**代數第十章**

**目錄**

[**第十章 等差數列 1**](#_Toc422983142)

[**學習目標 1**](#_Toc422983143)

[**10.1節 等差數列 2**](#_Toc422983144)

[**10.1節 習題 15**](#_Toc422983145)

[**10.2節 等差級數 18**](#_Toc422983146)

[**10.2節 習題 31**](#_Toc422983147)

[**10.3節 等差數列的應用 33**](#_Toc422983148)

[**10.3節 習題 42**](#_Toc422983149)

[**第十章綜合習題 45**](#_Toc422983150)

[**基測與會考試題 50**](#_Toc422983151)

[**習題解答 56**](#_Toc422983152)

**第十章 等差數列**

等差數列在生活中隨處可見。例如我們小學時就數過的偶數：2、4、6、8、10…，數百元鈔票：100元、200元、300元、400元…。本章中我們將學習與等差數列有關的規則，並學習處理相關的應用問題。

**學習目標**

1.能理解什麼是數列與等差數列。

2.能夠計算等差數列的和。

3.能處理等差數列的應用題。

**10.1節 等差數列**

生活中，我們經常可以看到一串數字排在一起。例如：

月份有1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12，共12個月。

本次班上數學段考，1～9號的成績依序為：90、85、88、96、82、75、63、97、80分。

像這樣按順序排列的一串數，就稱為**數列**。

我們來看數列：90、85、88、96、82、75、63、97、80

這串數列共有9個數字，我們稱這串數列有9項。

第1個項，也稱為**首項**，我們記為。第1個項的數為90，因此。

第2個項，我們記為。第2個項的數為85，因此。

第3個項，我們記為。第3個項的數為88，因此。

依此類推，、、、、、。

數列的最後一項，也稱為**末項**，此數列的末項為80。

接著我們再看另一個數列：2、4、6、8、10、12、14、16、18、20

此數列每相鄰兩項之間，後項減前項的差都是2。像這樣相鄰兩項之間有固定的差之數列，稱為**等差數列**。

相鄰兩項間，固定的差我們稱為**公差**，公差常用*d*來代表。此數列的**公差**為2，即。

**例題 10.1-1**

(1)1、4、7、10、13、16，是否為等差數列？

(2)1、3、9、27，是否為等差數列？

**詳解：**

(1)此數列相鄰兩項的後項減前項之差都是3，為等差數列。

(2)、，後項減前項之差不固定，非等差數列。

**【練習】10.1-1**

(1)2、4、8、16、32、64，是否為等差數列？

(2)3、6、9、12、15、18，是否為等差數列？

**例題 10.1-2**

設某市計程車的計費自70元起跳，每一次跳5元。依次寫出計費表上出現的前8個數。

**詳解：**

70、75、80、85、90、95、100、105。

**【練習】10.1-2**

假設小黑每天存55元，共存了7天。若將小黑每天的存款總額依序排列出來，應如何表示？

**例題 10.1-3**

爸爸練習慢跑，計畫第1天慢跑10分鐘，第2天慢跑20分鐘，第3天慢跑30分鐘，以此類推，7天的慢跑時間應如何表示？

**詳解：**

10、20、30、40、50、60、70 (分鐘)

