**習題4.1**

**習題4.1-1：**

 △ABC中，若∠A＝30°，∠B＝60°，則△ABC為　　　　三角形。

 （填銳角、直角、鈍角）

**想法：**(1) 三角形三內角和180°

 (2) 銳角、直角、鈍角三角形的判別

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. ∠A＋∠B＋∠C＝180°
2. ∠C＝180°－(∠A＋∠B)
3. ∠C＝180°－(30°＋60°)＝90°
4. △ABC為直角三角形
 | 三角形內角和180°由(1) 等量減法公理由(2) ＆ 已知∠A＝30°，∠B＝60°由(3) ∠C＝90° 已證 |

**習題4.1-2：**

△ABC中，若∠A＝（3x－14）°，∠B＝95°，∠C＝（2x＋9）°，求∠A、∠C。

**想法：**三角形三內角和180°

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. ∠A＋∠B＋∠C＝180°
2. （3x－14）°＋95°＋（2x＋9）°＝180°
3. x＝18
4. ∠A＝（3x－14）°＝40°
5. ∠C＝（2x＋9）°＝45°
 | 三角形內角和180°由(1)＆已知∠A＝（3x－14）°，∠B＝95°，∠C＝（2x＋9）°由(2)解一元一次方程式由(3)＆已知∠A＝（3x－14）°由(3)＆已知∠C＝（2x＋9）° |

**習題4.1-3：**

△ABC中，∠C＝80°，若∠A的度數是∠B的3倍，求∠A、∠B。

**想法：**三角形內角和180°

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. ∠A＋∠B＋∠C＝180°
2. ∠A＋∠B＝180°－∠C＝100°
3. ∠A＝3∠B
4. 3∠B＋∠B＝100°
5. ∠B＝25°
6. ∠A＝3∠B＝75°
 | 三角形內角和180°由(1) 等量減法公理 ＆∠C＝80°已知∠A的度數是∠B的3倍將(3)代入(2)由(4) 解一元一次方程式將(5)代入(3) |

**習題4.1-4：**

△ABC中，若∠A＝110°，2∠B＝3∠C，求∠B、∠C。

**想法：**三角形三內角和180°

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. ∠A＋∠B＋∠C＝180°
2. ∠B＋∠C＝180°－∠A＝70°
3. ∠B＝∠C
4. ∠C＋∠C＝70°
5. ∠C＝28°
6. ∠B＝42°
 | 三角形內角和180°由(1) 等量減法公理 ＆∠A＝110°已知2∠B＝3∠C將(3)代入(2)由(4) 解一元一次方程式將(5)代入(3) |

**習題4.1-5：**

已知一等腰三角形的頂角為110度，則底角為 度。

**想法：**(1) 三角形三內角和180°

 (2) 等腰三角形兩底角相等

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 假設等腰三角形兩底角皆為x°
2. 110°＋x°＋x°＝180°
3. x＝35
4. 底角為35°
 | 等腰三角形的兩底角相等三角形內角和180°由(2)＆解一元一次方程式由(1)＆(3) |

**習題4.1-6：**

已知一等腰三角形的底角為70度，則頂角為 度。

**想法：**(1) 三角形三內角和180°

 (2) 等腰三角形兩底角相等

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 假設頂角為x°
2. 等腰三角形兩底角皆為70°
3. x°＋70°＋70°＝180°
4. x＝40
5. 頂角為40°
 | 假設等腰三角形的兩底角相等三角形內角和180°由(3) ＆ 解一元一次方程式由(1) ＆ (4) |

**習題4.1-7：**

已知一等腰三角形的頂角為50度，底角為（3x＋5）度，則x＝ ，
底角為 度。

**想法：**(1) 三角形內角和180°

 (2) 等腰三角形兩底角相等

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 三角形兩底角皆為（3x＋5）°
2. 50°＋（3x＋5）°＋（3x＋5）°＝180°
3. x＝20
4. 底角為（3x＋5）°＝65°
 | 等腰三角形的兩底角相等三角形內角和180°＆頂角為50°，底角為（3x＋5）°由(2)＆解一元一次方程式由(3)＆底角為（3x＋5）° |

**習題4.1-8：**

一等腰三角形，已知其中一個內角為50度，則此三角形中大於50度的內角
 為 度。

**想法：**(1) 等腰三角形中，頂角＝180°－2倍底角

 (2) 等腰三角形中，底角＝(180°－頂角)÷2

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 假設50°為頂角
2. 兩底角皆為(180°－50°)÷2＝65°
3. 假設50°為底角
4. 頂角＝180°－2×50°＝80°
5. 所以內角大於50度的角度為65°或80°
 | 假設等腰三角形的兩底角相等 ＆等腰三角形中，底角＝(180°－頂角)÷2假設等腰三角形中，頂角＝180°－2倍底角由(2) ＆ (4)  |

**習題4.1-9：**

如圖4.1-34，△ABC中，∠ABC與∠ACB的角平分線交於P點，若
 ∠ABC＝38°，∠ACB＝72°，求：

 (1)∠1、∠2。 (2)∠BPC。

**圖4.1-34**

**想法：**三角形三內角和180°

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. ∠1＝38°÷2＝19°
2. ∠2＝72°÷2＝36°
3. ∠BPC＋∠1＋∠2＝180°
4. ∠BPC＝180°－(∠1＋∠2)＝125°
 | 已知為∠ABC的角平分線已知為∠ACB的角平分線三角形內角和180°將(1)＆(2)代入(3) |

**習題4.1-10：**

如圖4.1-35，△ABC △PQR，且A和P、B和Q、C和R是三組對應頂點。

 若∠B＝55°，∠C＝100°，＝20公分，求：

 (1)∠A及∠R。 (2) 。

**圖4.1-35**

**想法：**(1) 三角形三內角和180°

 (2) 兩三角形全等，則對應邊、對應角相等

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. ∠A＝180°－(55°＋100°)＝25°

(2) ∠R＝∠C＝100°(3) ＝＝20公分 | 三角形之內角和180° ＆已知∠B＝55°，∠C＝100°已知△ABC △PQR，對應角相等已知△ABC △PQR，對應邊相等 |

**習題4.1-11：**

 如圖4.1-36，直線L⊥L1於P點，且交L2於Q點，截線M分別交L、L1、
 L2於A、B、C三點，已知同位角∠1、∠2均為35°，

 (1) 利用「三角形的內角和為180°」，求∠3。

 (2) 直線L1與L2是否平行？

**圖4.1-36**

**想法：**(1) 三角形三內角和180°

 (2) 若兩直線同時垂直另一直線，則此兩直線互相平行

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. ∠APB＝90°
2. △APB中，∠A＋∠1＋∠APB＝180°
3. ∠A＝180°－(∠1＋∠APB)＝55°
4. △AQC中，∠3＋∠A＋∠2＝180°
5. ∠3＝180°－(∠A＋∠2)＝90°
6. L⊥L2
7. L1∥L2
 | 已知L⊥L1三角形內角和180°由(2) ＆∠APB＝90° ＆∠1＝35°三角形內角和180°由(5) ＆∠A＝55° ＆ ∠2＝35°由(5) ∠3＝90° 已證L⊥L1 ＆ L⊥L2 |

