

(49)排列組合總複習

(1) china 這 5 個英文字母，有幾種排列方法？

答案：有 5 個英文字，因此 $n = 5$ ，

將 5 個不同物件做排列，排列方式有 $5!$ 種

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

有 120 種排列方式。

(2) india 這 5 個英文字母，有幾種排列方法？

答案：有 5 個英文字，因此 $n = 5$ ，其中 i 有 2 個

將 5 個物件做排列，其中 2 個物件相同，排列方式有 $\frac{5!}{2!}$ 種

$$\frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$$

有 60 種排列方式。

(3) see 這 3 個英文字母，有幾種排列方法？

答案：有 3 個英文字，因此 $n = 3$ ，其中 e 有 2 個

將 3 個物件做排列，其中 2 個物件相同，排列方式有 $\frac{3!}{2!}$ 種

$$\frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3$$

有 3 種排列方式。

(4) 有物件編號 1,2,3,4,5 要做排列，但 1,2 必須放在最前面，共有幾種排列方法？

答案：因為 1,2 要放在最前面，我們先排列 3,4,5，排列數是 $3!$ 種。

1,2 要放在最前面，排列方法是 $2!$ 種。

因此全部的排列數是 $(2!) \times (3!) = 2 \times 6 = 12$

有 12 種排列方式。

如果我們不限制 1,2 要排在最前面，則排列數是 $5! = 120$ 種。

有限制時排列數會小很多。

(5) 有物件編號 1,2,3,4,5 要做排列，1,2 必須在一起，可以在任何位置，共有幾種排列方法？

答案：因為 1,2 要放在一起，可以先將 1,2 看一個物件(1,2)，

共有 4 個不同物件需要排列。排列數是 $4!$ 種。

但(1,2)的排列方法是 $2!$ 種。

因此全部的排列數是 $(2!) \times (4!) = 2 \times 24 = 48$

有 48 種排列方式。

(6) 有物件編號 1,2,3,4 要做排列，但 2,3 必須放在最前面，共有幾種排列方法？

答案：因為 2,3 要放在最前面，我們先排列 1,4，排列數是 $2!$ 種。

2,3 要放在最前面，排列方法是 $2!$ 種。

因此全部的排列數是 $(2!) \times (2!) = 2 \times 2 = 4$

有 4 種排列方式。

我們可以列出排列为：2314 2341 3214 3241

(7) 承上題，假如 2,3 必須在一起，但可以在任何位置，共有幾種排列方法？

答案：因為 2,3 要放在一起，可以先將 2,3 看一個物件(2,3)，

共有 3 個不同物件需要排列。排列數是 $3!$ 種。

但(2,3)的排列方法是 $2!$ 種。

因此全部的排列數是 $(2!) \times (3!) = 2 \times 6 = 12$

有 12 種排列方式。

(8) 有物件編號 1,2,3 要做排列，1,3 必須在一起，可以在任何位置，共有幾種排列方法？

答案：因為 1,3 要放在一起，可以先將 1,3 看一個物件(1,3)，

共有 2 個不同物件需要排列。排列數是 $2!$ 種。

但(1,3)的排列方法是 $2!$ 種。

因此全部的排列數是 $(2!) \times (2!) = 2 \times 2 = 4$

有 4 種排列方式。

我們可以列出排列為：132 312 213 231

(9) 數字 0~99 中，不出現 3 的數字有多少個？

答案：我們將個位數和十位數分開看

不能出現 3，所以個位數可以有 9 種

十位數可以有 9 種（十位數為 0 時，該數字視為個位數）

因此共有 $9 \times 9 = 81$ 個數字。

以下是不可出現的數字：

3,13,23,33,43,53,63,73,83,93 (10 個)

30,31,32,34,35,36,37,38,39 (9 個)

