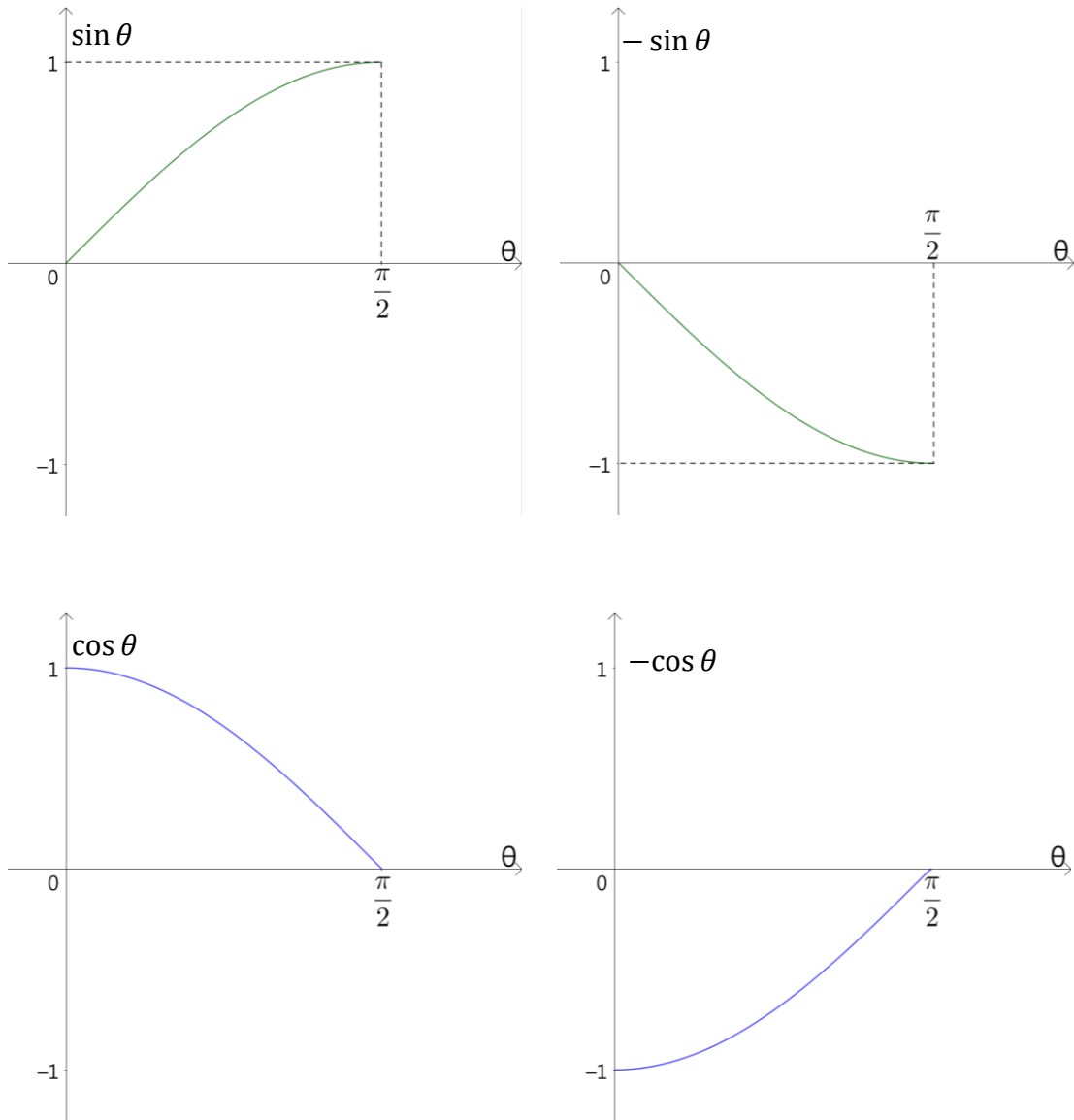


(12) 三角函數的週期性

我們再溫習一下三角函數的一些特性，假設 θ 為銳角，以下的圖

形是很重要的：

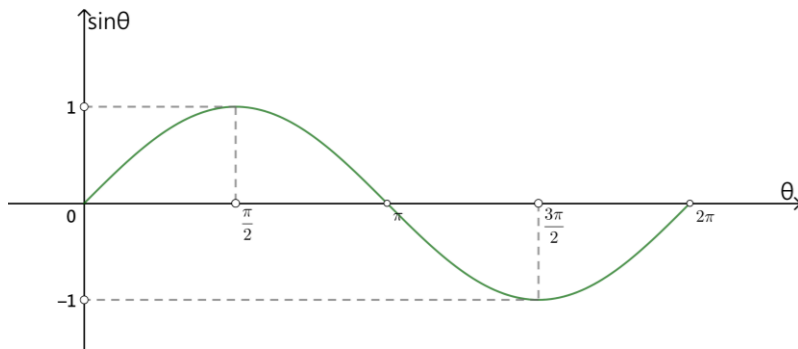


我們先假設有一個銳角 α ，

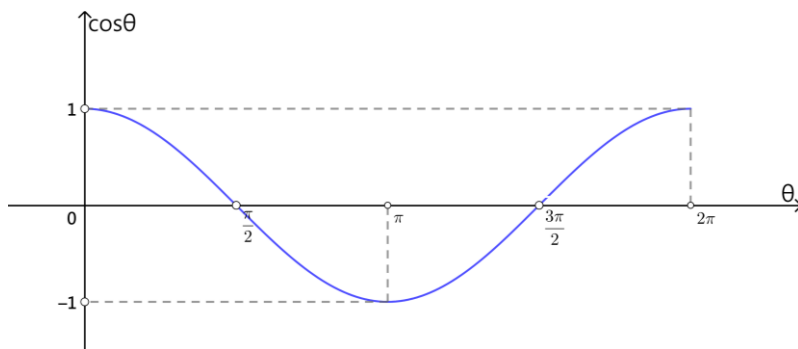
我們可以得到一張表

	$\theta = \alpha$	$\theta = \alpha + \frac{\pi}{2}$	$\theta = \alpha + \pi$	$\theta = \alpha + \frac{3\pi}{2}$
$\sin \theta$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
$\cos \theta$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$

