

代數第十章

目錄

第十章 等差數列	1
學習目標	1
10.1 節 等差數列	2
10.1 節 習題	15
10.2 節 等差級數	18
10.2 節 習題	31
10.3 節 等差數列的應用	33
10.3 節 習題	42
第十章綜合習題	45
基測與會考試題	50
習題解答	56

第十章 等差數列

等差數列在生活中隨處可見。例如我們小學時就數過的偶數：2、4、6、8、10…，數百元鈔票：100 元、200 元、300 元、400 元…。本章中我們將學習與等差數列有關的規則，並學習處理相關的應用問題。

學習目標

1. 能理解什麼是數列與等差數列。
2. 能夠計算等差數列的和。
3. 能處理等差數列的應用題。

10.1 節 等差數列

生活中，我們經常可以看到一串數字排在一起。例如：

月份有 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12，共 12 個月。

本次班上數學段考，1~9 號的成績依序為：90、85、88、96、82、75、63、97、80 分。

像這樣按順序排列的一串數，就稱為**數列**。

我們來看數列：90、85、88、96、82、75、63、97、80

這串數列共有 9 個數字，我們稱這串數列有 9 項。

第 1 個項，也稱為**首項**，我們記為 a_1 。第 1 個項的數為 90，因此 $a_1 = 90$ 。

第 2 個項，我們記為 a_2 。第 2 個項的數為 85，因此 $a_2 = 85$ 。

第 3 個項，我們記為 a_3 。第 3 個項的數為 88，因此 $a_3 = 88$ 。

依此類推， $a_4 = 96$ 、 $a_5 = 82$ 、 $a_6 = 75$ 、 $a_7 = 63$ 、 $a_8 = 97$ 、 $a_9 = 80$ 。

數列的最後一項，也稱為**末項**，此數列的末項為 80。

接著我們再看另一個數列：2、4、6、8、10、12、14、16、18、20

此數列每相鄰兩項之間，後項減前項的差都是 2。像這樣相鄰兩項之間有固定的差之

數列，稱為**等差數列**。

相鄰兩項間，固定的差我們稱為**公差**，公差常用 d 來代表。此數列的公差為 2，即 $d = 2$ 。

例題 10.1-1

(1) 1、4、7、10、13、16，是否為等差數列？

(2) 1、3、9、27，是否為等差數列？

詳解：

(1) 此數列相鄰兩項的後項減前項之差都是 3，為等差數列。

(2) $3-1=2$ 、 $9-3=6$ ，後項減前項之差不固定，非等差數列。

【練習】10.1-1

(1) 2、4、8、16、32、64，是否為等差數列？

(2) 3、6、9、12、15、18，是否為等差數列？

例題 10.1-2

設某市計程車的計費自 70 元起跳，每一次跳 5 元。依次寫出計費表上出現的前 8 個數。

詳解：

70、75、80、85、90、95、100、105。

【練習】10.1-2

假設小黑每天存 55 元，共存了 7 天。若將小黑每天的存款總額依序排列出來，應如何表示？

例題 10.1-3

爸爸練習慢跑，計畫第 1 天慢跑 10 分鐘，第 2 天慢跑 20 分鐘，第 3 天慢跑 30 分鐘，以此類推，7 天的慢跑時間應如何表示？

詳解：

10、20、30、40、50、60、70（分鐘）

【練習】10.1-3

小張練習跑步，一共跑了 6 天，每天都固定跑 800 公尺。若將小張每天的跑步距離累計，依照順序排列出來，應如何表示？

例題 10.1-4

有一等差數列，首項為 5，公差為 4，試寫出此數列的前 5 項。

詳解：

等差數列公差為 4，即後一項都比前一項多 4。

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = a_1 + d = 5 + 4 = 9$$

$$a_3 = a_2 + d = 9 + 4 = 13$$

$$a_4 = a_3 + d = 13 + 4 = 17$$

$$a_5 = a_4 + d = 17 + 4 = 21$$

因此此等差數列前 5 項為：5、9、13、17、21

【練習】10.1-4

有一等差數列，首項為 4，公差為 6，試寫出此數列的前 5 項。

例題 10.1-5

有一等差數列，首項為 10，公差為 -4 ，試寫出此數列的前 6 項。

詳解：

等差數列公差為 -4 ，即後一項都比前一項多 -4 ，也就是後一項都比前一項少 4。

$$a_1 = 10$$

$$a_2 = a_1 + d = 10 + (-4) = 6$$

$$a_3 = a_2 + d = 6 + (-4) = 2$$

$$a_4 = a_3 + d = 2 + (-4) = -2$$

$$a_5 = a_4 + d = (-2) + (-4) = -6$$

$$a_6 = a_5 + d = (-6) + (-4) = -10$$

因此此等差數列前 6 項為：10、6、2、 -2 、 -6 、 -10

【練習】10.1-5

有一等差數列，首項為 12，公差為 -7 ，試寫出此數列的前 6 項。

我們已經知道了等差數列的基本寫法，接著我們來看看，若是只知道首項、末項與公差，是否能推得項數呢？

我們來將等差數列各項用首項與公差來表示：

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d$$

$$a_6 = a_5 + d = (a_1 + 4d) + d = a_1 + 5d$$

接著將各項所加公差的數量用項數來表示：

$$a_2 = a_1 + (2-1)d$$

$$a_3 = a_1 + (3-1)d$$

$$a_4 = a_1 + (4-1)d$$

$$a_5 = a_1 + (5-1)d$$

$$a_6 = a_1 + (6-1)d$$

可以發現各項所加公差的數量，都是(項數-1)，因此第 n 項 a_n 可表示為

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

移項後可得：
$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

若是 a_n 為末項，那麼我們就得到：**末項 = 首項 + (項數 - 1) × 公差**

移項得：**項數 = [(末項 - 首項) / 公差] + 1**

例題 10.1-6

- (1) 某等差數列，首項為 3，公差為 5，試求第 7 項。
(2) 某等差數列，首項為 -2，公差為 4，試求第 6 項。
(3) 某等差數列，首項為 7，公差為 -3，試求第 5 項。
(4) 某等差數列，首項為 2，公差為 0.5，試求第 13 項。

詳解：

利用 $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\begin{aligned}(1) a_7 &= a_1 + (7-1)d \\ &= 3 + (7-1) \times 5 \\ &= 33\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) a_6 &= a_1 + (6-1)d \\ &= (-2) + (6-1) \times 4 \\ &= 18\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) a_5 &= a_1 + (5-1)d \\ &= 7 + (5-1) \times (-3) \\ &= -5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) a_{13} &= a_1 + (13-1)d \\ &= 2 + (13-1) \times 0.5 \\ &= 8\end{aligned}$$

【練習】10.1-6

- (1) 某等差數列，首項為 2，公差為 3，試求第 5 項。
(2) 某等差數列，首項為 -6，公差為 7，試求第 8 項。
(3) 某等差數列，首項為 0，公差為 -2，試求第 4 項。
(4) 某等差數列，首項為 3，公差為 0.1，試求第 101 項。

例題 10.1-7

- (1) 某等差數列，首項為 1，末項為 21，公差為 1，請問此數列有幾項？
(2) 某等差數列，首項為 2，末項為 102，公差為 2，請問此數列有幾項？
(3) 某等差數列，首項為 18，末項為 42，公差為 3，請問此數列有幾項？
(4) 某等差數列，首項為 -8，末項為 22，公差為 5，請問此數列有幾項？

詳解：

$$\text{利用 } n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

$$\begin{aligned} (1) \quad n &= \frac{21-1}{1} + 1 \\ &= 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad n &= \frac{102-2}{2} + 1 \\ &= 51 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad n &= \frac{42-18}{3} + 1 \\ &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad n &= \frac{22-(-8)}{5} + 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

【練習】10.1-7

- (1) 某等差數列，首項為 4，末項為 28，公差為 4，請問此數列有幾項？
(2) 某等差數列，首項為 8，末項為 16，公差為 2，請問此數列有幾項？
(3) 某等差數列，首項為 1，末項為 31，公差為 3，請問此數列有幾項？
(4) 某等差數列，首項為 -3，末項為 4，公差為 1，請問此數列有幾項？

接著我們來看看更多關於數列的名詞。

中項： 若一數列有 3 項，我們將中間項(第 2 項)稱為其前一項與後一項的中項。
例如有一數列 2、5、7，則稱 5 為 2 與 7 的中項。

等差中項： 若一等差數列有 3 項，我們將中間項(第 2 項)稱為其前一項與後一項的等差中項。

例如有一等差數列 2、5、8，則稱 5 為 2 與 8 的等差中項。

我們來看看如何求出等差中項。

若有一等差數列 a_1 、 a_2 、 a_3 ，公差為 d 。則我們知道：

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$\frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{a_1 + a_1 + 2d}{2} = \frac{2a_1 + 2d}{2} = a_1 + d = a_2$$

