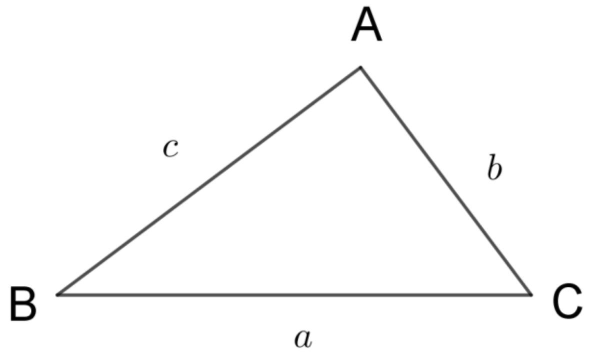
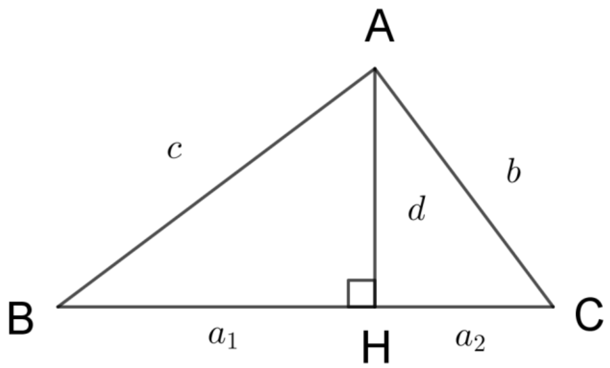
(13) 三角函數和三角形

請看下圖



假設我們已知$\angle B$的大小，也知道a與c的長度，我們如何能知道b的長度呢？

我們通過A點，做一直線垂直於$\overline{BC}$，$\overline{AH} \perp \overline{BC}$，如下圖。



我們令$\overline{AH} = d$，$\overline{BH} = a_1$，$\overline{HC} = a_2$

因為我們已知$\angle B$的大小，因此可知

$$cos\,B = \frac{a_1}{c}$$

$$a_1 = c\,cos\,B$$

$$\therefore a_2 = a - c\,cos\,B$$

我們又知道

$$sin\,B = \frac{d}{c}$$

$$\therefore d = c\,sin\,B$$

$$b^2 = {a_2}^2 + d^2$$

$$= (a - c\,cosB)^2 + c^2 \sin^2 B$$

$$= a^2 - 2ac\cos B + c^2 \cos^2 B + c^2 \sin^2 B$$

$$= a^2 - 2ac\cos B + c^2(\cos^2 B + \sin^2 B)$$

$$= a^2 - 2ac\cos B + c^2$$

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos B}$$

例 1：$a = 1$，$c = 1$，$\angle B = 60°$

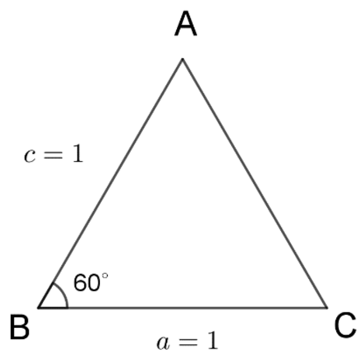
$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos B}$$

$$= \sqrt{1 + 1 - 2 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2 - 1}$$

$$= \sqrt{1}$$

$$= 1$$



$\therefore \Delta ABC$是一個正三角形

例 2：$a = 2\sqrt{3}$，$c = 2$，$\angle B = 30°$

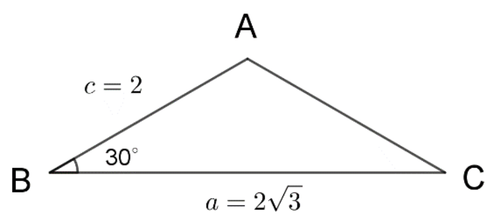
$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos B}$$

$$= \sqrt{4 + 12 - 2 \times 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \sqrt{16 - 4 \times 3}$$

$$= \sqrt{4}$$

$$= 2$$



$\therefore \Delta ABC$是一個等腰三角形

例 3：$c=2$，$a=\sqrt{3}$，$\angle B=30°$

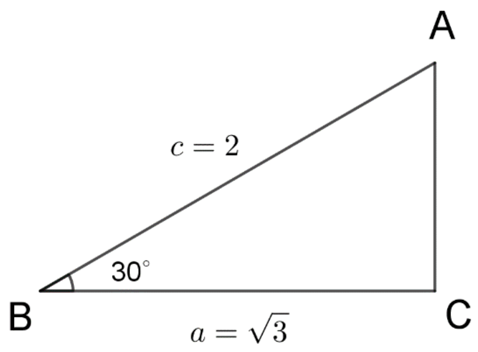
$$b=\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos B}$$