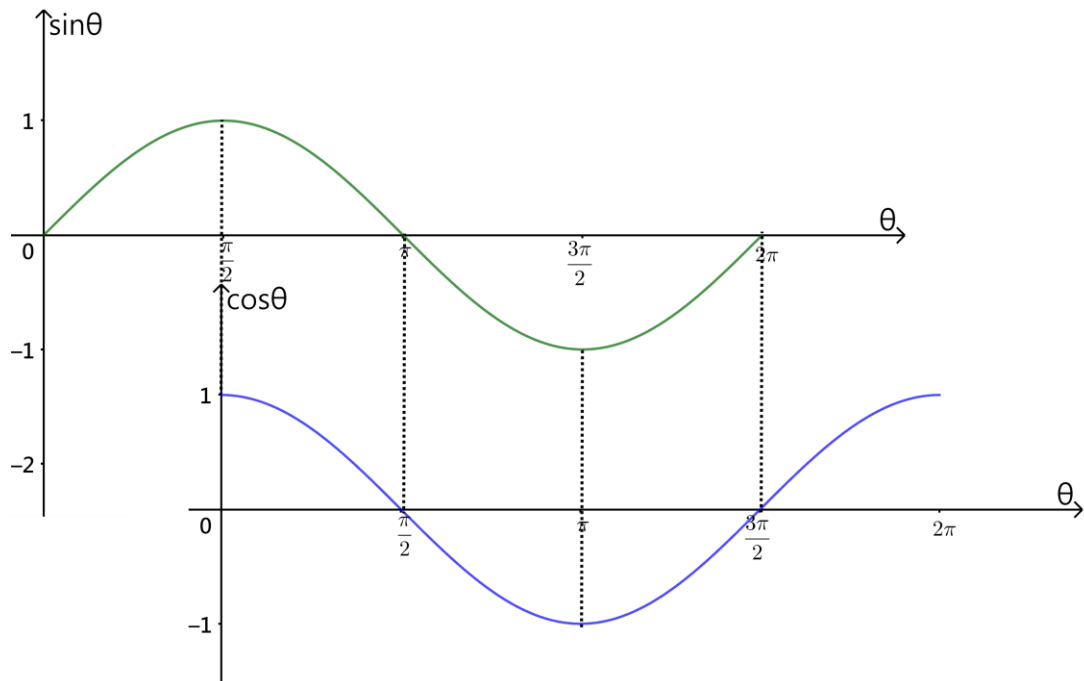
根據以上的表，我們可以看出 $\sin\theta$ 的週期



也可以看出 $\cos\theta$ 的週期



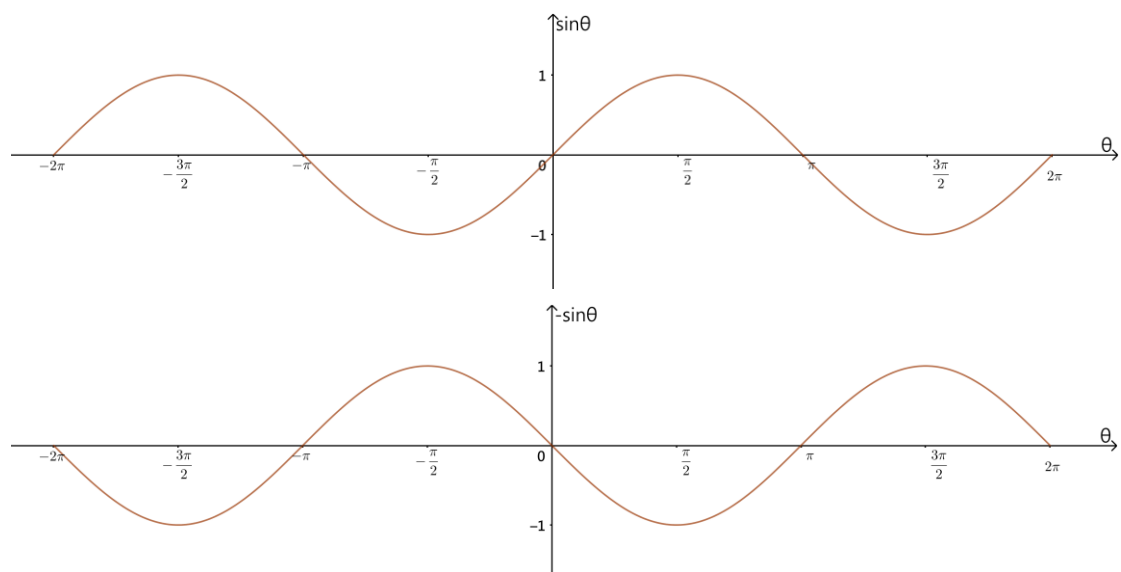
我們從上面兩個圖重疊後得到下圖，



可以看出 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 相差 90° ，除了有 θ ，也可以有 $-\theta$ ，就可得