亦即想求出 a_1 與 a_3 的等差中項 a_2 ，只要將 a_1 與 a_3 相加再除以 2 即可：

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

奇數項： 一個數列中，項次為奇數的項，稱為奇數項。

例如有一等差數列 2、5、8、11、14、17，則奇數項為 2、8、14。

偶數項： 一個數列中，項次為偶數的項，稱為偶數項。

例如有一等差數列 2、5、8、11、14、17，則偶數項為 5、11、17。

例題 10.1-8

有一等差數列：18、 x 、44，試求 x 之值。

詳解：

x 即 18 和 44 的等差中項

$$x = \frac{18+44}{2} = \frac{62}{2} = 31$$

【練習】10.1-8

有一等差數列：24、 x 、72，試求 x 之值。

例題 10.1-9

在一等差數列中，已知某兩項的等差中項為 6，且此兩項之積為 20。

- (1) 令此等差數列之公差為 d ，試用 d 表示此兩項。
- (2) 求此兩項之值。

詳解：

- (1) 此等差數列之公差為 d ，因此 6 的後一項為 $6+d$ ，前一項為 $6-d$ 。

此兩項為 $6-d$ 、 $6+d$ 。

- (2) 由兩項之積為 20 可列式：

$$(6-d)(6+d) = 20$$

$$d^2 = 16$$

$$d = \pm 4$$

$d = 4$ 時，6 的前一項為 $6-d = 6-4 = 2$ ，後一項為 $6+d = 6+4 = 10$ 。

數列為 2、6、10。

$d = -4$ 時，6 的前一項為 $6-d = 6-(-4) = 10$ ，後一項為 $6+d = 6+(-4) = 2$ 。

數列為 10、6、2。

此兩項為 2 和 10。

【練習】10.1-9

在一等差數列中，已知某兩項的等差中項為 10，且此兩項之積為 91。

(1) 令此等差數列之公差為 d ，試用 d 表示此兩項。

(2) 求此兩項之值。

瞭解了等差數列的各種基本觀念後，接著讓我們來看看各種變化題型。

例題 10.1-10

在一等差數列中，第一項為 18，第六項為 48，試求此等差數列的公差。

詳解：

利用 $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$a_6 = a_1 + (6-1)d$$

$$48 = 18 + (6-1)d$$

$$30 = 5d$$

$$d = 6$$

得此數列公差為 6。

【練習】10.1-10

在一等差數列中，第一項為 12，第七項為 -24，試求此等差數列的公差。

例題 10.1-11

在一等差數列中，第五項為32，公差7，試求此等差數列的首項。

詳解：

利用 $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$a_5 = a_1 + (5-1)d$$

$$32 = a_1 + (5-1) \times 7$$

$$32 = a_1 + 28$$

$$a_1 = 4$$

得此數列首項為4。

【練習】10.1-11

在一等差數列中，第九項為27，公差4，試求此等差數列的首項。

例題 10.1-12

若在0與8之間，插入4個數字，可使這些數字成等差數列(包含0與8)。試求此4個數字。

詳解：

題目要使0、8與插入的4個數字成等差數列，因此此數列共有6項，首項 $a_1 = 0$ 、 $a_6 = 8$ ，我們利用 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 來找出公差：

$$a_6 = a_1 + (6-1)d$$

$$8 = 0 + (6-1)d$$

$$8 = 5d$$

$$d = 1.6$$

由 $d = 1.6$ 可求出 $a_2 = 1.6$ 、 $a_3 = 3.2$ 、 $a_4 = 4.8$ 、 $a_5 = 6.4$ 。

因此插入的4個數字為1.6、3.2、4.8、6.4。

【練習】10.1-12

若在 2 與 11 之間，插入 3 個數字，可使這些數字成等差數列(包含 2 與 11)。試求此 3 個數字。

例題 10.1-13

已知有 5 個連續整數成等差數列(由小而大)，且此 5 數和為 95，試求此 5 數。

詳解：

因為此 5 數為連續整數，且排列由小而大，因此公差為 1。

設第 1 個整數為 a_1 ，第 2 個整數為 $a_2 = a_1 + 1$ ，第 3 個整數為 $a_3 = a_1 + 2$ ，第 4 個整數為 $a_4 = a_1 + 3$ ，第 5 個整數為 $a_5 = a_1 + 4$ 。

此 5 數和為 95，可列式：

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 95$$

$$a_1 + (a_1 + 1) + (a_1 + 2) + (a_1 + 3) + (a_1 + 4) = 95$$

$$5a_1 + 10 = 95$$

$$a_1 + 2 = 19$$

$$a_1 = 17$$

$$a_2 = a_1 + 1 = 18 \text{、} a_3 = a_1 + 2 = 19 \text{、} a_4 = a_1 + 3 = 20 \text{、} a_5 = a_1 + 4 = 21$$

因此 5 個連續整數為 17、18、19、20、21。

【練習】10.1-13

已知有 5 個連續整數成等差數列(由小而大)，且此 5 數和為 105，試求此 5 數。

例題 10.1-14

有一等差數列，首項為 7，公差為 12，請問第幾項開始會大於 100？

詳解：

本題要找數字大於 100 的項，當然我們可以用數的：7、19、31、43...，但這方法在數字大時會很複雜，我們可以利用之前學過的 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 來計算：

設第 n 項開始會大於 100，即 $a_n > 100$ 。

$$a_n = 7 + (n-1) \times 12 > 100$$

$$7 + 12n - 12 > 100$$

$$12n > 105$$

$$n > \frac{105}{12}$$

$$n > 8\frac{9}{12}$$

因為項數為整數，所以我們取 $n=9$ ，即第 9 項開始會大於 100。

我們來驗算看看

$$\text{第 8 項：} a_8 = 7 + (8-1) \times 12 = 91$$

$$\text{第 9 項：} a_9 = 7 + (9-1) \times 12 = 103$$

可確認在第 9 項開始會大於 100。

【練習】10.1-14

有一等差數列，首項為 7，公差為 -12，請問第幾項開始會小於 -100？

10.1 節 習題

習題 10.1-1

- (1) 5、10、15、20、25、30，是否為等差數列？
- (2) 4、8、12、16，是否為等差數列？

習題 10.1-2

設某市遊樂園的收費自基本費 100 元起跳，每多玩一種設施加收 20 元。依次寫出收費表上出現的前 5 個數。

習題 10.1-3

妹妹開始存錢，計畫第 1 天存 20 元，第 2 天存 25 元，第 3 天存 30 元，以此類推，7 天的存錢金額應如何表示？

習題 10.1-4

有一等差數列，首項為 2，公差為 5，試寫出此數列的前 5 項。

習題 10.1-5

有一等差數列，首項為 5，公差為 -3 ，試寫出此數列的前 6 項。

習題 10.1-6

- (1) 某等差數列，首項為 4，公差為 2，試求第 6 項。
- (2) 某等差數列，首項為 -10 ，公差為 4，試求第 3 項。
- (3) 某等差數列，首項為 8，公差為 -1 ，試求第 6 項。
- (4) 某等差數列，首項為 100，公差為 0.1，試求第 101 項。

習題 10.1-7

- (1) 某等差數列，首項為 5，末項為 35，公差為 2，請問此數列有幾項？
- (2) 某等差數列，首項為 3，末項為 24，公差為 3，請問此數列有幾項？
- (3) 某等差數列，首項為 10，末項為 46，公差為 4，請問此數列有幾項？
- (4) 某等差數列，首項為 -5 ，末項為 15，公差為 4，請問此數列有幾項？

習題 10.1-8

有一等差數列：16、 x 、80，試求 x 之值。

習題 10.1-9

在一等差數列中，已知某兩項的等差中項為 8，且此兩項之積為 48。

- (1) 令此等差數列之公差為 d ，試用 d 表示此兩項。
- (2) 求此兩項之值。

習題 10.1-10

在一等差數列中，第一項為 5，第八項為 26，試求此等差數列的公差。

習題 10.1-11

在一等差數列中，第 15 項為 40，公差 3，試求此等差數列的首項。

習題 10.1-12

若在 2 與 8 之間，插入 4 個數字，可使這些數字成等差數列(包含 2 與 8)。試求此 4 個數字。

習題 10.1-13

已知有 5 個連續整數成等差數列(由小而大)，且此 5 數和為 90，試求此 5 數。

習題 10.1-14

有一等差數列，首項為 9，公差為 18，請問第幾項開始會大於 150？

10.2 節 等差級數

前一節我們已經瞭解了等差數列，本節我們將學習求等差數列中各項的和。

設有一數列： $a_1、a_2、a_3、\cdots a_n$ 。

算式 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ 稱為由此數列得到的**級數**，總和稱為**級數和**。習慣上常用符號 S 代表級數和。如果 $a_1、a_2、a_3、\cdots a_n$ 是等差數列，則由此得到的級數也可稱為**等差級數**。