**【練習】10.1-3**

小張練習跑步，一共跑了6天，每天都固定跑800公尺。若將小張每天的跑步距離累計，依照順序排列出來，應如何表示？

**例題 10.1-4**

有一等差數列，首項為5，公差為4，試寫出此數列的前5項。

**詳解：**

等差數列公差為4，即後一項都比前一項多4。











因此此等差數列前5項為：5、9、13、17、21

**【練習】10.1-4**

有一等差數列，首項為4，公差為6，試寫出此數列的前5項。

**例題 10.1-5**

有一等差數列，首項為10，公差為－4，試寫出此數列的前6項。

**詳解：**

等差數列公差為－4，即後一項都比前一項多－4，也就是後一項都比前一項少4。













因此此等差數列前6項為：10、6、2、－2、－6、－10

**【練習】10.1-5**

有一等差數列，首項為12，公差為－7，試寫出此數列的前6項。

我們已經知道了等差數列的基本寫法，接著我們來看看，若是只知道首項、末項與公差，是否能推得項數呢？

我們來將等差數列各項用首項與公差來表示：











接著將各項所加公差的數量用項數來表示：











可以發現各項所加公差的數量，都是(項數－1)，因此第*n*項可表示為



移項後可得：

若是為末項，那麼我們就得到：**末項＝首項＋(項數－1)×公差**

移項得：**項數＝**[(**末項－首項)／公差]＋1**

**例題 10.1-6**

(1)某等差數列，首項為3，公差為5，試求第7項。

(2)某等差數列，首項為－2，公差為4，試求第6項。

(3)某等差數列，首項為7，公差為－3，試求第5項。

(4)某等差數列，首項為2，公差為0.5，試求第13項。

**詳解：**

利用

|  |  |
| --- | --- |
| (1) | (2) |
| (3) | (4) |

**【練習】10.1-6**

(1)某等差數列，首項為2，公差為3，試求第5項。

(2)某等差數列，首項為－6，公差為7，試求第8項。

(3)某等差數列，首項為0，公差為－2，試求第4項。

(4)某等差數列，首項為3，公差為0.1，試求第101項。

**例題 10.1-7**

(1)某等差數列，首項為1，末項為21，公差為1，請問此數列有幾項？

(2)某等差數列，首項為2，末項為102，公差為2，請問此數列有幾項？

(3)某等差數列，首項為18，末項為42，公差為3，請問此數列有幾項？

(4)某等差數列，首項為－8，末項為22，公差為5，請問此數列有幾項？

**詳解：**

利用

|  |  |
| --- | --- |
| (1) | (2) |
| (3) | (4) |

**【練習】10.1-7**

(1)某等差數列，首項為4，末項為28，公差為4，請問此數列有幾項？

(2)某等差數列，首項為8，末項為16，公差為2，請問此數列有幾項？

(3)某等差數列，首項為1，末項為31，公差為3，請問此數列有幾項？

(4)某等差數列，首項為－3，末項為4，公差為1，請問此數列有幾項？

接著我們來看看更多關於數列的名詞。

**中項**： 若一數列有3項，我們將中間項(第2項)稱為其前一項與後一項的中項。

例如有一數列2、5、7，則稱5為2與7的中項。

**等差中項**： 若一等差數列有3項，我們將中間項(第2項)稱為其前一項與後一項的等差中項。

例如有一等差數列2、5、8，則稱5為2與8的等差中項。

我們來看看如何求出等差中項。

若有一等差數列、、，公差為*d*。則我們知道：







亦即想求出與的等差中項，只要將與相加再除以2即可：



**奇數項**： 一個數列中，項次為奇數的項，稱為奇數項。

例如有一等差數列2、5、8、11、14、17，則奇數項為2、8、14。

**偶數項**： 一個數列中，項次為偶數的項，稱為偶數項。

例如有一等差數列2、5、8、11、14、17，則偶數項為5、11、17。

**例題 10.1-8**

有一等差數列：18、、44，試求之值。

**詳解：**

即18和44的等差中項



**【練習】10.1-8**

有一等差數列：24、、72，試求之值。

**例題 10.1-9**

在一等差數列中，已知某兩項的等差中項為6，且此兩項之積為20。

(1)令此等差數列之公差為*d*，試用*d*表示此兩項。

(2)求此兩項之值。

**詳解：**

(1) 此等差數列之公差為*d*，因此6的後一項為，前一項為。

此兩項為、。

(2) 由兩項之積為20可列式：







時，6的前一項為，後一項為。

數列為2、6、10。

時，6的前一項為，後一項為。

數列為10、6、2。

此兩項為2和10。

**【練習】10.1-9**

在一等差數列中，已知某兩項的等差中項為10，且此兩項之積為91。

(1)令此等差數列之公差為*d*，試用*d*表示此兩項。

(2)求此兩項之值。

瞭解了等差數列的各種基本觀念後，接著讓我們來看看各種變化題型。

**例題 10.1-10**

在一等差數列中，第一項為，第六項為，試求此等差數列的公差。

**詳解：**

利用









得此數列公差為6。

**【練習】10.1-10**

在一等差數列中，第一項為，第七項為，試求此等差數列的公差。

**例題 10.1-11**

在一等差數列中，第五項為，公差，試求此等差數列的首項。

**詳解：**

利用









得此數列首項為4。

**【練習】10.1-11**

在一等差數列中，第九項為，公差，試求此等差數列的首項。

**例題 10.1-12**

若在0與8之間，插入4個數字，可使這些數字成等差數列(包含0與8)。試求此4個數字。

**詳解：**

題目要使0、8與插入的4個數字成等差數列，因此此數列共有6項，首項、，我們利用來找出公差：









由可求出、、、。

因此插入的4個數字為1.6、3.2、4.8、6.4。

**【練習】10.1-12**

若在2與11之間，插入3個數字，可使這些數字成等差數列(包含2與11)。試求此3個數字。

**例題 10.1-13**

已知有5個連續整數成等差數列(由小而大)，且此5數和為95，試求此5數。

**詳解：**

因為此5數為連續整數，且排列由小而大，因此公差為1。

設第1個整數為，第2個整數為，第3個整數為，第4個整數為，第5個整數為。

此5數和為95，可列式：











、、、

因此5個連續整數為17、18、19、20、21。

**【練習】10.1-13**

已知有5個連續整數成等差數列(由小而大)，且此5數和為105，試求此5數。

**例題 10.1-14**

有一等差數列，首項為7，公差為12，請問第幾項開始會大於100？

**詳解：**

本題要找數字大於100的項，當然我們可以用數的：7、19、31、43…，但這方法在數字大時會很複雜，我們可以利用之前學過的來計算：

設第*n*項開始會大於100，即。











因為項數為整數，所以我們取，即第9項開始會大於100。

我們來驗算看看

第8項：

第9項：

可確認在第9項開始會大於100。

**【練習】10.1-14**

有一等差數列，首項為7，公差為－12，請問第幾項開始會小於－100？

**10.1節 習題**

**習題 10.1-1**

(1)5、10、15、20、25、30，是否為等差數列？

(2)4、8、12、16，是否為等差數列？

**習題 10.1-2**

設某市遊樂園的收費自基本費100元起跳，每多玩一種設施加收20元。依次寫出收費表上出現的前5個數。

**習題 10.1-3**

妹妹開始存錢，計畫第1天存20元，第2天存25元，第3天存30元，以此類推，7天的存錢金額應如何表示？

**習題 10.1-4**

有一等差數列，首項為2，公差為5，試寫出此數列的前5項。

**習題 10.1-5**

有一等差數列，首項為5，公差為－3，試寫出此數列的前6項。

**習題 10.1-6**

(1)某等差數列，首項為4，公差為2，試求第6項。

(2)某等差數列，首項為－10，公差為4，試求第3項。

(3)某等差數列，首項為8，公差為－1，試求第6項。

(4)某等差數列，首項為100，公差為0.1，試求第101項。

**習題 10.1-7**

(1)某等差數列，首項為5，末項為35，公差為2，請問此數列有幾項？

(2)某等差數列，首項為3，末項為24，公差為3，請問此數列有幾項？

(3)某等差數列，首項為10，末項為46，公差為4，請問此數列有幾項？

(4)某等差數列，首項為－5，末項為15，公差為4，請問此數列有幾項？

**習題 10.1-8**

有一等差數列：16、、80，試求之值。

**習題 10.1-9**

在一等差數列中，已知某兩項的等差中項為8，且此兩項之積為48。

(1)令此等差數列之公差為*d*，試用*d*表示此兩項。

(2)求此兩項之值。

**習題 10.1-10**

在一等差數列中，第一項為5，第八項為26，試求此等差數列的公差。

**習題 10.1-11**

在一等差數列中，第15項為40，公差3，試求此等差數列的首項。

**習題 10.1-12**

若在2與8之間，插入4個數字，可使這些數字成等差數列(包含2與8)。試求此4個數字。

**習題 10.1-13**

已知有5個連續整數成等差數列(由小而大)，且此5數和為90，試求此5數。

**習題 10.1-14**

有一等差數列，首項為9，公差為18，請問第幾項開始會大於150？

**10.2節 等差級數**

前一節我們已經瞭解了等差數列，本節我們將學習求等差數列中各項的和。

設有一數列：*a*1、*a*2、*a*3、…*a*n。

算式稱為由此數列得到的**級數**，總和稱為**級數和**。習慣上常用符號*S*代表級數和。如果*a*1、*a*2、*a*3、…*a*n是等差數列，則由此得到的級數也可稱為**等差級數**。