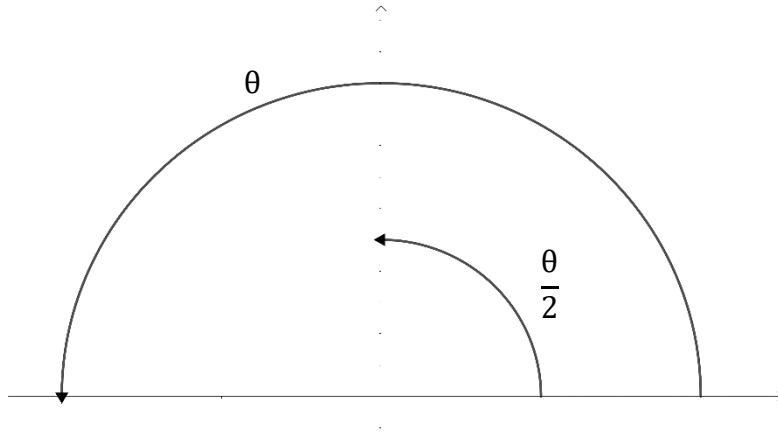
$$\begin{aligned} \sin(-\theta) &= -\sin\theta \\ \cos(-\theta) &= \cos\theta \end{aligned}$$

因此我們有以下的圖：

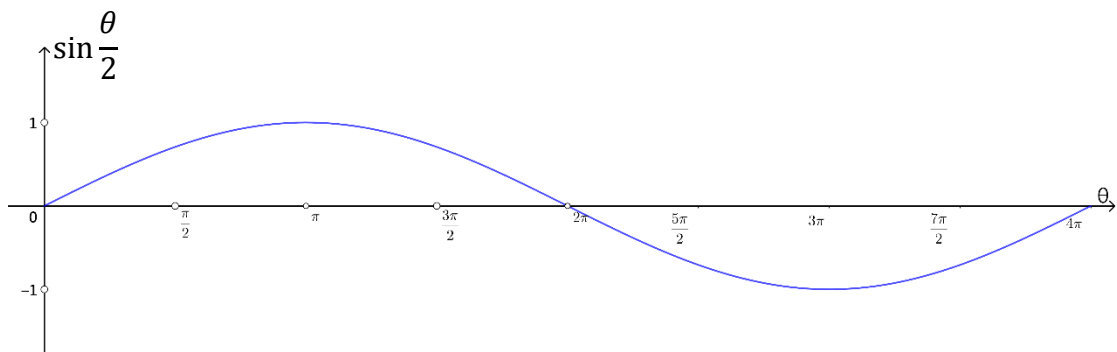


$y = \sin \frac{\theta}{2}$ 的圖形

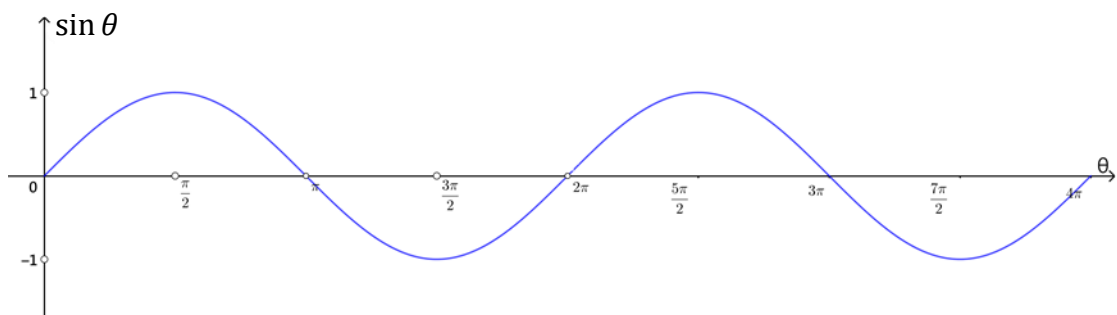
我們首先該弄清楚 $y = \sin \frac{\theta}{2}$ 的意義，假如 $\theta = 90^\circ$ ， $\frac{\theta}{2}$ 只有 45° ，如果 $\theta = 180^\circ$ ， $\frac{\theta}{2}$ 只有 90° ，以下的圖可以使同學對 $\frac{\theta}{2}$ 有一些感覺



如上圖所示， $\sin \frac{\theta}{2}$ 的變化一定要比 $\sin \theta$ 慢，請看， $\sin \frac{\theta}{2}$ 與 $\sin \theta$ 的變化圖如下



