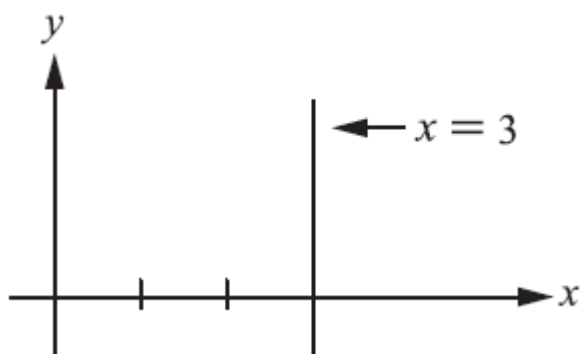
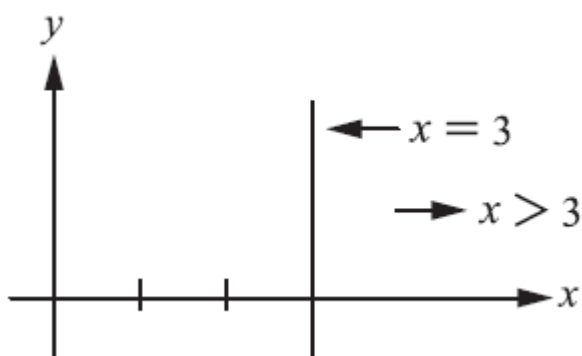


(70)二元一次不等式

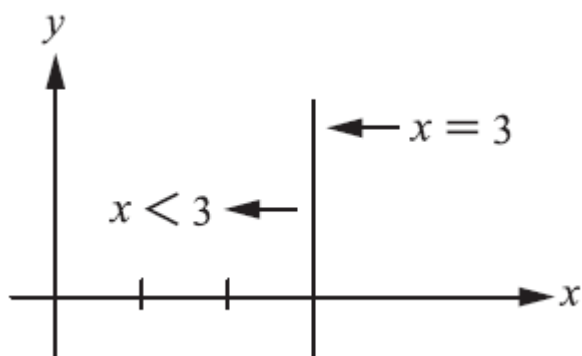
如果我們要問 $x=3$ 的點在哪裡，答案是在直線 $x=3$ 上面，如下圖所示。