**例題 10.2-1**

計算等差級數之和。

**詳解：**

我們用基本的加法來計算，可得。

**【練習】10.2-1**

計算等差級數之和。

在例題10.2-1中，我們用基本的加法計算出了級數和。但若是題目的項數增加，例如要計算，就很難用基本的加法計算出答案。因此我們現在要學一種能快速計算等差級數和的方法。

設有一等差數列：1、2、3、4、5、…49、50

我們要計算等差級數之和：

令

觀察一下可以發現，第一項與最後一項之和為：，第二項與倒數第二項之和為：，第三項與倒數第三項之和為：。如圖10.2-1之分組：

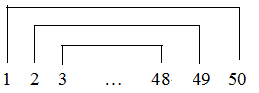


圖10.2-1

各組合都是51，我們可以利用這點來求出等差級數之和。

已知

當然我們也可以寫成

將兩式相加：

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *S*＝ | ＋1 | ＋2 | ＋3 | ＋4 | ＋5 | ＋... | ＋49 | ＋50 |
| ＋) | *S*＝ | ＋50 | ＋49 | ＋48 | ＋47 | ＋46 | ＋... | ＋2 | ＋1 |
|  | 2*S*＝ | ＋51 | ＋51 | ＋51 | ＋51 | ＋51 | ＋... | ＋51 | ＋51 |

得到，因為原數列1～50共有50項，所以我們可以輕鬆知道2*S*是50個51相加起來。即：







因此

接著我們再來看看，對於一般的等差數列*a*1、*a*2、*a*3、…*a*n-1、*a*n ，如何求出等差級數之和。

令

仿照之前的作法，*S*也可以寫成

再將兩種寫法相加：

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *S*＝ | ＋*a*1 | ＋*a*2 | ＋*a*3 | ＋... | ＋*a*n-1 | ＋*a*n |
| ＋) | *S*＝ | ＋*a*n | ＋*a*n-1 | ＋*a*n-2 | ＋... | ＋*a*2 | ＋*a*1 |
|  | 2*S*＝ | (*a*1＋*a*n) | ＋(*a*2＋*a*n-1) | ＋(*a*3＋*a*n-2) | ＋... | ＋(*a*n-1＋*a*2) | ＋(*a*n＋*a*1) |

在這裡，我們必須看看*a*1＋*a*n、*a*2＋*a*n-1、*a*3＋*a*n-2等各項是否相等。

利用前面學過的：





可知

同理也可再推得*a*1＋*a*n與*a*n-1＋*a*2、*a*n＋*a*1等各項全都相等，因此我們將這些項全都用*a*1＋*a*n來表示：



因為原本的數列*a*1、*a*2、*a*3、…*a*n-1、*a*n 有*n*項，因此2*S*也有*n*個*a*1＋*a*n。

2*S*可表示為：



化簡得 

於是我們知道等差級數之和

即等差數列首項與末項相加，乘以項數後再除以2，就能得到等差級數之和。

**例題 10.2-2**

計算等差級數之和。

**詳解：**

利用等差級數和公式

設此數列有*n*項。首項、末項、項數為。







得等差級數之和為5050。

**【練習】10.2-2**

計算等差級數之和。

**例題 10.2-3**

計算等差級數之和。

**詳解：**

設此數列有*n*項。可先利用求出項數。

首項、末項、公差

項數

得項數，接著再利用等差級數和公式求出等差級數之和。





得等差級數之和為440。

**【練習】10.2-3**

計算等差級數之和。

**例題 10.2-4**

計算等差級數之和。

**詳解：**

設此數列有*n*項。可先利用求出項數。

首項、末項、公差

項數

得項數，接著再利用等差級數和公式求出等差級數之和。





得等差級數之和為－143。

**【練習】10.2-4**

計算等差級數之和。

**例題 10.2-5**

有一等差數列，首項為6，公差為8，試求前15項的和。

**詳解：**

題目要求前15項的和，我們已知首項，卻不知末項(第15項)，因此本題需先利用求出第15項。



得，接下來就可利用等差級數和公式求出前15項之和。

首項、末項、項數





得前15項的和為930。

**【練習】10.2-5**

有一等差數列，首項為5，公差為－3，試求前23項的和。

**例題 10.2-6**

有一等差數列，第7項為35，公差為6，試求第1項到第15項的和。

**詳解：**

題目要求第1項到第15項的和，我們需要先找出第1項、第15項才能計算。

先利用找出第1項與第15項













利用等差級數和公式求出第1項到第15項的和。





得第1項到第15項的和為615。

**【練習】10.2-6**

有一等差數列，第9項為35，公差為3，試求第1項到第13項的和。

**例題 10.2-7**

有一等差數列，首項為－6，公差為7，試求第7項到第10項的和。

**詳解：**

題目要求第7項到第10項的和，我們需要先找出第7項、第10項才能計算。

先利用找出第7項與第10項













利用等差級數和公式求出第7項到第10項的和。

  (第7項到第10項共有4項)





得第7項到第10項的和為186。

**【練習】10.2-7**

有一等差數列，首項為－12，公差為9，試求第10項到第15項的和。

**例題 10.2-8**

有一等差數列，首項為3，第6項為18，前*n*項之和為135，試求*n*。

**詳解：**

先利用首項為3，第6項為18，找出此數列的公差







得到公差，因此第*n*項可表示為：

前*n*項之和為135，利用等差級數和公式可知：



 (利用)









 (利用十字交乘)