$$=\sqrt{3+4-2\times\sqrt{3}\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\sqrt{7-6}$$

$$=\sqrt{1}$$

$$=1$$



$\therefore \Delta ABC$是一個直角三角形

餘弦定理

根據以上的討論，我們可得餘弦定理

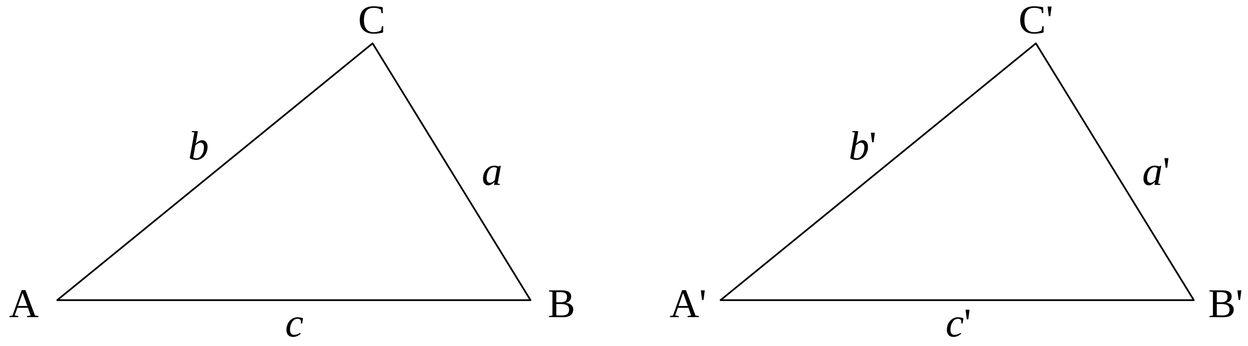
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

餘弦定理在幾何上有兩個意義：

(1)三角形中，如果已知兩邊夾一角，則可根據餘弦定理確定三邊相等，因此可以得到幾何中的 *SAS* 定理，如下圖：



若$\angle A=\angle A'$，$b=b'$以及$c=c'$，根據餘弦定理，可知$a=a'$

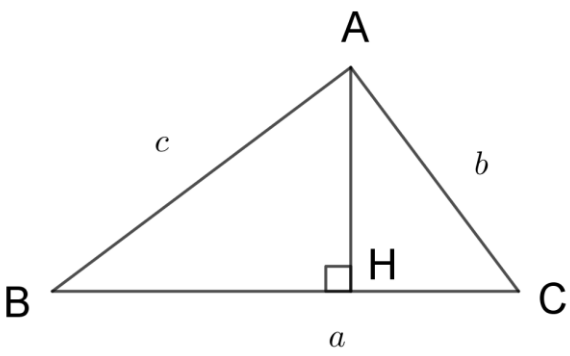
因此可得$\Delta ABC\cong\Delta A'B'C'$

(2)如果三角形中，已知三邊a、b及c，則所有的角都可確定。以$\angle A$為例，

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

因為a、b、c都已確定，因此$\cos A$可以確定，$\angle A$也就可以確定了。

三角函數和三角形面積



三角形面積是$\frac{1}{2}\overline{AH}\cdot a$

但$sin\, B = \frac{\overline{\mathrm{AH}}}{c}$

$\therefore \overline{\mathrm{AH}} = c\, sin\, B$

令三角形的面積為M，則

$$M = \frac{1}{2}\overline{AH}\cdot a = \frac{1}{2}ac\, sin\, B$$

同理可以證明

$M = \frac{1}{2}ab\, sin\, C$，以及$M = \frac{1}{2}bc\, sin\, A$

最後可得

$M = \frac{1}{2}bc\, sin\, A = \frac{1}{2}ac\, sin\, B = \frac{1}{2}ab\, sin\, C$

