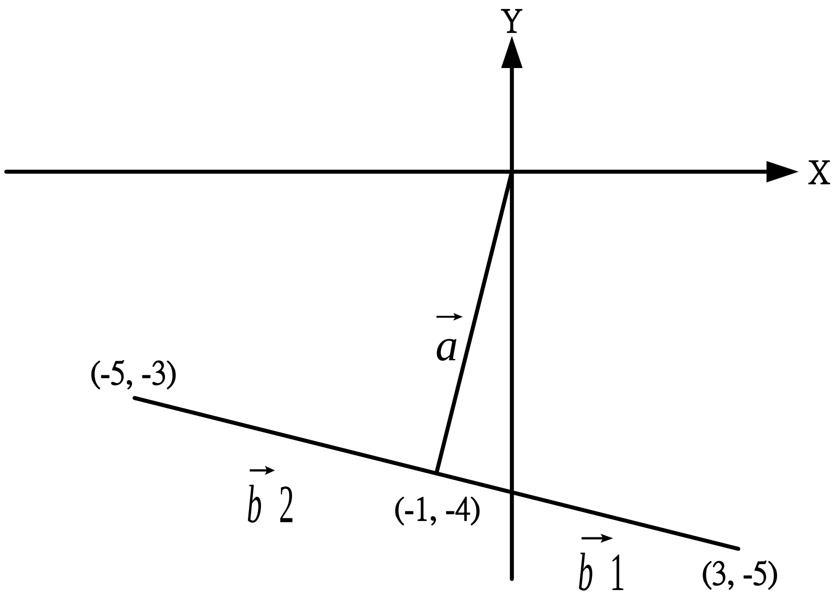
$\overrightarrow{c_1}=\vec{a}+\overrightarrow{b_1}=(2,3)+(-3,2)=(-1,5)$
$\overrightarrow{c_2}=\vec{a}+\overrightarrow{b_1}=(2,3)+(3,-2)=(5,1)$

以上的資料也是可以用來決定要選$\overrightarrow{b_1}$或$\overrightarrow{b_2}$

(9) $\vec{a} = (-1, -4)$

$\overrightarrow{b_1} = (4, -1)$
$\overrightarrow{b_2} = (-4, 1)$
$\vec{a} \cdot \overrightarrow{b_1} = \big((-1) * (4) + (-4) * (-1)\big) = (-4 + 4) = 0$
$\vec{a} \cdot \overrightarrow{b_2} = \big((-1) * (-4) + (-4) * (-1)\big) = (4 - 4) = 0$

$\vec{a}$和$\overrightarrow{b_1}$與$\overrightarrow{b_1}$都是互相垂直的，它們的關係如下圖



此時，$\overrightarrow{b_1}$逆時針旋轉 $\overrightarrow{b_2}$順時針。以上的做法，$\vec{b}$的長度和$\vec{a}$的長度是一樣的，如果我們規定$\vec{b}$的長度為 d，可以用規格的向量求得，也就是我們可以利用以下的公式

$\overrightarrow{b'} = d\left(\frac{\vec{b}}{\overline{|b|}}\right)$

如此$\left|\overrightarrow{b'}\right| = b$ 圖為$\left|\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right|$=1

(10)　$\vec{a} = (3,4)$，我們要有一個長度為 2 而又與$\vec{a}$垂直的向量

$\vec{b} = (4,-3)$

$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$$\overrightarrow{b'} = 2\left(\frac{\vec{b}}{\overrightarrow{|b|}}\right)$$

$$\overrightarrow{b'} = 2\left(\frac{(4,3)}{5}\right) = 2\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right) = (\frac{8}{5},\frac{6}{5})$$

我們可以看出$\vec{b}$的長度

$$|\overrightarrow{b'}| = \sqrt{\frac{64}{25}+\frac{36}{25}} = \sqrt{\frac{100}{25}} = \sqrt{4} = 2$$

$\overrightarrow{b'}$符合我們的長度

(11)　$\vec{a} = (1,-1)$

$\vec{b} = (-1,1)$
$\mathrm{d} = 1.3$

$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

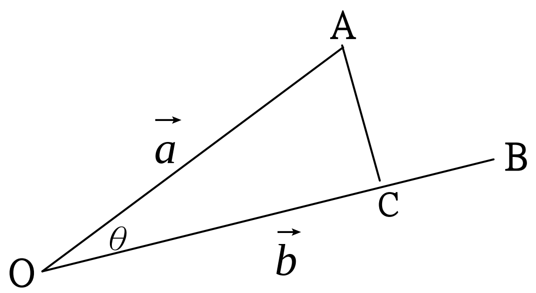
$$\overrightarrow{b'} = 1.3\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right) = 1.3\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (\frac{1.3}{\sqrt{2}},\frac{1.3}{\sqrt{2}})$$

$$|\overrightarrow{b'}| = \sqrt{\left(\frac{1.3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2 * \frac{(1.3)^2}{2}} = 1.3$$

$\overrightarrow{b'}$符合我們的要求

向量的正射影

請看以下的圖



$\vec{a}$和$\vec{b}$之間有夾角，$\vec{a}$在$\vec{b}$上的垂線和$\vec{b}$交於 C 點，我們先求 OC 的長度。

$$\overline{OC} = \overline{OA}\cos\theta$$

$$cos\,\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\therefore\ \overline{OC} = |\vec{a}|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

(12) $\vec{a} = (2,2)$ $\vec{b} = (3,0)$

$$\overline{OC} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$\therefore\ \overline{OC} = \frac{2*3+2*0}{3} = 2$$