如果我們再問 $x>3$ 的點在哪裡，答案是在直線 $x=3$ 的右邊，請看下圖：

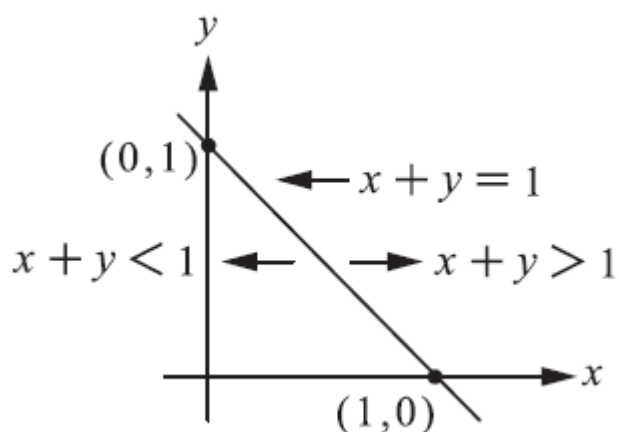


至於 $x<3$ 的點在哪裡？答案當然是直線 $x=3$ 的左邊。

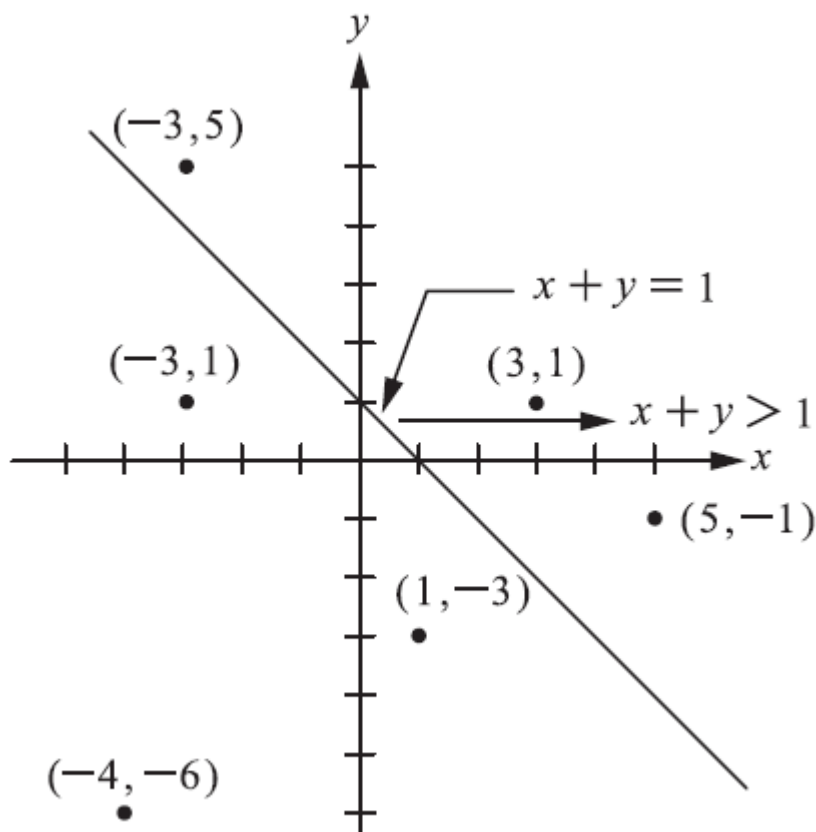


如果我們要問 $x+y>1$ 的點在哪裡，我們可以選出一些符合 $x+y>1$ 的點，如 $(3, 1)$ 、 $(-3, 5)$ 、 $(5, -1)$ 等等。 $x+y<1$ 的點有 $(1, -3)$ 、 $(-3, 1)$ 、 $(-4, -6)$ 等等。

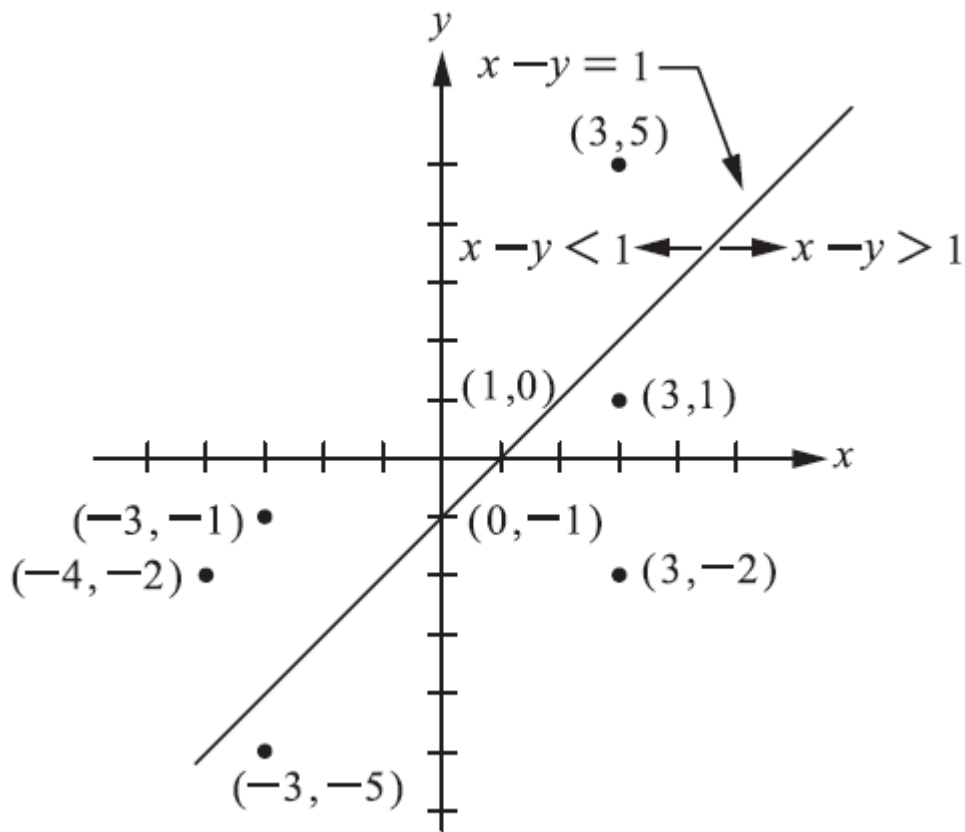
我們的問題是 $x+y>1$ 和 $x+y<1$ 的點究竟在哪裡，請看下面的圖：