**習題4.1-12：**

**圖4.1-37**

**已知：**如圖4.1-37，△ABC中，∠B＝∠C，平分∠BAC。

**試證：**⊥。

**想法一：**(1) 若證得∠ADB＝∠ADC＝90°，則可知⊥；

 (2) 若證得△ADB △ADC，則可知∠ADB＝∠ADC；

 (3) 已知判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱A.A.S.三角形全等定理

**證明一：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. △ABC為等腰三角形
2. ＝

1. △ADB與△ADC中， ∠B＝∠C ＝ ∠BAD＝∠CAD

1. △ADB △ADC

1. ∠ADB＝∠ADC
2. ∠ADB＋∠ADC＝180°
3. ∠ADC＋∠ADC＝180°∠ADC＝90°
4. 所以∠ADB＝∠ADC＝90°
5. 所以⊥

 | 已知∠B＝∠C ＆ 兩底角相等為等腰三角形由(1) ＆ 等腰三角形兩腰等長如圖4.1-37所示已知∠B＝∠C由(2) ＝ 已證已知平分∠BAC由(3) A.S.A.三角形全等定理由(4) ＆ 對應角相等如圖4.1-37，∠BDC為一平角將(5) 代入(6) 得解一元一次方程式由(5) ＆ (7)由(8) |

**想法二：**等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊

**證明二：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. △ABC為等腰三角形(∠BAC為頂角，為底邊)

1. 所以⊥

 | 已知∠B＝∠C ＆ 兩底角相等為等腰三角形由(1) ＆ 已知平分∠BAC等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊 |

**習題4.1-13：**

**圖4.1-38**

**已知：**如圖4.1-38，△ABC中，∠ABC＝∠ACB，平分∠ABC，平分∠ACB。

**試證：**＝。

**想法：**(1) 若證得△BCF為等腰三角形，則可知＝；

 (2) 兩底角相等為等腰三角形。

**證明：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. ∠DBC＝∠ABC
2. ∠ECB＝∠ACB
3. 所以∠DBC＝∠ABC＝∠ACB＝∠ECB
4. 所以△BCF為等腰三角形
5. ＝

 | 已知平分∠ABC已知平分∠ACB由(1) ＆ (2) ＆ 已知∠ABC＝∠ACB由(3) ∠DBC＝∠ECB ＆兩底角相等為等腰三角形由(4) ＆ 等腰三角形兩腰等長 |

**習題4.1-14：**

**圖4.1-39**

**已知：**如圖4.1-39，△ABC △EFG，∠ABC＝∠EFG，∠C＝∠G，平分

 ∠ABC，平分∠EFG。

**試證：**＝。

**想法：**(1) 若證得△CDB △GHF，則可知＝；

 (2) 已知判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱A.A.S.三角形全等定理

**證明：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. △CDB與△GHF中∠C＝∠G ＝∠DBC＝∠HFG

1. 所以△CDB △GHF

1. ＝

 | 如圖4.1-39所示已知∠C＝∠G已知△ABC △EFG ＆ 對應邊相等已知∠ABC＝∠EFG ＆ 平分∠ABC、平分∠EFG，由(1) ＆ A.S.A.三角形全等定理對應邊相等 |

**習題4.1-15：**

**圖4.1-40**

**已知：**如圖4.1-40，＝，平分∠EAC。

**試證：**∥。

**想法：**判斷兩直線平行的方法有：

1. 內錯角相等的兩線平行
2. 同位角相等的兩線平行
3. 同側內角互補的兩線平行

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. △ABC為等腰三角形
2. ∠B＝∠C
3. △ABC中，∠EAC＝∠B＋∠C
4. 所以∠EAC＝∠C＋∠C＝2∠C
5. ∠DAC＝∠EAC＝∠C
6. 所以∥

 | 已知＝ ＆ 兩腰等長為等腰三角形由(1) ＆ 等腰三角形兩底角相等三角形外角等於內對角的和將(2) 代入 (3)已知平分∠EAC ＆ (4)∠EAC＝2∠C由(5) ∠DAC＝∠C ＆ 內錯角相等，兩直線平行定理 |

**習題4.1-16：**

**圖4.1-41**

**已知：**如圖4.1-41，＝，平分∠CBE，平分∠BCF。

**試證：**＝。

**想法：**若證得△BCD為等腰三角形，則可得知＝

**證明：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. △ABC為等腰三角形
2. ∠ABC＝∠ACB
3. ∠CBE＝∠BCF
4. ∠CBD＝∠CBE
5. ∠BCD＝∠BCF
6. 所以∠CBD＝∠BCD
7. △BCD為等腰三角形
8. 所以＝

 | 已知＝ ＆ 兩腰等長為等腰三角形由(1) ＆ 等腰三角形兩底角相等由(2) ＆ 等角的補角相等已知平分∠CBE已知平分∠BCF由(3) ＆ (4) ＆ (5) 遞移律由(6) ＆ 兩底角相等為等腰三角形由(7) ＆ 等腰三角形兩腰等長 |

**習題4.1-17：**

 如圖4.1-42，△ABC與△PQR中，∠A＝∠P＝40°，∠B＝∠Q＝45°，
 ＝＝8公分，若＝9公分。求＝？

**圖4.1-42**

**想法：**已知判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱A.A.S.三角形全等定理

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. △ABC與△PQR中 ∠A＝∠P＝40° ∠B＝∠Q＝45° ＝

1. △ABC △PQR

1. ＝＝9公分

 | 如圖4.1-42已知已知已知由(1) A.A.S.三角形全等定理對應邊相等 ＆ ＝9公分 |

**習題4.1-18：**

**圖4.1-43**

**已知：**如圖4.1-43，△ABC中，∠B＝∠C，D為之中點，E為之中點，

 ⊥，⊥。

**試證：**＝。

**想法：**(1) 若證得△BDF △CEG，則可知＝；

 (2) 已知判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱A.A.S.三角形全等定理

**證明：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. △ABC為等腰三角形
2. ＝

1. 所以＝

1. 在△BDF與△CEG中∠DFB＝∠EGC＝90°∠B＝∠C＝

1. 所以△BDF △CEG

1. ＝

 | 已知∠B＝∠C ＆ 兩底角相等為等腰三角形由(1) ＆ 等腰三角形兩腰等長已知D為之中點，E為之中點 ＆ (2) ＝如圖4.1-43所示已知⊥，⊥ 已知∠B＝∠C由(3) ＝已證由(4) ＆ A.A.S.三角形全等定理對應邊相等 |