但因為項數沒有負數，故不合，因此項數。

**【練習】10.2-8**

有一等差數列，首項為7，第5項為35，前*n*項之和為385，試求*n*。

**例題 10.2-9**

有一等差數列2、5、8、11、14、17、20、23、26。試求：

(1)奇數項之和。

(2)偶數項之和。

**詳解：**

(1) 奇數項是項次為奇數的項，因此奇數項為2、8、14、20、26。

可視為首項為2，末項為26，共5項公差為6的等差數列。

利用等差級數和公式計算奇數項之和



得奇數項之和為70。

(2) 偶數項是項次為偶數的項，因此偶數項為5、11、17、23。

可視為首項為5，末項為23，共4項公差為6的等差數列。

利用等差級數和公式計算奇數項之和



得偶數項之和為56。

**【練習】10.2-9**

有一等差數列－3、2、7、12、17、22、27、32、37。試求：

(1)奇數項之和。

(2)偶數項之和。

**例題 10.2-10**

有一等差數列，共有8項，若奇數項之和為52，偶數項之和為60。試求：

(1)此等差數列各項之和。

(2)此等差數列之公差。

**詳解：**

(1) 此等差數列有8項，設此數列為：、、、、、、、。

則奇數項數列為：、、、，且。

偶數項數列為：、、、，且。

此等差數列各項之和 







得此等差數列各項之和為112。

(2) 要求此等差數列之公差，我們可以將偶數項之和減去奇數項之和。

偶數項之和－偶數項之和＝60－52









 (後一項減前一項為公差，令公差為*d*)





得此等差數列之公差為2。

**【練習】10.2-10**

有一等差數列，共有10項，若奇數項之和為42，偶數項之和為37。試求：

(1)此等差數列各項之和。

(2)此等差數列之公差。

**10.2節 習題**

**習題 10.2-1**

計算等差級數之和。

**習題 10.2-2**

計算等差級數之和。

**習題 10.2-3**

計算等差級數之和。

**習題 10.2-4**

計算等差級數之和。

**習題 10.2-5**

有一等差數列，首項為7，公差為3，試求前18項的和。

**習題 10.2-6**

有一等差數列，第8項為47，公差為6，試求第1項到第14項的和。

**習題 10.2-7**

有一等差數列，首項為－10，公差為4，試求第6項到第10項的和。

**習題 10.2-8**

有一等差數列，首項為1，第5項為29，前*n*項之和為396，試求*n*。

**習題 10.2-9**

有一等差數列－8、－2、4、10、16、22、28，試求其奇數項之和。

**習題 10.2-10**

有一等差數列，共有12項，若奇數項之和為72，偶數項之和為60，試求此等差數列之公差。

**10.3節 等差數列的應用**

本節中我們將把前面學到的等差數列觀念，應用在各種題目中。

**例題 10.3-1**

某三角形，其三內角度數成等差數列，且最小角為40度，試求最大角之角度。

**詳解：**

三內角度數成等差數列，設公差為*d*。最小角為40度，則另外兩角可表示為度、度。

由三角形三內角和為180度可列式：







因此另外兩角角度為(度)、(度)

最大角為80度。

**【練習】10.3-1**

某三角形，其三內角度數成等差數列，且最大角為90度，試求最小角之角度。

**例題 10.3-2**

小文下定決心開始運動減肥，第1週每天運動20分鐘，第2週每天運動25分鐘，第3週每天運動30分鐘，依此類推，每週都增加5分鐘。請問在第幾週時，小文每天會運動70分鐘？

**詳解：**

因為每週都增加5分鐘，我們將每週每天的運動時間視為等差數列。

第1週每天運動視為第1項，即。

每週都增加5分鐘，因此公差。

題目想求第幾週每天會運動70分鐘，即第幾項會變成70。

設第*n*項為70，利用









第11項為70，即在第11週時，小文每天會運動70分鐘。

**【練習】10.3-2**

小哲下定決心開始存錢，現在小哲總存款有100元，每天存5元。即第1天存錢後，總存款有105元。第2天存錢後，總存款有110元，依此類推。請問在第幾天時，小哲總存款會有255元？(中途小哲都沒有把存款花掉)

**例題 10.3-3**

某物體自高空落下，第1秒落下4.9公尺，第2秒落下14.7公尺，第3秒落下24.5公尺...即落下距離每秒增加9.8公尺。請問：

(1)第50秒落下多少公尺？

(2)1～50秒總共落下多少公尺？

**詳解：**

因為落下距離每秒增加9.8公尺，因此每秒落下距離可視為等差數列。

第1秒落下距離視為第1項，即。

每秒都增加9.8公尺，因此公差。

(1)求第50秒落下的距離，即之值。





得第50秒落下485.1公尺。

(2)1～50秒總共落下多少公尺，即到之和。





得第1～50秒共落下12250公尺。

**【練習】10.3-3**

某物體自高空落下，第1秒落下4.9公尺，第2秒落下14.7公尺，第3秒落下24.5公尺...即落下距離每秒增加9.8公尺。請問：

(1)第60秒落下多少公尺？

(2)1～60秒總共落下多少公尺？

**例題 10.3-4**

有一條長540公尺的道路，工人想在這條道路一旁裝設路燈。路標0公尺處裝第1個，路標15公尺處裝第2個，路標30公尺處裝第3個…依此類推，每隔15公尺裝1個路燈，路標540公尺處裝最後1個，請問這條道路共會裝多少個路燈？

**詳解：**

因為每隔15公尺裝1個路燈，我們可以將路燈的路標位置看成等差數列。

每隔15裝1個路燈，即公差。

第1個路燈在路標0公尺處，即。

第2個路燈在路標15公尺處，即。

設第*n*個路燈在路標540公尺處，即。

我們利用來求*n*之值。







即路標540公尺處是第37個路燈，因此這條道路總共有37個路燈。

**【練習】10.3-4**

有一條長336公尺的道路，鎮公所想在這條道路一旁擺放花盆。路標0公尺處擺第1個，路標16公尺擺裝第2個，路標32公尺處擺第3個…依此類推，每隔16公尺擺1個花盆，路標336公尺處擺最後1個，請問這條道路共會擺多少個花盆？

**例題 10.3-5**

某間音樂廳共有28排座位，每一排都比前一排多2個座位。若第28排有80個座位，請問第1排有幾個座位？

**詳解：**

每一排都比前一排多2個座位，我們可以將每排座位數量看成等差數列。

每一排都比前一排多2個座位，即公差。

第28排有80個座位，即。

我們利用來求，也就是第1排的座位數量。







得到第1排座位有26個。

**【練習】10.3-5**

某間演藝廳共有24排座位，每一排都比前一排多3個座位。若第16排有81個座位，請問第1排有幾個座位？**例題 10.3-6**

某間音樂廳共有1484個座位，每一排都比前一排多2個座位。若第1排有26個座位，請問這間音樂廳共有幾排座位？

**詳解：**

每一排都比前一排多2個座位，我們可以將每排座位數量看成等差數列。

每一排都比前一排多2個座位，即公差。

第1排有26個座位，即。

設共有排，最後一排座位數量

音樂廳共有1484個座位，我們利用等差級數和公式找出*n*值。













 (排數為正數，負不合)