也就是說，如果已知兩邊夾一角，即可求出三角形的面積。

例 4：$a = 4$，$b = 2$，$sin\, C = \frac{1}{2}$

$M = \frac{1}{2}ab\, sin\, C$

$= \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times \frac{1}{2}$

$= 2$

正弦定理

因為$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$

我們可以將以上的公式除以abc

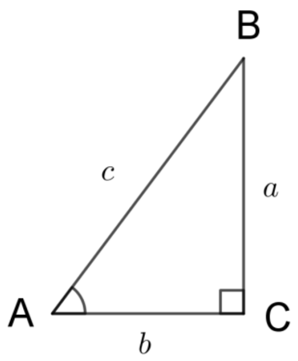
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{bc}{abc}\sin A=\frac{1}{2}\cdot\frac{ac}{abc}\sin B=\frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{abc}\sin C$$

再同乘以 2，可得 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$

而正弦定理就是 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

正弦定理的意義

要知道正弦定理的意義，我們先從直角三角形談起。

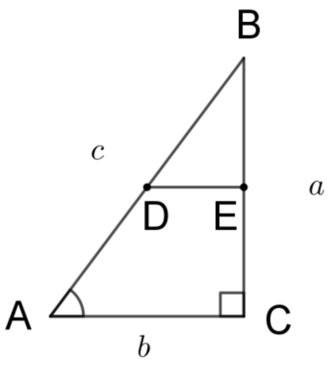


如上圖，我們得知

$$\sin A=\frac{a}{c}$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A}=c$$

我們取$\overline{AB}$的中點D，畫一條平行於$\overline{AC}$的直線，相交$\overline{BC}$於E點，也連接了$\overline{DC}$，如下圖：



只要懂得如何證明三角形，就可以證明

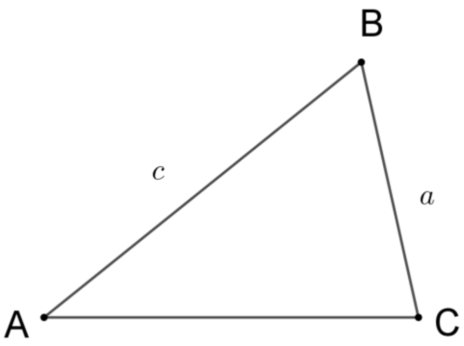
$\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{DB}$

因此可以得知D點是ΔABC外接圓的圓心，或者我們可以說c是這外接圓的直徑，

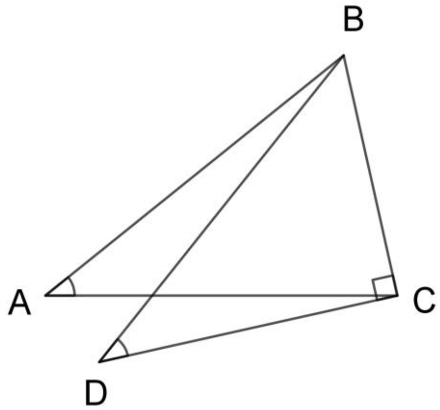
因此$\frac{a}{\sin A} = c = 2r$

以上公式中的r是外接圓的半徑

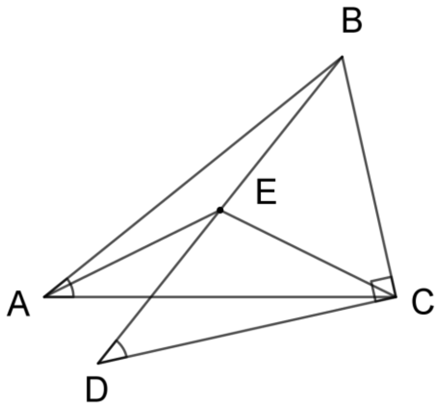
有了這個認識，我們可以探討任何三角形中$\frac{a}{\sin A}$的意義，請看下圖。假設我們有一個任意的三角形ABC。



我們畫一條直線，通過C點，垂直於$\overline{BC}$，



然後決定D，使$\angle BDC = \angle A$。



最後，取$\overline{BD}$的中點E，從以上的討論，我們可以得知，$\overline{BD}$是三角形BDC的直徑，換言之，$\overline{BE} = \overline{EC}$。我們再考慮$\Delta$ABC，因為$\overline{BE} = \overline{EC}$，$E$一定也是$\Delta ABC$的外心，所以$\overline{BE} = \overline{CE} = \overline{AE} = r = \Delta ABC$外接圓的半徑。

ΔBDC是直角三角形

$$\therefore \sin D = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{a}{\overline{BD}} = \frac{a}{2r}$$