例題 10.2-1

計算等差級數 $1+2+3+4+5+6+7$ 之和。

詳解：

我們用基本的加法來計算，可得 $1+2+3+4+5+6+7=28$ 。

【練習】10.2-1

計算等差級數 $2+4+6+8+10+12$ 之和。

在例題 10.2-1 中，我們用基本的加法計算出了級數和。但若是題目的項數增加，例如要計算 $1+2+3+4+5+\cdots+49+50$ ，就很難用基本的加法計算出答案。因此我們現在要學一種能快速計算等差級數和的方法。

設有一等差數列：1、2、3、4、5、...49、50

我們要計算等差級數之和： $1+2+3+4+5+\dots+49+50$

令 $S=1+2+3+4+5+\dots+49+50$

觀察一下可以發現，第一項與最後一項之和為： $1+50=51$ ，第二項與倒數第二項之和為： $2+49=51$ ，第三項與倒數第三項之和為： $3+48=51$ 。如圖 10.2-1 之分組：

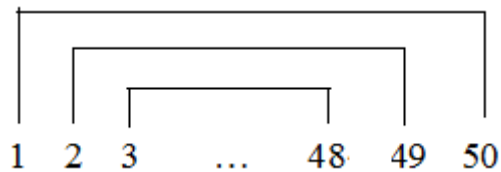


圖 10.2-1

各組合都是 51，我們可以利用這點來求出等差級數之和。

已知 $S=1+2+3+4+5+\dots+49+50$

當然我們也可以寫成 $S=50+49+48+47+46+\dots+2+1$

將兩式相加：

	$S=$	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+...$	$+49$	$+50$
$+$	$S=$	$+50$	$+49$	$+48$	$+47$	$+46$	$+...$	$+2$	$+1$
	$2S=$	$+51$	$+51$	$+51$	$+51$	$+51$	$+...$	$+51$	$+51$

得到 $2S=51+51+51+51+51+\dots+51+51$ ，因為原數列 1~50 共有 50 項，所以我們可以輕鬆知道 $2S$ 是 50 個 51 相加起來。即：

$$2S = 50 \times 51$$

$$S = \frac{50 \times 51}{2}$$

$$S = 1275$$

因此 $1+2+3+4+5+\dots+49+50=1275$

接著我們再來看看，對於一般的等差數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ ，如何求出等差級數之和。

$$\text{令 } S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

仿照之前的作法， S 也可以寫成 $S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1$

再將兩種寫法相加：

$$\begin{array}{r} S = \quad + a_1 \quad + a_2 \quad + a_3 \quad + \dots + a_{n-1} \quad + a_n \\ +) S = \quad + a_n \quad + a_{n-1} \quad + a_{n-2} \quad + \dots + a_2 \quad + a_1 \\ \hline 2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \end{array}$$

在這裡，我們必須看看 $a_1 + a_n, a_2 + a_{n-1}, a_3 + a_{n-2}$ 等各項是否相等。

利用前面學過的 $a_n = a_1 + (n-1)d$ ：

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + [a_1 + (n-2)d] = a_1 + d + a_1 + nd - 2d = a_1 + a_1 + (n-1)d = a_1 + a_n$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2d) + [a_1 + (n-3)d] = a_1 + 2d + a_1 + nd - 3d = a_1 + a_1 + (n-1)d = a_1 + a_n$$

$$\text{可知 } a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2}$$

同理也可再推得 $a_1 + a_n$ 與 $a_{n-1} + a_2, a_n + a_1$ 等各項全都相等，因此我們將這些項全都用 $a_1 + a_n$ 來表示：

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

因為原本的數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ 有 n 項，因此 $2S$ 也有 n 個 $a_1 + a_n$ 。

$2S$ 可表示為：

$$2S = (a_1 + a_n) \times n$$

$$\text{化簡得 } S = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$$

$$\text{於是我們知道等差級數之和 } S = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$$

即等差數列首項與末項相加，乘以項數後再除以 2，就能得到等差級數之和。

例題 10.2-2

計算等差級數 $1+2+3+4+\dots+99+100$ 之和。

詳解：

利用等差級數和公式 $S = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$

設此數列有 n 項。首項 $a_1 = 1$ 、末項 $a_n = 100$ 、項數為 $n = 100$ 。

$$\begin{aligned} S &= \frac{(1+100) \times 100}{2} \\ &= \frac{101 \times 100}{2} \\ &= \frac{10100}{2} \\ &= 5050 \end{aligned}$$

得等差級數 $1+2+3+4+\dots+99+100$ 之和為 5050。

【練習】10.2-2

計算等差級數 $1+2+3+4+\dots+199+200$ 之和。

例題 10.2-3

計算等差級數 $3+5+7+9+\dots+39+41$ 之和。

詳解：

設此數列有 n 項。可先利用 $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$ 求出項數。

首項 $a_1 = 3$ 、末項 $a_n = 41$ 、公差 $d = 5 - 3 = 2$

$$\text{項數 } n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{41 - 3}{2} + 1 = 20$$

得項數 $n = 20$ ，接著再利用等差級數和公式 $S = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$ 求出等差級數之和。

$$\begin{aligned} S &= \frac{(3 + 41) \times 20}{2} \\ &= \frac{44 \times 20}{2} \\ &= 440 \end{aligned}$$

得等差級數 $3+5+7+9+\dots+39+41$ 之和為 440。

【練習】10.2-3

計算等差級數 $10+13+16+19+\dots+43+46$ 之和。

例題 10.2-4

計算等差級數 $7+3+(-1)+(-5)+\dots+(-29)+(-33)$ 之和。

詳解：

設此數列有 n 項。可先利用 $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$ 求出項數。

首項 $a_1 = 7$ 、末項 $a_n = -33$ 、公差 $d = 3 - 7 = -4$

$$\text{項數 } n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{(-33) - 7}{-4} + 1 = 11$$

得項數 $n = 11$ ，接著再利用等差級數和公式 $S = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$ 求出等差級數之和。

$$\begin{aligned} S &= \frac{(7 + (-33)) \times 11}{2} \\ &= \frac{(-26) \times 11}{2} \\ &= -143 \end{aligned}$$

得等差級數 $7+3+(-1)+(-5)+\dots+(-29)+(-33)$ 之和為 -143 。

【練習】10.2-4

計算等差級數 $5+(-2)+(-9)+(-16)+\dots+(-86)+(-93)$ 之和。

例題 10.2-5

有一等差數列，首項為 6，公差為 8，試求前 15 項的和。

詳解：

題目要求前 15 項的和，我們已知首項，卻不知末項(第 15 項)，因此本題需先利用 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 求出第 15 項。

$$a_{15} = a_1 + (15-1)d = 6 + 14 \times 8 = 118$$

得 $a_{15} = 118$ ，接下來就可利用等差級數和公式 $S = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$ 求出前 15 項之和。

首項 $a_1 = 6$ 、末項 $a_{15} = 118$ 、項數 $n = 15$

$$\begin{aligned} S &= \frac{(6+118) \times 15}{2} \\ &= \frac{124 \times 15}{2} \\ &= 930 \end{aligned}$$

得前 15 項的和為 930。

【練習】10.2-5

有一等差數列，首項為 5，公差為 -3，試求前 23 項的和。

例題 10.2-6

有一等差數列，第 7 項為 35，公差為 6，試求第 1 項到第 15 項的和。

詳解：

題目要求第 1 項到第 15 項的和，我們需要先找出第 1 項、第 15 項才能計算。

先利用 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 找出第 1 項與第 15 項

$$a_7 = a_1 + (7-1)d$$

$$35 = a_1 + (7-1) \times 6$$

$$a_1 = -1$$

$$a_{15} = a_1 + (15-1)d$$

$$a_{15} = (-1) + (15-1) \times 6$$

$$a_{15} = 83$$

利用等差級數和公式 $S = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$ 求出第 1 項到第 15 項的和。

$$S = \frac{((-1) + 83) \times 15}{2}$$

$$= \frac{82 \times 15}{2}$$

$$= 615$$

得第 1 項到第 15 項的和為 615。

【練習】10.2-6

有一等差數列，第 9 項為 35，公差為 3，試求第 1 項到第 13 項的和。

例題 10.2-7

有一等差數列，首項為 -6 ，公差為 7 ，試求第 7 項到第 10 項的和。

詳解：

題目要求第 7 項到第 10 項的和，我們需要先找出第 7 項、第 10 項才能計算。

先利用 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 找出第 7 項與第 10 項

$$a_7 = a_1 + (7-1)d$$

$$a_7 = (-6) + (7-1) \times 7$$

$$a_7 = 36$$

$$a_{10} = a_1 + (10-1)d$$

$$a_{10} = (-6) + (10-1) \times 7$$

$$a_{10} = 57$$

利用等差級數和公式 $S = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$ 求出第 7 項到第 10 項的和。

$$\begin{aligned} S &= \frac{(36+57) \times 4}{2} \quad (\text{第 } 7 \text{ 項到第 } 10 \text{ 項共有 } 4 \text{ 項}) \\ &= \frac{93 \times 4}{2} \\ &= 186 \end{aligned}$$