這間音樂廳共有28排座位。

**【練習】10.3-6**

某間演藝廳共有1020個座位，每一排都比前一排多3個座位。若第1排有36個座位，請問這間音樂廳共有幾排座位？

**例題 10.3-7**

圖10.3-1為一個九宮格，試將空格的數字填完，使得直行、橫列、對角線的三數都成等差數列。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 14 |  | 10 |
|  |  |  |
| 20 |  | 16 |

圖10.3-1

**詳解：**

我們將各空格填入代號，如圖10.3-2。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 14 | A | 10 |
| B | C | D |
| 20 | E | 16 |

圖10.3-2

因為直行、橫列、對角線的三數都成等差數列，所以中間的數為旁邊兩數的等差中項。因此可得：











完成九宮格如圖10.3-3

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 14 | 12 | 10 |
| 17 | 15 | 13 |
| 20 | 18 | 16 |

圖10.3-3

同學可以驗算看看是否直行、橫列、對角線的三數都成等差數列。

**【練習】10.3-7**

圖10.3-4為一個九宮格，試將空格的數字填完，使得直行、橫列、對角線的三數都成等差數列。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 18 |  | 6 |
|  |  |  |
| 32 |  | 20 |

圖10.3-4

**例題 10.3-8**

小文下定決心要每天慢跑健身，第1天跑5公里，之後每天多跑0.6公里。即第2天跑5.6公里，第3天跑6.2公里。請問在第幾天開始，小文當天跑步的距離會超過12公里？

**詳解：**

因為每天都多跑0.6公里，我們可以將每天跑的距離看成等差數列。

第1項即第1天跑的距離，。

每天多跑0.6公里，因此公差。

設第*n*天後，跑步的總距離會超過12公里。

即 

 ()











即第13天跑步距離會超過12公里。我們可以驗算看看第12天與第13天的跑步距離：、

可確認是第13天開始，跑步距離超過12公里。

**【練習】10.3-8**

小軒想培養讀書的好習慣，每天都讀數頁的書。第1天讀10頁，之後每天多讀3頁。即第2天讀13頁，第3天讀16頁。請問在第幾天開始，小軒一天讀的頁數會超過50頁？

**10.3節 習題**

**習題 10.3-1**

某三角形，其三內角度數成等差數列，且最小角為10度，試求最大角之角度。

**習題 10.3-2**

小新下定決心開始游泳訓練，第1週每天游25公尺，第2週每天游35公尺，第3週每天游45公尺，依此類推，每週都增加10公尺。請問在第幾週時，小新每天會游95公尺？

**習題 10.3-3**

某物體自高空落下，第1秒落下4.9公尺，第2秒落下14.7公尺，第3秒落下24.5公尺...即落下距離每秒增加9.8公尺。請問：

(1)第30秒落下多少公尺？

(2)1～30秒總共落下多少公尺？

**習題 10.3-4**

有一條長232公尺的道路，工人想在這條道路一旁種樹。路標0公尺處種第1棵，路標8公尺處種第2棵，路標16公尺處種第3棵…依此類推，每隔8公尺種1棵樹，路標232公尺處種最後1棵，請問這條道路共會種多少棵樹？

**習題 10.3-5**

學校大禮堂共有50排座位，每一排都比前一排多4個座位。若第15排有92個座位，請問第1排有幾個座位？

**習題 10.3-6**

某間音樂廳共有1320個座位，每一排都比前一排多2個座位。若第1排有15個座位，請問這間音樂廳共有幾排座位？

**習題 10.3-7**

圖10.3-5為一個九宮格，試將空格的數字填完，使得直行、橫列、對角線的三數都成等差數列。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 4 |  | 20 |
|  |  |  |
| 16 |  | 32 |

圖10.3-5

**習題 10.3-8**

群群下定決心要每天慢跑健身，第1天跑8公里，之後每天多跑1.2公里。即第2天跑9.2公里，第3天跑10.4公里。請問在第幾天開始，群群當天跑步的距離會超過15公里？