上圖表示， $x+y>1$ 的點在直線 $x+y=1$ 的右邊， $x+y<1$ 的點在直線 $x+y=1$ 的左邊，如下圖所示：



現在，我們來尋找 $x-y>1$ 和 $x-y<1$ 的點。 $x-y>1$ 的點有 $(3, 1)$ 、 $(3, -2)$ 、 $(-3, -5)$ ， $x-y<1$ 的點有 $(3, 5)$ 、 $(-3, -1)$ 和 $(-4, -2)$ ，我們可以用下圖來解釋。



我們可以發現 $x - y > 1$ 的點都在 $x - y = 1$ 的右邊，而 $x - y < 1$ 的點都在 $x - y = 1$ 的左邊。

在以下，我們要詳細解釋二元一次不等式的解法。首先我們要先決定二元一次方程式的表現方法，我們規定 a 和 b 都是正數，則二元一次方程式有兩種：

(1) $ax + by = c$

(2) $ax - by = c$

例子如下：

$x + 2y = 2$

$x - 2y = 2$

$x + 2y = -2$

$x - 2y = -2$

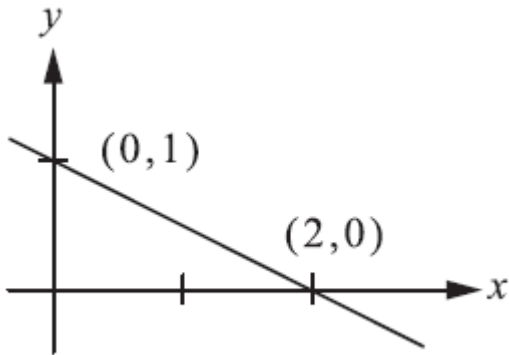
二元一次不等式因此也有兩種：

$$(1) ax+by>c$$

$$(2) ax-by>c$$

我們先考慮第一類： $ax+by>c$

我們先建立一條直線 $ax+by=c$ ，因為 a 和 b 都是正數，這條直線的斜率是負的。以 $x+2y=2$ 為例，這條直線如下圖：



我們將這種 $ax+by=c$ 稱之為 $ax+by>c$ 的分隔線。

假設 (x_1, y_1) 滿足 $ax+by>c$ ，我們做一條通過 (x_1, y_1) 而且與 $ax+by=c$ 平行的線，令此直線為 $ax+by=c'$ ，因為 $ax+by>c$ ，故 $c' > c$ 。