**習題4.1-19：**

**圖4.1-44**

**已知：**如圖4.1-44，△ABC中，＝，∠B＝∠C，⊥，⊥。

**試證：**＝。

**想法：**(1) 若證得△BDE △CDF，則可知＝；

 (2) 已知判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱A.A.S.三角形全等定理

**證明：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 在△BDE與△CDF中∠BED＝∠CFD＝90°∠B＝∠C＝

1. 所以△BDE △CDF

1. ＝

 | 如圖4.1-44所示已知⊥，⊥已知∠B＝∠C已知＝由(1) ＆ A.A.S.三角形全等定理對應邊相等 |

**習題4.1-20：**

**圖4.1-45**

 如圖4.1-45，已知△ABC為等腰三角形，∠B＝∠C，平分∠A，若＝

18，則：(1)∠BDA＝？ (2) ＝？

**想法：**等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. ⊥，＝

1. ∠BDA＝90°
2. ＝＋

1. 18＝＋

1. ＝18÷2＝9

 | 已知△ABC為等腰三角形，∠B＝∠C，平分∠A ＆ 等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊由(1) ⊥全量等於分量之和由(3) ＆ 已知＝18 ＆ (1) ＝由(4) 解一元一次方程式 |

**習題4.1-21：**

如圖4.1-46，△ABC中，∠B＝50°，∠C＝60°，若為∠BAC的角平分
 線，求∠1。

**圖4.1-46**

**想法：**(1) 三角形三內角和等於180°

 (2) 三角形的任一外角等於兩個內對角和

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. △ABC中，∠BAC＋∠B＋∠C＝180°
2. ∠BAC＝180°－(∠B＋∠C)＝70°
3. ∠DAC＝70°÷2＝35°
4. △ABC中，∠1＝∠C＋∠DAC
5. ∠1＝60°＋35°＝95°
 | 三角形內角和定理由(2) ＆∠B＝50° ＆∠C＝60°已知為∠BAC的角平分線三角形的外角等於兩個內對角和由(4) ＆∠C＝60° ＆∠DAC＝35° |

**習題4.1-22：**

 如圖4.1-47，已知∠B＝36°，∠ACD＝100°，∠D＝27°，則∠1＝ 度，

 ∠2＝ 度。

**圖4.1-47**

**想法：**三角形的任一外角等於兩個內對角和

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. △ABC中，∠ACD＝∠1＋∠B
2. ∠1＝∠ACD－∠B＝64°
3. △CDE中，∠2＝∠ACD＋∠D
4. ∠2＝100°＋27°＝127°
 | 三角形的外角等於兩個內對角和由(1) ＆∠ACD＝100° ＆∠B＝36°三角形的外角等於兩個內對角和由(3) ＆∠ACD＝100° ＆∠D＝27° |

**習題4.1-23：**

 如圖4.1-48，已知∠A＝55°，∠ABD＝42°，∠DCE＝38°，則∠1＝ 度，

∠2＝ 度。

**圖4.1-48**

**想法：**三角形的任一外角等於兩個內對角和

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. △ABD中，∠1＝∠A＋∠ABD
2. ∠1＝55°＋42°＝97°
3. △CDE中，∠2＝∠1＋∠DCE
4. ∠2＝97°＋38°＝135°
 | 三角形的外角等於兩個內對角和由(1) ＆∠A＝55° ＆∠ABD＝42°三角形的外角等於兩個內對角和由(3) ＆∠1＝97° ＆∠DCE＝38° |

**習題4.1-24：**

 如圖4.1-49，已知、交於E點，∠A＝40°，∠B＝45°，∠D＝55°，則∠C＝　　度。

**圖4.1-49**

**想法：**三角形的任一外角等於兩個內對角和

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. △ABE中，∠AEC＝∠A＋∠B
2. △CDE中，∠AEC＝∠C＋∠D
3. ∠A＋∠B＝∠C＋∠D
4. ∠C＝∠A＋∠B－∠D＝30°
 | 三角形的外角等於兩個內對角和三角形的外角等於兩個內對角和由(1) ＆ (2)遞移律由(3) ＆∠A＝40°，∠B＝45°，∠D＝55° |

**習題4.1-25：**

如圖4.1-50，已知與相交於E點，若∠A＝70°，∠B＝4x°，∠C＝（x＋10）°，∠D＝2x°，求x。

**圖4.1-50**

**想法：**三角形的任一外角等於兩個內對角和

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. △ACE中，∠AED＝∠A＋∠C
2. △BDE中，∠AED＝∠B＋∠D
3. ∠A＋∠C＝∠B＋∠D
4. 70°＋(x＋10) °＝4x°＋2x°
5. x＝16
 | 三角形的外角等於兩個內對角和三角形的外角等於兩個內對角和由(1) ＆ (2)遞移律由(3) ＆ 已知∠B＝4x°，∠C＝（x＋10）°，∠D＝2x°，由(4) 解一元一次方程式 |

**習題4.1-26：**

 如圖4.1-51，已知∠B＝24°，∠C＝32°，∠D＝36°，∠E＝38°，則∠A＝ 度。

**圖4.1-51**

**想法：**(1) 三角形三內角和等於180°

 (2) 三角形的任一外角等於兩個內對角和

**圖4.1-51(a)**

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 連接C點與D點，如圖4.1-51(a)所示
2. △BEF中，∠BFC＝∠B＋∠E
3. △CDF中，∠BFC＝∠FCD＋∠FDC
4. ∠B＋∠E＝∠FCD＋∠FDC
5. △ACD中，∠A＋∠ACD＋∠ADC＝180°
6. ∠A＋(∠ACE＋∠FCD)＋(∠ADB＋∠FDC)＝180°
7. ∠A＋∠ACE＋∠ADB＋(∠FCD＋∠FDC)＝180°
8. ∠A＋∠ACE＋∠ADB＋(∠B＋∠E)＝180°
9. ∠A＝180°－(∠ACE＋∠ADB＋∠B＋∠E)＝50°
 | 兩點可決定一直線三角形的外角等於兩個內對角和三角形的外角等於兩個內對角和由(2) ＆ (3) 遞移律如圖4.1-51(a)所示三角形內角和定理由(5)由(6) ＆ 加法交換律由(7) ＆ (4)由(8) ＆ 已知 |

**習題4.1-27：**

 如圖4.1-52，△ABC中，∠1、∠2、∠3分別為∠BAC、∠ABC、∠ACB的外角，若∠1＝68°，∠2＝134°，求∠3。

**圖4.1-52**

**想法：**三角形三個角的外角和等於360°

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. △ABC中，∠1＋∠2＋∠3＝360°
2. ∠3＝360°－(∠1＋∠2)＝158°
 | 三角形的外角和定理由(1) ＆已知∠1＝68°，∠2＝134° |