第十章綜合習題

**習題1：**

(1) 哥哥為運動會練習跑步，一共跑了5天，每天都固定跑1000公尺，每天的跑步距離累計，依照順序排列出來，應如何表示？

(2) 工人刷油漆，一共花了8天，每天都固定刷120平方公尺，每天刷油漆的面積累計，依照順序排列出來，應如何表示？

**習題2：**

(1)有一等差數列，首項為8，公差為－2，試求此等差數列的第10項。

(2)有一等差數列，首項為17，末項為59，公差為3，請問此數列有幾項？

(3)有一等差數列：18、、，試求之值。

(4)有一等差數列，首項為19，第5項為3，試求此等差數列的公差。

(5)有一等差數列，第8項為42，公差3，試求此等差數列的首項。

**習題3：**

在一等差數列中，已知某兩項的等差中項為7，且此兩項之積為40。

(1)令此等差數列之公差為*d*，試用*d*表示此兩項。

(2)求此兩項之值。

**習題4：**

(1)已知有5個連續偶數成等差數列(由小而大)，且此5數和為90，試求此5數。

(2)已知有5個連續奇數成等差數列(由小而大)，且此5數和為115，試求此5數。

**習題5：**

從、、、四個數中刪掉一個數，剩下的三個數由小而大，依序排列為一等差數列，請問刪掉的數是哪一個？

**習題6：**

有一等差數列，首項為85，公差為，請問第幾項開始會小於0？

**習題7：**

(1)計算等差級數之和。

(2)計算等差級數之和。

**習題8：**

(1)有一等差數列，首項為8，公差為4，試求前10項的和。

(2)有一等差數列，首項為2，第5項為38，試求第8項到第10項的和。

(3)有一等差數列，首項為4，公差為，試求第6項到第10項的和。

**習題9：**

有一等差數列，首項為6，第3項為16，前*n*項之和為188，試求*n*。

**習題10：**

某四邊形，其四內角度數成等差數列，且最小角為45度，試求最大角之角度。

**習題11：**

有一等差數列，第3項為，第7項為，試求下列問題：

(1)第5項為何？

(2)首項及公差為何？

**習題12：**

小育做數學練習題，第1週每天練習15題，第2週每天練習18題，第3週每天練習21題，依此類推，每週都增加3題。請問在第幾週時，小育每天會練習30題？

**習題13：**

某物體自高空落下，第1秒落下4.9公尺，第2秒落下14.7公尺，第3秒落下24.5公尺...即落下距離每秒增加9.8公尺。請問：

(1)第10秒落下多少公尺？

(2)1～10秒總共落下多少公尺？

**習題14：**

有一條長360公里的高速公路，政府想在這條道路設匝道。路標0公里處設第1個匝道，路標30公里處設第2個匝道，路標60公里處設第3個匝道…依此類推，每隔30公里設1個匝道，路標360公里處設最後1個匝道，請問這條高速公路共會有幾個匝道？

**習題15：**

某球場共有36排座位，每一排都比前一排多5個座位。若第10排有65個座位，請問(1)第1排有幾個座位？(2)全場總共有幾個座位？

**習題16：**

圖10-1為一個九宮格，九宮格內直行、橫列、對角線的三數都成等差數列，請問？

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 6 |  |  |
|  |  |  |
|  |  | 20 |

圖10-1

**習題17：**

小美開始存錢，第1天原有15元，之後每天多存4元。即第2天有19元，第3天有23元。請問在第幾天開始，小美的錢會超過60元？

基測與會考模擬試題

( ) 1. 下列哪一個選項中的數列是等差數列也是等比數列？【90(二)基測】

(A) 、1、2、4、6、8、10 (B) 1、2、3、4、5、6、7、8

(C) 2、2、2、2、2、2、2、2 (D) 0、1、0、1、0、1、0、1

( ) 2. 將下列四個選項中的數列，哪一個不是等差數列？【99(一)基測】

(A) ，，，，

(B) ，，，，

(C) ，，，，

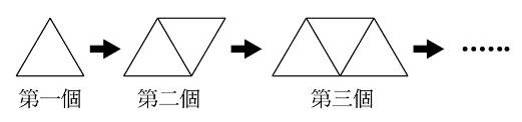
(D) ，，，，

( ) 3. 一等差數列，，……，，已知，那麼下列哪一個選項是正確的？【90(一)基測】

(A)ˉ (B)ˉ

(C)(D) 

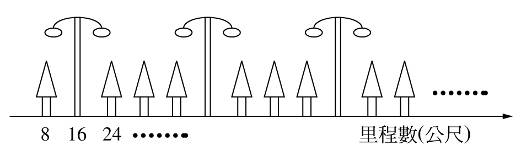
( ) 4. 用等長的吸管依次向右排出相連的三角形，如圖(一)。請問排第十個圖形需要幾根吸管？【90(二)基測】



圖(一)

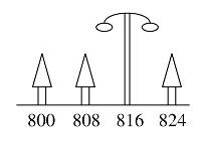
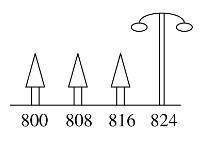
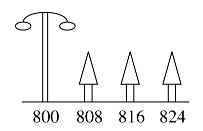
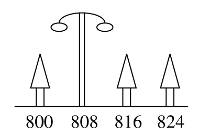
(A)19ˉ(B)21ˉ(C)23ˉ(D)30

( ) 5. 如圖(二)，在某條公路上，從里程數8公尺開始到4000公尺為止，每隔8公尺將樹與燈按圖中所示之規則設立：在里程數8公尺處種一棵樹，在16公尺處立一盞燈，在24公尺處種一棵樹…，且每兩盞燈之間的距離均相等。依此規則，下列哪一個選項是里程數800公尺～824公尺之間，樹與燈的正確排列順序？【90(二)基測】

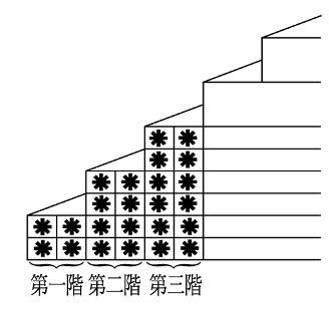


圖(二)

(A) (B) (C) (D)



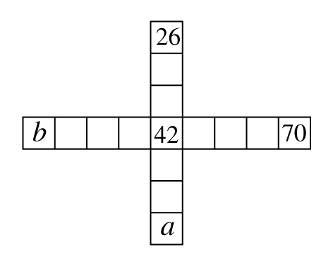
( ) 6. 如圖(三)，有一樓梯，每一階的長度、寬度與增加的高度都相等。有一工人在此樓梯的一側貼上大小相同的正方形磁磚，第一階貼了4塊磁磚，第二階貼了8塊磁磚，……，依此規則貼了112塊磁磚後，剛好貼完此樓梯的一側。請問此樓梯總共有多少階？【91(一)基測】



圖(三)

(A)5ˉ(B)6ˉ(C)7ˉ(D)8

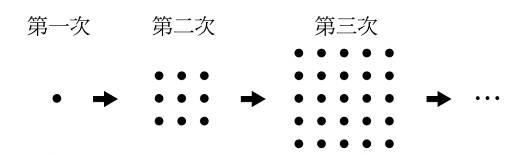
( ) 7. 如圖(四)，橫列有9個方格，直列有7個方格。若將每個方格內都填入一個數字，使得橫列方格內的數字由左到右成等差數列，直列方格內的數字由上到下也成等差數列。已知共同方格內的數字是42，求？【91(二)基測】



圖(四)

(A)44ˉ(B)42ˉ(C)40ˉ(D)38

( ) 8. 小玉拿了一堆棋子玩排列遊戲。  
第一次：放1顆棋子，如圖(五)；  
第二次：放9顆棋子，排出一個正方形，如圖(六)；  
第三次：放25顆棋子，排出一個正方形，如圖(七)；……依此規則，每一次排出的正方形，其每邊的棋子數都要比前一次多2顆。請問第十次比第九次多放了幾顆棋子？【91(二)基測】