我們現在求 $ax+by=c$ 和 x 軸和 y 軸的交點，我們將它們分別命名為 x_c 和 y_c 。

令 $y=0$ ，則

$$ax_c = c$$

$$\therefore x_c = \frac{c}{a}$$

令 $x=0$ ，則

$$by_c = c$$

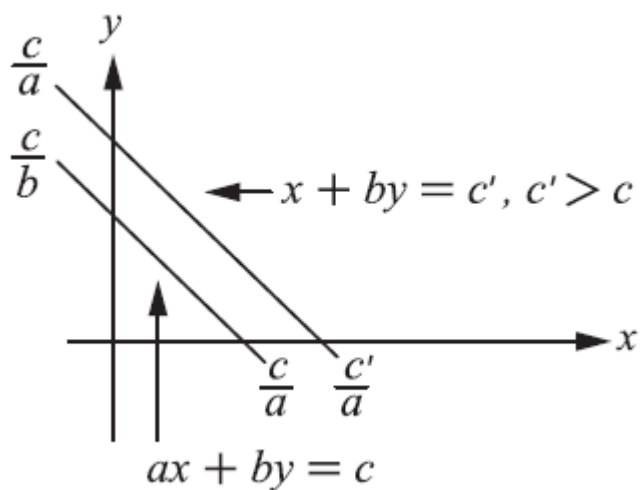
$$\therefore y_c = \frac{c}{b}$$

我們現在求 $ax + by = c'$ 在 x 軸和 y 軸上的交點：

$$x_{c'} = \frac{c'}{a}$$

$$y_{c'} = \frac{c'}{b}$$

請看下圖：

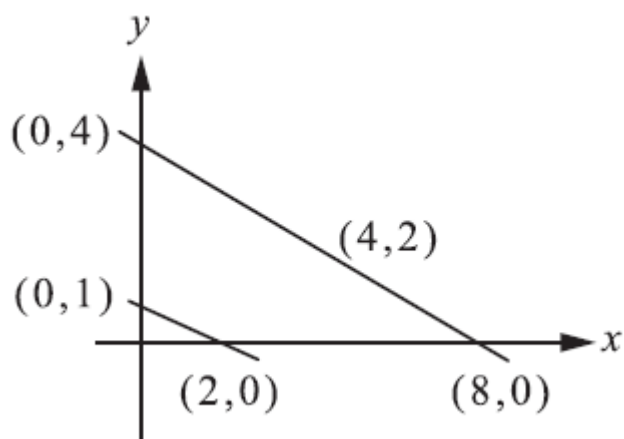


因為 $c' > c$ ，故 $\frac{c'}{a} > \frac{c}{a}$ ， $\frac{c'}{b} > \frac{c}{b}$ 。

以 $x+2y>2$ 為例， $(4, 2)$ 滿足這個不等式，通過 $(4, 2)$ 而且與 $x+2y=2$ 平行的直線是 $x + 2y = c'$

將 $x=4$ 和 $y=2$ 代入可得 $c'=8$

$x+2y=8$ 在 x 軸上和 y 軸上的交點分別是 $(8, 0)$ 和 $(0, 4)$ ，如下圖所示：



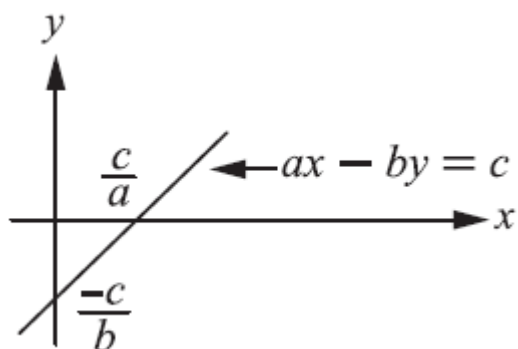
因為 $x_{c'} = \frac{c'}{a} > x_c = \frac{c}{a}$, $y_{c'} = \frac{c'}{b} > y_c = \frac{c}{b}$, 我們得知 $x+2y=8$ 在 $x+2y=2$ 的右邊。

結論:如果 $ax_1 + by_1 > c$, 則 (x_1, y_1) 必定在 $ax+by=c$ 的右邊。

同理, 如果 $ax_1 + by_1 < c$, 則 (x_1, y_1) 必定在 $ax+by=c$ 的左邊。

在下面, 我們要看 $ax-by>c$ 的點

因為 a 和 b 都是正數, 因此 $ax-by>c$ 的分隔線 $ax-by=c$ 的斜率是正的, 如下圖所示:



$ax-by=c$ 在 x 軸和 y 軸的交點是 x_c 和 y_c , 則 $x_c = \frac{c}{a}$, $y_c = \frac{-c}{b}$

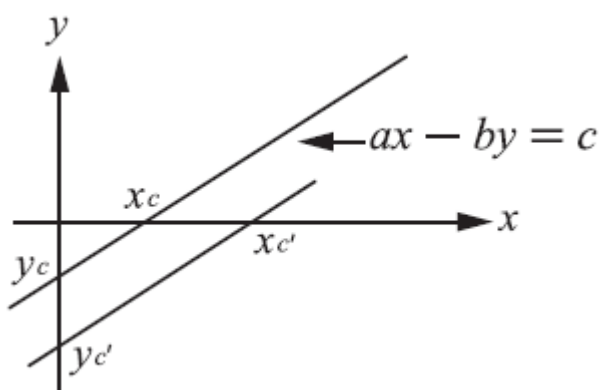
如 (x_1, y_1) 滿足 $ax-by=c$, 則通過 (x_1, y_1) 而與 $ax-by=c$ 平行的直線是 $ax - by = c'$, $c' > c$ 。此時,

$$x_{c'} = \frac{c'}{a}$$

$$y_{c'} = \frac{-c'}{b}$$

因此, 我們可得 $x_{c'} = \frac{c'}{a} > x_c = \frac{c}{a}$, $y_{c'} = \frac{-c'}{b} < y_c = \frac{-c}{b}$

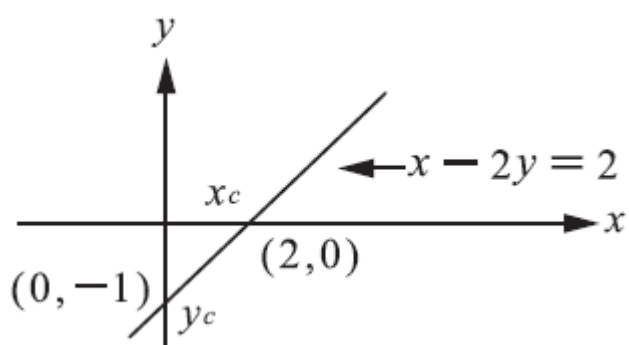
因為 $x_{c'} > x_c$, $y_{c'} < y_c$, $ax - by = c'$ 在 $ax - by = c$ 的右邊 , 如下圖所示 :