**習題4.1-28：**

 如圖4.1-53，△ABC中，∠1、∠2、∠3分別為∠BAC、∠ABC、∠ACB

的一組外角，若∠ACB＝160°，求∠1＋∠2。

**圖4.1-53**

**想法：**三角形三個角的外角和等於360°

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. △ABC中，∠3＝180°－∠ACB＝20°
2. △ABC中，∠1＋∠2＋∠3＝360°
3. ∠1＋∠2＝360°－∠3 ＝360°－20° ＝340°
 | 三角形外角定義 ＆∠ACB＝160°三角形的外角和定理由(2) 等量減法公理 ＆ (1) ∠3＝20° |

**習題4.2**

**習題4.2-1**



**圖4.2-14**

**已知：**如圖4.2-14，△ABC中，＝，⊥，⊥。

**試證：**∠1＝∠BAC。

**想法：**判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱A.A.S.三角形全等定理
5. 直角三角形斜邊及一股全等定理，又稱R. H. S.三角形全等定理

**證明：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 令交於G點，如圖4.2-14(a)所示

1. △AGE中，∠AGB＝∠DAC＋∠AEB ＝∠DAC＋90°
2. △BGD中，∠AGB＝∠1＋∠ADB ＝∠1＋90°
3. 所以∠1＋90°＝∠DAC＋90° 所以∠1＝∠DAC
4. 在△BDA與△CDA中∠BDA＝∠CDA＝90°＝＝

1. 所以△BDA △CDA

1. ∠DAB＝∠DAC
2. 所以∠DAC＝∠BAC
3. ∠1＝∠BAC
 | 不互相平行的兩直線必有一交點 **圖4.2-14(a)**三角形外角等於內對角的和已知⊥，∠AEB＝90°三角形外角等於內對角的和已知⊥，∠ADB＝90°由(2) ＆ (3) 遞移律等式兩邊同減90°如圖4.2-14(a)所示已知⊥共同邊已知＝由(5) ＆ R. H. S.三角形全等定理對應角相等由(7) ∠DAB＝∠DAC ＆∠DAB＋∠DAC＝∠BAC由(4) ∠1＝∠DAC ＆ (8) ∠DAC＝∠BAC 遞移律 |

**習題4.2-2**

**圖4.2-15**

**已知：**如圖4.2-15，△ABC中，＝，⊥，⊥，＝。

**試證：**＝。

**想法：**(1) 若證得△ABC為等腰三角形，則可得知＝；

 (2) 若證得∠B＝∠C，則可得知△ABC為等腰三角形；

 (3) 若證得△BDE △CDF，則可得知∠B＝∠C；

 (4) 判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱A.A.S.三角形全等定理
5. 直角三角形斜邊及一股全等定理，又稱R. H. S.三角形全等定理

**證明：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 在△BDE與△CDF中∠BED＝∠CFD＝90°＝＝

1. 所以△BDE △CDF

1. ∠B＝∠C
2. △ABC為等腰三角形
3. 所以＝

 | 如圖4.2-15所示已知⊥，⊥已知＝已知＝由(1) ＆ R. H. S.三角形全等定理對應角相等由(3) ∠B＝∠C ＆ 兩底角相等為等腰三角形由(4) △ABC為等腰三角形 ＆等腰三角形兩腰等長 |

**習題4.2-3**



**圖4.2-16**

**已知：**如圖4.2-16，⊥，＝。

**試證：**∠CAB＝30°。

**證明：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 延長至D點，使＝，，如圖4.2-16(a)所示，所以為一線段

1. ＝＋＝2

1. ＝2

1. 所以＝

1. 在△ACB與△ADB中∠ABC＝∠ABD＝90°＝＝

1. 所以△ACB △ADB

1. ＝ ＆ ∠CAB＝∠DAB

1. △ACD中，＝＝

1. △ACD為正三角形
2. ∠CAD＝60°
3. 所以∠CAB＝∠CAD＝30°
 | 作圖 **圖4.2-16(a)**由(1)作圖 ＆ 全量等於分量和已知＝由(2) ＆ (3) 遞移律如圖4.2-16(a)所示已知⊥ ＆ (1) 為一線段由(1)作圖共同邊由(6) ＆ S.A.S.三角形全等定理對應邊相等 ＆ 對應角相等由(4) ＝ ＆ (8) ＝ 遞移律由(9) ＆ 等邊三角形為正三角形由(10) ＆ 正三角形三內角皆為60°由(8) ∠CAB＝∠DAB ＆ (11) ∠CAD＝60° |

**習題4.2-4**

 如圖4.2-17，直角三角形ABC中，∠ABC＝90°，∠BAC＝30°，若＝20，

則＝？

**圖4.2-17**

**想法：**利用定理：4.2-2 若直角三角形的某一內角為30°，則其對邊為斜邊
 的一半。

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. ＝＝×20＝10

 | 已知直角三角形ABC中，∠ABC＝90°，∠BAC＝30° ＆ 定理：4.2-2 若直角三角形的某一內角為30°，則其對邊為斜邊的一半 ＆ 已知＝20 |

**習題4.2-5**

**圖4.2-18**

**已知：**如圖4.2-18，△ABC中，＝，＝，＝。

**試證：**＝。

**想法：**(1) 若證得△BCF為等腰三角形，則可得知＝；

 (2) 若證得∠EBC＝∠DCB，則可得知△BCF為等腰三角形；

 (3) 若證得△EBC △DCB，則可得知∠EBC＝∠DCB

 (4) 判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱A.A.S.三角形全等定理
5. 直角三角形斜邊及一股全等定理，又稱R. H. S.三角形全等定理

**證明：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. ＝＝

1. ＝＝

1. 所以＝

1. △ABC為等腰三角形
2. ∠DBC＝∠ECB
3. 在△EBC與△DCB中＝∠ECB＝∠DBC＝

1. 所以△EBC △DCB

1. ∠EBC＝∠DCB
2. △BCF為等腰三角形
3. 所以＝

 | 已知＝ ＆ ＝＋已知＝ ＆ ＝＋由(1)＆(2)＆已知＝ 遞移律已知＝ ＆ 兩腰等長為等腰三角形由(4) ＆ 等腰三角形兩底角相等如圖4.2-18所示由(3) ＝ 已證由(5) ∠DBC＝∠ECB 已證共同邊由(6) ＆ S. A. S.三角形全等定理對應角相等由(8) ∠EBC＝∠DCB ＆兩底角相等為等腰三角形由(9) △BCF為等腰三角形 ＆等腰三角形兩腰等長 |