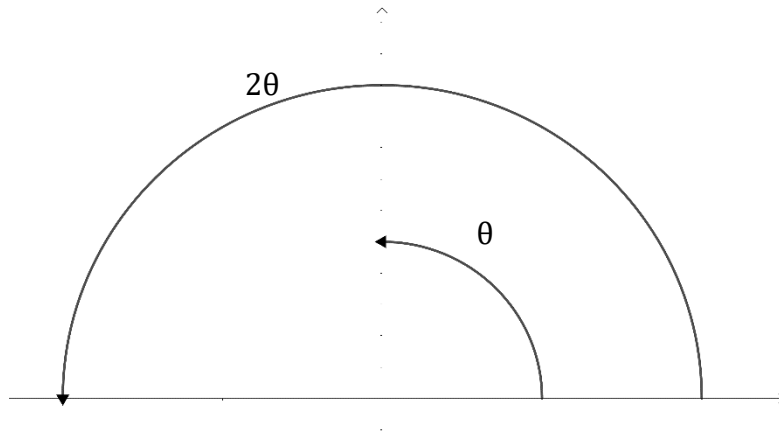
再看 $\sin \theta$



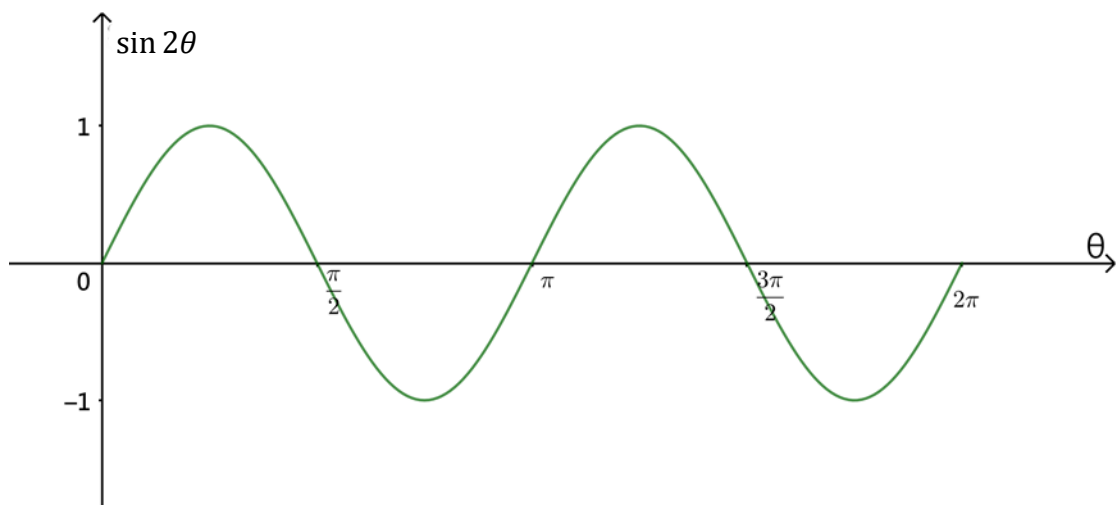
也就是說， $\sin \frac{\theta}{2}$ 的一個週期等於 $\sin \theta$ 的兩個周期，以馬達為例，

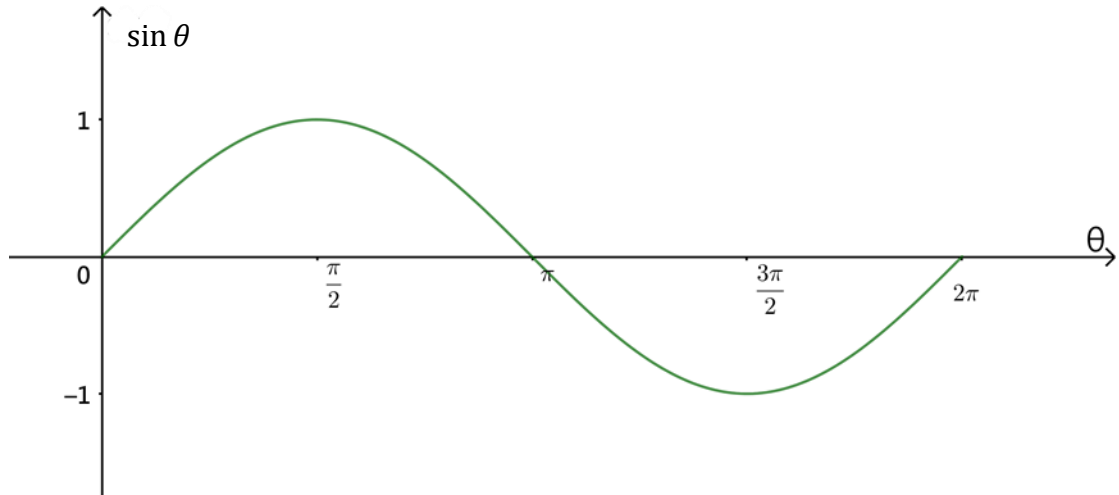
$\sin \frac{\theta}{2}$ 這個馬達轉了一圈， $\sin \theta$ 這個馬達已經轉了兩圈。

$\sin 2\theta$ 則相反，請見下圖



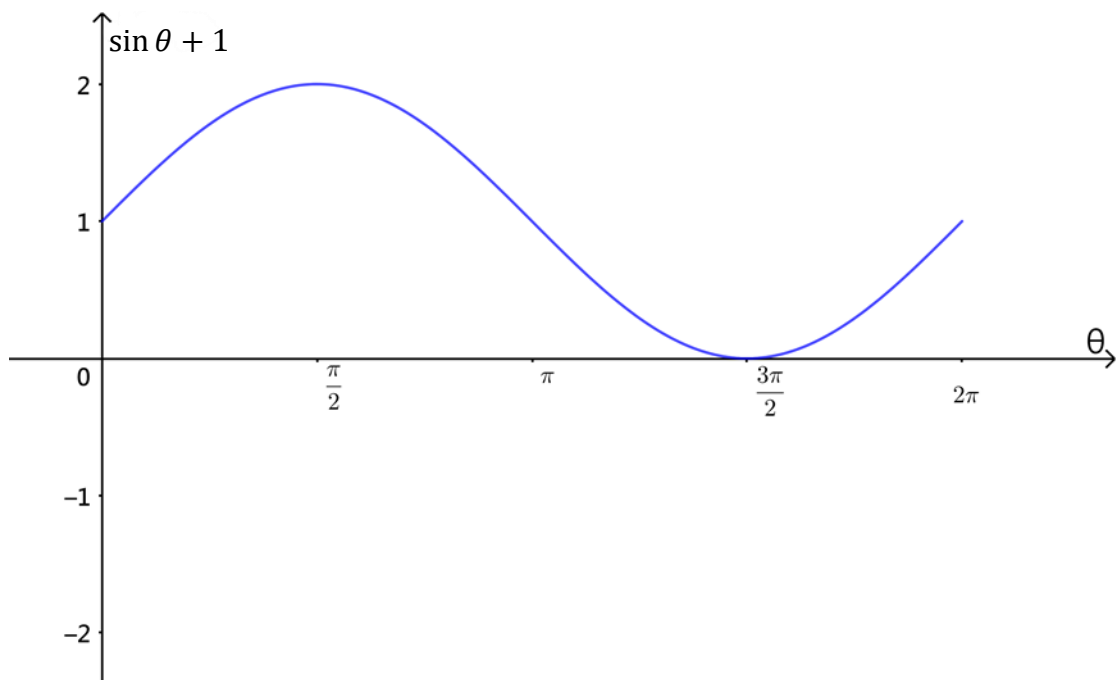
因此， $\sin 2\theta$ 的變化速度大於 $\sin \theta$ 的變化速度，如下圖所示