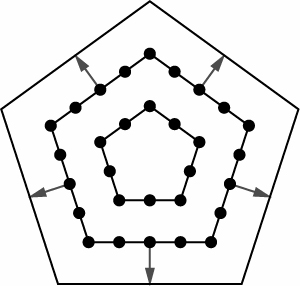
圖(五) 圖(六) 圖(七)

(A) ˉ (B) (C) ˉ(D) 

( ) 9. 數列，，為等差數列，公差為3。若數列，，也為等差數列，則公差為何？【92(二)基測】

(A)3 (B)5 (C)8 (D)15

( ) 10. 如圖(八)，有若干位學生排出正五邊形的隊形，由內而外共排了6圈，且學生人數剛好排完。已知最內圈每邊3人。往外每圈增加2人(即由內向外算起第2圈每邊5人，第3圈每邊7人，……)。請問此隊形的學生共有多少人？【92(二)基測】



圖(八)

(A)210 (B)240 (C)285 (D)630

( ) 11. 從、、、四個數中刪掉一個數，剩下的三個數由小而大，依序排列為一等差數列。請問刪掉的是哪一個數？【93(一)基測】

(A) (B)  (C)  (D) 

( ) 12. 若數列，，為等差數列，公差為2，則下列敘述何者錯誤？【93(二)基測】

(A)數列、、也是等差數列

(B)數列、、也是等差數列

(C)數列、、也是等差數列

(D)數列、、也是等差數列

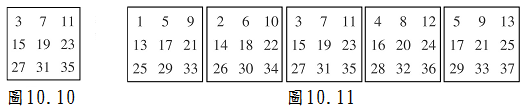
( ) 13. 求等差級數的和為何？【93(二)基測】

(A)1568 (B)1664 (C)1716 (D)1768

( ) 14. 圖(九)的正方形內有9個數字，數字的總和為，求圖(十)中五個正方形內所有數字的總和為何？(以*y*表示) 【94(一)基測】

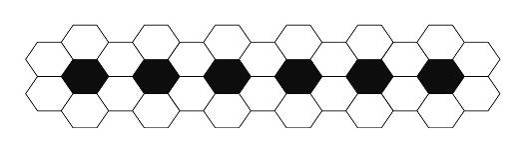
圖(十)

圖(九)



(A) 　(B) 　(C) 　(D) 

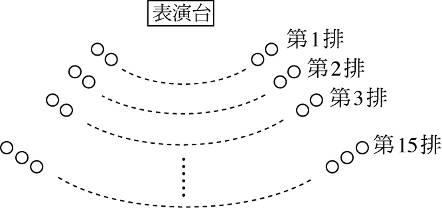
( ) 15. 有一長條型鏈子，其外型由邊長為1公分的正六邊形排列而成，如圖(十一)表示此鏈之任一段花紋，其中每個黑色六邊形與6個白色六邊形相鄰。若鏈子有35個黑色六邊形，則此鏈子共有幾個白色六邊形？【97(一)基測】



圖(十一)

(A)140　(B)142　(C)210　(D)212

( ) 16. 如圖(十二)，表演台前共有15排座位，其中第一排有30個，且每一排均比前一排多2個座位。若某校有1～25班，每班20人，並依下列方式安排學生入座：  
1. 依班級順序先排第一班，安排完後再排下一班。  
2. 前排的座位排滿後，才排下一排座位。  
請問哪一班的學生全部都坐在第8排？【97(二)基測】



圖(十二)

(A)第12班　(B)第13班　(C)第14班　(D)第15班

( ) 17. 有一益智遊戲分二階段進行，其中第二階段共有25題，答對一題得3分，答錯一題扣2分，不作答得0分。若小明已在第一階段得50分，且第二階段答對了20題，則下列哪一個分數可能是小明在此益智遊戲中所得的總分？【98(一)基測】

(A)103分　(B)106分　(C)109分　(D)112分

( ) 18. 等差數列，，，…… ，中，若，則？【98(二)基測】

(A)6　(B)1854　(C)1860　(D)1866

( ) 19. 圖(十三)為雅婷左手拿著3張深灰色與2張淺灰色的牌疊在一起的情形。



圖(十三)

以下是她每次洗牌的三個步驟：  
步驟一：用右手拿出疊在最下面的2張牌，如圖(十四)。  
步驟二：將右手拿的2張牌依序交錯插入左手拿的3張牌之間，如圖(十五)。  
步驟三：用左手拿著顏色順序已改變的5張牌，如圖(十六)。



圖(十四) 圖(十五) 圖(十六)