0~99 共有 100 個數字。 $100 - 10 - 9 = 81$ ，與計算相同。

(10) 數字 0~99 中，不出現 2 和 4 的數字有多少個？

答案：我們將個位數和十位數分開看

不能出現 2 和 4，所以個位數可以有 8 種

十位數可以有 8 種（十位數為 0 時，該數字視為個位數）

因此共有 $8 \times 8 = 64$ 個數字。

(11) 數字 0~99 中，2 不出現在個位數的數字有多少個？

答案：我們將個位數和十位數分開看

2 不出現在個位數，所以個位數可以有 9 種

十位數可以有 10 種（十位數為 0 時，該數字視為個位數）

因此共有 $10 \times 9 = 90$ 個數字。

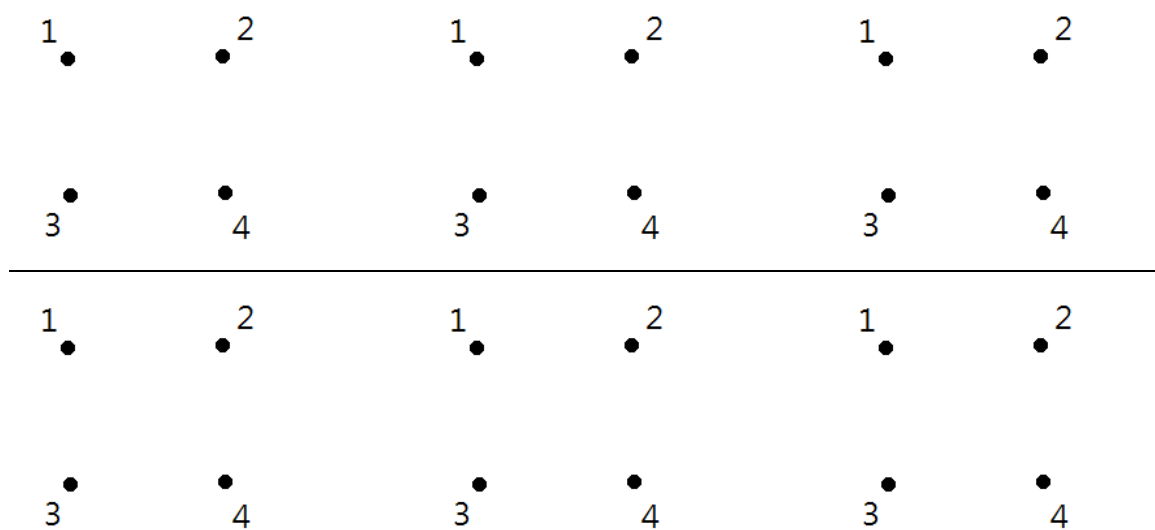
(12)平面上有 4 點，任 2 點連成一直線，可以連成多少條直線？

答案： 4 個點取任 2 點連成直線，

相當於從 4 個物件中選出 2 個來連成直線

$$\text{因此直線數量是 } C_2^4 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

可以連成 6 條直線。同學可以在下圖畫畫看是否為 6 條



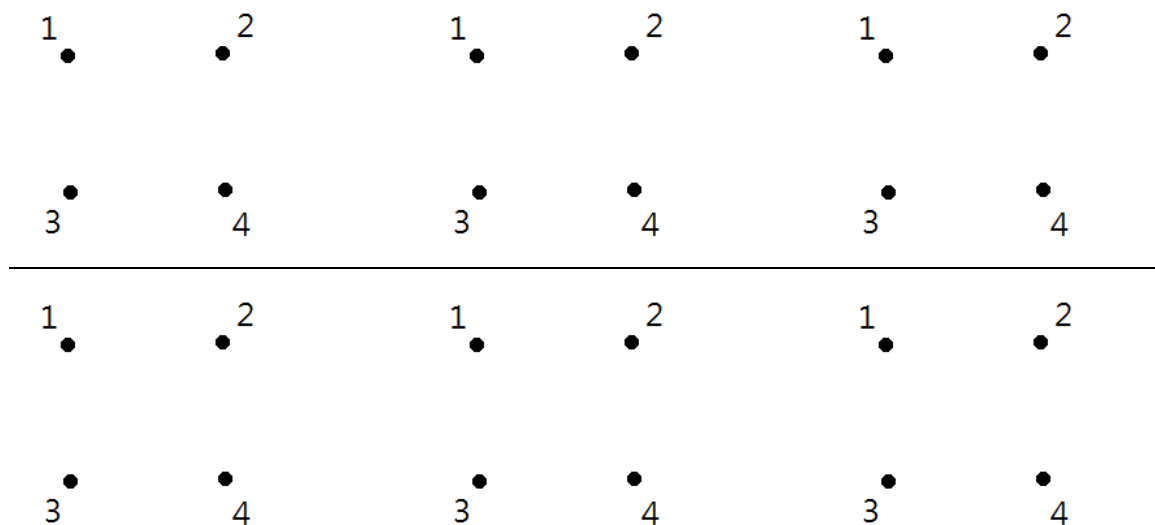
(13)平面上有 4 點，任 3 點不共線，可以連成多少個三角形？

答案： 4 個點取任 3 點連成三角形，

相當於從 4 個物件中選出 3 個來連成三角形

$$\text{因此三角形數量是 } C_3^4 = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} = 4$$

可以連成 4 個三角形。同學可以在下圖畫畫看是否為 4 個



(14)有 8 個同學要打球，分成 2 隊，每隊 4 人，共有多少種分法？

答案： 這個問題相當於從 8 個物件中選出 4 個，剩下 4 個自然會是一組

$$\text{因此分法是 } C_4^8 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

有 70 種分法。

(15)有 8 個同學要打球，分成 2 隊，每隊 4 人，而且其中有 2 人打的特別好，不能在同一隊，共有多少種分法？

答案： 因為有 2 人不能在同一隊，我們先分另外 6 人，每 3 人一隊

分法是 C_3^6 種，再將另外 2 人分進 2 隊，有 $2!$ 種分法。

因此分法共有 $(2!) \times C_3^6 = 2 \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 2 \times 20 = 40$ ，有 40 種分法。

(16) 有 8 個同學要打球，分成 2 隊，每隊 4 人，而且其中有 2 人要在同一隊，共有多少種分法？

答案：有 2 人在同一隊，只要從剩下的 6 人，選出 2 人在一隊即可。

因此分法共有 $C_2^6 = 2 \times \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$

有 15 種分法。

(17) 有 3 個男生和 2 個女生排隊，共有多少種排列方法？

答案：有 5 個人，因此 $n = 5$ ，

將 5 個不同物件做排列，排列方式有 $5!$ 種

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

有 120 種排列方式。

(18) 有 3 個男生和 2 個女生，如果選 2 個男生和 1 個女生排隊，共有多少種排列方法？

答案：3 個男生中選 2 人的方法是 C_2^3 種。

2 個女生中選 1 人的方法是 C_1^2 種。

將選出的 3 人排列，有 $3!$ 種。

因此排列方法是 $C_2^3 \times C_1^2 \times (3!) = 3 \times 2 \times 6 = 36$

有 36 種排列方式。

(19)有 3 個男生和 2 個女生排隊，如果男生一定要排在一起，女生一定要排在一起，共有多少種排列方法？

答案：3 個男生要排在一起，男生的排列方法有 $3!$ 種。

2 個女生要排在一起，女生的排列方法有 $2!$ 種。

男生和女生的排列方法有 $2!$ 種。

因此排列方法是 $(3!) \times (2!) \times (2!) = 6 \times 2 \times 2 = 24$

有 24 種排列方式。

(20)有 3 個男生和 2 個女生排隊，如果 3 個男生一定要排在前面，共有多少種排列方法？

答案：3 個男生要排在前面，男生的排列方法有 $3!$ 種。

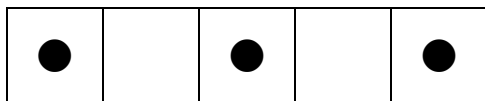
2 個女生要排在後面，女生的排列方法有 $2!$ 種。

因此排列方法是 $(3!) \times (2!) = 6 \times 2 = 12$

有 12 種排列方式。

(21)有 3 個男生和 2 個女生排隊，男生之間必須有間隔女生，共有多少種排列方法？

答案：男生之間必須有間隔女生，男生的排列位置可參考下圖



男生排在這 3 個位置的排列方式有 $3!$ 種

女生的排列位置可參考下圖



女生排在這 2 個位置的排列方式有 $2!$ 種

因此排列方法是 $(3!) \times (2!) = 6 \times 2 = 12$ ，有 12 種排列方式。

(22) 有 3 個男生和 2 個女生排隊，如果第一位是女生，最後一位是男生，共有多少種排列方法？

答案：第一位是女生，排列方法有 C_1^2 種。

最後一位是男生，排列方法有 C_1^3 種。

中間 3 人排列方法有 $3!$ 種。

因此排列方法是 $C_1^2 \times C_1^3 \times (3!) = 2 \times 3 \times 6 = 36$

有 36 種排列方式。

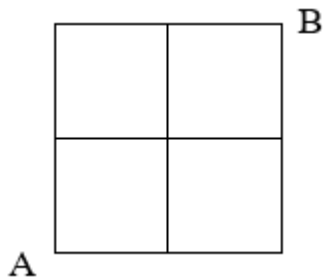
(23) 有 5 位男人和 5 位女人，選出 6 人組成委員會，共有多少種方法？

答案：總共有 $5+5=10$ 人，要取出 6 人，所以是 C_6^{10} 。

$$C_6^{10} = C_4^{10} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

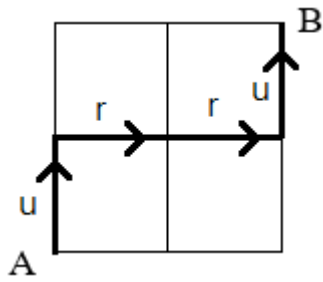
有 210 種方式。

(24) 在下圖中，想沿著線從 A 走到 B，路線只能往右或往上，有幾種路徑？

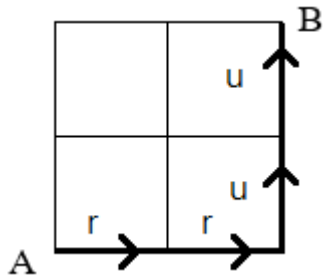


答案：我們可以將路線往上記成 u，往右記成 r

以下的路徑是 urru



以下的路徑是 rruu



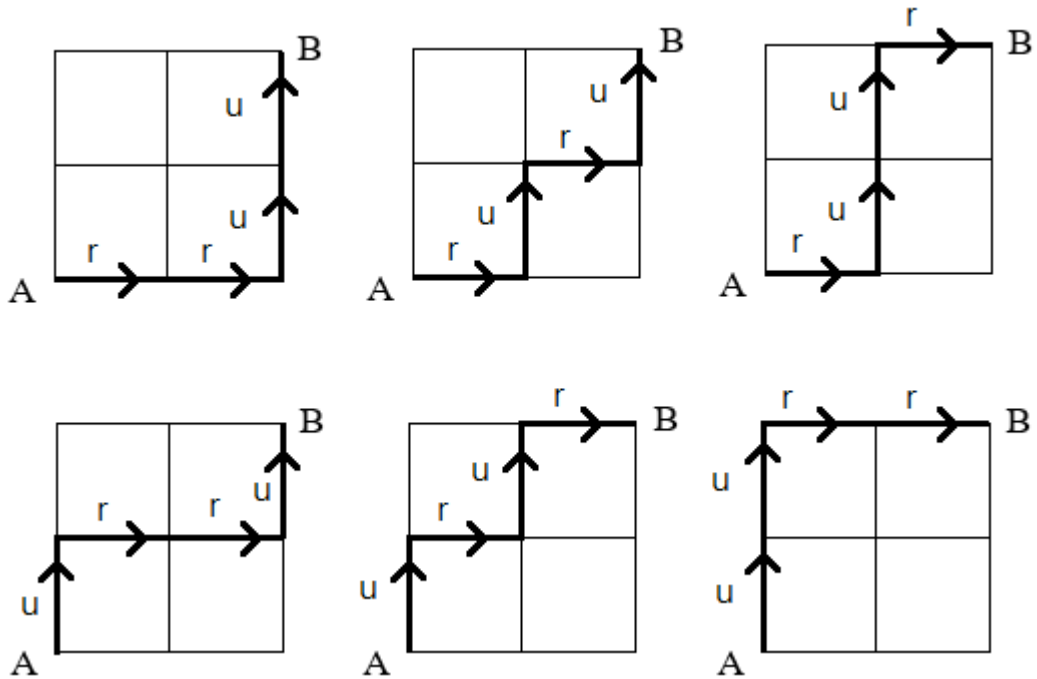
因此我們的問題可以想成是有 2 個 r 和 2 個 u 的排列

2 個 r 是相同的，2 個 u 是相同的，排列數是：

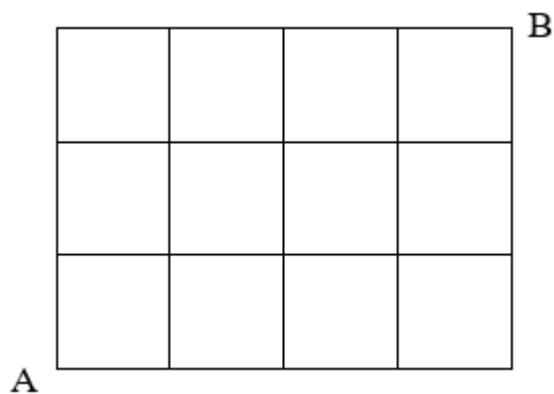
$$\frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times (2 \times 1)} = 6$$

有 6 種路徑。

以下是這 6 種路徑



(25) 在下圖中，想沿著線從 A 走到 B，路線只能往右或往上，有幾種路徑？



答案： 我們將路線往上記成 u，往右記成 r

根據上一題的推理，這是 3 個 u 和 4 個 r 的排列， $3 + 4 = 7$

$$\frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1) \times (4 \times 3 \times 2 \times 1)} = 35$$

有 35 種路徑。

線型方程式解的個數

假設我們有一個方程式

$$x + y = 4$$

其中 x 和 y 都是非負整數，則我們知道這個方程式的解為：

$$(0,4)、(1,3)、(2,2)、(3,1)、(0,4)$$

共有 5 個解。

這個線型方程式想求得解的個數，我們可以想像是 1 個+號和 4 個 1，每種排列方式都對應一個解。

+1111 對應(0,4)

1+111 對應(1,3)

11+11 對應(2,2)

111+1 對應(3,1)

1111+對應(4,0)

1 個+號和 4 個 1 排列， $n=1+4=5$

$$\frac{5!}{1! \times 4!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5$$

有 5 種排列方式，也就是有 5 個解。

(26) 方程式 $x+y+z=5$ 有多少個非負整數解？

答案：我們看成是 2 個+和 5 個 1 做排列， $n=2+5=7$

$$\frac{7!}{2! \times 5!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} = 21$$

有 21 種排列方式，也就是有 21 個解。

(27) 有 2 對夫婦，排成一列，共有幾種排列方式？

答案： $n = 2 \times 2 = 4$

排列方式有 $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ (種)

(28)有 2 對夫婦，排成一列，且同一對夫婦必須排在一起，共有幾種排列方式？

答案：同一對夫婦必須排在一起，有 2 對夫婦，可以看成是 2 個物件排列。

2 個物件的排列方法數是 $2!$

每對夫婦之間的排列方法數都有 $2!$ 種

共有 2 對夫婦

因此排列方式有 $(2) \times (2!) \times (2!) = 8$ (種)

(29)有 4 位男士和 3 位女士，要選出 4 人組成委員會，其中女士至少要 2 位，有多少種選擇方法？

答案：委員會組成方式有 2 女 2 男和 3 女 1 男

2 女 2 男：選出 2 女的方式是 C_2^3 ，選出 2 男的方式是 C_2^4

3 女 1 男：選出 3 女的方式是 C_3^3 ，選出 1 男的方式是 C_1^4

因此選擇方式有

$$C_2^3 \times C_2^4 + C_3^3 \times C_1^4 = 3 \times 6 + 1 \times 4 = 22$$

有 22 種選擇方法。

(30)有 2 位男士和 2 位女士，要選出 3 人組成委員會，其中男女都至少要 1 位，有多少種選擇方法？

答案：委員會組成方式有 1 男 2 女和 2 男 1 女

1 男 2 女：選出 1 男的方式是 C_1^2 ，選出 2 女的方式是 C_2^2

2 男 1 女：選出 2 男的方式是 C_2^2 ，選出 1 女的方式是 C_1^2

因此選擇方式有

$$C_1^2 \times C_2^2 + C_2^2 \times C_1^2 = 2 \times 2 = 4$$

有 4 種選擇方法。

設男士是 m_1 、 m_2 ，女士是 w_1 、 w_2

4 種選擇方式是

(1) m_1 、 m_2 、 w_1

(2) m_1 、 m_2 、 w_2

(3) m_1 、 w_1 、 w_2

(4) m_2 、 w_1 、 w_2

(31) 有 5 位男士和 4 位女士，要選出 2 男 2 女組成委員會，有多少種選擇方法？

答案：選出 2 男的方式是 C_2^5 ，選出 2 女的方式是 C_2^4

因此選擇方式有

$$C_2^5 \times C_2^4 = 10 \times 6 = 60$$

有 60 種選擇方法。

(32) 有 5 位男士和 4 位女士，要選出 2 男 2 女組成委員會，有多少種選擇方法？

答案：選出 2 男的方式是 C_2^5 ，選出 2 女的方式是 C_2^4

因此選擇方式有

$$C_2^5 \times C_2^4 = 10 \times 6 = 60$$

有 60 種選擇方法。

(33) 有 6 位男士和 7 位女士，要選出 3 男 3 女組成委員會，有多少種選擇方法？

答案：選出 3 男的方式是 C_3^6 ，選出 3 女的方式是 C_3^7

因此選擇方式有

$$C_3^6 \times C_3^7 = 20 \times 35 = 700$$

有 700 種選擇方法。

(34) 有 6 位男士和 7 位女士，要選出 3 男 3 女組成委員會，但其中有 2 位女士不能同

時參加，有多少種選擇方法？

答案：選出 3 男的方式是 C_3^6

至於選出 3 女的方式，我們可以把

[選出 3 女的全部方式] 減去 [2 女一起參加的方式]

來得到 [2 女不一起參加的方式]

選出 3 女的全部方式是 C_3^7

2 女一起參加，只要從剩下 5 女選出 1 人參與，因此方式是 C_1^5

因此 2 女不一起參加的方式是 $C_3^7 - C_1^5$

因此選擇方式有

$$C_3^6 \times (C_3^7 - C_1^5) = 20 \times (35 - 5) = 600, \text{ 有 600 種選擇方法。}$$

(35)有 1,2,3,4,5，5 個數字做排列，頭尾都要是奇數，有多少種排列方法？

答案：奇數有 1,3,5 共 3 個，選出 2 個排在頭跟尾，方法數有 C_2^3

剩下 3 個數字排列，方法數有 P_3^3

因此排列方式有

$$C_2^3 \times P_3^3 = (3 \times 2) \times (3 \times 2 \times 1) = 36$$

有 36 種排列方法。

(36)有 1,2,3,4,5，5 個數字做排列，頭尾至少有一個是偶數，有多少種排列方法？

答案：我們可以利用

[5 個數字任意排列]減去[頭尾都是奇數]

來得到[頭尾至少有一個是偶數]的排列方法

5 個數字任意排列的方法是 P_5^5

頭尾都是奇數的排列方法，我們在前一題計算過了，是 $C_2^3 \times P_3^3$

因此排列方式有

$$\begin{aligned} P_5^5 - C_2^3 \times P_3^3 &= (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) - (3 \times 2) \times (3 \times 2 \times 1) = 120 - 36 \\ &= 84 \end{aligned}$$

有 84 種排列方法。

(37)有 1,2,3,4,5，5 個數字做排列，2 和 4 之間恰有夾 1 個數字，且 2 一定排在 4 前

面，有多少種排列方法？

答案：我們先從 3 個數字選出 1 個夾在 2 和 4 之間，方法是 C_1^3

假如選出的是 x，則我們有 [2x4] 和另外剩下 2 個數字排列，

也就是 3 個物件排列，排列方法是 3!

因此排列方式有

$$C_1^3 \times 3! = 3 \times (3 \times 2 \times 1) = 3 \times 6 = 18$$

有 18 種排列方法。

(38) 有 0,1,2,3,4,5, 6 個數字，選出 3 個數字組成三位數，數字不可重複使用，可以組出多少種三位數？

答案：三位數有百位數、十位數、個位數

百位數：不可為 0，因此有 5 個選擇

十位數：可以選 0，且數字不可重複，因此剩下 5 個選擇

個位數：可以選 0，且數字不可重複，因此剩下 4 個選擇

因此選擇方法有 $5 \times 5 \times 4 = 100$

可以組出 100 種三位數。

(39) 有 0,1,2,3,4,5, 6 個數字，選出 3 個數字組成三位數，數字不可重複使用，且個位數是 0，可以組出多少種三位數？

答案：三位數有百位數、十位數、個位數

百位數：不可為 0，因此有 5 個選擇

十位數：個位數是 0，所以十位數不可選 0，剩下 4 個選擇

個位數：只能選 0，只有 1 個選擇

因此選擇方法有 $5 \times 4 \times 1 = 20$

可以組出 20 種三位數。

(40) 有 0,1,2,3,4,5，6 個數字，選出 3 個數字組成三位數，數字不可重複使用，且個位數是 5，可以組出多少種三位數？

答案：三位數有百位數、十位數、個位數

百位數：不可為 0,5，因此有 4 個選擇

十位數：不可為 5，剩下 4 個選擇

個位數：只能選 0，只有 1 個選擇

因此選擇方法有 $4 \times 4 \times 1 = 16$

可以組出 16 種三位數。

(41) 有 0,1,2,3,4,5，6 個數字，選出 3 個數字組成三位數，數字不可重複使用，且三位數是 5 的倍數，可以組出多少種三位數？

答案：三位數有百位數、十位數、個位數

三位數是 5 的倍數，表示個位數是 0 或 5

在前兩題中，我們已經算出個位數是 0 的三位數有 20 個

個位數是 5 的三位數有 16 個

因此三位數是 5 的倍數有 $20 + 16 = 36$ 個。

(42) 有 1,2,3,4，4 個數字，選出 2 個數字組成二位數，數字不可重複，可以組出多少個二位數？

答案：這題相當於從 4 個物件選出 2 個做排列，因此是 P_2^4

$P_2^4 = 4 \times 3 = 12$ ，有 12 個二位數。

(43) 承上題，這 12 個二位數的數字總和是多少？

答案：十位數選擇 1 的時候，個位數有 3 個選擇(2,3,4)

所以這 3 個數字的十位數 1×3

十位數選擇 2 的時候，個位數有 3 個選擇(1,3,4)

所以這 3 個數字的十位數總和是 2×3

同理十位數選擇 3 的時候，十位數總合是 3×3 ，

十位數選擇 4 的時候，十位數總合是 4×3 ，

所以全部的十位數總合是 $(1 + 2 + 3 + 4) \times 3$

同理個位數總和也是 $(1 + 2 + 3 + 4) \times 3$

因此二位數總和是

$(1 + 2 + 3 + 4) \times 3 \times 10 + (1 + 2 + 3 + 4) \times 3 = 300 + 30 = 330$

(44) 0 到 99 的數字中，不含 5 的數字有多少個？

答案：先看個位數，不含 5 個數字有 9 個

十位數不含 5 個數字也有 9 個 (十位數為 0 視為個位數)

因此數字共有 $9 \times 9 = 81$ 個

(45) 0 到 99 的數字中，至少含有一個 5 的數字有多少個？

答案：全部 0 到 99 的數字，減去不含 5 的數字，就是至少含有 1 個 5 的數字

0~99 有 100 個數字

因此至少含有 1 個 5 的數字共有 $100 - 81 = 19$ 個

(46) 從 1~9 選擇 3 個數字，組成三位數，且必須是 3 的倍數，共有多少種組法？

答案：假如三位數 $n_1n_2n_3$ 是 3 的倍數，則 $n_1 + n_2 + n_3$ 是 3 的倍數，如

213 是 3 的倍數 ($2 + 1 + 3 = 6$)

174 是 3 的倍數 ($1 + 7 + 4 = 12$)

519 是 3 的倍數 ($5 + 1 + 9 = 15$)

345 是 3 的倍數 ($3 + 4 + 5 = 12$)

145 不是 3 的倍數 ($1 + 4 + 5 = 10$)

所以我們要從 1~9 的數字中，選出 3 個不重複的，其總和為 3 的倍數。

我們將 1~9 的數字分成 3 組：

(A) 1, 4, 7

(B) 2, 5, 8

(C) 3, 6, 9

分成這三組之後有以下兩點特性

(a) 每一組數字的和都是 3 的倍數

(b) 從 A、B、C 三組各選 1 個數字，這 3 個數字的總和是 3 的倍數

例如從 A 選 1、B 選 5、C 選 6，得到 156， $1 + 5 + 6$ 是 3 的倍數

例如從 A 選 7、B 選 2、C 選 9，得到 729， $7 + 2 + 9$ 是 3 的倍數

根據(a)每一組數字的和都是 3 的倍數

$$\text{組合方法有 } C_1^3 \times P_3^3 = 3 \times 3! = 18$$

根據(b)從 A、B、C 三三組各選 1 個數字，這 3 個數字的總和是 3 的倍數

$$\text{組合方法有 } C_1^3 \times C_1^3 \times C_1^3 \times P_3^3 = 3 \times 3 \times 3 \times 3! = 162$$

因此 3 的倍數共有 $18 + 162 = 180$ 種組法

(47) 從 0 到 9 的數字中，選出 3 個相異數字組成三位數，且偶數與偶數不能相鄰，奇數與奇數不能相鄰，有多少種組法？

數與奇數不能相鄰，有多少種組法？

答案：0 到 9 的數字中，有 5 個偶數和 5 個奇數

三位數有[奇偶奇]和[偶奇偶]兩種組法

[奇偶奇]：

百位數有 5 個選擇，十位數有 5 個選擇，個位數有 4 個選擇

有 $5 \times 5 \times 4 = 100$ 種組法

[偶奇偶]：

百位數不能為 0

百位數有 4 個選擇，十位數有 5 個選擇，個位數有 4 個選擇

有 $4 \times 5 \times 4 = 80$ 種組法

因此共有 $100 + 80 = 180$ 種組法

(48) 將英文字 $a l i b a b a$ 重新排列，有多少種排法？

答案： $n = 7$ 、 $r = 3$ ，因為 a 有 3 個，共有 $\frac{7!}{3!} = 840$ 種排列。

(49) 將英文字母 $a a b b c d e$ 重新排列， a 和 a 要連在一起， b 和 b 要連在一起，有多少種排法？

答案： 可以將 aa 視為 1 個物件， bb 視為 1 個物件，其他尚有 3 個物件，共有 $2 + 3 = 5$ 個物件

排列方法有 $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ 種

(50) 將英文字母 $a a b b c d e$ 重新排列， a 和 a 要連在一起， b 和 b 要連在一起，且 aa 和 bb 也要連在一起，有多少種排法？

答案： 可以將 $[aa bb]$ 視為 1 個物件，其他尚有 3 個物件，共有 $3 + 1 = 4$ 個物件

4 個物件的排列方法是 $4!$ 種

$[aa bb]$ 內的排列方法有 $2!$ 種 ($aabb$ 和 $bbaa$)

因此排列方法有 $4! \times 2! = (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (2 \times 1) = 48$ 種

(51) 將英文字母 $a a b b c d e$ 重新排列， a 和 a 不能連在一起， b 和 b 不能連在一起， a 和 b 不能連在一起，有多少種排法？

答案： 排列方式可以化成下圖



我們先將 cde 放到 ★ 的位置，有 $3!$ 種排法。

再將 2 個 a 與 2 個 b 放到空格，有 $\frac{4!}{2! \times 2!}$ 種排法

$$3! \times \frac{4!}{2! \times 2!} = (3 \times 2 \times 1) \times \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times (2 \times 1)} = 6 \times 6 = 36$$

因此排列方法有 36 種

(52) 數字 00122 有多少種排法？

答案：共有 5 個數字， $n = 5$

其中 2 個 0 相同，2 個 2 相同

$$\text{因此排列方法有 } \frac{5!}{2! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times (2 \times 1)} = 30 \text{ 種}$$

(53) 數字 00122 排成五位數，有多少種排法？

答案：五位數的萬位不能是 0

萬位是 1：剩下 0022 排列，排法有

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times (2 \times 1)} = 6 \text{ 種}$$

萬位是 2：剩下 0012 排列，排法有

$$\frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 12 \text{ 種}$$

因此排列方法共有 $6 + 12 = 18$ 種

(54) 數字 00122 排成五位數，且是 5 的倍數，有多少種排法？

答案：5 的倍數必須個位數是 0 或 5，本題中只有 0。

萬位是 1，個位數是 0：剩下 022 排列，排法有

$$\frac{3!}{2!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 3 \text{種}$$

萬位是 2，個位數是 0：剩下 012 排列，排法有

$$3! = 6 \text{種}$$

因此排列方法共有 $3 + 6 = 9$ 種

(55) 1,1,2,3,4，5 個數字中取 3 個排成三位數，且 2 個 1 都必須取到，有多少種排法？

答案：先決定 2 個 1 要在三位數中的哪兩個位置，選法是 C_2^3

還要從剩下 3 個數字中選 1 個來排，選法是 C_1^3

因此排列方法共有 $C_2^3 \times C_1^3 = 3 \times 3 = 9$ 種

(56) 1,1,2,3,4，5 個數字中取 3 個排成三位數，且 3 個數字都相異，有多少種排法？

答案：3 個數字都相異，相當於從 1,2,3,4 取 3 個數字排成三位數，選法是 P_3^4

$$P_3^4 = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

因此排列方法共有 24 種

(57) 1,1,2,3,4，5 個數字中取 3 個排成三位數，有多少種排法？

答案：可以分成 2 個 1 都取到，以及只取 1 個 1，兩種狀況

2 個 1 都取到：同(55)題，有 9 種

只取 1 個 1，同(56)題，有 24 種

因此排列方法共有 $9 + 24 = 33$ 種

(58) 1,1,2,3,4，5 個數字中取 3 個排成三位數，百位數為 1，有多少種排法？

答案：百位數為 1，剩下 1,2,3,4 排在 2 個位置，所以是 P_2^4

$$P_2^4 = 4 \times 3 = 12$$

因此排列方法共有 12 種

(59) 1,1,2,3,4，5 個數字中取 3 個排成三位數，且三位數大於 200，有多少種排法？

答案：三位數大於 200，也就是全部的三位數減去百位數為 1 的三位數

全部的三位數，同(57)題，有 33 種

百位數為 1 的三位數，同(58)題，有 12 種

大於 200 的三位數有 $33 - 12 = 21$ 種

(60) 1,1,1,2,2,3，6 個數字中取 3 個排成三位數，有多少種排法？

答案：我們分成三種狀況

(a) 3 個數字都相同

只有 111 這 1 種狀況

(b) 2 個數字相同，1 個不同，又可以分為有 2 個 1 或 2 個 2

i. 2 個 1

將 2 個 1 放入 3 個位置中的 2 個位置，有 $C_2^3 = 3$ 種方法

剩下 2,3 要選 1 個排入，有 2 種選法

有 $2 \times 3 = 6$ 種

ii. 2 個 2

將 2 個 1 放入 3 個位置中的 2 個位置，有 $C_2^3 = 3$ 種方法

剩下 1,3 選 1 個排入，有 2 種選法

有 $2 \times 3 = 6$ 種

(c) 3 個數字都不同

等於把 1,2,3 排成三位數，有 $3! = 6$ 種

因此全部的排列方法共有 $1+6+6+6=19$ 種

19 種排列方法是

- | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1. 111 | 2. 112 | 3. 113 | 4. 121 | 5. 131 |
| 6. 211 | 7. 311 | 8. 221 | 9. 223 | 10. 212 |
| 11. 232 | 12. 122 | 13. 322 | 14. 123 | 15. 132 |
| 16. 213 | 17. 312 | 18. 231 | 19. 321 | |

在上面

1 是 3 個數字相同

2 到 7 是 2 個 1 相同

8 到 13 是 2 個 2 相同

14 到 19 是 3 個數字都不同