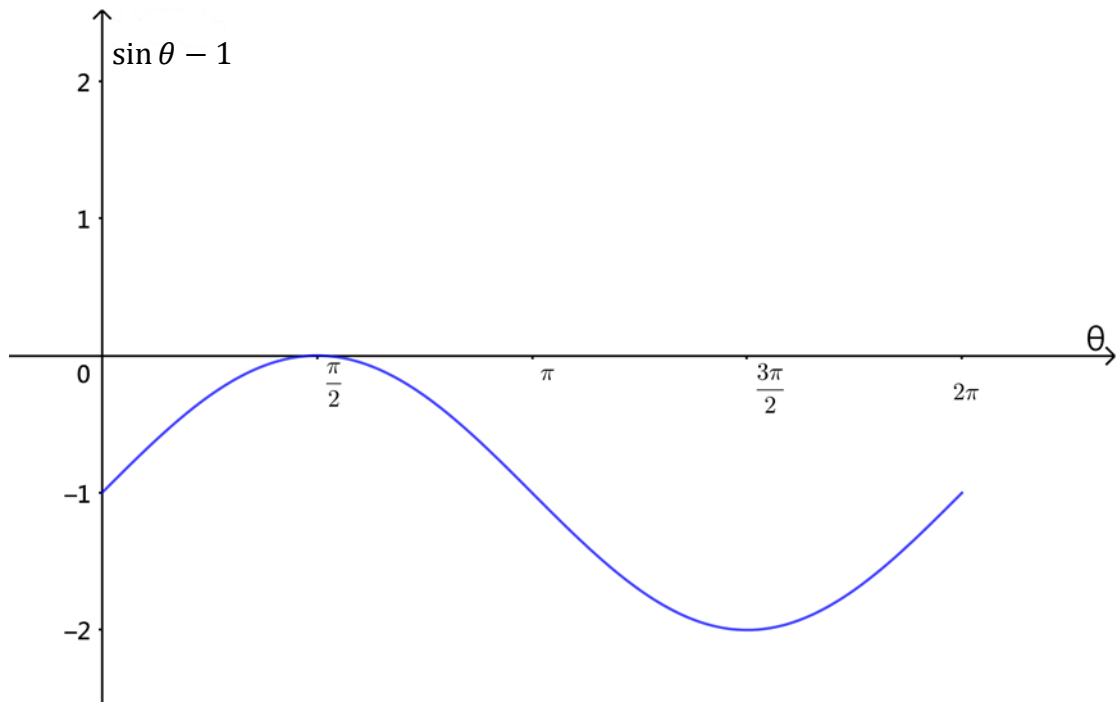




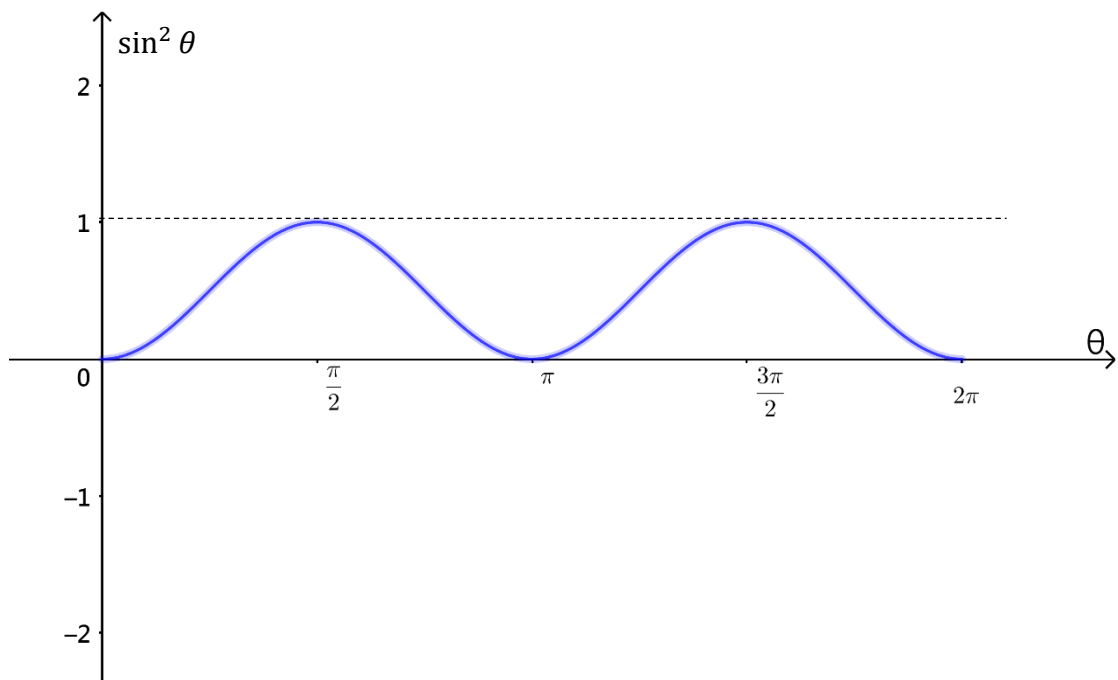
$\sin 2\theta$ 的週期是 $\sin \theta$ 的半個週期，以馬達為例， $\sin 2\theta$ 這個馬達的轉速是 $\sin \theta$ 轉速的兩倍。