得第 7 項到第 10 項的和為 186 。

【練習】10.2-7

有一等差數列，首項為 -12 ，公差為 9 ，試求第 10 項到第 15 項的和。

例題 10.2-8

有一等差數列，首項為 3，第 6 項為 18，前 n 項之和為 135，試求 n 。

詳解：

先利用首項為 3，第 6 項為 18，找出此數列的公差

$$a_6 = a_1 + (6-1)d$$

$$18 = 3 + 5d$$

$$d = 3$$

得到公差 $d = 3$ ，因此第 n 項可表示為： $a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + (n-1) \times 3$

前 n 項之和為 135，利用等差級數和公式 $S = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$ 可知：

$$135 = \frac{(3 + a_n) \times n}{2}$$

$$135 = \frac{(3 + 3 + (n-1) \times 3) \times n}{2} \quad (\text{利用 } a_n = 3 + (n-1) \times 3)$$

$$135 = \frac{(3 + 3 + 3n - 3) \times n}{2}$$

$$135 = \frac{3n + 3n^2}{2}$$

$$3n^2 + 3n = 270$$

$$n^2 + n - 90 = 0$$

$$(n+10)(n-9) = 0 \quad (\text{利用十字交乘})$$

$$n = -10, 9$$

但因為項數沒有負數，故 $n = -10$ 不合，因此項數 $n = 9$ 。

【練習】10.2-8

有一等差數列，首項為 7，第 5 項為 35，前 n 項之和為 385，試求 n 。

例題 10.2-9

有一等差數列 2、5、8、11、14、17、20、23、26。試求：

(1) 奇數項之和。

(2) 偶數項之和。

詳解：

(1) 奇數項是項次為奇數的項，因此奇數項為 2、8、14、20、26。

可視為首項為 2，末項為 26，共 5 項公差為 6 的等差數列。

利用等差級數和公式 $S = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$ 計算奇數項之和

$$\begin{aligned} S &= \frac{(2+26) \times 5}{2} \\ &= 70 \end{aligned}$$

得奇數項之和為 70。

(2) 偶數項是項次為偶數的項，因此偶數項為 5、11、17、23。

可視為首項為 5，末項為 23，共 4 項公差為 6 的等差數列。

利用等差級數和公式 $S = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$ 計算奇數項之和

$$\begin{aligned} S &= \frac{(5+23) \times 4}{2} \\ &= 56 \end{aligned}$$

得偶數項之和為 56。

【練習】10.2-9

有一等差數列 -3、2、7、12、17、22、27、32、37。試求：

(1) 奇數項之和。

(2) 偶數項之和。

例題 10.2-10

有一等差數列，共有 8 項，若奇數項之和為 52，偶數項之和為 60。試求：

(1) 此等差數列各項之和。

(2) 此等差數列之公差。

詳解：

(1) 此等差數列有 8 項，設此數列為： a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 、 a_5 、 a_6 、 a_7 、 a_8 。

則奇數項數列為： a_1 、 a_3 、 a_5 、 a_7 ，且 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 52$ 。

偶數項數列為： a_2 、 a_4 、 a_6 、 a_8 ，且 $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = 60$ 。

$$\begin{aligned} \text{此等差數列各項之和} &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \\ &= (a_1 + a_3 + a_5 + a_7) + (a_2 + a_4 + a_6 + a_8) \\ &= 52 + 60 \\ &= 112 \end{aligned}$$

得此等差數列各項之和為 112。

(2) 要求此等差數列之公差，我們可以將偶數項之和減去奇數項之和。

$$\text{偶數項之和} - \text{奇數項之和} = 60 - 52$$

$$(a_2 + a_4 + a_6 + a_8) - (a_1 + a_3 + a_5 + a_7) = 60 - 52$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + a_8 - a_1 - a_3 - a_5 - a_7 = 60 - 52$$

$$a_2 - a_1 + a_4 - a_3 + a_6 - a_5 + a_8 - a_7 = 60 - 52$$

$$(a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + (a_6 - a_5) + (a_8 - a_7) = 8$$

$$d + d + d + d = 8 \quad (\text{後一項減前一項為公差，令公差為 } d)$$

$$4d = 8$$

$$d = 2$$

得此等差數列之公差為 2。

【練習】10.2-10

有一等差數列，共有 10 項，若奇數項之和為 42，偶數項之和為 37。試求：

(1) 此等差數列各項之和。

(2) 此等差數列之公差。

10.2 節 習題

習題 10.2-1

計算等差級數 $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$ 之和。

習題 10.2-2

計算等差級數 $1+2+3+4+\dots+49+50$ 之和。

習題 10.2-3

計算等差級數 $6+8+10+12+\dots+88+90$ 之和。

習題 10.2-4

計算等差級數 $8+3+(-2)+(-7)+\dots+(-42)+(-47)$ 之和。

習題 10.2-5

有一等差數列，首項為 7，公差為 3，試求前 18 項的和。

習題 10.2-6

有一等差數列，第 8 項為 47，公差為 6，試求第 1 項到第 14 項的和。

習題 10.2-7

有一等差數列，首項為 -10 ，公差為 4，試求第 6 項到第 10 項的和。

習題 10.2-8

有一等差數列，首項為 1，第 5 項為 29，前 n 項之和為 396，試求 n 。

習題 10.2-9

有一等差數列 -8 、 -2 、 4 、 10 、 16 、 22 、 28 ，試求其奇數項之和。

習題 10.2-10

有一等差數列，共有 12 項，若奇數項之和為 72，偶數項之和為 60，試求此等差數列之公差。

10.3 節 等差數列的應用

本節中我們將把前面學到的等差數列觀念，應用在各種題目中。

例題 10.3-1

某三角形，其三內角度數成等差數列，且最小角為 40 度，試求最大角之角度。

詳解：

三內角度數成等差數列，設公差為 d 。最小角為 40 度，則另外兩角可表示為 $(40+d)$ 度、 $(40+2d)$ 度。

由三角形三內角和為 180 度可列式：

$$40+(40+d)+(40+2d)=180$$

$$120+3d=180$$

$$d=20$$

因此另外兩角角度為 $40+20=60$ (度)、 $40+20\times 2=80$ (度)

最大角為 80 度。

【練習】10.3-1

某三角形，其三內角度數成等差數列，且最大角為 90 度，試求最小角之角度。

例題 10.3-2

小文下定決心開始運動減肥，第 1 週每天運動 20 分鐘，第 2 週每天運動 25 分鐘，第 3 週每天運動 30 分鐘，依此類推，每週都增加 5 分鐘。請問在第幾週時，小文每天會運動 70 分鐘？

詳解：

因為每週都增加 5 分鐘，我們將每週每天的運動時間視為等差數列。

第 1 週每天運動視為第 1 項，即 $a_1 = 20$ 。

每週都增加 5 分鐘，因此公差 $d = 5$ 。

題目想求第幾週每天會運動 70 分鐘，即第幾項會變成 70。

設第 n 項為 70，利用 $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$70 = 20 + (n-1) \times 5$$

$$70 = 20 + 5n - 5$$

$$5n = 55$$

$$n = 11$$

第 11 項為 70，即在第 11 週時，小文每天會運動 70 分鐘。

【練習】10.3-2

小哲下定決心開始存錢，現在小哲總存款有 100 元，每天存 5 元。即第 1 天存錢後，總存款有 105 元。第 2 天存錢後，總存款有 110 元，依此類推。請問在第幾天時，小哲總存款會有 255 元？(中途小哲都沒有把存款花掉)

例題 10.3-3

某物體自高空落下，第 1 秒落下 4.9 公尺，第 2 秒落下 14.7 公尺，第 3 秒落下 24.5 公尺... 即落下距離每秒增加 9.8 公尺。請問：

- (1) 第 50 秒落下多少公尺？
- (2) 1~50 秒總共落下多少公尺？

詳解：

因為落下距離每秒增加 9.8 公尺，因此每秒落下距離可視為等差數列。

第 1 秒落下距離視為第 1 項，即 $a_1 = 4.9$ 。

每秒都增加 9.8 公尺，因此公差 $d = 9.8$ 。

- (1) 求第 50 秒落下的距離，即 a_{50} 之值。

$$\begin{aligned} a_{50} &= a_1 + (50-1)d \\ &= 4.9 + (50-1)9.8 \\ &= 485.1 \end{aligned}$$