$\therefore \frac{a}{\sin D} = 2r$，又$\angle D = \angle A$ $\therefore \frac{a}{\sin A} = 2r$

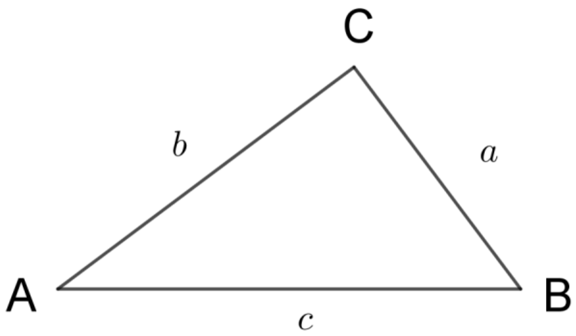
我們證明了一點，對於任何一個三角形，令r是此三角形外接圓的半徑，則

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$$

正弦定理在三角形全等證明上的應用

例：兩角夾一邊

假設已知$\angle A$和$\angle B$以及邊C



因為$\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$，所以$\angle C$也是已知的，根據正弦定理

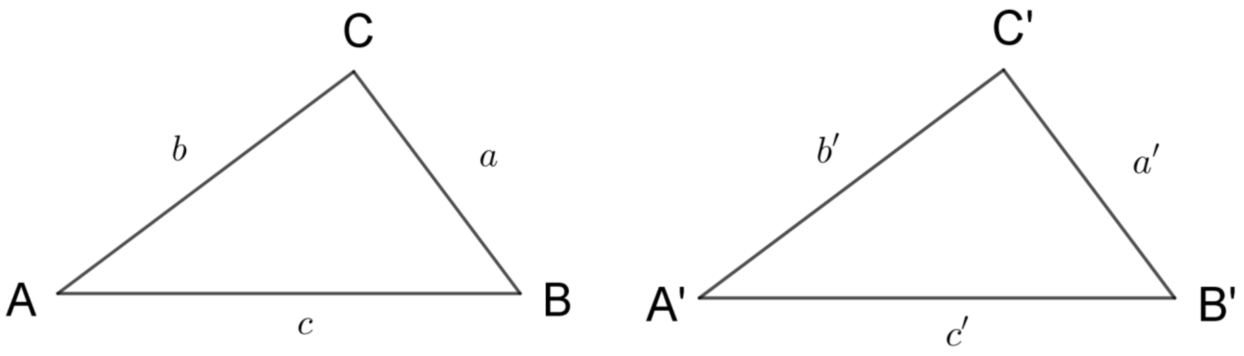
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$
$$\therefore a = c \cdot \frac{\sin A}{\sin C}$$

因為c、$\sin A$和$\sin C$都是已知的，因此a可以決定。同理可以知道b也可以求得。

正弦定理和幾何的 ASA 定理

從以上的討論，可以知道一旦兩角夾一邊是已知的，則這三角形的形狀就可以確定了。

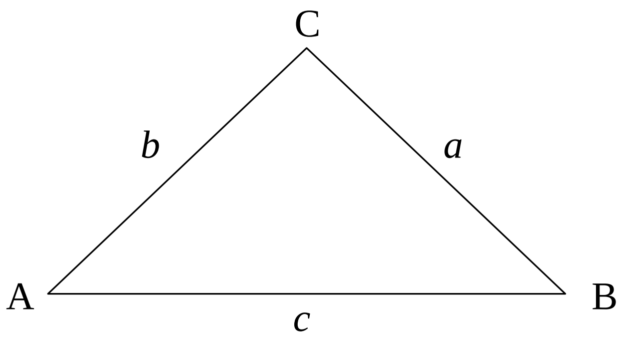
在幾何中，假設我們有兩個三角形，如下圖。



已知∠A=∠A'，∠B=∠B'，$c = c'$，我們根據以上的討論，得知$a = a'$及$b = b^{'}$，因此這兩個三角形是全等的，這就是幾何學中的 ASA 定理。

正弦定理和等腰三角形

假設ΔABC中，$\angle A = \angle B$



因為$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$，而且$\sin A = \sin B$

$\therefore a = b$

在幾何中，三角形的兩底角相等，則此三角形一定是等腰三角形。這個定理可以從正弦定理求得。

同理，如果我們知道$a = b$，則$\angle A = \angle B$

假設我們已知$a = b = c$，我們可以根據正弦定理得到$\angle A = \angle B = \angle C$