若依上述三個步驟洗牌，從圖(十四)的情形開始洗牌若干次後，其顏色順序會再次與圖(十四)相同，則洗牌次數可能為下列何者？【102基測】

(A) 18 (B) 20 (C) 25 (D) 27

習題解答

**10.1練習解答**

**練習10.1-1**

(1) 否 (2)是

**練習10.1-2**

55、110、165、220、275、330、385

**練習10.1-3**

800、1600、2400、3200、4000、4800

**練習10.1-4**

4、10、16、22、28

**練習10.1-5**

12、5、、、、

**練習10.1-6**

(1)14 (2)43

(3) (4)13

**練習10.1-7**

(1)7 (2)5

(3)11 (4)8

**練習10.1-8**

48

**練習10.1-9**

(1)、 (2)7、13

**練習10.1-10**



**練習10.1-11**



**練習10.1-12**

4.25、6.5、8.75

**練習10.1-13**

19、20、21、22、23

**練習10.1-14**

10

**10.1習題解答**

**10.1-1** (1)是 (2)是

**10.1-2** 100、120、140、160、180

**10.1-3** 20、25、30、35、40、45、50

**10.1-4** 2、7、12、17、22

**10.1-5** 5、2、、、、

**10.1-6** (1)14 (2)  
(3)3 (4)110

**10.1-7** (1)16 (2)8  
(3)10 (4)6

**10.1-8** 48

**10.1-9** (1)、 (2)4、12

**10.1-10** 3

**10.1-11** 

**10.1-12** 3.2、4.4、5.6、6.8

**10.1-13** 16、17、18、19、20

**10.1-14** 9

**10.2練習解答**

**練習10.2-1**

42

**練習10.2-2**

20100

**練習10.2-3**

364

**練習10.2-4**



**練習10.2-5**



**練習10.2-6**

377

**練習10.2-7**

549

**練習10.2-8**

10

**練習10.2-9**

(1)85 (2)68

**練習10.2-10**

(1)79 (2)公差為-1

**10.2習題解答**

**10.2-1** 55

**10.2-2** 1275

**10.2-3** 2064

**10.2-4** 

**10.2-5** 585

**10.2-6** 616

**10.2-7** 90

**10.2-8** 11

**10.2-9** 40

**10.2-10** 公差為2

**10.3練習解答**

**練習10.3-1**

30度

**練習10.3-2**

31天

**練習10.3-3**

(1)583.1公尺 (2)17640公尺

**練習10.3-4**

22個

**練習10.3-5**

36個

**練習10.3-6**

17排

**練習10.3-7**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 18 | 12 | 6 |
| 25 | 19 | 13 |
| 32 | 26 | 20 |

**練習10.3-8**

第15天

**10.3習題解答**

**10.3-1** 答：110度

**10.3-2** 答：第8週

**10.3-3** 答：(1)289.1公尺

(2)4410公尺

**10.3-4** 答：30棵

**10.3-5** 答：36個

**10.3-6** 答：30排

**10.3-7** 答：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 4 | 12 | 20 |
| 10 | 18 | 26 |
| 16 | 24 | 32 |

**10.3-8** 答：第7天

**第十章綜合習題**

**1.**答：

(1) 1000、2000、3000、4000、5000

(2) 120、240、360、480、600、720、840、960

**2.**答：

(1) 

(2) 15

(3) 8

(4) 

(5) 21

**3.**答：

(1) 、

(2) 4、10

**4.**答：

(1) 14、16、18、20、22

(2) 19、21、23、25、27

**5.**答：2

**6.**答：16

**7.**答：

(1)2550

(2)

**8.**答：

(1)260

(2)222

(3)

**9.**答：8

**10.**答：135度

**11.**答：

(1)

(2)首項9、公差

**12.**答：第6週

**13.**答：

(1)93.1公尺

(2)490公尺

**14.**答：13個

**15.**答：

(1)20個

(2)3870個

**16.**答：52

**17.**答：第13天

(2)3870個

**16.**答：52

**17.**答：第13天

**基測與會考試題解答**

1. 《答案》(C)

詳解： 等差數列需有固定公差，等比數列需有固定公比  
(A)不是等差數列也不是等比數列  
(B)是公差為1的等差數列，但不是等比數列  
(C)是公差為0的等差數列，也是公比為1的等比數列  
(D) 不是等差數列也不是等比數列

2. 《答案》(D)

詳解： (A)是等差數列，公差為0  
(B)是等差數列，公差為1  
(C)是等差數列，公差為  
(D)不是等差數列

3. 《答案》(A)

詳解： 由 →  → 此數列為遞減數列  
(A) → ，正確  
(B) → ，錯誤  
(C) → → ，錯誤  
(D) → → ，錯誤

4. 《答案》(B)

詳解： 第一個三角形需要3根吸管，第二個三角形需要5根吸管，第三個三角形需要7根吸管  
為一個首項3，公差2的等差數列；排第十個三角形需要根吸管

5. 《答案》(D)

詳解： 設第一盞燈在16公尺處，每隔32公尺再立一盞燈(公差32) → 找出800~824間燈的位置  
  
 →  →  → (是整數) →   
第26盞燈的位置在公尺處

6. 《答案》(C)

詳解： 第一階貼4塊磁磚，第二階貼8塊磁磚，第三階貼12塊磁磚  
為一個首項4，公差4的等差數列；找出貼了112塊磁磚後，此樓梯共有多少階  
 →  →  → →  → 或(負不合)，故總共7階

7. 《答案》(A)

詳解： 42是等差中項， → ， →   


8. 《答案》(C)

詳解： 棋子排列遊戲，第一次邊長1顆，第二次邊長3顆，第三次邊長5顆  
為一個首項1，公差2的等差數列；第十次邊長，第九次邊長  
因棋子排列成正方形，所以第十次比第九次多出顆棋子

9. 《答案》(C)

詳解： 、、為等差數列，公差為3 → 、  
、、也為等差數列，代入、 →  
、、 → 、、為公差8的等差數列

10. 《答案》(A)

詳解： 第一圈(最內圈)人數 (每邊3人)  
第二圈人數 (每邊5人)  
第三圈人數 (每邊7人)  
每圈總人數成一首項10，公差10的等差數列；排六圈共需要人

11. 《答案》(A)

詳解： (A)刪 → 、、，公差41的等差數列  
(B)刪 → 、、，不是等差數列  
(C)刪 → 、、，不是等差數列  
(D)刪 → 、、，不是等差數列

12. 《答案》(D)

詳解： 、、為等差數列，公差為2  
(A)每數加5，仍為等差數列，公差為2  
(B)每數乘5，仍為等差數列，公差為  
(C)每數減1，仍為等差數列，公差為2  
(D)每數平方，不為等差數列

13. 《答案》(C)

詳解： 公差3，先求出個數，總和為

14. 《答案》(A)

詳解： 總和為

15. 《答案》(B)

詳解： 1個黑色時有6個白色，2個黑色時有10個白色，3個黑色時有14個白色  
成一首項6，公差4的等差數列；若有35個黑色，則有個白色

16. 《答案》(C)

詳解： 第一排有30個座位，每排增加2個座位；可知前7排共有個位子  
每班有20人，，1~12班的學生皆坐於前7排，且還多出12個位子  
多出的12個位子讓13班學生入座，但還有位學生須坐到第8排  
第8排有個位子，13班學生坐了8個位子後還有個位子，可供14班學生全部坐於第8排  
13班學生入座後剩個位子，不夠讓15班學生全部坐於第8排

17. 《答案》(B)

詳解： 小明答對了20題，答錯的可能假設為，(是整數)  
總分是，僅有當時得106分符合答案

18. 《答案》(C)

詳解：  → 數列公差為6  


19. 《答案》(B)

詳解： 依題意原牌排序深深深淺淺，經第一次移動後為深淺深淺深，第二次移動後為深淺淺深深，第三次移動後為深深淺深淺，第四次移動後為深深深淺淺，移動四次後回復原排序，故洗牌次數僅可能為20