得第 50 秒落下 485.1 公尺。

- (2) 1~50 秒總共落下多少公尺，即 a_1 到 a_{50} 之和。

$$\begin{aligned} S &= \frac{(a_1 + a_{50}) \times 50}{2} \\ &= \frac{(4.9 + 485.1) \times 50}{2} \\ &= 12250 \end{aligned}$$

得第 1~50 秒共落下 12250 公尺。

【練習】10.3-3

某物體自高空落下，第 1 秒落下 4.9 公尺，第 2 秒落下 14.7 公尺，第 3 秒落下 24.5 公尺... 即落下距離每秒增加 9.8 公尺。請問：

- (1) 第 60 秒落下多少公尺？
- (2) 1~60 秒總共落下多少公尺？

例題 10.3-4

有一條長 540 公尺的道路，工人想在這條道路一旁裝設路燈。路標 0 公尺處裝第 1 個，路標 15 公尺處裝第 2 個，路標 30 公尺處裝第 3 個…依此類推，每隔 15 公尺裝 1 個路燈，路標 540 公尺處裝最後 1 個，請問這條道路共會裝多少個路燈？

詳解：

因為每隔 15 公尺裝 1 個路燈，我們可以將路燈的路標位置看成等差數列。

每隔 15 裝 1 個路燈，即公差 $d=15$ 。

第 1 個路燈在路標 0 公尺處，即 $a_1=0$ 。

第 2 個路燈在路標 15 公尺處，即 $a_2=15$ 。

設第 n 個路燈在路標 540 公尺處，即 $a_n=540$ 。

我們利用 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 來求 n 之值。

$$540=0+(n-1)15$$

$$540=15n-15$$

$$n=37$$

即路標 540 公尺處是第 37 個路燈，因此這條道路總共有 37 個路燈。

【練習】10.3-4

有一條長 336 公尺的道路，鎮公所想在這條道路一旁擺放花盆。路標 0 公尺處擺第 1 個，路標 16 公尺擺裝第 2 個，路標 32 公尺處擺第 3 個…依此類推，每隔 16 公尺擺 1 個花盆，路標 336 公尺處擺最後 1 個，請問這條道路共會擺多少個花盆？

例題 10.3-5

某間音樂廳共有 28 排座位，每一排都比前一排多 2 個座位。若第 28 排有 80 個座位，請問第 1 排有幾個座位？

詳解：

每一排都比前一排多 2 個座位，我們可以將每排座位數量看成等差數列。

每一排都比前一排多 2 個座位，即公差 $d = 2$ 。

第 28 排有 80 個座位，即 $a_{28} = 80$ 。

我們利用 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 來求 a_1 ，也就是第 1 排的座位數量。

$$80 = a_1 + (28-1)2$$

$$80 = a_1 + 54$$

$$a_1 = 26$$

得到第 1 排座位有 26 個。

【練習】10.3-5

某間演藝廳共有 24 排座位，每一排都比前一排多 3 個座位。若第 16 排有 81 個座位，請問第 1 排有幾個座位？

例題 10.3-6

某間音樂廳共有 1484 個座位，每一排都比前一排多 2 個座位。若第 1 排有 26 個座位，請問這間音樂廳共有幾排座位？

詳解：

每一排都比前一排多 2 個座位，我們可以將每排座位數量看成等差數列。

每一排都比前一排多 2 個座位，即公差 $d=2$ 。

第 1 排有 26 個座位，即 $a_1=26$ 。

設共有 n 排，最後一排座位數量 $a_n = a_1 + (n-1)d = 26 + 2(n-1) = 24 + 2n$

音樂廳共有 1484 個座位，我們利用等差級數和公式找出 n 值。

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$$
$$1484 = \frac{(26 + (24 + 2n)) \times n}{2}$$

$$1484 = \frac{(50 + 2n) \times n}{2}$$

$$1484 = 25n + n^2$$

$$n^2 + 25n - 1484 = 0$$

$$(n-28)(n+53) = 0$$

$$n = 28, -53 \quad (\text{排數為正數，負不合})$$

這間音樂廳共有 28 排座位。

【練習】10.3-6

某間演藝廳共有 1020 個座位，每一排都比前一排多 3 個座位。若第 1 排有 36 個座位，請問這間音樂廳共有幾排座位？

例題 10.3-7

圖 10.3-1 為一個九宮格，試將空格的數字填完，使得直行、橫列、對角線的三數都成等差數列。

14		10
20		16

圖 10.3-1

詳解：

我們將各空格填入代號，如圖 10.3-2。

14	A	10
B	C	D
20	E	16

圖 10.3-2

因為直行、橫列、對角線的三數都成等差數列，所以中間的數為旁邊兩數的等差中項。因此可得：

$$A = \frac{14+10}{2} = 12$$

$$B = \frac{14+20}{2} = 17$$

$$C = \frac{14+16}{2} = 15$$

$$D = \frac{10+16}{2} = 13$$

$$E = \frac{20+16}{2} = 18$$

完成九宮格如圖 10.3-3

14	12	10
17	15	13
20	18	16

圖 10.3-3

同學可以驗算看看是否直行、橫列、對角線的三數都成等差數列。

【練習】10.3-7

圖 10.3-4 為一個九宮格，試將空格的數字填完，使得直行、橫列、對角線的三數都成等差數列。

18		6
32		20

圖 10.3-4

例題 10.3-8

小文下定決心要每天慢跑健身，第 1 天跑 5 公里，之後每天多跑 0.6 公里。即第 2 天跑 5.6 公里，第 3 天跑 6.2 公里。請問在第幾天開始，小文當天跑步的距離會超過 12 公里？

詳解：

因為每天都多跑 0.6 公里，我們可以將每天跑的距離看成等差數列。

第 1 項即第 1 天跑的距離， $a_1 = 5$ 。

每天多跑 0.6 公里，因此公差 $d = 0.6$ 。

設第 n 天後，跑步的總距離會超過 12 公里。

$$\text{即 } a_n > 12$$

$$a_1 + (n-1)d > 12 \quad (a_n = a_1 + (n-1)d)$$

$$5 + (n-1) \times 0.6 > 12$$

$$4.4 + 0.6n > 12$$

$$0.6n > 7.6$$

$$\frac{6}{10}n > \frac{76}{10}$$

$$n > \frac{76}{10} \times \frac{10}{6} = \frac{38}{3} = 12\frac{2}{3}$$

即第 13 天跑步距離會超過 12 公里。我們可以驗算看看第 12 天與第 13 天的跑步距離： $a_{12} = 5 + (12-1) \times 0.6 = 11.6$ 、 $a_{13} = 5 + (13-1) \times 0.6 = 12.2$

可確認是第 13 天開始，跑步距離超過 12 公里。

【練習】10.3-8

小軒想培養讀書的好習慣，每天都讀數頁的書。第1天讀10頁，之後每天多讀3頁。即第2天讀13頁，第3天讀16頁。請問在第幾天開始，小軒一天讀的頁數會超過50頁？

10.3 節 習題

習題 10.3-1

某三角形，其三內角度數成等差數列，且最小角為 10 度，試求最大角之角度。

習題 10.3-2

小新下定決心開始游泳訓練，第 1 週每天游 25 公尺，第 2 週每天游 35 公尺，第 3 週每天游 45 公尺，依此類推，每週都增加 10 公尺。請問在第幾週時，小新每天會游 95 公尺？

習題 10.3-3

某物體自高空落下，第 1 秒落下 4.9 公尺，第 2 秒落下 14.7 公尺，第 3 秒落下 24.5 公尺... 即落下距離每秒增加 9.8 公尺。請問：

- (1) 第 30 秒落下多少公尺？
- (2) 1~30 秒總共落下多少公尺？

習題 10.3-4

有一條長 232 公尺的道路，工人想在這條道路一旁種樹。路標 0 公尺處種第 1 棵，路標 8 公尺處種第 2 棵，路標 16 公尺處種第 3 棵... 依此類推，每隔 8 公尺種 1 棵樹，路標 232 公尺處種最後 1 棵，請問這條道路共會種多少棵樹？

習題 10.3-5

學校大禮堂共有 50 排座位，每一排都比前一排多 4 個座位。若第 15 排有 92 個座位，請問第 1 排有幾個座位？

習題 10.3-6

某間音樂廳共有 1320 個座位，每一排都比前一排多 2 個座位。若第 1 排有 15 個座位，請問這間音樂廳共有幾排座位？

習題 10.3-7

圖 10.3-5 為一個九宮格，試將空格的數字填完，使得直行、橫列、對角線的三數都成等差數列。

4		20
16		32

圖 10.3-5

習題 10.3-8

群群下定決心要每天慢跑健身，第 1 天跑 8 公里，之後每天多跑 1.2 公里。即第 2 天跑 9.2 公里，第 3 天跑 10.4 公里。請問在第幾天開始，群群當天跑步的距離會超過 15 公里？