**習題4.2-6**

如圖4.2-19，△ABC中，已知⊥，⊥且＝，若

∠ABC＝55°，＝15，則：
 (1) ∠ACB＝？ (2) ＝？

**圖4.2-19**

**想法：**(1) 定理：4.2-3 若三角形兩頂點至其對邊的距離相等，則此三角形為
 等腰三角形。

 (2) 等腰三角形的性質：兩腰等長且兩底角相等

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. △ABC為等腰三角形
2. ∠ACB＝∠ABC＝55°
3. ＝＝15

 | 已知⊥，⊥且＝ ＆ 定理：4.2-3 若三角形兩頂點至其對邊的距離相等，則此三角形為等腰三角形由(1) 等腰三角形兩底角相等 ＆ 已知∠ABC＝55°由(1) 等腰三角形兩腰等長 ＆ 已知＝15 |

**習題4.2-7**

 如圖4.2-20，已知△ABC為等腰三角形，＝，若⊥，

⊥，且∠FBC＝35°，＝12，則：
 (1) ∠FCB＝？ (2) ＝？

**圖4.2-20**

**想法：**(1) 定理：4.2-4 等腰三角形兩腰上的高與底邊所造成的三角形亦為等腰
 三角形。

 (2) 等腰三角形的性質：兩腰等長且兩底角相等

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. △FBC為等腰三角形
2. ∠FCB＝∠FBC＝35°
3. ＝＝12

 | 已知△ABC為等腰三角形，＝，若⊥，⊥ ＆ 定理：4.2-4 等腰三角形兩腰上的高與底邊所造成的三角形亦為等腰三角形由(1) 等腰三角形兩底角相等 ＆ 已知∠FBC＝35°由(1) 等腰三角形兩腰等長 ＆ 已知＝12 |

**習題4.3**

**習題 4.3-1**

如圖4.3-18，I點為△ABC的內心，若I點到的距離為5，則：
(1) I點到的距離為何？
(2) I點到的距離為何？

**圖4.3-18**

**想法：**三角形的內心到此三角形的三邊等距離

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. I點到的距離＝I點到的距離＝I點到的距離＝5

 | 已知I點為△ABC的內心 ＆ 三角形的內心到此三角形的三邊等距離 ＆已知I點到的距離為5 |

**習題4.3-2**

 如圖4.3-19，已知I點為△ABC的內心、∠BIC＝120°，則∠BAC＝？

**圖4.3-19**

**想法：**利用例題4.3-2結論：若I點為△ABC的內心，則∠BIC＝90°＋∠BAC

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. ∠BIC＝90°＋∠BAC
2. 120°＝90°＋∠BAC
3. ∠BAC＝(120°－90°)×2＝60°
 | 已知I點為△ABC的內心 ＆例題4.3-2結論：若I點為△ABC的內心，則∠BIC＝90°＋∠BAC由(1) ＆ 已知∠BIC＝120°由(2) 求∠BAC之值 |

**習題 4.3-3**

如圖4.3-20，O點為△ABC的外心，若＝10，則：
(1) ＝？ (2) ＝？

**圖4.3-20**

**想法：**三角形的外心到此三角形的三頂點等距離

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. ＝＝＝10

 | 已知O點為△ABC的外心 ＆ 三角形的外心到此三角形的三頂點等距離＆ 已知＝10 |

**習題 4.3-4**

 如圖4.3-21，△ABC為直角三角形，∠ABC＝90°，若O點為的中點且
＝20，則＝？

**圖4.3-21**

**想法：**(1) 直角三角形斜邊中點為此三角形的外心

 (2) 三角形的外心到此三角形的三頂點等距離

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. ＝

1. ＝＋

1. 20＝＋

1. ＝20÷2＝10

1. O點為△ABC的外心
2. ＝＝

1. 所以＝10

 | 已知O點為的中點全量等於分量之和由(2) ＆ (1) ＆ 已知＝20由(3) 解一元一次方程式已知△ABC為直角三角形，∠ABC＝90°，若O點為的中點 ＆ 直角三角形斜邊中點為此三角形的外心由(5) ＆ 三角形的外心到此三角形的三頂點等距離由(6) ＆ (4) 遞移律 |

**習題 4.3-5**

 試證正三角形的內心與外心為同一點。

**圖4.3-23**

**已知：**△ABC為正三角形，I點為△ABC內心，

**求證：**I點也是△ABC外心。

**想法：**(1) 三角形內心為三內角平分線的交點；

 (2) 三角形外心為三邊中垂線的交點；

 (3) 若證得正三角形三邊中垂線就是三內角平分線，即可證得正三角形的
外心與內心為同一點

**證明：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. △ABC中，為∠BAC的角平分線 ，為∠ABC的角平分線 ，為∠ACB的角平分線

1. △ABC為等腰三角形(＝為其兩腰，∠BAC為頂角)

1. 所以為的中垂線

1. 同理可證，為的中垂線； 為的中垂線

1. 所以I點也是△ABC外心
 | 如圖4.3-23所示 ＆ 已知I點為△ABC內心 ＆ 三角形內心為三內角平分線的交點已知△ABC為正三角形 ＆ 正三角形為等邊三角形由(2) △ABC為等腰三角形，∠BAC為頂角 ＆ (1) 為∠BAC的角平分線 ＆ 等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊由(2) ＆ (3)同理可證由(3)＆(4)＆三角形三邊中垂線的交點為三角形的外心 |

**習題 4.3-6**

設△ABC的三中線相交於G點，若＝6，＝4，＝8，求各中線
 的長。

**圖4.3-24**

**已知：**△ABC的三中線、、相交於G點，若＝6，＝4，＝8，

**求：**、、各為多少？

**想法：**(1) 三角形三中線的交點為三角形的重心

 (2) 三角形重心與頂點的距離為中線的三分之二

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. G點△ABC的重心
2. ＝6＝＝6÷＝9

1. ＝4＝＝4÷＝6

1. ＝8＝＝8÷＝12

 | 已知△ABC的三中線、、相交於G點 ＆三角形三中線的交點為三角形的重心由(1)＆重心與頂點的距離()為中線()的三分之二將已知＝6代入等式兩邊同除以由(1)＆重心與頂點的距離()為中線()的三分之二將已知＝4代入等式兩邊同除以由(1)＆重心與頂點的距離()為中線()的三分之二將已知＝8代入等式兩邊同除以 |

**習題 4.3-7**

試證明三角形若兩中線相等，則為等腰三角形。

**圖4.3-25**

**已知：**、為△ABC的中線，、交於G點，且＝；

**求證：**△ABC為等腰三角形。

**想法：**(1) 若證得∠ABC＝∠ACB (即∠1＋∠2＝∠3＋∠4)，則可得知△ABC為
 等腰三角形；

 (2) 若證得∠1＝∠3且∠2＝∠4，則可得知∠1＋∠2＝∠3＋∠4；

 (3) 若證得△BCG為等腰三角形，則可得知∠2＝∠4；

 (4) 若證得＝，則可得知△BCG為等腰三角形；

 (5) 若證得△BDG △CEG，則可得知∠1＝∠3

 (6) 判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱A.A.S.三角形全等定理
5. 直角三角形斜邊及一股全等定理，又稱R. H. S.三角形全等定理