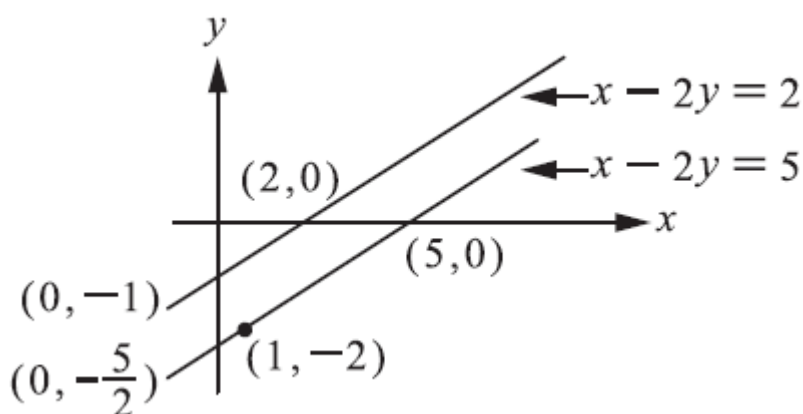
因此 , 我們得到與 $ax + by > c$ 同樣的結論 : 如果 (x_1, y_1) 滿足 $ax - by > c$, 則 (x_1, y_1) 在 $ax - by = c$ 的右邊。

例 : 求滿足 $x - 2y > 2$ 的點

$x - 2y > 2$ 的分隔線是 $x - 2y = 2$, 如下圖所示 :



$(1, -2)$ 滿足 $x - 2y > 2$, 因為 $1 - 2(-2) = 1 + 4 = 5 > 2$ 。通過 $(1, -2)$ 而與 $x - 2y = 2$ 平行的點是 $x - 2y = 5$, $x - 2y = 5$ 在 $x - 2y = 2$ 的右邊。



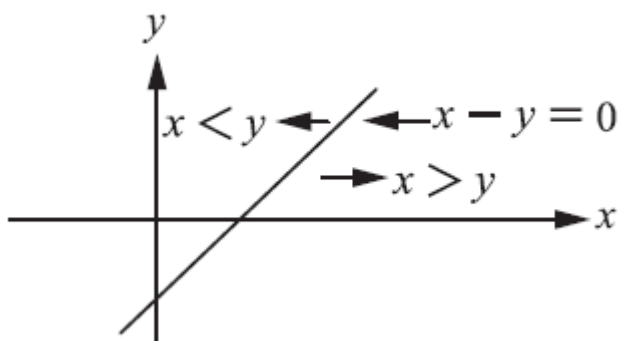
同理，我們可得：

如果 (x_1, y_1) 滿足 $ax - by < c$ ，則 (x_1, y_1) 在 $ax - by = c$ 的左邊。

以下是一些有關二元一次不等式的例子：

(1) 求 $x > y$ 和 $x < y$ 的點

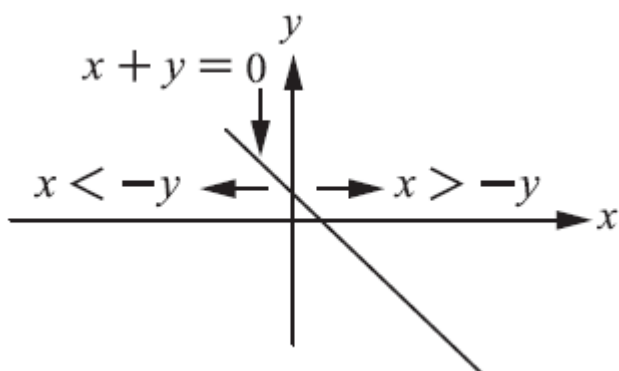
$x > y$ ，則 $x - y > 0$ ，分隔線是 $x - y = 0$ ，請看下圖：



各位可以看出 $(2, 1)$ 、 $(2, -1)$ 、 $(-2, -3)$ 等等，都在 $x - y = 0$ 的右邊，而 $x < y$ 的點 $(1, 2)$ 、 $(-2, 1)$ 、 $(-3, -2)$ 等等，都在 $x - y = 0$ 的左邊。

(2) 求 $x > -y$ 和 $x < -y$ 的點

$x > -y$ ，則 $x+y > 0$ ，分隔線是 $x+y=0$ ，如下圖所示：



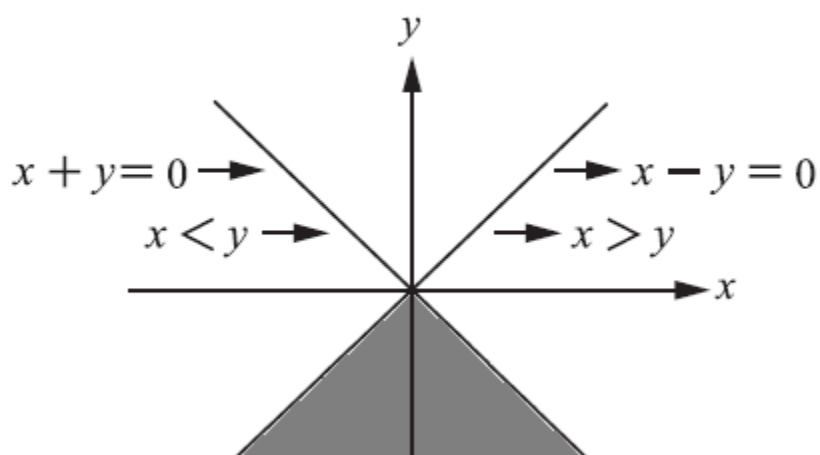
各位可以看出 $(1, 2)$ 、 $(2, -1)$ 、 $(-1, 2)$ 等等，都在 $x+y=0$ 的右邊， $(1, -2)$ 、 $(-2, 1)$ 、 $(-2, -2)$ 等等，都在 $x+y=0$ 的左邊。

(3) 求滿足 $x > y$ 和 $x < -y$ 點的區域

從(1)可知， $x > y$ 在 $x-y=0$ 的右邊

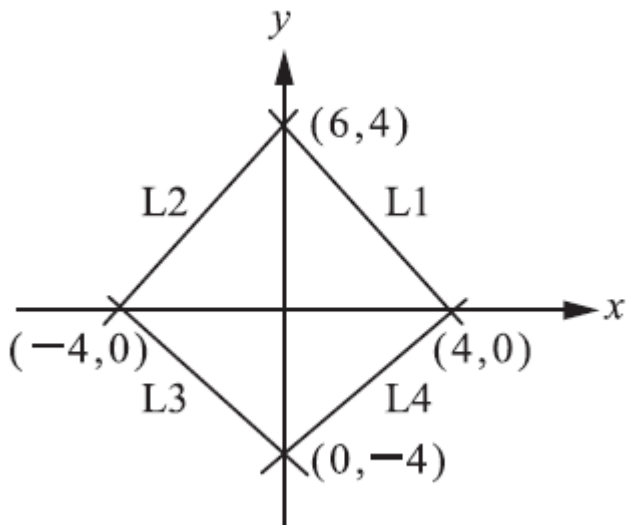
從(2)可知， $x < -y$ 在 $x+y=0$ 的左邊

故此題的答案如下圖所示：



滿足這兩個條件的點有 $(0, 1)$ 、 $(1, -2)$ 、 $(-1, -2)$

(4)請看下圖：



我們可以證明：

$$L1: x+y=4$$

$$L2: x-y=-4$$

$$L3: x+y=-4$$

$$L4: x-y=4$$

我們可以看出任何一在方塊內的點 (x_1, y_1) 必定符合以下的方程式：

$$x+y < 4 \text{ (L1 的左邊)}$$

$$x-y > -4 \text{ (L2 的右邊)}$$

$$x+y > -4 \text{ (L3 的右邊)}$$

$$x-y < 4 \text{ (L4 的左邊)}$$

舉幾個例子：

$(1, 2)$ 在正方形內

$$1+2=3 < 4$$

$$1-2=-1 > -4$$

$$1+2=3 > -4$$

$$1-2=-1 < 4$$

$(2, -1)$ 在正方形內

$$2+(-1)=2-1=1 < 4$$

$$2-(-1)=2+1=3 > -4$$

$$2+(-1)=2-1=1>-4$$

$$2-(-1)=2+1=3<4$$

$(-1, -2)$ 也在正方形內

$$-1+(-2)=-1-2=-3<4$$

$$-1-(-2)=-1+2=1>-4$$

$$-1+(-2)=-1-2=-3>-4$$

$$-1-(-2)=-1+2=1<4$$