第十章綜合習題

習題 1：

- (1) 哥哥為運動會練習跑步，一共跑了 5 天，每天都固定跑 1000 公尺，每天的跑步距離累計，依照順序排列出來，應如何表示？
- (2) 工人刷油漆，一共花了 8 天，每天都固定刷 120 平方公尺，每天刷油漆的面積累計，依照順序排列出來，應如何表示？

習題 2：

- (1) 有一等差數列，首項為 8，公差為 -2 ，試求此等差數列的第 10 項。
- (2) 有一等差數列，首項為 17，末項為 59，公差為 3，請問此數列有幾項？
- (3) 有一等差數列：18、 $4x+2$ 、 $5x+10$ ，試求 x 之值。
- (4) 有一等差數列，首項為 19，第 5 項為 3，試求此等差數列的公差。
- (5) 有一等差數列，第 8 項為 42，公差 3，試求此等差數列的首項。

習題 3：

在一等差數列中，已知某兩項的等差中項為 7，且此兩項之積為 40。

- (1) 令此等差數列之公差為 d ，試用 d 表示此兩項。
- (2) 求此兩項之值。

習題 4：

- (1) 已知有 5 個連續偶數成等差數列(由小而大)，且此 5 數和為 90，試求此 5 數。
(2) 已知有 5 個連續奇數成等差數列(由小而大)，且此 5 數和為 115，試求此 5 數。

習題 5：

從 -8、-2、2、4 四個數中刪掉一個數，剩下的三個數由小而大，依序排列為一等差數列，請問刪掉的數是哪一個？

習題 6：

有一等差數列，首項為 85，公差為 -6，請問第幾項開始會小於 0？

習題 7：

- (1) 計算等差級數 $2+4+6+\cdots+98+100$ 之和。
(2) 計算等差級數 $10+7+4+\cdots+(-137)+(-140)$ 之和。

習題 8：

- (1) 有一等差數列，首項為 8，公差為 4，試求前 10 項的和。
(2) 有一等差數列，首項為 2，第 5 項為 38，試求第 8 項到第 10 項的和。

(3)有一等差數列，首項為 4，公差為 -3 ，試求第 6 項到第 10 項的和。

習題 9：

有一等差數列，首項為 6，第 3 項為 16，前 n 項之和為 188，試求 n 。

習題 10：

某四邊形，其四內角度數成等差數列，且最小角為 45 度，試求最大角之角度。

習題 11：

有一等差數列，第 3 項為 -1 ，第 7 項為 -21 ，試求下列問題：

(1)第 5 項為何？

(2)首項及公差為何？

習題 12：

小育做數學練習題，第 1 週每天練習 15 題，第 2 週每天練習 18 題，第 3 週每天練習 21 題，依此類推，每週都增加 3 題。請問在第幾週時，小育每天會練習 30 題？

習題 13：

某物體自高空落下，第 1 秒落下 4.9 公尺，第 2 秒落下 14.7 公尺，第 3 秒落下 24.5 公尺... 即落下距離每秒增加 9.8 公尺。請問：

(1) 第 10 秒落下多少公尺？

(2) 1~10 秒總共落下多少公尺？

習題 14：

有一條長 360 公里的高速公路，政府想在這條道路設匝道。路標 0 公里處設第 1 個匝道，路標 30 公里處設第 2 個匝道，路標 60 公里處設第 3 個匝道... 依此類推，每隔 30 公里設 1 個匝道，路標 360 公里處設最後 1 個匝道，請問這條高速公路共會有幾個匝道？

習題 15：

某球場共有 36 排座位，每一排都比前一排多 5 個座位。若第 10 排有 65 個座位，請問(1) 第 1 排有幾個座位？(2) 全場總共有幾個座位？

習題 16：

圖 10-1 為一個九宮格，九宮格內直行、橫列、對角線的三數都成等差數列，請問 $a+c+e+g = ?$

6	a	b
c	d	e
f	g	20

圖 10-1

習題 17：

小美開始存錢，第 1 天原有 15 元，之後每天多存 4 元。即第 2 天有 19 元，第 3 天有 23 元。請問在第幾天開始，小美的錢會超過 60 元？

基測與會考模擬試題

() 1. 下列哪一個選項中的數列是等差數列也是等比數列？【90(二)基測】

(A) $\frac{1}{2}$ 、1、2、4、6、8、10 (B) 1、2、3、4、5、6、7、8

(C) 2、2、2、2、2、2、2、2 (D) 0、1、0、1、0、1、0、1

() 2. 將下列四個選項中的數列，哪一個不是等差數列？【99(一)基測】

(A) $\sqrt{5}$ ， $\sqrt{5}$ ， $\sqrt{5}$ ， $\sqrt{5}$ ， $\sqrt{5}$

(B) $\sqrt{1}$ ， $\sqrt{4}$ ， $\sqrt{9}$ ， $\sqrt{16}$ ， $\sqrt{25}$

(C) $\sqrt{5}$ ， $2\sqrt{5}$ ， $3\sqrt{5}$ ， $4\sqrt{5}$ ， $5\sqrt{5}$

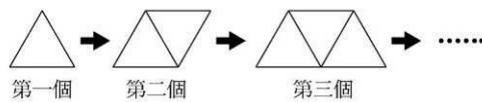
(D) $\sqrt{1}$ ， $2\sqrt{2}$ ， $3\sqrt{3}$ ， $4\sqrt{4}$ ， $5\sqrt{5}$

() 3. 一等差數列 a_1, a_2, \dots, a_{100} ，已知 $a_{70} - a_{57} < 0$ ，那麼下列哪一個選項是正確的？【90(一)基測】

(A) $a_{43} - a_{69} > 0$ (B) $a_{43} - a_{51} < 0$

(C) $a_{18} + a_{51} > a_{21} + a_{48}$ (D) $a_{12} + a_{31} > a_9 + a_{34}$

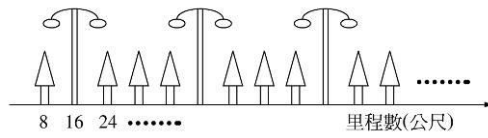
() 4. 用等長的吸管依次向右排出相連的三角形，如圖(一)。請問排第十個圖形需要幾根吸管？【90(二)基測】



圖(一)

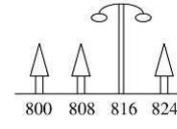
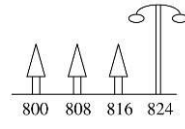
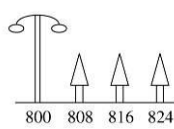
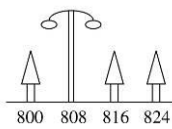
(A)19 (B)21 (C)23 (D)30

- () 5. 如圖(二)，在某條公路上，從里程數 8 公尺開始到 4000 公尺為止，每隔 8 公尺將樹與燈按圖中所示之規則設立：在里程數 8 公尺處種一棵樹，在 16 公尺處立一盞燈，在 24 公尺處種一棵樹……，且每兩盞燈之間的距離均相等。依此規則，下列哪一個選項是里程數 800 公尺~824 公尺之間，樹與燈的正確排列順序？【90(二)基測】

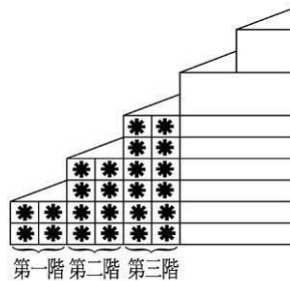


圖(二)

- (A) (B) (C) (D)



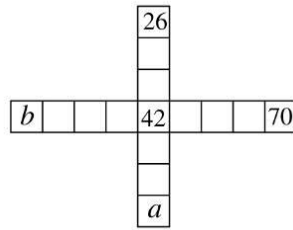
- () 6. 如圖(三)，有一樓梯，每一階的長度、寬度與增加的高度都相等。有一工人在此樓梯的一側貼上大小相同的正方形磁磚，第一階貼了 4 塊磁磚，第二階貼了 8 塊磁磚，……，依此規則貼了 112 塊磁磚後，剛好貼完此樓梯的一側。請問此樓梯總共有多少階？【91(一)基測】



圖(三)

- (A)5 (B)6 (C)7 (D)8

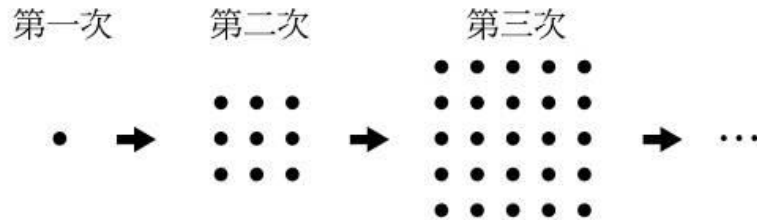
- () 7. 如圖(四)，橫列有 9 個方格，直列有 7 個方格。若將每個方格內都填入一個數字，使得橫列方格內的數字由左到右成等差數列，直列方格內的數字由上到下也成等差數列。已知共同方格內的數字是 42，求 $a-b=?$ 【91(二)基測】