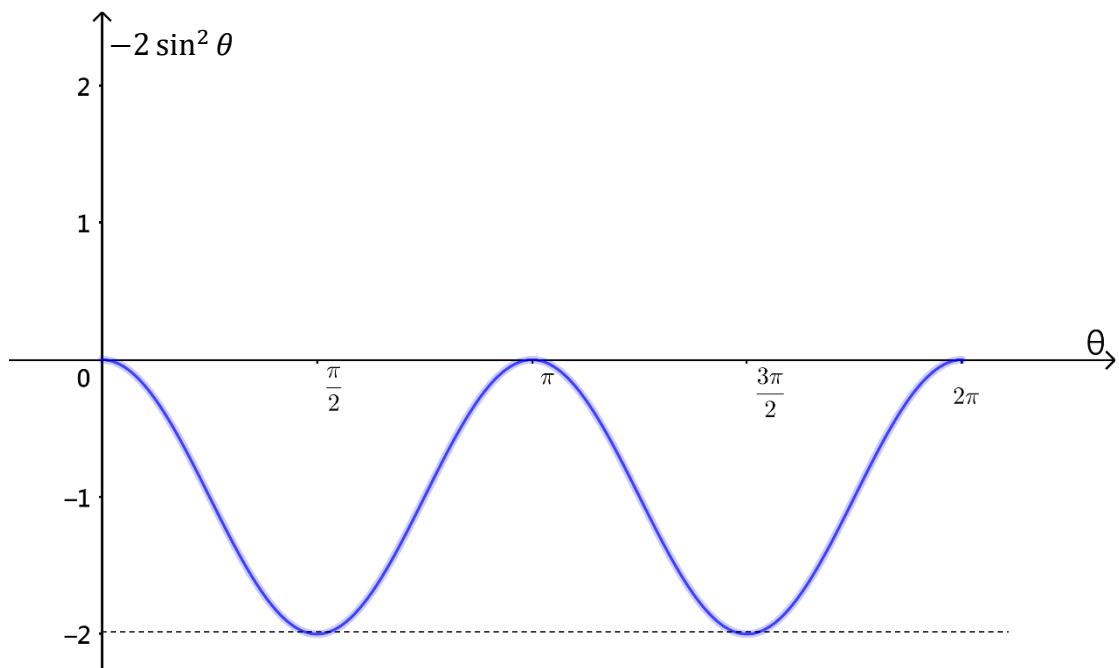
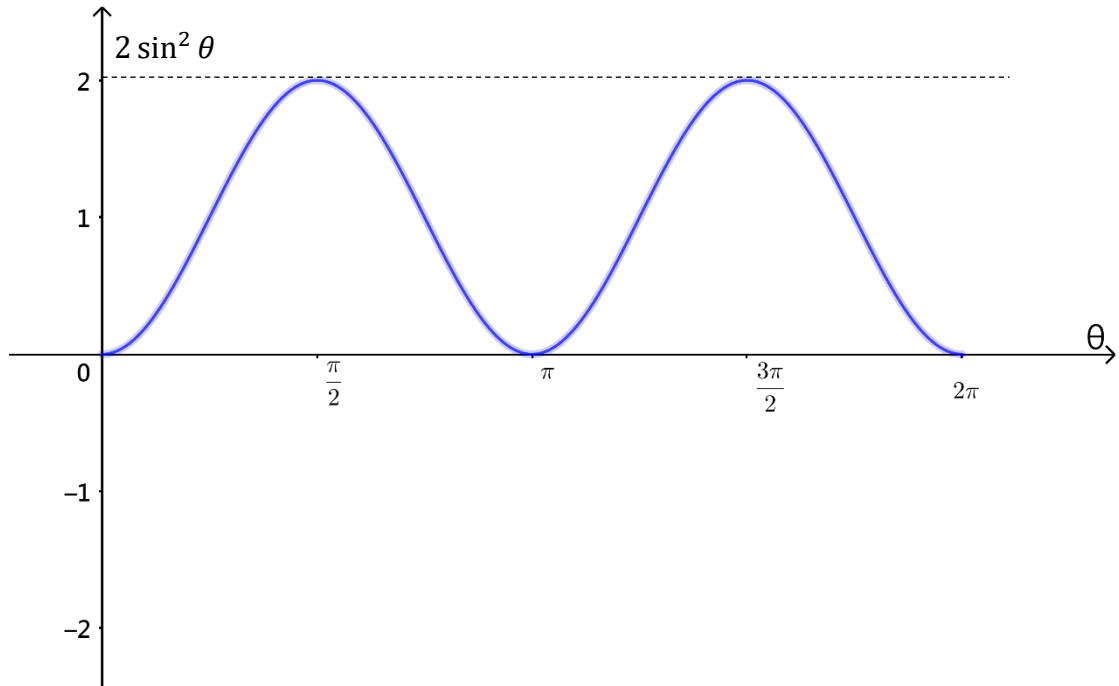
$\sin \theta + 1$ 與 $\sin \theta - 1$ 的圖如下