**證明：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. G點為△ABC的重心
2. ＝ ＆ ＝

1. ＝ ＆ ＝

1. 所以＝ ＆ ＝

1. △BCG為等腰三角形
2. 所以∠2＝∠4
3. △BDG與△CEG中＝∠BGD＝∠CGE＝

1. 所以△BDG △CEG

1. 所以∠1＝∠3
2. ∠1＋∠2＝∠3＋∠4
3. 所以∠ABC＝∠ACB
4. 所以△ABC為等腰三角形
 | 已知、為△ABC的中線，、交於G點 ＆ 三角形兩中線的交點為重心由(1) ＆ 重心與頂點的距離為中線的三分之二由(1) ＆ 重心與頂點的距離為中線的三分之二由(2) ＆ (3) ＆ 已知＝ 遞移律由(4) ＝ ＆ 兩腰等長為等腰三角形由(5) ＆ 等腰三角形兩底角相等如圖4.3-25所示由(4) ＝ 已證對頂角相等由(4) ＝ 已證由(7) ＆ S.A.S.三角形全等定理對應角相等由(9)式＋(6)式∠ABC＝∠1＋∠2、∠ACB＝∠3＋∠4＆ (10) ∠1＋∠2＝∠3＋∠4由(10) ∠ABC＝∠ACB ＆ 兩底角相等為等腰三角形 |

**習題 4.3-8**

如圖4.3-22的△ABC中，D、E、F三點將四等分，＝3，H為
 的中點。圖中的哪一點為△ABC的重心？

**圖4.3-22**

**想法：**三角形三中線的交點為三角形的重心

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. Z點為△ABC的重心
 | 已知D、E、F三點將四等分，E點為中點 ＆ 已知H為的中點 ＆ 三角形兩中線的交點為三角形重心 |

**進階思考題**

**1：**若△ABC的三內角的角度成等差數列，其公差為15度，則三內角中最大角是 度，最小角是 度。

**想法：**三角形內角和180°

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 假設三角形三內角分別為(x－15)°、x°、(x＋15)°
2. (x－15)°＋x°＋(x＋15)°＝180°
3. 3x＝180 x＝60
4. 所以三內角分別為(x－15)°＝(60－15) °＝45°x°＝60°(x＋15)°＝(60＋15) °＝75°
5. 所以三內角中最大角是75° 最小角是45°
 | 已知△ABC的三內角的角度成等差數列，其公差為15度由(1) ＆ 三角形內角和180°由(2)化簡等式兩邊同除以3將(3) x＝60已證 代入(1)由(4) |

**2：**

**圖4.1**

**已知：**如圖4.1，∥，⊥，分別與、交於G、H兩點。

**證明：**∠B＋∠E＝90°。

**想法：**(1) 三角形內角和180°

 (2) 一截線與兩平行線相交，則：

1. 內錯角相等
2. 同位角相等
3. 同側內角互補

**證明：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. ∠EHG＝∠B
2. ∠EGH＝90°
3. △EGH中，∠EGH＋∠EHG＋∠E＝180°
4. 90°＋∠B＋∠E＝180°
5. 所以∠B＋∠E＝90°
 | 已知∥ ＆ 內錯角相等已知⊥如圖4.1所示三角形三內角和為180°將(2) ∠EGH＝90° ＆ (1) ∠EHG＝∠B 代入(3) ∠EGH＋∠EHG＋∠E＝180°由(4) 等量減法公理 |

**3：**如圖4.2，∥，⊥，∠B＝40°，則∠E＝ 度。



**圖4.2**

**想法：**(1) 三角形內角和180°

 (2) 一截線與兩平行線相交，則：

1. 內錯角相等
2. 同位角相等
3. 同側內角互補

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 令交於G點， 交於H點，如圖4.2(a)所示

1. ∠EGH＝∠B＝40°
2. ∠EHG＝90°
3. △EGH中，∠EGH＋∠EHG＋∠E＝180°
4. 40°＋90°＋∠E＝180°
5. 所以∠E＝180°－40°－90° ∠E＝50°
 | 不平行的兩直線必交於一點 **圖4.2(a)**已知∥ ＆ 同位角相等已知⊥如圖4.2(a)所示三角形三內角和為180°將(2) ∠EGH＝40° ＆ (3) ∠EHG＝90° 代入(4) ∠EGH＋∠EHG＋∠E＝180°由(5) 等量減法公理 |

**4：**如圖4.3，∥，⊥，∠B＝40°，則∠E＝ 度。

**圖4.3**

**想法：**(1) 三角形內角和180°

 (2) 一截線與兩平行線相交，則：

1. 內錯角相等 2. 同位角相等 3. 同側內角互補

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 令交於H點， 交於G點，如圖4.3(a)所示

1. ∠BHG＝90°
2. △BGH中，∠1＋∠BHG＋∠B＝180°
3. ∠1＋90°＋40°＝180°
4. 所以∠1＝180°－40°－90° ∠1＝50°
5. ∠E＋∠1＝180°
6. 所以∠E＝180°－∠1 ＝180°－50°＝130°
 | 不平行的兩直線必交於一點 **圖4.3(a)**已知⊥如圖4.3(a)所示三角形三內角和為180°將(2) ∠BHG＝90° ＆ 已知∠B＝40°代入(3) ∠1＋∠BHG＋∠B＝180°由(4) 等量減法公理已知∥ ＆ 同側內角互補由(6)等量減法公理 ＆ 將(5)∠1＝50°代入 |

**5：**如圖4.4，⊥，∥，∠E＝130°，則∠B＝ 度。

**圖4.4**

**想法：**(1) 三角形內角和180°

 (2) 一截線與兩平行線相交，則：

1. 內錯角相等
2. 同位角相等
3. 同側內角互補

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 令交於H點；延長交於G點，如圖4.4(a)所示

1. ∠HGC＝∠DE F＝130°
2. ∠HGB＝180°－130°＝50°
3. ∠BHG＝90°
4. △BGH中，∠HGB＋∠BHG＋∠B＝180°
5. 50°＋90°＋∠B＝180°
6. ∠B＝180°－50°－90°＝40°
 | 作圖，不平行的兩直線必交於一點 **圖4.4(a)**已知∠3＋∠6 ＆ 同位角相等 ＆ 已知∠E＝130°由(2) ∠HGC＝130° ＆ 補角定義已知⊥如圖4.4(a)所示三角形三內角和為180°將(3)∠HGB＝50°＆(4)∠BHG＝90°代入(5)由(6) 等量減法公理 |

**6：**如圖4.5，L1⊥L2，已知∠1＝∠2，∠4＝∠5，

 (1) 求∠1＋∠5。

 (2) 求∠3＋∠6。

 (3) 與是否平行？



**圖4.5**

**想法：**(1) 利用三角形三內角和180° ＆ 平角為180° ，求得∠1、∠2、∠3、∠4、
 ∠5、∠6的關係，再判斷與是否平行？

 (2) 判斷兩直線平行的方法有：

1. 內錯角相等的兩線平行
2. 同位角相等的兩線平行
3. 同側內角互補的兩線平行

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 令L1交L2於O點，如圖4.5(a)所示
2. ∠BOC＝90°
3. △BOC中，∠BOC＋∠2＋∠4＝180°
4. 90°＋∠2＋∠4＝180°
5. ∠2＋∠4＝180°－90°＝90°
6. 所以∠1＋∠5＝90°
7. ∠1＋∠2＋∠3＝180°
8. ∠4＋∠5＋∠6＝180°
9. ∠1＋∠2＋∠3＋∠4＋∠5＋∠6＝180°＋180°
10. (∠1＋∠5)＋(∠2＋∠4)＋∠3＋∠6＝360°
11. 90°＋90°＋∠3＋∠6＝360°
12. 所以∠3＋∠6＝360°－90°－90° ＝180°
13. 為與的截線 ＆ ∠3與∠6為 同側內角

1. 所以∥

 | 已知 L1⊥L2，不平行的兩直線必交於一點 **圖4.5(a)**已知 L1⊥L2如圖4.5(a)所示三角形三內角和為180°將(2) ∠BOC＝90°代入(3) ∠BOC＋∠2＋∠4＝180° 由(4) 等量減法公理將已知∠1＝∠2，∠4＝∠5代入(4)如圖4.5(a)所示， L1為一直線如圖4.5(a)所示， L2為一直線由(7)式＋(8)式由(9)加法交換律將(6) ∠1＋∠5＝90° ＆ (5) ∠2＋∠4＝90° 代入(10)由(11) 等量減法公理如圖4.5(a)所示由(12) ＆ (13) 同側內角互補，則兩直線互相平行 |

**7：**如圖4.6，L1∥L2，M及N都是L1、L2的截線，∠1＝85°，∠2＝65°，求∠3。

**圖4.6**

**想法：**(1) 利用L1∥L2 ＆ 三角形三內角和180°的性質，求∠3的度數。

 (2) 一截線與兩平行線相交，則：

1. 內錯角相等
2. 同位角相等
3. 同側內角互補

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 令M交L2於A點； N交L2於B點； M交N於C點，如圖4.6(a)所示
2. ∠BAC＝∠1＝85°
3. △ABC中，∠BAC＋∠2＋∠4＝180°
4. 85°＋65°＋∠4＝180°∠4＝180°－85°－65°＝30°
5. 所以∠3＝∠4＝30°
 | 已知M及N都是L1、L2的截線 ＆不平行的兩直線必交於一點 **圖4.6(a)**已知L1∥L2 ＆ 同位角相等 ＆ 已知∠1＝85°如圖4.6(a)所示三角形三內角和為180°將(2) ＆ 已知∠2＝65° 代入 (3)等量減法公理如圖4.6(a)，對頂角相等 ＆ (4) ∠4＝30° |

**8：已知：**如圖4.7，△ABC中，＝，⊥。

 **證明：**∠CBD＝∠BAC。

**圖4.7**

**想法：**(1) 利用三角形三內角和180°

 (2) 等腰三角形頂角與底角的關係

**證明：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. ∠CDB＝90°
2. △BCD中，∠CBD＋∠C＋∠CDB＝180°
3. ∠CBD＋∠C＋90°＝180°∠CBD＝180°－∠C－90° ＝90°－∠C
4. △ABC為等腰三角形
5. ∠BAC＝180°－2∠C
6. 所以∠BAC＝2(90°－∠C)
7. ∠BAC＝2∠CBD
8. 所以∠CBD＝∠BAC
 | 已知⊥如圖4.7所示三角形三內角和為180°將(1) ∠CDB＝90°代入(2)等量減法公理化簡已知＝ ＆ 兩腰等長為等腰三角形由(4) ＆ 等腰三角形頂角與底角的關係由(5) 提出公因數2將(3) 90°－∠C＝∠CBD代入 (6)由(7) 等式兩邊同除以2 |

**9：**

**已知：**∠1＋∠2＋∠3＝360° **圖4.8**

**證明：**L1 ∥ L2

**想法：**判斷兩直線平行的方法有：

1. 內錯角相等的兩線平行 2. 同位角相等的兩線平行
2. 同側內角互補的兩線平行

**證明：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 延長與L2交於D點，如圖4.8(a)

1. ∠5＝180°－∠3
2. ∠6＝180°－∠2
3. △BCD中，∠4＋∠5＋∠6＝180°
4. ∠4＋(180°－∠3)＋(180°－∠2)＝180°
5. ∠4＝∠2＋∠3－180°
6. ∠1＋∠2＋∠3＝360°
7. ∠1＝360°－∠2－∠3
8. ∠1＋∠4＝(360°－∠2－∠3)＋(∠2＋∠3－180°)＝180°
9. 所以∠1＋∠4＝180°
10. L1 ∥ L2
 | 作圖，不互相平行的兩直線必有一交點 **圖4.8(a)**如圖4.8(a) ＆ 補角定義如圖4.8(a) ＆ 補角定義如圖4.8(a)所示三角形三內角和為180°將(2) ∠5＝180°－∠3 ＆ (3) ∠6＝180°－∠2代入(4) ∠4＋∠5＋∠6＝180°由(5) 移項已知∠1＋∠2＋∠3＝360°由(7) 等量減法公理由(8)式＋(6)式 化簡由(9)由(10) ＆ 同側內角互補的兩線平行定理 |

**10：**

**圖4.9**

**已知：**如圖4.9，∠ABC＝∠1＋∠2。

**證明：**∥。

**想法：**判斷兩直線平行的方法有：

1. 內錯角相等的兩線平行
2. 同位角相等的兩線平行
3. 同側內角互補的兩線平行

**證明：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 延長與交於F點，如圖4.9(a)

1. △BCF中，∠ABC＝∠3＋∠2
2. 所以∠3＝∠ABC－∠2
3. ∠ABC＝∠1＋∠2
4. 所以∠1＝∠ABC－∠2
5. ∠1＝∠ABC－∠2＝∠3
6. 所以∥

 | 作圖，不互相平行的兩直線必有一交點 **圖4.9(a)**三角形外角等於內對角的和由(2) 等量減法公理已知∠ABC＝∠1＋∠2由(4) 等量減法公理由(5) ＆ (3) 遞移律由(6) ∠1＝∠3 ＆ 內錯角相等的兩線平行定理 |

**11：**

**圖4.10**

**已知：**如圖4.10，四邊形ABCD中，∠DAB＝∠CBA，＝。

**證明：**＝。

**想法：**(1) 若證得△BAC △ABD，則可得知＝

 (2) 判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱A.A.S.三角形全等定理
5. 直角三角形斜邊及一股全等定理，又稱R. H. S.三角形全等定理

**證明：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. △BAC與△ABD中＝∠CBA＝∠DAB＝

1. 所以△BAC △ABD

1. ＝

 | 如圖4.10所示已知＝已知∠DAB＝∠CBA共同邊由(1) ＆ S.A.S.三角形全等定理對應邊相等 |

**12：**

**圖4.11**

**已知：**如圖4.11，∠D＝∠E＝90°，△ABC為等腰直角三角形，＝。

**證明：**＝＋。

**想法：**(1) 如圖所示，因為＝＋；

 (2) 若證得＝ ＆ ＝ ，則可得知＝＋；

 (3) 若證得△ADB △BEC，則可得知＝ ＆ ＝

 (4) 判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱A.A.S.三角形全等定理
5. 直角三角形斜邊及一股全等定理，又稱R. H. S.三角形全等定理

**證明：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. △ADB中，∠D＋∠DAB＋∠ABD＝180°
2. 90°＋∠DAB＋∠ABD＝180°∠DAB＝180°－90°－∠ABD ＝90°－∠ABD
3. ∠ABC＝90°
4. ∠ABD＋∠ABC＋∠EBC＝180°
5. ∠ABD＋90°＋∠EBC＝180°∠EBC＝180°－∠ABD－90° ＝90°－∠ABD
6. ∠DAB＝90°－∠ABD＝∠EBC
7. △ADB與△BEC中∠D＝∠E∠DAB＝∠EBC＝

1. 所以△ADB △BEC

1. ＝ ＆ ＝

1. ＝＋

1. 所以＝＋

 | 如圖4.11三角形三內角和為180°將已知∠D＝90° 代入 (1)等量減法公理化簡已知△ABC為等腰直角三角形 ＆＝如圖4.11，D、B、E三點共線將(3) ∠ABC＝90°代入(4)等量減法公理化簡由(2) ∠DAB＝90°－∠ABD ＆ (5) ∠EBC＝90°－∠ABD 遞移律如圖4.11已知∠D＝∠E＝90°由(6) ∠DAB＝∠EBC已證已知＝由(7) ＆ A.A.S.三角形全等定理對應邊相等如圖4.11，全量等於分量之和將(9) ＝ ＆＝ 代入(10) ＝＋ |

**13：**如圖4.12，△ABC和△BDE都是正三角形，∠BCE=25°

 求∠ADC之角度

**圖4.12**

**想法：**(1) 利用三角形內角和180°定理，計算△DEC之各角
(2) 在△ABD內作一正三角形△FBD，利用S.A.S.全等三角形定理證明
 △AFD △CDE
(3) 利用全等三角形對應角相等，求得∠ADF。
(4) 利用平角性質，求∠ADC

**圖4.12(a)**

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. ∠CDE＝180°－∠BDE＝180°－60° ＝120°
2. ∠CED＝180°－∠CDE－∠DCE ＝180°－60°－25°＝35°
3. 在線上取一點F，使得＝，則△FBD為正三角形。如圖4.12(a)

1. ∠AFD＝180°－∠BFD ＝180°－60°＝120°
2. ＝＝

1. ＝( － )＝( － )＝

1. △AFD △CDE

1. ∠ADF＝∠CED＝35°
2. ∠ADC＋∠FDB＋∠ADF ＝180°
3. ∠ADC＝180°－60°－25°＝85°
 | 正三角形之各內角等於60°三角形內角和180°及已知 & (1)＝，△FBD為等腰三角形，∴∠BFD＝∠FDB，又已知△ABC 為正三角形，故∠ABD＝60°，∴∠BFD＝∠FDB ＝60°，三角相等之三角形為正三角形。同(1)正三角形的三邊相等∵△ABC和△FBD都是正三角形∴＝ 且 ＝ 由(4)(5)(6)，SAS全等三角形定理全等三角形對應角相等平角等於180°由(9) 等量減法公理 |

**13題：**另解：

**圖4.12(b)**

**想法：**(1) 若△ABD △CBE，則∠BAD＝∠BCE＝25°，再利用外角求得∠ADC

 (2) 判斷兩個三角形全等的方法有：

1. 兩邊夾一角三角形全等定理，又稱S.A.S.三角形全等定理
2. 兩角夾一邊三角形全等定理，又稱A.S.A.三角形全等定理
3. 三邊相等三角形全等定理，又稱S.S.S.三角形全等定理
4. 三角形兩角一邊全等定理，又稱A.A.S.三角形全等定理
5. 直角三角形斜邊及一股全等定理，又稱R. H. S.三角形全等定理

 (3) 三角形的任一外角等於兩個內對角和

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 連接與，如圖4.12(b)所示

1. 在△ABD與△CBE中，＝∠ABD＝∠CBE＝60°＝

1. △ABD △CBE (SAS)

1. ∠BAD＝∠BCE＝25°
2. 在△ABD中，∠ADC＝∠ABD＋∠ BAD ＝60°＋25°＝85°
 | 作圖如圖4.12(b)所示已知△ABC和△BDE都是正三角形，所以＝、＝、∠ABD＝∠CBE＝60°由(2) S.A.S.三角形全等定理對應角相等 ＆ 已知∠BCE＝25°如圖4.12(b)所示，∠ADC為∠ADB的外角，外角等於內對角的和 |

**14：**如圖4.13，為∠BAC的平分線，，∠PCA＝120°，＝12，

 ＝16，求＝？

**圖4.13**

**想法：**(1) 在 線上取一點D，使，證明△APC △APC，
 則，

(2) 再證明△BDP為正三角形，則

 (3) ∴

**圖4.13(a)**

**解：**

|  |  |
| --- | --- |
| 敘述 | 理由 |
| 1. 在 線上取一點D，使，如圖4.13(a)。

1. 在△APC與△APC 中∠PAD＝∠PAC

1. △APD △APC

1. ，

1. ∠PDA＝∠PCA＝120°
2. ∠BDP＝180°－∠PDA＝60°
3. ，**∴** △BDP為等腰三角形

1. ∠DBP＝∠BDP＝60°
2. ∠BPD＋∠DBP＋∠BDP＝180°∴ ∠BPD ＝180°－60°－60°＝60°
3. △BDP為正三角形

1. ＝ ＝ ＝16－12 ＝4

 | 等線段作圖如圖4.13(a)由(1) 已知 為∠BAC的平分線同線段相等由(2) S.A.S.三角形全等定理由(3) 全等三角形之對應邊相等由(3) 全等三角形之對應角相等 &已知∠PCA＝120°補角定義由(4) & 已知 等腰三角形定義等腰三角形兩等角相等三角形三內角和180°由（8）由(8) ＆ (9)，正三角形的各角相等正三角形的各邊相等由(11) & 全量等於分量之和 由(4) & 已知＝12，＝16 |