圖(四)

- (A)44 (B)42 (C)40 (D)38

- () 8. 小玉拿了一堆棋子玩排列遊戲。
 第一次：放 1 顆棋子，如圖(五)；
 第二次：放 9 顆棋子，排出一個正方形，如圖(六)；
 第三次：放 25 顆棋子，排出一個正方形，如圖(七)；……依此規則，每一次排出的正方形，其每邊的棋子數都要比前一次多 2 顆。請問第十次比第九次多放了幾顆棋子？ 【91(二)基測】

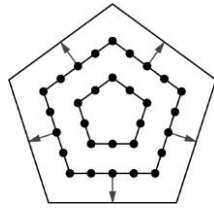


圖(五) 圖(六) 圖(七)

- (A) $10^2 - 9^2$ (B) $11^2 - 9^2$ (C) $19^2 - 17^2$ (D) $21^2 - 19^2$

- () 9. 數列 a, b, c 為等差數列，公差為 3。若數列 $a+5, b+10, c+15$ 也為等差數列，則公差為何？ 【92(二)基測】
- (A)3 (B)5 (C)8 (D)15

- () 10. 如圖(八)，有若干位學生排出正五邊形的隊形，由內而外共排了 6 圈，且學生人數剛好排完。已知最內圈每邊 3 人。往外每圈增加 2 人(即由內向外算起第 2 圈每邊 5 人，第 3 圈每邊 7 人，……)。請問此隊形的學生共
 有多少人？【92(二)基測】



圖(八)

- (A)210 (B)240 (C)285 (D)630
- () 11. 從 -41 、 -16 、 25 、 66 四個數中刪掉一個數，剩下的三個數由小而大，依序排列為一等差數列。請問刪掉的是哪一個數？【93(一)基測】
- (A) -41 (B) -16 (C) 25 (D) 66
- () 12. 若數列 a 、 b 、 c 為等差數列，公差為 2，則下列敘述何者錯誤？【93(二)基測】
- (A)數列 $a+5$ 、 $b+5$ 、 $c+5$ 也是等差數列
- (B)數列 $5a$ 、 $5b$ 、 $5c$ 也是等差數列
- (C)數列 $a-1$ 、 $b-1$ 、 $c-1$ 也是等差數列
- (D)數列 a^2 、 b^2 、 c^2 也是等差數列
- () 13. 求等差級數 $4+7+10+\cdots+100$ 的和為何？【93(二)基測】
- (A)1568 (B)1664 (C)1716 (D)1768

- () 14. 圖(九)的正方形內有 9 個數字，數字的總和為 y ，求圖(十)中五個正方形內所有數字的總和為何？(以 y 表示) 【94(一)基測】

3	7	11
15	19	23
27	31	35

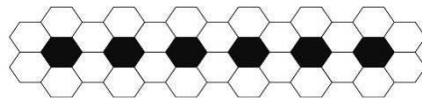
圖(九)

1	5	9	2	6	10	3	7	11	4	8	12	5	9	13
13	17	21	14	18	22	15	19	23	16	20	24	17	21	25
25	29	33	26	30	34	27	31	35	28	32	36	29	33	37

圖(十)

- (A) $5y$ (B) $5y+9$ (C) $5(y+9)$ (D) $5y+18$

- () 15. 有一長條型鏈子，其外型由邊長為 1 公分的正六邊形排列而成，如圖(十一)表示此鏈之任一段花紋，其中每個黑色六邊形與 6 個白色六邊形相鄰。若鏈子有 35 個黑色六邊形，則此鏈子共有幾個白色六邊形？【97(一)基測】



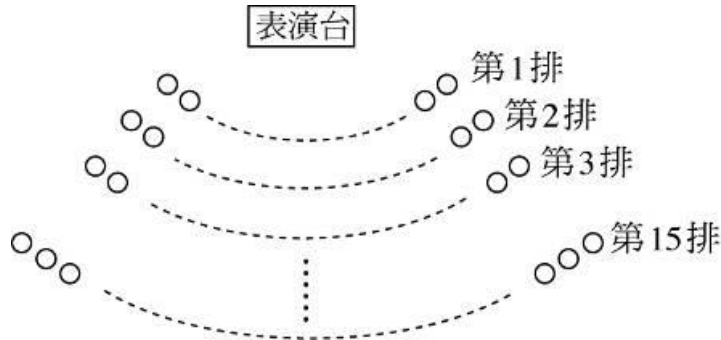
圖(十一)

- (A)140 (B)142 (C)210 (D)212

- () 16. 如圖(十二)，表演台前共有 15 排座位，其中第一排有 30 個，且每一排均比前一排多 2 個座位。若某校有 1~25 班，每班 20 人，並依下列方式安排學生入座：

- 依班級順序先排第一班，安排完後再排下一班。
- 前排的座位排滿後，才排下一排座位。

請問哪一班的學生全部都坐在第 8 排？【97(二)基測】



圖(十二)

- (A)第 12 班 (B)第 13 班 (C)第 14 班 (D)第 15 班

- () 17. 有一益智遊戲分二階段進行，其中第二階段共有 25 題，答對一題得 3 分，答錯一題扣 2 分，不作答得 0 分。若小明已在第一階段得 50 分，且第二階段答對了 20 題，則下列哪一個分數可能是小明在此益智遊戲中所得的總分？【98(一)基測】

(A)103 分 (B)106 分 (C)109 分 (D)112 分

- () 18. 等差數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 中，若 $a_3 - a_2 = 6$ ，則 $a_{330} - a_{20} = ?$ 【98(二)基測】

(A)6 (B)1854 (C)1860 (D)1866

- () 19. 圖(十三)為雅婷左手拿著 3 張深灰色與 2 張淺灰色的牌疊在一起的情形。



圖(十三)

以下是她每次洗牌的三個步驟：

步驟一：用右手拿出疊在最下面的 2 張牌，如圖(十四)。

步驟二：將右手拿的 2 張牌依序交錯插入左手拿的 3 張牌之間，如圖(十五)。

步驟三：用左手拿著顏色順序已改變的 5 張牌，如圖(十六)。



圖(十四) 圖(十五) 圖(十六)

若依上述三個步驟洗牌，從圖(十四)的情形開始洗牌若干次後，其顏色順序會再次與圖(十四)相同，則洗牌次數可能為下列何者？【102 基測】

(A) 18 (B) 20 (C) 25 (D) 27

習題解答

10.1 練習解答

練習 10.1-1

(1) 否 (2) 是

練習 10.1-2

55、110、165、220、275、330、385

練習 10.1-3

800、1600、2400、3200、4000、4800

練習 10.1-4

4、10、16、22、28

練習 10.1-5

12、5、-2、-9、-16、-23

練習 10.1-6

(1)14 (2)43

(3)-6 (4)13

練習 10.1-7

(1)7 (2)5

(3)11 (4)8

練習 10.1-8

48

練習 10.1-9

(1) $10-d$ 、 $10+d$ (2)7、13

練習 10.1-10

-6

練習 10.1-11

-5

練習 10.1-12

4.25、6.5、8.75

練習 10.1-13

19、20、21、22、23

練習 10.1-14

10

10.1 習題解答

10.1-1 (1) 是 (2) 是

10.1-2 100、120、140、160、180

10.1-3 20、25、30、35、40、45、50

10.1-4 2、7、12、17、22

10.1-5 5、2、-1、-4、-7、-10

10.1-6 (1)14 (2)-2

(3)3 (4)110

10.1-7 (1)16 (2)8

(3)10 (4)6

10.1-8 48

10.1-9 (1) $8-d$ 、 $8+d$ (2)4、12

10.1-10 3

10.1-11 -2

10.1-12 3.2、4.4、5.6、6.8

10.1-13 16、17、18、19、20

10.1-14 9

10.2 練習解答

練習 10.2-1

42

練習 10.2-2

20100

練習 10.2-3

364

練習 10.2-4

-660

練習 10.2-5

-644

練習 10.2-6

377

練習 10.2-7

549

練習 10.2-8

10

練習 10.2-9

(1)85 (2)68

練習 10.2-10

(1)79 (2)公差為-1

10.2 習題解答

- 10.2-1 55
10.2-2 1275
10.2-3 2064
10.2-4 -234
10.2-5 585
10.2-6 616
10.2-7 90
10.2-8 11
10.2-9 40
10.2-10 公差為 2