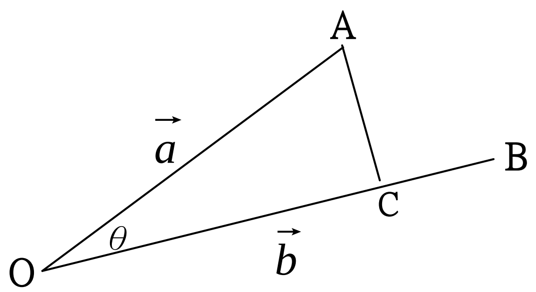
(13) $\vec{a} = (2,1)$ $\vec{b} = (1,-1)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \big(2 * 1 + 1 * (-1)\big) = (2 - 1) = 1$

$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\overline{OC} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

我們再看一下原來的圖



所謂的$\vec{a}$在$\vec{b}$的正射影除了 OC 的長度以外，還要包含它的方向，OC 的方向和$\vec{b}$

的方向是一樣的，因此$\vec{a}$在$\vec{b}$上的正射影是一向量$\vec{c}$:

$$\vec{c} = \overline{OC}\,\frac{b}{|\vec{b}|}$$

(14) $\vec{a} = (2,2)$ $\vec{b} = (3,0)$

在題(12)中得$\overline{OC}$=2

$\vec{a}$在$\vec{b}$的正射影向量是

$$\vec{c} = \overline{OC}\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right) = 2\,\frac{(3,0)}{3} = 2(1,0) = (2,0)$$

我們可以看出$|\vec{c}| = 2 = |\overline{OC}|$，$\vec{c}$的方向和$\vec{b}$的方向相同

(15) $\vec{a} = (2,1)$ $\vec{b} = (1,-1)$

從題(13)中可知$\overline{OC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\vec{c} = \overline{OC}\left(\frac{b}{|b|}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right)$

我們可以看出$|\vec{c}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$|\vec{c}| = |\overline{OC}|$，$\vec{c}$的方向和$\vec{b}$的方向也是相同的

根據以上的辯論，我們可以有以下的有關正射影的向量公式。

向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的正射影與向量$\vec{c}$

$$\vec{c} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\vec{b}$$

(16) $\vec{a} = (1,4)$ $\vec{b} = (2,1)$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (1*2+4*1) = 2+4 = 6$$

$$\left|\vec{b}\right|^2 = 2^2 + 1^2 = 4+1 = 5$$

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2} = \frac{6}{5}$$

$$\vec{c} = \frac{6}{5}\vec{b} = \frac{6}{5}(2,1) = (\frac{12}{5},\frac{6}{5})$$

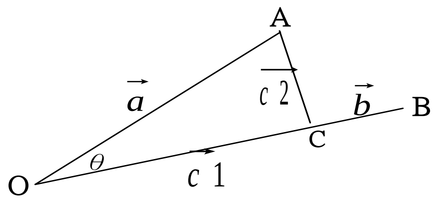
(17) $\vec{a} = (4,1)$ $\vec{b} = (2,0)$

$$\left|\vec{b}\right|^2 = 2^2 = 4$$

$$\vec{c} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\vec{b} = \frac{4*2+1*0}{2^2}(2,0) = \frac{8}{4}(2,0) = (4,0)$$

向量的分向量

請看下圖



我們可以得知$\vec{a}$在$\vec{b}$上的兩個分向量$\overrightarrow{c_1}$在$\overrightarrow{c_2}$的性質如下:

1. $\overrightarrow{c_1}$是$\vec{a}$在$\vec{b}$上的正射影
2. $\overrightarrow{c_1}$與$\overrightarrow{c_2}$互相垂直
3. $\overrightarrow{c_1}+\overrightarrow{c_2}=\vec{a}$

(18)　$\vec{a}=(4,2)$　$\vec{b}=(1,0)$

$$\left|\vec{b}\right|=1$$

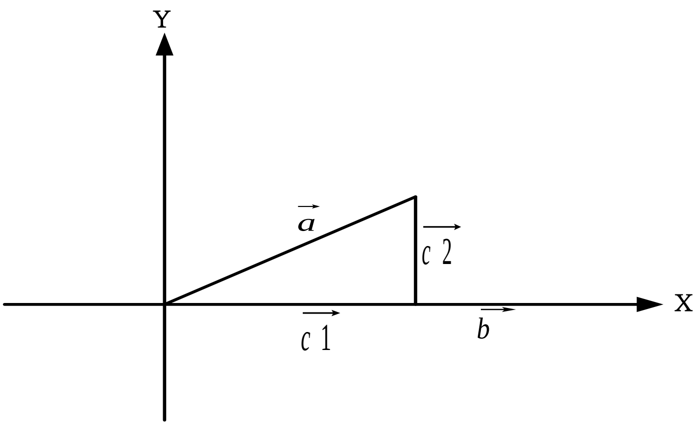
$$\overrightarrow{c_1}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\vec{b}=\frac{4*1+2*0}{1^2}(1,0)=\frac{4}{1}(1,0)=(4,0)$$

$\because\ \overrightarrow{c_1}+\overrightarrow{c_2}=\vec{a}$

$(4,0)+\overrightarrow{c_2}=(4,2)$

$\therefore\ \overrightarrow{c_2}=(4,2)-(4,0)=(0,2)$

各向量的圖如下



(19) $\vec{a} = (4,3)$ $\vec{b} = (0,2)$

$\left|\vec{b}\right| = 2$

$$\overrightarrow{c_1} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\vec{b} = \frac{4*0+3*2}{2^2}(0,2) = \frac{6}{4}(0,2) = (0,3)$$

$\overrightarrow{c_1} + \overrightarrow{c_2} = \vec{a}$

$(0,3) + \overrightarrow{c_2} = (4,3)$

$\overrightarrow{c_2} = (4,3) - (0,3) = (4,0)$

各向量的圖如下