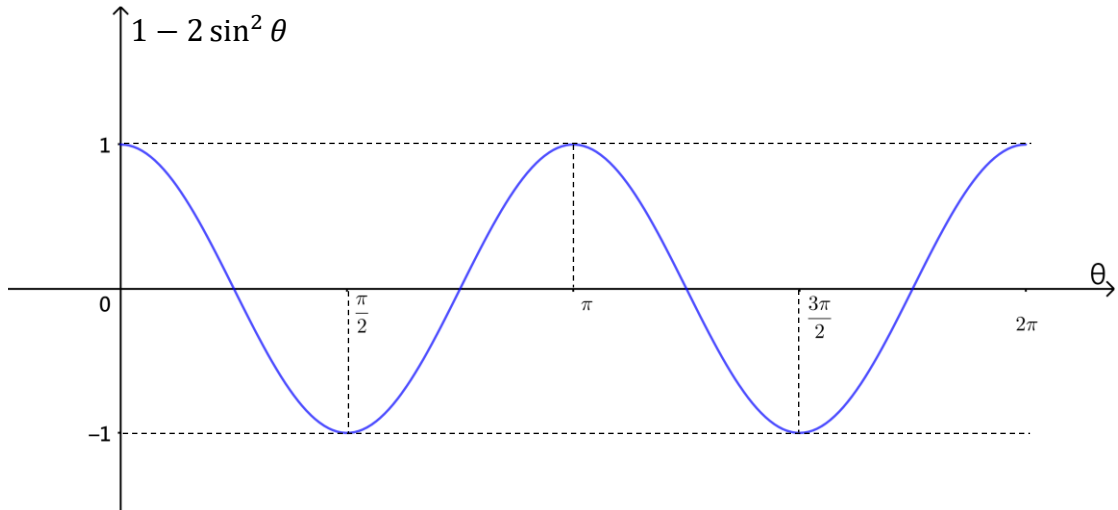


我們現在看 $\sin^2 \theta$ ， $\sin \theta$ 原來是有負數，但 $\sin^2 \theta$ 只有正值，如下圖





$1 - 2\sin^2 \theta = -2\sin^2 \theta + 1$ ，我們將 $-2\sin^2 \theta$ 往上移一格



我們應該發現以上的圖形其實是 $\cos 2\theta$ 的圖形，因此可以說

$1 - 2\sin^2 \theta = \cos 2\theta$ ，這個公式以後會討論到，我們可以做幾個實驗

例 1 $\theta = 30^\circ$ ，

$$\cos 2\theta = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$1 - 2\sin^2 \theta = 1 - 2\sin^2 30^\circ = 1 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 1 - 2\sin^2 30^\circ = \cos 60^\circ$$

例 2 $\theta = 45^\circ$ ，

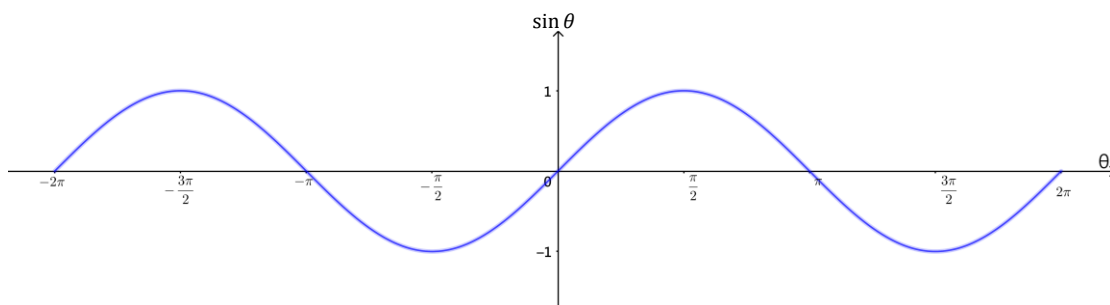
$$\cos 2\theta = \cos 90^\circ = 0$$

$$1 - 2\sin^2 \theta = 1 - 2\sin^2 45^\circ = 1 - 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 - 1 = 0$$

$$\therefore 1 - 2\sin^2 45^\circ = \cos 90^\circ$$

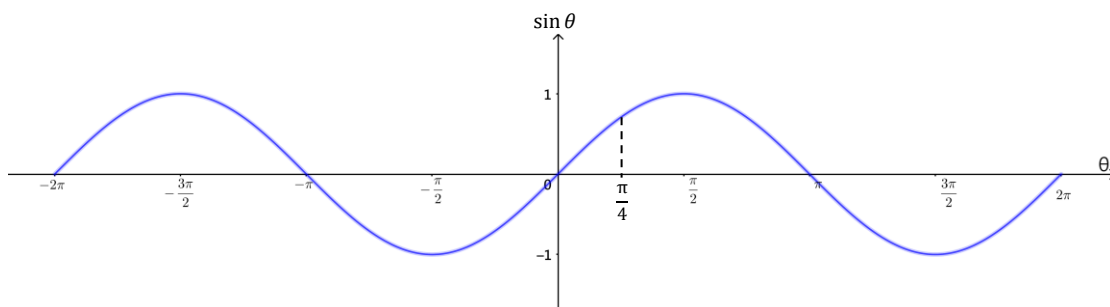
三角函數的平移

我們要看 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ 的圖形，先畫 $\sin\theta$ 的圖形