10.3 練習解答

練習 10.3-1

30 度

練習 10.3-2

31 天

練習 10.3-3

(1) 583.1 公尺 (2) 17640 公尺

練習 10.3-4

22 個

練習 10.3-5

36 個

練習 10.3-6

17 排

練習 10.3-7

18	12	6
25	19	13
32	26	20

練習 10.3-8

第 15 天

10.3 習題解答

- 10.3-1 答：110 度
10.3-2 答：第 8 週
10.3-3 答：(1) 289.1 公尺
 (2) 4410 公尺
10.3-4 答：30 棵

10.3-5 答：36 個

10.3-6 答：30 排

10.3-7 答：

4	12	20
10	18	26
16	24	32

10.3-8 答：第 7 天

第十章綜合習題

1. 答：

- (1) 1000、2000、3000、4000、5000
(2) 120、240、360、480、600、720、840、960

2. 答：

- (1) -10
(2) 15
(3) 8
(4) -4
(5) 21

3. 答：

- (1) $7-d$ 、 $7+d$
(2) 4、10

4. 答：

- (1) 14、16、18、20、22
(2) 19、21、23、25、27

5. 答：2

6. 答：16

7. 答：

- (1) 2550
(2) -3315

8. 答：

- (1) 260
(2) 222
(3) -85

9. 答：8

10. 答：135 度

11. 答：

- (1) -11
(2) 首項 9、公差 -5

12. 答：第 6 週

13. 答：

(1)93.1 公尺

(2)490 公尺

14. 答：13 個

15. 答：

(1)20 個

(2)3870 個

16. 答：52

17. 答：第 13 天

(2)3870 個

16. 答：52

17. 答：第 13 天

基測與會考試題解答

1. 《答案》(C)

詳解： 等差數列需有固定公差 d ，等比數列需有固定公比 r
(A)不是等差數列也不是等比數列
(B)是公差為 1 的等差數列，但不是等比數列
(C)是公差為 0 的等差數列，也是公比為 1 的等比數列
(D)不是等差數列也不是等比數列

2. 《答案》(D)

詳解： (A)是等差數列，公差為 0
(B)是等差數列，公差為 1
(C)是等差數列，公差為 $\sqrt{5}$
(D)不是等差數列

3. 《答案》(A)

詳解： 由 $a_{70} - a_{57} < 0 \rightarrow a_{70} < a_{57} \rightarrow$ 此數列為遞減數列
(A) $a_{43} - a_{69} > 0 \rightarrow a_{43} > a_{69}$ ，正確
(B) $a_{42} - a_{51} < 0 \rightarrow a_{42} < a_{51}$ ，錯誤
(C) $a_{18} + a_{51} > a_{21} + a_{48} \rightarrow a_1 + 17d + a_1 + 50d > a_1 + 20d + a_1 + 47d \rightarrow$
 $2a_1 + 67d > 2a_1 + 67d$ ，錯誤
(D) $a_{12} + a_{31} > a_9 + a_{34} \rightarrow a_1 + 11d + a_1 + 30d > a_1 + 8d + a_1 + 33d \rightarrow 2a_1 + 41d > 2a_1 + 41d$ ，
錯誤

4. 《答案》(B)

詳解： 第一個三角形需要 3 根吸管，第二個三角形需要 5 根吸管，第三個三角形需要 7 根吸管
為一個首項 3，公差 2 的等差數列；排第十個三角形需要 $3 + 2(10 - 1) = 21$ 根吸管

5. 《答案》(D)

詳解： 設第一盞燈 a_1 在 16 公尺處，每隔 32 公尺再立一盞燈(公差 32) \rightarrow 找出 800~824 間燈的位置

$$a_n = a_1 + (n-1)d \geq 800$$

$$16 + 32(n-1) \geq 800 \rightarrow 2 + 4(n-1) \geq 100 \rightarrow 4n - 2 \geq 100 \rightarrow n \geq \frac{51}{2} \quad (n \text{ 是整數}) \rightarrow n = 26$$

第 26 盞燈的位置在 $a_{26} = 16 + 32(26-1) = 816$ 公尺處

6. 《答案》(C)

詳解： 第一階貼 4 塊磁磚，第二階貼 8 塊磁磚，第三階貼 12 塊磁磚
為一個首項 4，公差 4 的等差數列；找出貼了 112 塊磁磚後，此樓梯共有多少階

$$\frac{n}{2} \times [2 \times 4 + 4(n-1)] = 112 \rightarrow \frac{n}{2} \times [8 + 4n - 4] = 112 \rightarrow 4n^2 + 4n - 224 = 0 \rightarrow n^2 + n - 56 = 0$$

$\rightarrow (n-7)(n+8) = 0 \rightarrow n = 7$ 或 $n = -8$ (負不合)，故總共 7 階

7. 《答案》(A)

詳解： 42 是等差中項， $70-42=42-b \rightarrow b=14$ ， $a-42=42-26 \rightarrow a=58$
 $a-b=58-14=44$

8. 《答案》(C)

詳解： 棋子排列遊戲，第一次邊長 1 顆，第二次邊長 3 顆，第三次邊長 5 顆
為一個首項 1，公差 2 的等差數列；第十次邊長 $1+2(10-1)=19$ ，第九次邊長 $1+2(9-1)=17$
因棋子排列成正方形，所以第十次比第九次多出 19^2-17^2 顆棋子

9. 《答案》(C)

詳解： a 、 b 、 c 為等差數列，公差為 3 $\rightarrow b=a+3$ 、 $c=a+6$
 $a+5$ 、 $b+10$ 、 $c+15$ 也為等差數列，代入 $b=a+3$ 、 $c=a+6 \rightarrow$
 $a+5$ 、 $a+3+10$ 、 $a+6+15 \rightarrow a+5$ 、 $a+13$ 、 $a+21$ 為公差 8 的等差數列

10. 《答案》(A)

詳解： 第一圈(最內圈)人數 $a_1=3 \times 5-5=10$ (每邊 3 人)
第二圈人數 $a_2=5 \times 5-5=20$ (每邊 5 人)
第三圈人數 $a_3=7 \times 5-5=30$ (每邊 7 人)
每圈總人數成一首項 10，公差 10 的等差數列；排六圈共需要 $\frac{6}{2} \times [2 \times 10 + 10(6-1)] = 210$ 人

11. 《答案》(A)

詳解： (A) 刪 -41 $\rightarrow -16$ 、25、66，公差 41 的等差數列
(B) 刪 -16 $\rightarrow -41$ 、25、66，不是等差數列
(C) 刪 25 $\rightarrow -41$ 、-16、66，不是等差數列
(D) 刪 66 $\rightarrow -41$ 、-16、25，不是等差數列

12. 《答案》(D)

詳解： a 、 b 、 c 為等差數列，公差為 2
(A) 每數加 5，仍為等差數列，公差為 2
(B) 每數乘 5，仍為等差數列，公差為 $2 \times 5 = 10$
(C) 每數減 1，仍為等差數列，公差為 2
(D) 每數平方，不為等差數列

13. 《答案》(C)

詳解： 公差 3，先求出個數 $n = \frac{100-4}{3} + 1 = 33$ ，總和為 $\frac{33}{2}(4+100) = 1716$

14. 《答案》(A)

詳解： 總和為 $(y-2 \times 9) + (y-1 \times 9) + y + (y+1 \times 9) + (y+2 \times 9) = 5y$

15. 《答案》(B)

詳解： 1 個黑色時有 6 個白色，2 個黑色時有 10 個白色，3 個黑色時有 14 個白色
成一首項 6，公差 4 的等差數列；若有 35 個黑色，則有 $a_{35} = 6 + 4(35-1) = 142$ 個白色

16. 《答案》(C)

詳解：第一排有 30 個座位，每排增加 2 個座位；可知前 7 排共有 $\frac{7}{2}[2 \times 30 + 2(7-1)] = 252$ 個位子
每班有 20 人， $252 \div 20 = 12 \dots 12$ ，1~12 班的學生皆坐於前 7 排，且還多出 12 個位子
多出的 12 個位子讓 13 班學生入座，但還有 $20 - 12 = 8$ 位學生須坐到第 8 排
第 8 排有 $30 + 2 \times 7 = 44$ 個位子，13 班學生坐了 8 個位子後還有 $44 - 8 = 36$ 個位子，可供 14 班學生全部坐於第 8 排
13 班學生入座後剩 $44 - 8 - 20 = 16$ 個位子，不夠讓 15 班學生全部坐於第 8 排

17. 《答案》(B)

詳解：小明答對了 20 題，答錯的可能假設為 x ， $0 \leq x \leq 5$ (x 是整數)
總分是 $50 + 20 \times 3 - 2x = 110 - 2x$ ，僅有當 $x = 2$ 時得 106 分符合答案

18. 《答案》(C)

詳解： $a_3 - a_2 = 6 \rightarrow$ 數列公差為 6
 $a_{330} - a_{20} = (a_1 + 329d) - (a_1 + 19d) = 310d = 310 \times 6 = 1860$

19. 《答案》(B)

詳解：依題意原牌排序深深深淺淺，經第一次移動後為深淺深淺深，第二次移動後為深淺淺深深，第三次移動後為深深淺深淺，第四次移動後為深深深淺淺，移動四次後回復原排序，故洗牌次數僅可能為 20