**目 錄**

[**第十章 平面座標** 1](#_Toc377745393)

[**10.1節** **直角座標** 1](#_Toc377745394)

[**定義10.1-1 數線與點座標** 1](#_Toc377745395)

[**定義10.1-2 直角座標平面與平面上之點座標** 4](#_Toc377745396)

[**定義10.1-3 象限** 10](#_Toc377745397)

[**習題 10.1** 17](#_Toc377745398)

[**10.2節** **座標平面與幾何性質** 20](#_Toc377745399)

[**定理10.2-1 座標平面上兩點距離公式** 20](#_Toc377745400)

[**定理10.2-2 數線上的分點公式** 23](#_Toc377745401)

[**定理10.2-3 數線上的中點公式** 27](#_Toc377745402)

[**定理10.2-4 座標平面上的分點公式** 30](#_Toc377745403)

[**定理10.2-5座標平面上的中點公式** 33](#_Toc377745404)

[**定理10.2-6座標平面上三角形的重心公式** 39](#_Toc377745405)

[**習題 10.2** 44](#_Toc377745406)

[**本章重點** 47](#_Toc377745407)

[**歷年基測題目** 48](#_Toc377745408)

**第十章 平面座標**

本章介紹座標來表示點的位置關係，以及幾何圖形在座標平面上的一些性質。

* 1. **直角座標**

**定義10.1-1 數線與點座標**

**在直線上取一點，設為原點O，以O點為中心，箭頭方向為正向，箭頭反方向為負向，此直線稱為數線。點座標為此點距離原點O多少單位長度的大小。**

如圖10.1-1，A點在原點O的右方3個單位，A點座標為3，記為A(3)；B點在原點O的左方2個單位，B點座標為－2，記為B(－2)。

**圖10.1-1**

**例題10.1-1**

在圖10.1-2的數線上標出P(－5)，Q(2)，R(3.5)三點的位置。

**圖10.1-2**

**想法：**根據數線與點座標的定義

**圖10.1-2(a)**

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 如圖10.1-2(a)所示P點座標為 －5，記作P(－5)Q點座標為 2，記作Q(2)R點座標為 3.5，記作R(3.5)
 | P點在原點O左方5個單位Q點在原點O右方2個單位R點在原點O右方3.5個單位 |

**例題10.1-2**

如圖10.1-3，數線上有A、B、C、D四個點，其點座標分別為A(－5)、B(－2)、
 C(1)、D(4)，則、、、、、之值各為何？

**圖10.1-3**

**想法：**線段長度就是兩點間的距離

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. ＝(－2)－(－5)＝3 單位

1. ＝1－(－5)＝6 單位

1. ＝4－(－5)＝9 單位

1. ＝1－(－2)＝3 單位

1. ＝4－(－2)＝6 單位

1. ＝4－1＝3 單位

 | 線段長度就是兩點間的距離 ＆已知A(－5)、B(－2)線段長度就是兩點間的距離 ＆已知A(－5)、C(1)線段長度就是兩點間的距離 ＆已知A(－5)、D(4)線段長度就是兩點間的距離 ＆已知B(－2)、C(1)線段長度就是兩點間的距離 ＆已知B(－2)、D(4)線段長度就是兩點間的距離 ＆已知C(1)、D(4) |

**例題10.1-3**

 如圖10.1-4，一數線以右方為正向。在此數線上，A點所表示的數為2，從A點
 先向右移動3單位，再向左移動6單位到達B點，則B點所表示的數為多少？

**圖10.1-4**

**想法：**線段長度就是兩點間的距離

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 如圖10.1-4所示， B點所表示的數 ＝2＋3－6＝－1
 | 已知一數線以右方為正向。A點所表示的數為2，從A點先向右移動3單位，再向左移動6單位到達B點＆ 線段長度就是兩點間的距離 |

**定義10.1-2 直角座標平面與平面上之點座標**

**平面上畫兩相互垂直的數線，兩線交點為原點O，水平的數線叫x軸，箭頭方向為正，箭頭反方向為負，垂直的數線叫做y軸，箭頭方向為正，箭頭反方向為負，這個平面稱為直角座標平面，簡稱座標平面。**

**P點的座標以P(a,b)表示，a為P點與原點O的水平方向距離，叫做P點的x座標或橫座標；b為P點與原點O的垂直方向距離，叫做P點的y座標或縱座標。**

如圖10.1-5中，A(－3,1)表示A點在原點O的左方3個單位，上方1個單位的位置， B(1,2) 表示B點在原點O的右方1個單位，上方2個單位的位置，C(2,-3) 表示C點在原點O的右方2個單位，下方3個單位的位置。

**圖10.1-5**

**例題10.1-4**

 如圖10.1-6，請標示出座標平面上O、A、B、C、D、E、F、G、H九點的座標。

**圖10.1-6**

**想法：**根據直角座標平面點的定義

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. O點座標以O(0,0)表示
2. A點座標以A(2,0)表示
3. B點座標以B(3,2)表示
4. C點座標以C(0,3)表示
5. D點座標以D(－4,3)表示
6. E點座標以E(－3,0)表示
7. F點座標以F(－2,－1)表示
8. G點座標以G(0,－4)表示
9. H點座標以H(2,－3) 表示
 | O點位於x軸原點0上，y軸原點0上A點位於x軸原點右方2個單位，y軸原點0上B點位於x軸原點右方3個單位，y軸原點上方2個單位C點位於x軸原點0上，y軸原點上方3個單位D點位於x軸原點左方4個單位，y軸原點上方3個單位E點位於x軸原點左方3個單位，y軸原點0上F點位於x軸原點左方2個單位，y軸原點下方1個單位G點位於x軸原點0上，y軸原點下方4個單位H點位於x軸原點右方2個單位，y軸原點下方3個單位 |

**例題10.1-5**

如圖10.1-7，請畫一直角座標平面，並在其上標示A(3,5)、B(－2,－3)、C(3,0)、
 D(－3,3)、E(1,－4)、F(0,－2)、G(－4,0)、H(0,3)各點的位置。

 **圖10.1-7**

**想法：**根據直角座標平面點的定義

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. A(3,5)位置如圖10.1-7
2. B(－2,－3)位置如圖10.1-7
3. C(3,0)位置如圖10.1-7
4. D(－3,3)位置如圖10.1-7
5. E(1,－4)位置如圖10.1-7
6. F(0,－2)位置如圖10.1-7
7. G(－4,0)位置如圖10.1-7
8. H(0,3)位置如圖10.1-7
 | A點位於x軸原點右方3個單位，y軸原點上方5個單位B點位於x軸原點左方2個單位，y軸原點下方3個單位C點位於x軸原點右方3個單位，y軸原點0上D點位於x軸原點左方3個單位，y軸原點上方3個單位E點位於x軸原點右方1個單位，y軸原點下方4個單位F點位於x軸原點0上，y軸原點下方2個單位G點位於x軸原點左方4個單位，y軸原點0上H點位於x軸原點0上，y軸原點上方3個單位 |

**例題10.1-6**

 如圖10.1-8，座標平面上有A、B、C、D四個點，且各點座標分別為A(4,3)、
 B(－2,4)、C(－4,－2)、D(3,－4)，則各點與兩座標軸的距離分別為何？

y

x

**圖10.1-8**

**想法：**(1) 根據直角座標平面點的定義

 (2) 線段長度就是兩點間的距離

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. A點到x軸的距離為3 單位、A點到y軸的距離為4 單位；
2. B點到x軸的距離為4 單位、B點到y軸的距離為2 單位；
3. C點到x軸的距離為2 單位、C點到y軸的距離為4 單位；
4. D點到x軸的距離為4 單位、D點到y軸的距離為3 單位。
 | 已知A(4,3) ＆ A點位於x軸上方3個單位，y軸右方4個單位已知B(－2,4) ＆ B點位於x軸上方4個單位，y軸左方2個單位已知C(－4,－2) ＆ C點位於x軸下方2個單位，y軸左方4個單位已知D(3,－4) ＆ D點位於x軸下方4個單位，y軸右方3個單位 |

**例題10.1-7**

如圖10.1-9，直角座標平面上有一矩形ABCD，已知其四個頂點座標分別為
 A(4,3)、B(－3,3)、C(－3,－2)、D(4,－2)，則、、、之值各為何？

y

x

**圖10.1-9**

**想法：**(1) 根據直角座標平面點的定義

 (2) 線段長度就是兩點間的距離

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. ＝4－(－3)＝7 單位

1. ＝3－(－2)＝5單位

1. ＝4－(－3)＝7 單位

1. ＝3－(－2)＝5單位

 | 已知A(4,3)、B(－3,3) ＆為A、B兩點x座標的距離已知B(－3,3)、C(－3,－2) ＆為B、C兩點y座標的距離已知C(－3,－2)、D(4,－2) ＆為C、D兩點x座標的距離已知D(4,－2)、A(4,3) ＆為D、A兩點y座標的距離 |

**例題10.1-8**

如圖10.1-10，直角座標平面上有一點A(3,4)，若自A點出發，向左7個單位到
 達B點，再向下6個單位到達C點，接著向右5個單位到達D點，最後向上4
 個單位到達E點，則B、C、D、E各點的座標為何？

y

x

**圖10.1-10**

**想法：**(1) 根據直角座標平面點的定義

 (2) 線段長度就是兩點間的距離

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. B點座標為(－4,4)
2. C點座標為(－4,－2)
3. D 點座標為(1,－2)
4. E點座標為(1,2)
 | 已知A(3,4) ＆ 自A點出發，向左7個單位到達B點，B點x座標為3－7＝－4，B點y座標仍為4由(1) B(－4,4) ＆ 自B點出發，向下6個單位到達C點，C點x座標仍為－4，C點y座標為4－6＝－2由(2) C(－4,－2) ＆ 自C點出發，向右5個單位到達D點，D點x座標為－4＋5＝1，D點y座標仍為－2由(3) D(1,－2) ＆ 自D點出發，向上4個單位到達E點，E點x座標仍為1，E點y座標為－2＋4＝2 |

**定義10.1-3 象限**

**直角座標平面被x軸和y軸分成四個區域，這四個區域為四個象限，分別為：**

**第一象限：點P(a,b)，a＞0且b＞0；**

**第二象限：點P(a,b)，a＜0且b＞0；**

**第三象限：點P(a,b)，a＜0且b＜0；**

**第四象限：點P(a,b)，a＞0且b＜0；**

**x軸上： 點P(a,b)，b＝0；**

**y軸上： 點P(a,b)，a＝0。**

**如圖10.1-11所示，直角座標平面依逆時針方向，右上方為第一象限，左上方為第二象限，左下方為第三象限，右下方為第四象限，x軸與y軸上的點不屬於任何一象限，。**

**圖10.1-11**

**例題10.1-9**

如圖10.1-12，請判斷P(－1,4)、Q(－2,－3)、R(3,－1)、S(2, 3)、T(0,1)、
 U(0,－2)、V(4,0)、W(－4, 0)各點屬於那一象限。

**圖10.1-12**

**想法：**根據直角座標平面象限的定義

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. P(－1,4)位於第二象限
2. Q(－2,－3)位於第三象限
3. R(3,－1)位於第四象限
4. S(2, 3)位於第一象限
5. T(0,1)在y軸上
6. U(0,－2)在y軸上
7. V(4,0)在x軸上
8. W(－4, 0)在x軸上
 | 根據直角座標平面象限的定義根據直角座標平面象限的定義根據直角座標平面象限的定義根據直角座標平面象限的定義根據直角座標平面象限的定義根據直角座標平面象限的定義根據直角座標平面象限的定義根據直角座標平面象限的定義 |

接下來，讓我們利用直角座標平面的基本觀念，搭配上先前所學平行四邊形的性質，來作以下例題10.1-10~例題10.1-12。

**例題10.1-10**

如圖10.1-13，已知四邊形ABCD為平行四邊形，已知其中三頂點的座標分別為A(3,4)、B(1,1)、C(6,1)，則平行四邊形ABCD的第四個頂點D座標為何？

**圖10.1-13**

**想法：**平行四邊形對邊等長

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. ＝

1. ＝6－1＝5

1. ＝5

1. D點x座標為3＋5＝8D點y座標為4
2. 所以D點座標為(8,4)
 | 已知ABCD為平行四邊形 ＆ 平行四邊形對邊等長已知B(1,1)、C(6,1) ＆ 為B、C兩點x座標的距離由(1) ＆ (2) 遞移律由(3) ＝5 ＆ 已知A(3,4) ＆D點與A點y座標相同由(4) 已證 |

**例題10.1-11**

如圖10.1-14，已知四邊形ABCD為平行四邊形，四頂點的座標分別為A(3,4)、
 B(1,1)、C(6,1)、D(8,4)，則平行四邊形ABCD的面積為何？

**圖10.1-14**

**想法：**平行四邊形面積為底與高之乘積

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 在直角座標平面上畫出此平行四邊形ABCD，過A點作垂直的直線交於E點，如圖10.1-14所示，則E點座標為(3,1)

1. 為平行四邊形ABCD的底，為平行四邊形ABCD的高

1. ＝6－1＝5＝4－1＝3

1. 平行四邊形ABCD面積＝×＝5×3＝15 平方單位

 | 根據已知四邊形ABCD為平行四邊形，四頂點的座標分別為A(3,4)、B(1,1)、C(6,1)、D(8,4)作圖 ＆ 過直線外一點垂直線作圖由(1) 過A點作垂直的直線交於E點，則⊥已知B(1,1)、C(6,1) ＆為B、C兩點x座標的距離已知A(3,4) ＆ (1) E(3,1) 為A、E兩點y座標的距離平行四邊形面積為底與高之乘積 ＆(3) 平行四邊形ABCD的底＝5、 平行四邊形ABCD的高＝3 |

**例題10.1-12**

如圖10.1-15，已知座標平面上有一四邊形ABCD，且此四邊形的頂點座標分別
 為A(－2,2)、B(1,4)、C(5,3)、D(3,－1)，則此四邊形的面積為何？

**圖10.1-15**

**想法：**四邊形ABCD面積＝長方形EFGH的面積 − △AGD面積 − △DHC面積
 − △CEB面積 − △BFA面積

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 在直角座標平面上畫出此四邊形ABCD，過A點作平行y軸的直線、過B點作平行x軸的直線、過C點作平行y軸的直線、過D點作平行x軸的直線，四直線分別相交於E、F、G、H四點，如圖10.1-15所示，則EFGH為長方形，且E點座標為(5,4)、F點座標為(－2,4)、G點座標為(－2,－1)、H點座標為(5,－1)
2. 長方形EFGH之長＝5－(－2)＝7長方形EFGH之寬＝4－(－1)＝5

1. 長方形EFGH的面積 ＝×＝7×5＝35 平方單位

1. ∠E＝∠F＝∠G＝∠H＝90°
2. △CEB、△BFA、△AGD、△DHC 皆為直角三角形
3. 為△CEB的底、為△CEB的高△CEB的底＝5－1＝4△CEB的高＝4－3＝1

1. △CEB面積＝(4×1)÷2＝2 平方單位
2. 為△BFA的底、為△BFA的高△BFA的底＝1－(－2)＝3△BFA的高＝4－2＝2

1. △BFA面積＝(3×2)÷2＝3 平方單位
2. 為△AGD的底、為△AGD的高△AGD的底＝3－(－2)＝5△AGD的高＝2－(－1)＝3

1. △AGD面積＝(5×3)÷2＝7.5 平方單位
2. 為△DHC的底、為△DHC的高△DHC的底＝5－3＝2△DHC的高＝3－(－1)＝4

1. △DHC面積＝(2×4)÷2＝4 平方單位
2. 長方形EFGH的面積 ＝四邊形ABCD面積＋△AGD面積＋ △DHC面積＋△CEB面積＋△BFA面積
3. 四邊形ABCD面積 ＝長方形EFGH的面積－△AGD面積－ △DHC面積－△CEB面積－△BFA面積 ＝(35－7.5－4－2－3) 平方單位 ＝18.5 平方單位
 | 過直線外一點平行線作圖 ＆直角座標平面的x軸與y軸相互垂直，因此和x軸平行的兩直線，與和y軸平行的兩直線互相垂直，所以四邊形EFGH為長方形，且已知A(－2,2)、B(1,4)、C(5,3)、D(3,－1)，故長方形四頂點座標分別為E(5,4)、F(－2,4)、G(－2,－1)、H(5,－1)由(1) G(－2,－1)、H(5,－1) ＆為G、H兩點x座標的距離由(1) G(－2,－1)、F(－2,4) ＆為G、F兩點y座標的距離長方形面積為長與寬之乘積 ＆(2) ＝7、＝5由(1) EFGH為長方形 ＆ 長方形四個內角均為90°由(4) ∠E＝∠F＝∠G＝∠H＝90°由(5) △CEB為直角三角形 ＆由(1) E(5,4) ＆ 已知B(1,4) ＆為B、E兩點x座標的距離由(1) E(5,4) ＆ 已知C(5,3) ＆為C、E兩點y座標的距離三角形面積為底與高乘積的一半 ＆(6) ＝4、＝1由(5) △BFA為直角三角形 ＆由(1) F(－2,4) ＆ 已知B(1,4) ＆為B、F兩點x座標的距離由(1) F(－2,4) ＆ 已知A(－2,2) ＆為A、F兩點y座標的距離三角形面積為底與高乘積的一半 ＆(8) ＝3、＝2由(5) △AGD為直角三角形 ＆由(1) G(－2,－1) ＆已知D(3,－1) ＆為D、G兩點x座標的距離由(1) G(－2,－1) ＆已知A(－2,2) ＆為A、G兩點y座標的距離三角形面積為底與高乘積的一半 ＆(10) ＝5、＝3由(5) △DHC為直角三角形 ＆由(1) H(5,－1) ＆ 已知D(3,－1) ＆為D、H兩點x座標的距離由(1) H(5,－1) ＆ 已知C(5,3) ＆為C、H兩點y座標的距離三角形面積為底與高乘積的一半 ＆(12) ＝2、＝4如圖10.1-15所示，全量等於分量之和由(14) 等量減法公理 ＆ (3) 長方形EFGH面積＝35 平方單位(7) △CEB面積＝2 平方單位、(9) △BFA面積＝3 平方單位、(11) △AGD面積＝7.5 平方單位、(13) △DHC面積＝4 平方單位 |

**習題 10.1**

**習題 10.1-1**

在圖10.1-16的數線上標出P(－6)，Q(－1.5)，R(3)三點的位置。

**圖10.1-16**

**習題 10.1-2**

如圖10.1-17，數線上有A、B、C、D四個點，其點座標分別為A(－6)、B(－3)、
 C(2)、D(5)，則、、、、、之值各為何？

**圖10.1-17**

**習題 10.1-3**

 一數線以右方為正向。在此數線上，A點所表示的數為－2，從A點先向右移動
 4單位，再向左移動6單位到達B點，則B點所表示的數為多少？

**習題 10.1-4**

如圖10.1-18，請標示出座標平面上O、A、B、C、D、E、F、G、H九點的座標，
 並判斷各點所在的位置屬於哪一象限。

**圖10.1-18**

**習題 10.1-5**

座標平面上有A、B、C、D四個點，且各點座標分別為A(3,4)、B(－4,5)、
 C(－3,－2)、D(4,－3)，則各點與兩座標軸的距離分別為何？

**習題 10.1-6**

直角座標平面上有一矩形ABCD，已知其四個頂點座標分別為A(5,2)、
 B(－2,2)、C(－2,－4)、D(5,－4)，則、、、之值各為何？

**習題 10.1-7**

直角座標平面上有一點A(5,3)，若自A點出發，向下6個單位到達B點，再向左9個單位到達C點，接著向上8個單位到達D點，接著向右6個單位到達E點，最後向下4個單位到達F點，則B、C、D、E、F各點的座標為何？

**習題 10.1-8**

已知四邊形ABCD為平行四邊形，已知其中三頂點的座標分別為A(3,4)、
B(－2,4)、C(－4,－2)，則平行四邊形ABCD另一個頂點D的座標為何？

**習題 10.1-9**

已知四邊形ABCD為平行四邊形，四頂點的座標分別為A(3,4)、B(－2,4)、
C(－4,－2)、D(1,－2)，則平行四邊形ABCD的面積為何？

**習題 10.1-10**

已知座標平面上有一四邊形ABCD，且此四邊形的頂點座標分別為A(－3,2)、
B(1,5)、C(4,－3)、D(－1,－4)，則此四邊形的面積為何？

* 1. **座標平面與幾何性質**

本節我將敘述一些座標平面與幾何的相關性，利用幾何性質求座標，利用座標平面來證明幾何定理等。

**定理10.2-1 座標平面上兩點距離公式**

**座標平面上A、B兩點，A點座標為(x1, y1)，B點座標為(x2, y2)，則A、B兩點的距離＝。 ( 即＝ )**

**圖10.2-1**

**已知：**如圖10.2-1，座標平面上A點坐標為(x1, y1)，B點座標為(x2, y2)。

**求證：**A、B兩點的距離****＝**。**
( 即＝ )

**想法：** 利用畢氏定理。

**證明：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 過A點作平行y軸的直線，過B作平行x軸的直線，兩直線交於C點，如圖10.2-1所示，則C點座標為(x1, y2)，且⊥

1. ＝

1. **＝**

1. △ABC為直角三角形2＝2＋2

1. 2＝2＋2

1. ＝ 或＝－

1. 所以＝

 | 過線外一點的平行線作圖 ＆ 已知A點坐標為(x1, y1)，B點座標為(x2, y2)＆ 平行y軸，平行x軸，兩坐標軸相互垂直已知A(x1, y1) ＆ (1) C(x1, y2)＆ 為A、C兩點y座標的距離已知B(x2, y2) ＆ (1) C(x1, y2)＆ 為B、C兩點x座標的距離由(1) ⊥＆畢氏定理由(4) ＆ (2) ＝y1－y2、(3) **＝**x1－x2由(5) 求平方根由(6) ＆ 為線段長度必大於0 |

**Q. E. D.**

**例題10.2-1**

如圖10.2-2，已知座標平面上有一四邊形ABCD，且此四邊形的頂點座標分別為
 A(－4,3)、B(1,4)、C(4,－2)、D(－2,－3)，則此四邊形的周長為何？

**圖10.2-2**

**想法：**座標平面上兩點距離公式

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 在直角座標平面上畫出此四邊形ABCD，如圖10.2-2所示
2. ＝**＝**

1. ＝**＝**

1. ＝**＝**

1. ＝**＝**

1. 四邊形ABCD周長 ＝＋＋＋

 ＝＋＋＋ | 利用已知A(－4,3)、B(1,4)、C(4,－2)、D(－2,－3)作圖已知A(－4,3)、B(1,4) ＆ 兩點距離公式已知B(1,4)、C(4,－2) ＆ 兩點距離公式已知C(4,－2)、D(－2,－3)＆ 兩點距離公式已知D(－2,－3)、A(－4,3)＆ 兩點距離公式周長定義 ＆ (2)~(5) |

**定理10.2-2 數線上的分點公式**

 **數線上有A、B兩點，A點座標為(a)、B點座標為(b)，若有一點C在上，
且：＝m：n，則C點座標為()**

**圖10.2-3(a)**

**圖10.2-3(b)**

**已知：**數線上有A、B兩點，A點座標為(a)、B點座標為(b)，若有一點C在上，且：＝m：n (如圖10.2-3(a)及圖10.2-3(b)所示)

**求證：**C點座標為()

**想法：**(1)線段長度就是兩點間的距離

(2) 比例式中內項乘積等於外項乘積

**證明：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 假設b＞a，且C點座標為(c)，如圖10.2-3(a)，則b＞c＞a
2. ＝c－a

1. ＝b－c

1. (c－a)：(b－c)＝m：n
2. m×(b－c)＝n×(c－a)
3. m×b－m×c＝n×c－n×a
4. m×b＋n×a＝n×c＋m×c
5. n×a＋m×b＝(n＋m)×c
6. c＝
7. 假設a＞b，且C點座標為(c')，如圖10.2-3(b)，則a＞c'＞b
8. ＝a－c'

1. ＝c'－b

1. (a－c')：(c'－b)＝m：n
2. m×(c'－b)＝n×(a－c')
3. m×c'－m×b＝n×a－n×c'
4. m×c'＋n×c'＝n×a＋m×b
5. (m＋n)×c'＝n×a＋m×b
6. c'＝
7. 所以C點座標為()
 | 假設 ＆ 已知A點座標為(a)、B點座標為(b)，且C點在上由(1) c＞a ＆ 已知A點座標為(a)、假設C點座標為(c)由(1) b＞c ＆ 已知B點座標為(b)、假設C點座標為(c)將(2) ＆ (3) 代入已知：＝m：n由(4) ＆ 內項乘積等於外項乘積由(5) 展開由(6) 移項由(7) 等式左邊加法交換律 ＆ 等式右邊乘法分配律提出c由(8) 等量除法公理假設 ＆ 已知A點座標為(a)、B點座標為(b)，且C點在上由(10) a＞c' ＆ 已知A點座標為(a)、假設C點座標為(c')由(10) c'＞b ＆ 已知B點座標為(b)、假設C點座標為(c')將(11) ＆ (12) 代入已知：＝m：n由(13) ＆ 內項乘積等於外項乘積由(14) 展開由(15) 移項由(16) 等式左邊乘法分配律提出c'由(17) 等量除法公理由(9) ＆ (18) 已證 |

 **Q. E. D.**

**例題10.2-2**

如圖10.2-4，數線上有A、B兩點，A點座標為(4)、B點座標為(20)，若有一點C
 在上，且：＝5：3，則C點座標為何？

**圖10.2-4**

**想法：**數線上的分點公式

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. C點座標為 ＝ ＝14
 | 已知A點座標為(4)、B點座標為(20)，點C在上，且：＝5：3 ＆數線上的分點公式，C點座標為 |

**例題10.2-3**

如圖10.2-5，數線上有A、B兩點，A點座標為(－8)、B點座標為(12)，若有一
 點C在上，且：＝7：3，則C點座標為何？

**圖10.2-5**

**想法：**數線上的分點公式

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. C點座標為＝＝6
 | 已知A點座標為(－8)、B點座標為(12)，點C在上，且：＝7：3 ＆數線上的分點公式，C點座標為 |

**例題10.2-4**

 如圖10.2-6，數線上有A、B兩點，A點座標為(－8)、B點座標為(－2)，若有一
 點C在上，且：＝1：2，則C點座標為何？

**圖10.2-6**

**想法：**數線上的分點公式

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. C點座標為＝＝－6
 | 已知A點座標為(－8)、B點座標為(－2)，點C在上，且：＝1：2 ＆數線上的分點公式，C點座標為 |

**定理10.2-3 數線上的中點公式**

 **數線上有A、B兩點，A點座標為(a)、B點座標為(b)；若C點為中點，
 則C點座標為()**

**圖10.2-7**

**已知：**如圖10.2-7，數線上有A、B兩點，A點座標為(a)、B點座標為(b)，且C點為
 中點

**求證：**C點座標為()

**想法：**利用數線上的分點公式來證明

**證明：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 假設C點座標為(c)，如圖10.2-7，：＝1：1

1. c＝**＝**
2. 所以C點座標為()
 | 假設 ＆已知C點為中點已知A點座標為(a)、B點座標為(b) 、(1) 假設C點座標為(c)、：＝1：1＆ 根據數線上的分點公式，c＝由(1) 假設C點座標為(c) ＆ (2) 已證 |

 **Q. E. D.**

**例題10.2-5**

如圖10.2-8，數線上有A、B兩點，A點座標為(4)、B點座標為(20)，則中點
 C的座標為何？



**圖10.2-8**

**想法：**數線上的中點公式

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. C點座標為＝＝12
 | 已知A點座標為(4)、B點座標為(20)，C點為中點 ＆ 數線上的中點公式 |

**例題10.2-6**

如圖10.2-9，數線上有A、B兩點，A點座標為(－8)、B點座標為(12) ，則中
 點C的座標為何？



**圖10.2-9**

**想法：**數線上的中點公式

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. C點座標為＝＝2
 | 已知A點座標為(－8)、B點座標為(12)，C點為中點 ＆ 數線上的中點公式 |

**例題10.2-7**

 如圖10.2-10，數線上有A、B兩點，A點座標為(－8)、B點座標為(－2) ，則
 中點C的座標為何？

**圖10.2-10**

**想法：**數線上的中點公式

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. C點座標為＝＝－5
 | 已知A點座標為(－8)、B點座標為(－2)，C點為中點 ＆ 數線上的中點公式 |

**定理10.2-4 座標平面上的分點公式**

 **座標平面上有A、B兩點，A點座標為(x1, y1)、B點座標為(x2,y2)；若有一點C
 在上，且**：＝m：n**，則C點座標為(,)**

**圖10.2-11**

**已知：**如圖10.2-11，座標平面上有A、B兩點，A點座標為(x1, y1)、B點座標為(x2,y2)；
 若有一點C在上，且：＝m：n

**求證：**C點座標為(,)

**想法：**(1) 利用三角形之平行線截比例線段性質

(2) 利用數線上的分點公式來證明

**證明：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 分別過A、B、C三點作x軸、y軸的垂直線相交於B'、B''、C'、C''四點，如圖10.2-11所示，則：∥、∥；B'座標為(x2,y1)、B''座標為(x1, y2)

1. △ABB'中：＝：

1. ：＝m：n

1. C'點的橫座標為() C'點的縱座標為(y1)因此C'點的座標為(,y1)
2. △ABB''中：＝：

1. ：＝m：n

1. C''點的橫座標為(x1) C''點的縱座標為()因此C''點座標為(x1, )
2. C點的橫座標為() C點的縱座標為()
3. 因此C點的座標為(,)
 | 已知A點座標為(x1, y1)、B點座標為(x2,y2)且C點在上 ＆ 直角坐標平面的x軸與y軸互相垂直 ＆ 垂直於同一直線的兩直線互相平行由(1) △ABB'中，∥＆三角形之平行線截比例線段由(2) ＆ 已知：＝m：n 遞移律C'點縱座標與A、B'兩點的縱座標相同 ＆ 由(3) ：＝m：n、C'點的橫座標可由數線上的分點公式求得 ＆由(1) B'座標為(x2,y1) ＆ 已知A點座標為(x1, y1)由(1) △ABB''中，∥＆三角形之平行線截比例線段由(5) ＆ 已知：＝m：n 遞移律C''點橫坐標與A、B''兩點的橫座標相同 ＆ 由(6) ：＝m：n、C''點的縱座標可由數線上的分點公式求得 ＆由(1) B''座標為(x1, y2) ＆ 已知A點座標為(x1, y1)C點橫座標與C'點橫座標相同 ＆ (4) C'點的橫座標為()C點縱座標與C''點縱座標相同 ＆(7) C''點的縱座標為()由(8)  |

 **Q. E. D.**

**例題10.2-8**

如圖10.2-12，座標平面上有A、B兩點，A點座標為(1,2)、B點座標為(5,4)，若
 上有一點C，且：＝1：3，則C點座標為何？

**圖10.2-12**

**想法：**座標平面上的分點公式

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. C點的橫座標為 ＝ ＝2 C點的縱座標為 ＝ ＝
2. C點座標為(2, )
 | 已知A點座標為(1,2)、B點座標為(5,4)， 且：＝1：3 ＆ 座標平面上的分點公式C點的橫座標為C點的縱座標為由(1) 已證 |

**定理10.2-5座標平面上的中點公式**

**座標平面上有A、B兩點，A點座標為(x1, y1)、B點座標為(x2,y2)；若C點為中點，則C點座標為**

**圖10.2-13**

**已知：**如圖10.2-13，座標平面上有A、B兩點，A點座標為(x1, y1)、B點座標為(x2,y2)；
 若C點為中點

**求證：**C點座標為

**想法：**利用座標平面上的分點公式

**證明：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. ：＝1：1

1. C點橫座標為＝＝
2. C點縱座標為＝＝
3. 所以C點座標為
 | 已知C點為中點已知A點座標為(x1, y1)、B點座標為(x2,y2) ＆(1) ：＝1：1 ＆ 座標平面上的分點公式已知A點座標為(x1, y1)、B點座標為(x2,y2) ＆(1) ：＝1：1 ＆ 座標平面上的分點公式由(2) ＆ (3)  |

 **Q. E. D.**

**例題10.2-9**

如圖10.2-14，座標平面上有A、B兩點，A點座標為(1,2)、B點座標為(5,4)，則
 中點C的座標為何？

**圖10.2-14**

**想法：**座標平面上的中點公式

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. C點的橫座標為＝3 C點的縱座標為＝3
2. C點座標為(3,3)
 | 已知A點座標為(1,2)、B點座標為(5,4) ＆ 座標平面上的中點公式由(1) 已證 |

 接下來，讓我們利用直角座標平面的分點公式，搭配上先前所學平行四邊形的性質與圓的性質，來作以下例題10.2-10、例題10.2-11。

**例題10.2-10**

如圖10.2-15，座標平面上有一平行四邊形ABCD，已知其中三個頂點座標分別
 為A(2,1)、B(6,2)、D(3,5)，則平行四邊形ABCD另一個頂點C的座標為何？

**圖10.2-15**

**想法：**(1) 平行四邊形對角線互相平分

 (2) 座標平面上的中點公式

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 根據題義在直角座標平面上畫出此平行四邊形ABCD，並作兩對角線及，如圖10.2-15所示；則E點為中點、E點為中點

1. E點的橫座標為＝E點的縱座標為＝
2. E點座標為(,)
3. 假設C點座標為(a,b)
4. 中點E座標為(,)

1. ＝ 、 ＝
2. a＝7 、 b＝6
3. 所以C點座標為(7,6)
 | 已知平行四邊形ABCD中，其中三個頂點座標分別為A(2,1)、B(6,2)、D(3,5) ＆平行四邊形對角線互相平分由(1) E點為中點 ＆ 已知B(6,2)、D(3,5)＆ 座標平面上的中點公式由(2) 已證假設已知A(2,1) ＆ (4) 假設C點座標為(a,b) ＆座標平面上的中點公式 ＆ (1) E點為中點由(3) ＆ (5) 由(6) 解一元一次方程式由(4) 假設 ＆ (7) 已證 |

**例題10.2-11**

如圖10.2-16，圓K與座標軸交於原點O(0,0)、點A (－12, 0)　與點B (0,7)，
則圓心K的座標為何？

**圖10.2-16**

**想法：**(1) 通過圓心對弦作垂直線，則此線段必平分此弦

 (2) 數線上的的中點公式

**圖10.2-16(a)**

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 與為圓K之兩弦

1. 過K點作垂直x軸、過K點作垂直y軸，如圖10.2-16(a)；則C點為之中點、D點為之中點

1. C點橫座標為＝－6C點縱座標為0
2. C點座標為(－6,0)
3. D點橫座標為0D點縱座標為＝
4. D點座標為(0,)
5. 圓心K的座標為(－6,)
 | 已知圓K與座標軸交於原點O(0,0)、點A (－12,0)與點B (0,7)通過圓心對弦作垂直線，則此線段必平分此弦(詳見定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理)由(2) C點為之中點 ＆ O(0,0)、A (－12,0)皆在x軸上 ＆ 數線上的中點公式由(3) 已證由(2) D點為之中點 ＆ O(0,0)、B (0,7)皆在y軸上 ＆ 數線上的中點公式由(5) 已證K點橫坐標與C點橫座標相同、K點縱座標與D點縱座標相同 ＆ (4) C點座標為(－6,0)、(6) D點座標為(0,)已證 |

**定理10.2-6座標平面上三角形的重心公式**

 **座標平面上有一**△ABC**，其頂點A點座標為(x1, y1)、B點座標為(x2,y2)、C點座
標為(x3,y3)；若G點為**△ABC**重心，則G點座標為**

**圖10.2-17**

**已知：**如圖10.2-17，座標平面上有一△ABC，其頂點A點座標為(x1, y1)、B點座標
 為(x2,y2)、C點座標為(x3,y3)，且G點為△ABC重心

**求證：**G點座標為

**想法：**利用座標平面上的分點與中點公式

**證明：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 作△ABC重心G點，如圖10.2-17則D點為之中點、 ：＝2：1

1. D點座標為
2. G點橫坐標為 ＝ ＝
3. G點縱座標為 ＝ ＝
4. 所以G點座標為
 | 尺規作圖 ＆ 三角形重心為三中線之交點 ＆ 重心到頂點的距離為中線長的已知B點座標為(x2,y2)、C點座標為(x3,y3) ＆(1) D點為之中點 ＆ 座標平面上的中點公式已知A點座標為(x1, y1) ＆ (2) D點座標為 ＆ (1) ：＝2：1 ＆座標平面上的分點公式已知A點座標為(x1, y1) ＆ (2) D點座標為 ＆ (1) ：＝2：1 ＆座標平面上的分點公式由(3) ＆ (4)  |

 **Q. E. D.**

**例題10.2-12**

 如圖10.2-18，座標平面上有一△ABC，其頂點A點座標為(4,6)、B點座標為(2,1)、
 C點座標為(6,2)，則△ABC重心G點座標為何？

**圖10.2-18**

**想法：**座標平面上三角形的重心公式

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. G點橫坐標為＝4G點縱座標為＝3
2. 所以G點座標為(4,3)
 | 已知A點座標為(4,6)、B點座標為(2,1)、C點座標為(6,2) ＆ 座標平面上三角形的重心公式由(1) 已證 |

在本章的最後，讓我們將圓搬到直角座標平面上，利用圓的性質以及畢氏定理來
作以下例題10.2-13。

**例題10.2-13**

 如圖10.2-19，圓P的圓心在x軸上，且圓P與x軸相交於A ( 24 , 0 )，且與y軸
 相交於B ( 0 , 12 )，則圓心P的座標為何？

**圖10.2-19**

**想法：**(1) 同圓半徑相等

 (2) 畢氏定理

**圖10.2-19(a)**

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 假設圓心P點座標為(a,0)，作，如圖10.2-19(a)；則＝a

1. ＝24 、 ＝12

1. ＋＝

1. ＝－＝24－a

1. ＝＝24－a

1. △BOP為直角三角形2＋2＝2

1. (12)2＋a2＝(24－a)2
2. a＝9
3. 所以圓心P的座標為(9,0)
 | 已知圓P的圓心在x軸上 ＆ 作圖已知圓P與x軸相交於A ( 24 , 0 )，且與y軸相交於B ( 0 , 12 )全量等於分量之和由(3) 等量減法公理 ＆ (2) ＝24 、 (1) ＝a同圓半徑相等 ＆ (4) ＝24－a直角坐標平面兩座標軸互相垂直 ＆畢氏定理將(2) ＝12、(1) ＝a、(5) ＝24－a代入(6) 2＋2＝2由(7) 解一元二次方程式由(1) 假設圓心P點座標為(a,0) ＆ (8) a＝9 已證 |

**習題 10.2**

**習題10.2-1**

已知座標平面上有一四邊形ABCD，且此四邊形的頂點座標分別為A(2,4)、
B(－4,1)、C(－1,－4)、D(4,－3)，則此四邊形的周長為何？

**習題10.2-2**

數線上有A、B兩點，A點座標為(1)、B點座標為(31)，若有一點C在
 上，且：＝2：3，則C點座標為何？

**習題10.2-3**

數線上有A、B兩點，A點座標為(－10)、B點座標為(20)，若有一點C在
 上，且：＝3：7，則C點座標為何？

**習題10.2-4**

數線上有A、B兩點，A點座標為(－41)、B點座標為(－11)，若有一點C
 在上，且：＝4：1，則C點座標為何？

**習題10.2-5**

數線上有A、B兩點，A點座標為(1)、B點座標為(31)，則中點C的座標
 為何？

**習題10.2-6**

數線上有A、B兩點，A點座標為(－10)、B點座標為(20) ，則中點C
 的座標為何？

**習題10.2-7**

數線上有A、B兩點，A點座標為(－41)、B點座標為(－11) ，則中點C
 的座標為何？

**習題10.2-8**

座標平面上有A、B兩點，A點座標為(－1,2)、B點座標為(3,5)，若上有
 一點C，且：＝5：3，則C點座標為何？

**習題10.2-9**

座標平面上有A、B兩點，A點座標為(－1,2)、B點座標為(3,5)，則中點
 C的座標為何？

**習題10.2-10**

座標平面上有一平行四邊形ABCD，已知其中三個頂點座標分別為A(1,2)、
 B(5,4)、D(2,6)，則平行四邊形ABCD另一個頂點C的座標為何？

**習題10.2-11**

如圖10.2-20，圓K與座標軸交於原點O(0,0)、點A (－6, 0)　與點B (0,8)，則圓
心K的座標為何？

y

x

**圖10.2-20**

**習題10.2-12**

 座標平面上有一△ABC，其頂點A點座標為(6,7)、B點座標為(1,2)、C點座
標為(5,1)，則△ABC重心G點座標為何？

**習題10.2-13**

如圖10.2-21，圓P的圓心在x軸上，且圓P與x軸相交於A ( 8 , 0 )，且與y軸
相交於B ( 0 , 4 )，則圓心P的座標為何？

y

x

**圖10.2-21**

**本章重點**

**1.** 認識數線與點座標。

**2.** 數線上的分點公式。

**3.** 數線上的中點公式。

**4.** 認識直角座標平面與象限。

**5.** 座標平面上兩點距離公式。

**6.** 座標平面上的分點公式。

**7.** 座標平面上的中點公式。

**8.** 座標平面上三角形的重心座標。

**歷年基測題目**

1. 如圖10.1，在座標平面上，△ABC為直角三角形，∠B＝90°，垂直x軸，M為△ABC的外心。若A點座標為(3,4)，M點座標為(−1,1)，則B點座標為何？**(98-1)**(A) (3,－1) (B) (3,－2) (C) (3,－3) (D) (3,－4)

**圖10.1**

**解答：**(B) (3,－2)

**想法：** (1) 直角三角形外心在斜邊中點

 (2) 座標平面上中點公式

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. B點橫座標與A點橫座標相同；B點縱座標與C點縱座標相同
2. 假設C點座標為(a,b)，則為直角△ABC之斜邊，且M點為中點

1. 中點座標為(,)

1. (−1,1)＝(,)
2. −1＝ ＆ 1＝
3. a＝2×(－1)－3＝－5 ＆b＝2×1－4＝－2
4. C點座標為(－5,－2)
5. B點橫座標為(3) ＆ B點縱座標為(－2)
6. 所以B點座標為(3,－2)，本題選(B)
 | 已知∠B＝90°假設 ＆ 已知△ABC為直角三角形，∠B＝90° ＆ 已知M為直角△ABC的外心 ＆ 直角三角形外心在斜邊中點已知A點座標為(3,4) ＆ (1) 假設C點座標為(a,b) ＆ 座標平面上中點公式由(2) M點為中點 ＆ 已知M點座標為(−1,1) ＆ (3) 中點座標為(,)由(4) 縱座標相等且橫座標相等由(5) 解a的一元一次方程式 ＆解b的一元一次方程式由(2) 假設C點座標為(a,b) ＆ (6) a＝－5、b＝－2由(1) B點橫座標與A點橫座標相同；B點縱座標與C點縱座標相同 ＆ 已知A點座標為(3,4)、(7) C點座標為(－5,－2)由(8) |