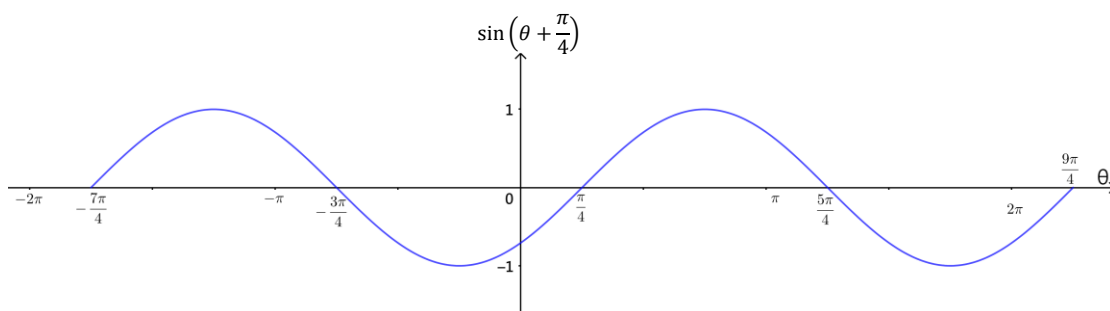


我們看出，當 $\theta = 0$ 時， $\sin\theta = 0$ ，而且可以將 $\theta = 0$ 看成 $\sin\theta$ 的起點。因此我們考慮 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ 時，會問，何時 $\theta = 0$? 答案是 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 。

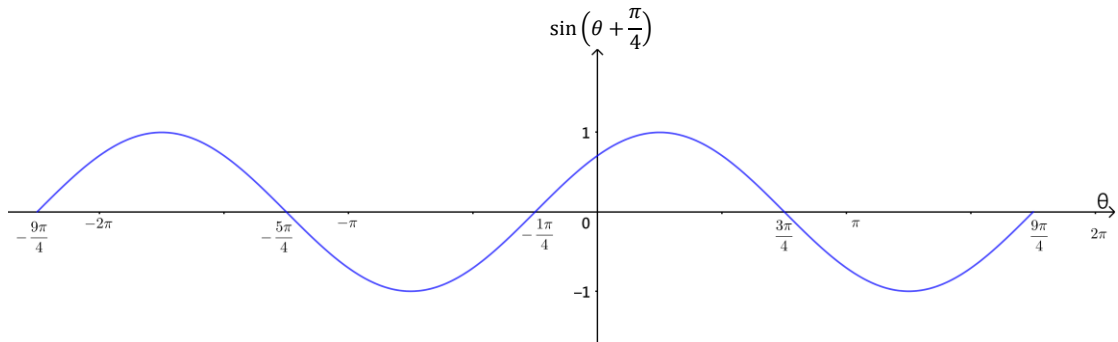
因此我們知道，對 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ 而言， $\theta = \frac{\pi}{4}$ 是它的起點。



然後我們將 $\sin\theta$ 的起點移至 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 的地方



同理 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ 的圖形一定如下圖

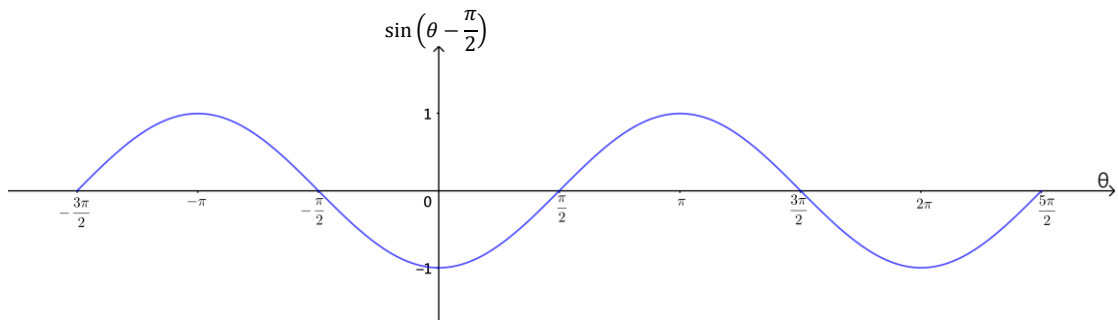


我們可以得一結論：

- (1) $\sin(\theta - \alpha)$ 的圖形，是將 $\sin \theta$ 向右移 α 格
- (2) $\sin(\theta + \alpha)$ 的圖形，是將 $\sin \theta$ 向左移 α 格，

$\cos(\theta \pm \alpha)$ 的圖形，也可以用以上的規則求得

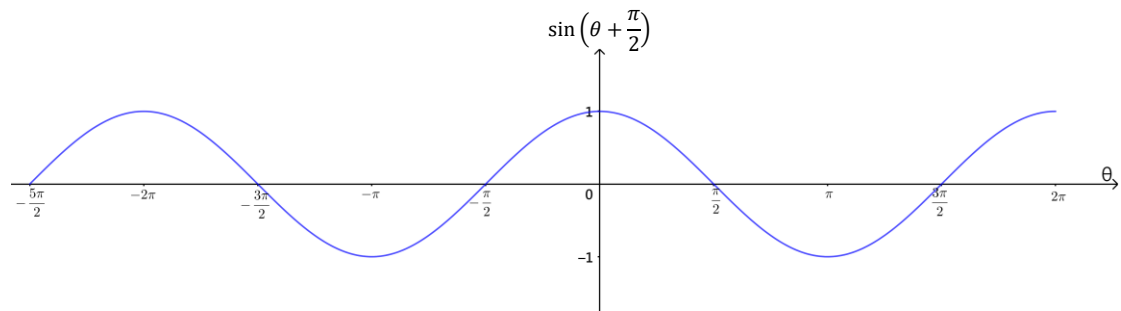
以下是 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ 的圖形



大家一定可以看出以上的圖形也是 $-\cos \theta$ 的圖形，這是應該的，固

$$\text{為 } \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \theta$$

以下是是 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ 的圖形



以上的圖形也是 $\cos \theta$ 的圖形，這是正確的，因為 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta$