習題 9.1

習題 9.1-1：

如圖 9.1-84，ABCD 為矩形，$\overline{AB}$=6 公分，$\overline{AD}$=8 公分，則矩形 ABCD 的面積為何？

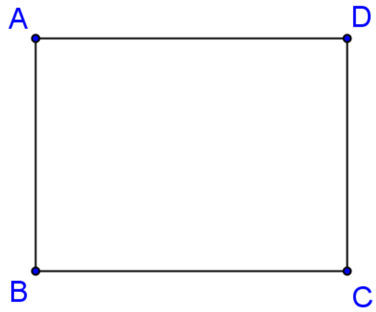


圖 9.1-84

想法：矩形面積等於長與寬的乘積

解：

敘述	理由
(1) 矩形 ABCD 的面積 $=\overline{AB}\times\overline{AD}$ =(6 公分)×(8 公分) =48 平方公分	已知 ABCD 為矩形，$\overline{AB}$=6 公分，$\overline{AD}$=8 公分 & 矩形面積等於長與寬的乘積

習題 9.1-2：

如圖 9.1-85，已知正方形 ABCD 面積為 25 平方公分，則$\overline{AB}$＝？

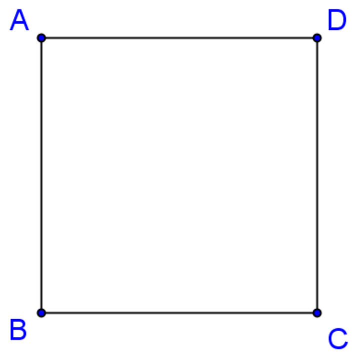


圖 9.1-85

想法：正方形面積等於邊長的平方

解：

敘述	理由
(1) 正方形 ABCD 面積＝$\overline{AB}^2$	已知 ABCD 為正方形 & 正方形面積等於邊長的平方
(2) 25 平方公分＝$\overline{AB}^2$	由(1) & 已知正方形 ABCD 面積為 25 平方公分
(3) $\overline{AB}$＝－5 公分 或 $\overline{AB}$＝5 公分	由(2) 求平方根
(4) 所以$\overline{AB}$＝5 公分	由(3) & $\overline{AB}$為邊長必為正數

習題 9.1-3：

如圖 9.1-86，已知四邊形 ABCD 為平行四邊形，$\overline{CE}\perp\overline{BC}$，且$\overline{BC}$＝10 公分，$\overline{CE}$＝6 公分，則平行四邊形 ABCD 面積為？

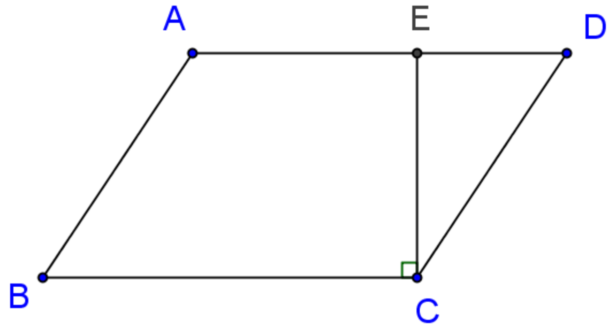


圖 9.1-86

想法：平行四邊形面積等於底與高之乘積

解：

敘述	理由
(1) 平行四邊形 ABCD 面積 ＝$\overline{BC}\times\overline{CE}$ ＝(10 公分)×(6 公分) ＝60 平方公分	已知 ABCD 為平行四邊形，$\overline{CE}\perp\overline{BC}$ 且$\overline{BC}$＝10 公分，$\overline{CE}$＝6 公分 & 平行四邊形面積等於底與高之乘積

習題 9.1-4：

如圖 9.1-87，已知四邊形 ABCD 為平行四邊形， $\overline{CE}\perp\overline{BC}$，且平行四邊形 ABCD 面積＝80 平方公分，$\overline{BC}$＝10 公分，則$\overline{CE}$＝？

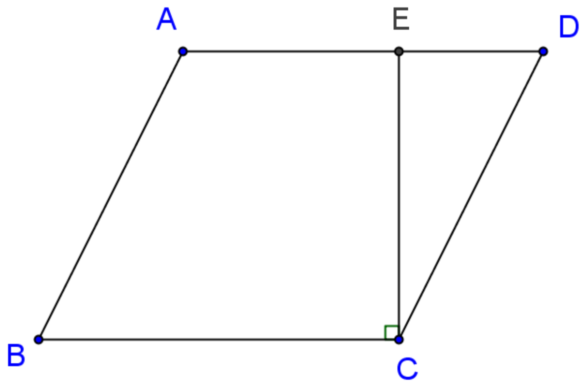


圖 9.1-87

想法：平行四邊形面積等於底與高之乘積

解：

敘述	理由
(1) 平行四邊形 ABCD 面積＝$\overline{BC}\times\overline{CE}$	已知已知四邊形 ABCD 為平行四邊形，$\overline{CE}\perp\overline{BC}$ & 平行四邊形面積等於底與高之乘積
(2) 80 平方公分＝10 公分×$\overline{CE}$	由(1) & 已知平行四邊形 ABCD 面積＝80 平方公分，$\overline{BC}$＝10 公分
(3) $\overline{CE}$＝(80 平方公分)÷(10 公分) ＝8 公分	由(2) 等量除法公理

習題 9.1-5：

如圖 9.1-88，平行四邊形 ABCD 的周長為 20 公分，$\overline{AE}\perp\overline{CD}$，若$\overline{AD}$＝4 公分，$\overline{AE}$＝3 公分，求平行四邊形 ABCD 的面積。

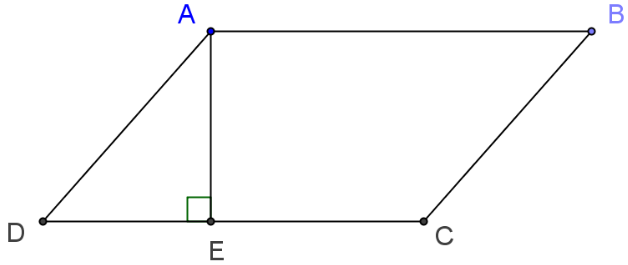


圖 9.1-88

想法：平行四邊形面積等於底與高之乘積

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}=\overline{CD}$ 且 $\overline{BC}=\overline{AD}$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 平行四邊形對邊相等
(2) $\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{CD}+\overline{BC}=20$ 公分	已知平行四邊形 ABCD 周長為 20 公分
(3) $\overline{CD}+\overline{AD}+\overline{CD}+\overline{AD}=20$ 公分	由(1) & (2) 代換
(4) $2(\overline{AD}+\overline{CD})=20$ 公分	由(3) 式子整理
(5) $\overline{AD}+\overline{CD}=(20$ 公分$)\div 2=10$ 公分	由(4) 等量除法公理
(6) $\overline{CD}=10$ 公分$-\overline{AD}$ $=10$ 公分-4 公分$=6$ 公分	由(5) 等量減法公理 & 已知$\overline{AD}=4$ 公分
(7) 平行四邊形 ABCD 面積 $=\overline{CD}\times\overline{AE}$ $=(6$ 公分$)\times(3$ 公分$)$ $=18$ 平方公分	已知已知四邊形 ABCD 為平行四邊形， $\overline{AE}\perp\overline{CD}$ & 平行四邊形面積等於底與高之乘積 & (6) $\overline{CD}=6$ 公分 已證 & 已知$\overline{AE}=3$ 公分

習題 9.1-6：

有一長方形與一平行四邊形等面積，已知長方形之長為 9 公尺，寬為 8 公尺，平形四邊形之底長為 12 公尺，試求此平行四邊形之高為多少？

想法：(1) 長方形面積等於長與寬之乘積

(2) 平行四邊形面積為底與高之乘積

解：

敘述	理由
(1) 長方形面積 ＝(9 公尺)×(8 公尺) ＝72 平方公尺	長方形面積等於長與寬之乘積 & 已知長方形之長為 9 公尺， 寬為 8 公尺
(2) 平行四邊形面積 ＝(12 公尺)×平行四邊形之高	平行四邊形面積為底與高之乘積 & 已知平形四邊形之底長為 12 公尺
(3) 72 平方公尺＝(12 公尺)×平行四邊形之高	由(1) & (2) & 已知長方形與平行四邊形等面積
(4) 平行四邊形之高＝72 平方公尺÷(12 公尺) ＝6 公尺	由(3) 等量除法公理

習題 9.1-7：

如圖 9.1-89，△ABC 中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，若$\overline{BC}$＝14 公分，$\overline{AD}$＝8 公分，則△ABC 面積為何？

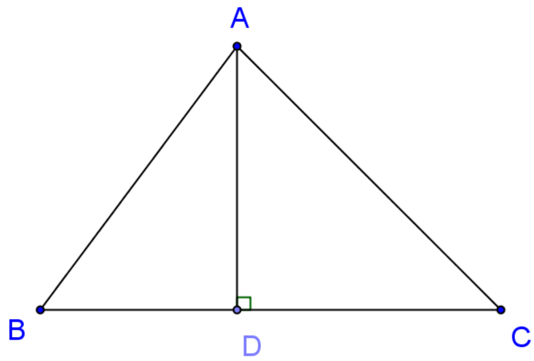


圖 9.1-89

想法：三角形面積等於底與高之乘積的一半

解：

敘述	理由
(1) △ABC 面積＝$\dfrac{\overline{BC}\times\overline{AD}}{2}$ ＝$\dfrac{(14公分)\times(8公分)}{2}$ ＝56 平方公分	已知△ABC 中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，$\overline{BC}$＝14 公分，$\overline{AD}$＝8 公分 & 三角形面積等於底與高之乘積的一半

習題 9.1-8：

如圖 9.1-90，△ABC 中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，若$\overline{BC}$＝6 公分，$\overline{CD}$＝8 公分，$\overline{AD}$＝10 公分，則△ABC 面積為何？

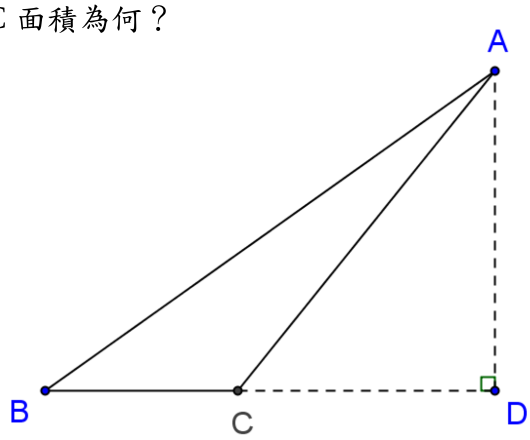


圖 9.1-90

想法：三角形面積等於底與高之乘積的一半

解：

敘述	理由
(1) △ABC 面積＝$\dfrac{\overline{BC}\times\overline{AD}}{2}$ ＝$\dfrac{(6公分)\times(10公分)}{2}$ ＝30 平方公分	已知△ABC 中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，$\overline{BC}$＝6 公分，$\overline{AD}$＝10 公分 & 三角形面積等於底與高之乘積的一半

習題 9.1-9：

如圖 9.1-91，△ABC 中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，若$\overline{BC}$＝12 公分，△ABC 面積為 48 平方公分，則$\overline{AD}$＝？

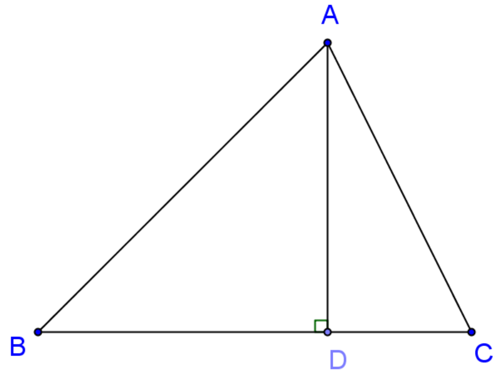


圖 9.1-91

想法：三角形面積等於底與高之乘積的一半

解：

敘述	理由
(1) △ABC 面積＝$\dfrac{\overline{BC}\times\overline{AD}}{2}$	已知△ABC 中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$ & 三角形面積等於底與高之乘積的一半
(2) 48 平方公分＝$\dfrac{(12公分)\times\overline{AD}}{2}$	由(1) & 已知$\overline{BC}$＝12 公分，△ABC 面積為 48 平方公分
(3) (12 公分)×$\overline{AD}$＝(48 平方公分)×2	由(2) 等量乘法公理
(4) $\overline{AD}$＝(48 平方公分)×2÷(12 公分)＝8 公分	由(3) 等量除法公理

習題 9.1-10：

如圖 9.1-92，已知△ABC 為直角三角形，若∠B＝30°，∠A＝60°，∠C＝90°，且$\overline{AB}$＝12 公分，則△ABC 面積為何？

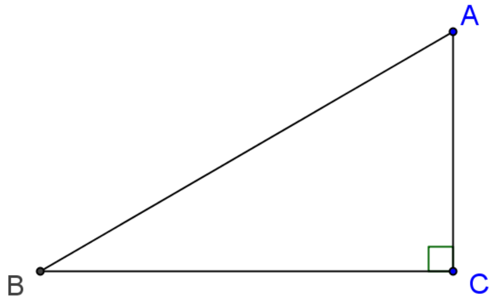


圖 9.1-92

想法：(1) 利用 30°-90°-60°的直角三角形，其邊長比為 1：2：$\sqrt{3}$，求出直角三角形的兩股長度

(2) 三角形面積等於底與高之乘積的一半

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AC}$：$\overline{AB}$：$\overline{BC}$＝1：2：$\sqrt{3}$	已知△ABC 為直角三角形，若∠B＝30°，∠A＝60°，∠C＝90° & 30°-90°-60°的直角三角形，其邊長比為 1：2：$\sqrt{3}$
(2) $\overline{AC}$：(12 公分)＝1：2	由(1) $\overline{AC}$：$\overline{AB}$＝1：2 & 已知$\overline{AB}$＝12 公分
(3) 2×$\overline{AC}$＝1× (12 公分)	由(2) & 外項乘積等於內項乘積
(4) $\overline{AC}$＝(12 公分)÷2＝6 公分	由(3) 等量除法公理
(5) (12 公分)：$\overline{BC}$＝2：$\sqrt{3}$	由(1) $\overline{AB}$：$\overline{BC}$＝2：$\sqrt{3}$ & 已知$\overline{AB}$＝12 公分
(6) 2×$\overline{BC}$＝$\sqrt{3}$×(12 公分)	由(5) & 內項乘積等於外項乘積
(7) $\overline{BC}$＝$\sqrt{3}$×(12 公分)÷ 2 ＝6$\sqrt{3}$ 公分	由(6) 等量除法公理
(8) △ABC 面積 ＝$\frac{\overline{AC}\times\overline{BC}}{2}$ ＝$\frac{(6公分)\times(6\sqrt{3}公分)}{2}$ ＝18$\sqrt{3}$ 平方公分	三角形面積等於底與高之乘積的一半 & (4) $\overline{AC}$＝6 公分 & (7) $\overline{BC}$＝6$\sqrt{3}$ 公分 已證

習題 9.1-11：

如圖 9.1-93，已知△ABC 為直角三角形，若∠B＝30°，∠C＝60°，∠CAB＝90°，且$\overline{AM}$⊥$\overline{BC}$，$\overline{AM}$＝6 公分，則△ABC 面積為何？

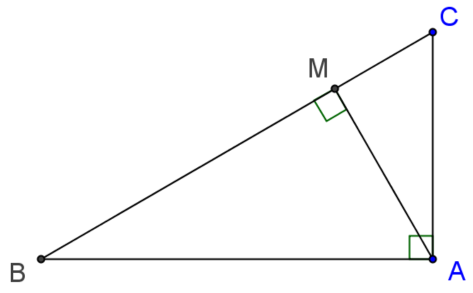


圖 9.1-93

想法：(1)　利用 30°-90°-60°的直角三角形，其邊長比為 1：2：$\sqrt{3}$，求出$\overline{AB}$與$\overline{AC}$

(2)　三角形面積等於底與高之乘積的一半

解：

敘述	理由
(1)　△BAM 中， ∠MAB＋∠B＋∠AMB＝180°	如圖 9.1-93 所示 三角形內角和 180°
(2)　∠MAB＝180°－∠B－∠AMB ＝180°－30°－90°＝60°	由(1) 等量減法公理 & 已知∠B＝30° & $\overline{AM}$⊥$\overline{BC}$，∠AMB＝90°
(3)　△BAM 為 30°-90°-60°的直角三角形	已知∠B＝30° & (2) ∠MAB＝60° 已證 & 已知$\overline{AM}$⊥$\overline{BC}$，∠AMB＝90°
(4)　$\overline{AM}$：$\overline{AB}$：$\overline{BM}$＝1：2：$\sqrt{3}$	由(3) & 30°-90°-60°的直角三角形，其邊長比為 1：2：$\sqrt{3}$
(5)　(6 公分)　：$\overline{AB}$＝1：2	由(4) $\overline{AM}$：$\overline{AB}$＝1：2 & 已知$\overline{AM}$＝6 公分
(6)　$\overline{AB}$＝2×6 公分＝12 公分	由(5) & 內項乘積等於外項乘積
(7)　△ACM 中， ∠CAM＋∠C＋∠AMC＝180°	如圖 9.1-93 所示 三角形內角和 180°
(8)　∠CAM＝180°－∠C－∠AMC ＝180°－60°－90°＝30°	由(7) 等量減法公理 & 已知∠C＝60° & $\overline{AM}$⊥$\overline{BC}$，∠AMC＝90°
(9)　△ACM 為 30°-90°-60°的直角三角形	由(8) ∠CAM＝30° 已證 & 已知$\overline{AM}$⊥$\overline{BC}$，∠AMC＝90° & ∠C＝60°
(10) $\overline{CM}$：$\overline{AC}$：$\overline{AM}$＝1：2：$\sqrt{3}$	由(9) & 30°-90°-60°的直角三角形，其邊長比為 1：2：$\sqrt{3}$

(11) $\overline{AC}$：(6 公分)＝2：$\sqrt{3}$	由(10) $\overline{AC}$：$\overline{AM}$＝2：$\sqrt{3}$ ＆ 已知$\overline{AM}$＝6 公分
(12) $\sqrt{3}\times\overline{AC}$＝2×(6 公分)	由(11) ＆ 外項乘積等於內項乘積
(13) $\overline{AC}=\dfrac{2\times(6公分)}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$ 公分	由(12) 等量除法公理
(14) △ABC 面積 $=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{AC}}{2}$ $=\dfrac{(12公分)\times(4\sqrt{3}公分)}{2}$ $=24\sqrt{3}$ 平方公分	三角形面積等於底與高之乘積的一半 ＆ (6) $\overline{AB}$＝12 公分 ＆ (13) $\overline{AC}=4\sqrt{3}$ 公分 已證

習題 9.1-12：

如圖 9.1-94，已知△ABC 為等腰直角三角形，若$\overline{AB}$＝12 公分，則△ABC 面積為何？

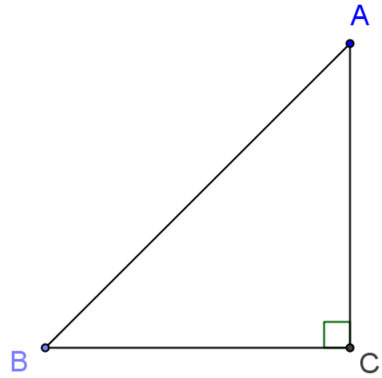


圖 9.1-94

想法：(1) 利用 45°-45°-90°的等腰直角三角形，其邊長比為 1：1：$\sqrt{2}$，求出$\overline{AB}$與$\overline{AC}$

(2) 三角形面積等於底與高之乘積的一半

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AC}$：$\overline{BC}$：$\overline{AB}$＝1：1：$\sqrt{2}$	已知△ABC 為等腰直角三角形 & 45°-45°-90°的等腰直角三角形，其邊長比為 1：1：$\sqrt{2}$
(2) $\overline{BC}$：(12 公分)＝1：$\sqrt{2}$	由(1) $\overline{BC}$：$\overline{AB}$＝1：$\sqrt{2}$ & 已知$\overline{AB}$＝12 公分
(3) $\sqrt{2}\times\overline{BC}$＝1× (12 公分)	由(2) & 內項乘積等於外項乘積
(4) $\overline{BC}=\dfrac{12\text{公分}}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}\text{公分}$	由(3) 等量除法公理
(5) $\overline{AC}=\overline{BC}=6\sqrt{2}\text{公分}$	由(1) $\overline{AC}$：$\overline{BC}$＝1：1 & (4) $\overline{BC}=6\sqrt{2}\text{公分}$
(6) △ABC 面積 $=\dfrac{\overline{AC}\times\overline{BC}}{2}$ $=\dfrac{(6\sqrt{2}\text{公分})\times(6\sqrt{2}\text{公分})}{2}$ ＝36 平方公分	三角形面積等於底與高之乘積的一半 & (5) $\overline{AC}=\overline{BC}=6\sqrt{2}\text{公分}$ 已證

習題 9.1-13：

如圖 9.1-95，已知△ABC 為等腰直角三角形，$\angle C=90°$，若△ABC 面積為 32 平方公分，則$\overline{AB}$＝？

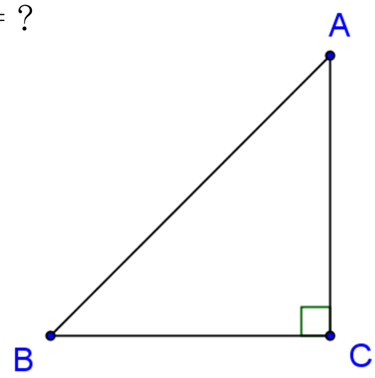


圖 9.1-95

想法：(1) 利用三角形面積等於底與高之乘積的一半，求出$\overline{BC}$

(2) 利用 45°-45°-90°的等腰直角三角形，其邊長比為 $1：1：\sqrt{2}$，求出$\overline{AB}$

解：

敘述	理由
(1) △ABC 面積＝$\dfrac{\overline{AC}\times\overline{BC}}{2}$	已知△ABC 為等腰直角三角形，$\angle C=90°$ & 三角形面積等於底與高之乘積的一半
(2) 32 平方公分＝$\dfrac{\overline{BC}\times\overline{BC}}{2}$	由(1) & 已知△ABC 面積為 32 平方公分 & △ABC 為等腰直角三角形，$\overline{AC}=\overline{BC}$
(3) $\overline{BC}^2$＝(32 平方公分)x2 ＝64 平方公分	由(2) 等量乘法公理
(4) $\overline{BC}$＝8 公分 或 $\overline{BC}$＝－8 公分	由(3) 求平方根
(5) $\overline{BC}$＝8 公分	由(4) & $\overline{BC}$為線段長度必大於 0
(6) $\overline{AC}：\overline{BC}：\overline{AB}=1：1：\sqrt{2}$	已知△ABC 為等腰直角三角形 & 45°-45°-90°的等腰直角三角形，其邊長比為 $1：1：\sqrt{2}$
(7) (8 公分)：$\overline{AB}=1：\sqrt{2}$	由(6) $\overline{BC}：\overline{AB}=1：\sqrt{2}$ & (5) $\overline{BC}$＝8 公分 已證
(8) $\overline{AB}=\sqrt{2}\times$(8 公分) ＝$8\sqrt{2}$ 公分	由(7) & 內項乘積等於外項乘積

習題 9.1-14：

有一個正三角形的邊長為 4 公分，則此正三角形的面積為_______。

想法：邊長為 a 單位的正三角形面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 平方單位

解：

敘述	理由
(1) 此正三角形的面積 $=\frac{\sqrt{3}}{4}(4\text{公分})^2$ $=4\sqrt{3}$ 平方公分	邊長為 a 單位的正三角形面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 平方單位 & 已知此正三角形邊長為 4 公分

習題 9.1-15：

若一正三角形的面積為 $25\sqrt{3}$ 平方公分，則此正三角形的邊長為_____。

想法：邊長為 a 單位的正三角形面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 平方單位

解：

敘述	理由
(1) 假設此正三角形邊長為 a 公分	假設
(2) $25\sqrt{3}$ 平方公分 $=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$	邊長為 a 單位的正三角形面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 平方單位 & 已知正三角形的面積為 $25\sqrt{3}$ 平方公分
(3) $\sqrt{3}\times a^2=(25\sqrt{3}$ 平方公分$)\times 4$	由(2) 等量乘法公理
(4) $a^2=(25\sqrt{3}$ 平方公分$)\times 4\div\sqrt{3}$ ＝100 平方公分	由(3) 等量除法公理
(5) a＝10 公分　或　a＝－10 公分	由(4) 求平方根
(6) a＝10 公分	由(5) & a 為長度必大於 0
(7) 所以此正三角形邊長為 10 公分	由(1) 假設 & (6) a＝10 公分　已證

習題 9.1-16：

如圖 9.1-96，已知△ABC 為直角三角形，∠ACB＝90°，若$\overline{AC}$＝6 公分，$\overline{BC}$＝8 公分，且$\overline{AB}\perp\overline{CE}$，則$\overline{CE}$＝？

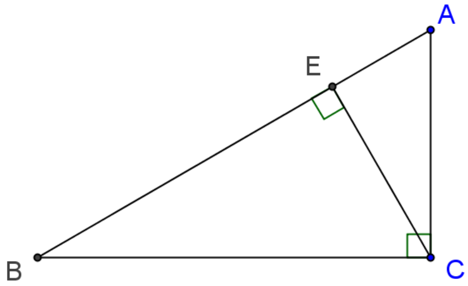


圖 9.1-96

想法：(1) 利用畢氏定理求出斜邊$\overline{AB}$的長度

(2) 直角三角形斜邊上的高等於兩股的乘積除以斜邊

解：

敘述	理由
(1) △ABC 中 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$	已知△ABC 為直角三角形，∠ACB＝90° & 畢氏定理
(2) $\overline{AB}^2$＝(6 公分)^2＋(8 公分)^2 ＝100 平方公分	由(1) & 已知$\overline{AC}$＝6 公分，$\overline{BC}$＝8 公分
(3) $\overline{AB}$＝10 公分 或 $\overline{AB}$＝－10 公分	由(2) 求平方根
(4) $\overline{AB}$＝10 公分	由(3) & $\overline{AB}$為線段長度必為正
(5) $\overline{CE}=\dfrac{\overline{AC}\times\overline{BC}}{\overline{AB}}$ $=\dfrac{(6公分)\times(8公分)}{10公分}$ ＝4.8 公分	已知△ABC 為直角三角形，∠ACB＝90°，$\overline{AB}\perp\overline{CE}$ & 直角三角形斜邊上的高等於兩股的乘積除以斜邊 & 已知$\overline{AC}$＝6 公分，$\overline{BC}$＝8 公分 & (4) $\overline{AB}$＝10 公分 已證

習題 9.1-17：

如圖 9.1-97，已知△ABC 為直角三角形，∠B＝30°，∠ACB＝90°，∠A＝60°，若$\overline{AC}$＝5 公分，且$\overline{AB}\perp\overline{CD}$，則$\overline{CD}$＝？

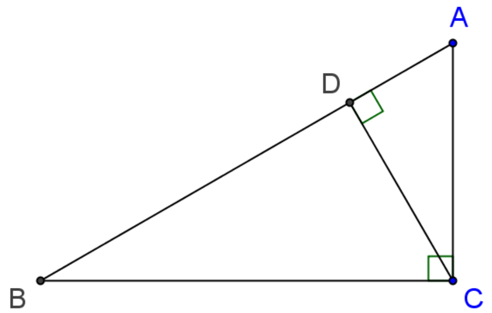


圖 9.1-97

想法：(1) 利用 30°-90°-60°的直角三角形，其邊長比為 1：2：$\sqrt{3}$，求出直角三角形的另一股與斜邊長度

(2) 直角三角形斜邊上的高等於兩股的乘積除以斜邊

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AC}:\overline{AB}:\overline{BC}=1:2:\sqrt{3}$	已知△ABC 為直角三角形，∠B＝30°，∠ACB＝90°，∠A＝60° & 30°-90°-60°的直角三角形，其邊長比為 1：2：$\sqrt{3}$
(2) (5 公分)：$\overline{AB}$＝1：2	由(1) $\overline{AC}:\overline{AB}$＝1：2 & 已知$\overline{AC}$＝5 公分
(3) $\overline{AB}$＝2×(5 公分)＝10 公分	由(2) & 內項乘積等於外項乘積
(4) (5 公分)：$\overline{BC}$＝1：$\sqrt{3}$	由(1)$\overline{AC}:\overline{BC}=1:\sqrt{3}$ & 已知$\overline{AC}$＝5 公分
(5) $\overline{BC}=\sqrt{3}$×(5 公分)＝5$\sqrt{3}$ 公分	由(4) & 內項乘積等於外項乘積
(6) $\overline{CD}=\dfrac{\overline{AC}\times\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{(5公分)\times(5\sqrt{3}公分)}{10公分}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ 公分	已知△ABC 為直角三角形，∠ACB＝90°，且$\overline{AB}\perp\overline{CD}$ & 直角三角形斜邊上的高等於兩股的乘積除以斜邊 & 已知$\overline{AC}$＝5 公分 & (5) $\overline{BC}$＝5$\sqrt{3}$ 公分 & (3) $\overline{AB}$＝10 公分 已證

習題 9.1-18：

如圖 9.1-98，已知△ABC 為等腰直角三角形，∠ACB＝90°，若△ABC 面積為 32 平方公分，且$\overline{AB}\perp\overline{CD}$，則$\overline{CD}$＝？

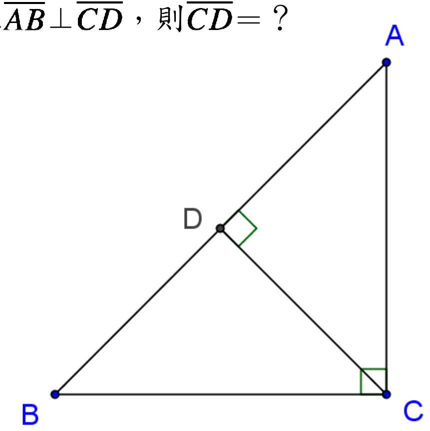


圖 9.1-98

想法：(1)　利用三角形面積等於底與高之乘積的一半，求出直角三角形的兩股長

(2)　再利用 45°-45°-90°的等腰直角三角形，其邊長比為 1：1：$\sqrt{2}$，求出直角三角形的斜邊長度

(3)　直角三角形斜邊上的高等於兩股的乘積除以斜邊

解：

敘述	理由
(1)　△ABC 面積＝$\dfrac{\overline{AC}\times\overline{BC}}{2}$	已知△ABC 為等腰直角三角形，∠C＝90° & 三角形面積等於底與高之乘積的一半
(2)　32 平方公分＝$\dfrac{\overline{BC}\times\overline{BC}}{2}$	由(1) & 已知△ABC 面積為 32 平方公分 & △ABC 為等腰直角三角形，$\overline{AC}=\overline{BC}$
(3)　$\overline{BC}^2$＝(32 平方公分)x2 ＝64 平方公分	由(2) 等量乘法公理
(4)　$\overline{BC}$＝8 公分　或 $\overline{BC}$＝－8 公分	由(3) 求平方根
(5)　$\overline{BC}$＝8 公分	由(4) & $\overline{BC}$為線段長度必大於 0
(6)　$\overline{AC}:\overline{BC}:\overline{AB}=1:1:\sqrt{2}$	已知△ABC 為等腰直角三角形 & 45°-45°-90°的等腰直角三角形，其邊長比為 1：1：$\sqrt{2}$
(7)　(8 公分)：$\overline{AB}=1:\sqrt{2}$	由(6) $\overline{BC}:\overline{AB}=1:\sqrt{2}$ & (5) $\overline{BC}$＝8 公分　已證
(8)　$\overline{AB}=\sqrt{2}$×(8 公分) ＝$8\sqrt{2}$ 公分	由(7) & 內項乘積等於外項乘積

(9) $\overline{CD}=\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$ $=\dfrac{(8公分)\times(8公分)}{8\sqrt{2}公分}$ $=4\sqrt{2}$ 公分	已知已知△ABC 為等腰直角三角形，∠ACB＝90°，且$\overline{AB}\perp\overline{CD}$ & 直角三角形斜邊上的高等於兩股的乘積除以斜邊 & 已知△ABC 為等腰直角三角形，$\overline{AC}=\overline{BC}$ & 由(5) $\overline{BC}$＝8 公分 & 由(8) $\overline{AB}=8\sqrt{2}$ 公分 已證

習題 9.1-19：

如圖 9.1-99，已知四邊形 ABCD 為菱形，$\overline{AC}$與$\overline{BD}$為其兩對角線，若$\overline{AC}$＝2 公分，$\overline{BD}$＝5 公分，則菱形 ABCD 面積為何？

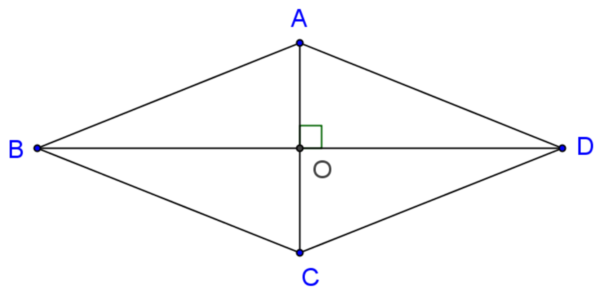


圖 9.1-99

想法：菱形面積等於兩對角線乘積的一半

解：

敘述	理由
(1) 菱形 ABCD 面積＝$\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{AC}}}{2}$	已知四邊形 ABCD 為菱形，$\overline{AC}$與$\overline{BD}$為其兩對角線 & 菱形面積等於兩對角線乘積的一半
(2) 菱形 ABCD 面積 $=\dfrac{(5公分)\times(2公分)}{2}$ ＝5 平方公分	由(1) & 已知$\overline{AC}$＝2 公分，$\overline{BD}$＝5 公分

習題 9.1-20：

如圖 9.1-100，已知四邊形 ABCD 為鳶形，$\overline{AC}$與$\overline{BD}$為其兩對角線，若鳶形 ABCD 面積＝16 平方公分，$\overline{AC}$＝4 公分，則$\overline{BD}$＝？

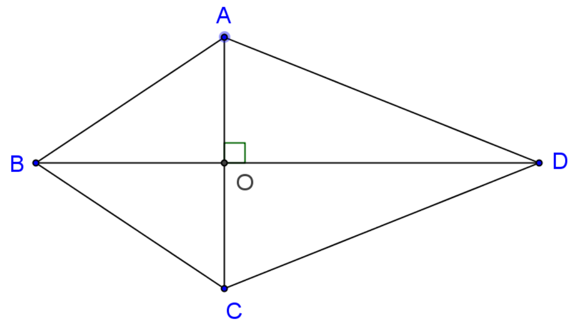


圖 9.1-100

想法：鳶形面積等於兩對角線乘積的一半

解：

敘述	理由
(1) 鳶形 ABCD 面積＝$\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{AC}}}{2}$	已知四邊形 ABCD 為鳶形，$\overline{AC}$與$\overline{BD}$為其兩對角線 ＆ 鳶形面積等於兩對角線乘積的一半
(2) 16 平方公分＝$\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}\times(4公分)}{2}$	由(1) ＆ 已知鳶形 ABCD 面積＝16 平方公分，$\overline{AC}$＝4 公分
(3) $\overline{BD}$×(4 公分)＝(16 平方公分)×2	由(2) 等量乘法公理
(4) $\overline{BD}$＝(16 平方公分)×2÷(4 公分) ＝8 公分	由(3) 等量除法公理

習題 9.1-21：

如圖 9.1-101，平行四邊形 ABCD 中，$\overline{AE}$、$\overline{AF}$分別為$\overline{BC}$、$\overline{CD}$邊上的高，又$\overline{CD}$＝5 公分，$\overline{BC}$＝4 公分，$\overline{AF}$＝3 公分，求$\overline{AE}$。

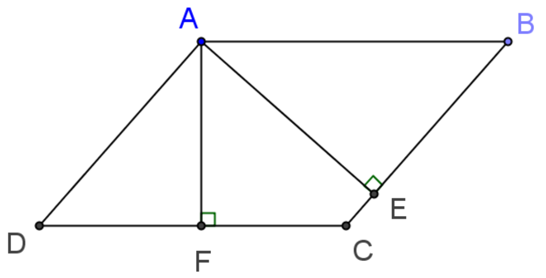


圖 9.1-101

想法：平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形

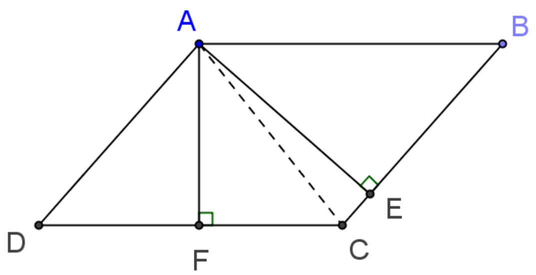


圖 9.1-101(a)

解：

敘述	理由
(1) 作$\overline{AC}$，則$\overline{AC}$為平行四邊形 ABCD 對角線，如圖 9.1-101(a)	過兩點可作一線段 & 已知 ABCD 為平行四邊形
(2) 平行四邊形 ABCD 中，△ACD 面積＝△ACB 面積	由(1) & 平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形
(3) $\dfrac{\overline{CD}\times\overline{AF}}{2}=\dfrac{\overline{BC}\times\overline{AE}}{2}$	由(2) & $\overline{AE}$、$\overline{AF}$分別為$\overline{BC}$、$\overline{CD}$邊上的高 & 三角形面積為底與高乘積的一半
(4) $\dfrac{(5公分)\times(3公分)}{2}=\dfrac{(4公分)\times\overline{AE}}{2}$	由(3) & 已知$\overline{CD}$＝5 公分，$\overline{BC}$＝4 公分，$\overline{AF}$＝3 公分
(5) $\overline{AE}$×(4 公分)＝(5 公分)×(3 公分)	由(4) 等量乘法公理
(6) $\overline{AE}$＝(5 公分)×(3 公分)÷(4 公分) ＝3.75 公分	由(5) 等量乘法公理

習題 9.1-22：

如圖 9.1-102，平行四邊形 ABCD 中，$\overline{AC}$為對角線，△ABC 的面積為 8 平方公分，求平行四邊形 ABCD 的面積。

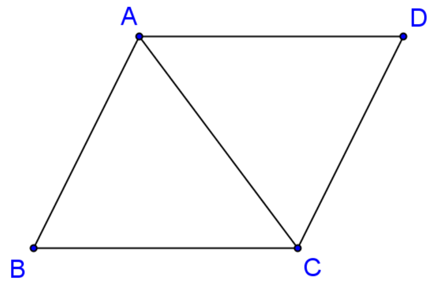


圖 9.1-102

想法：平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形

解：

敘述	理由
(1) 平行四邊形 ABCD 中 △ADC＝△ABC＝8 平方公分	已知平行四邊形 ABCD 中，$\overline{AC}$為對角線 & 平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形 & 已知△ABC 的面積為 8 平方公分
(2) 平行四邊形 ABCD 的面積 ＝△ADC＋△ABC ＝(8 平方公分)＋(8 平方公分) ＝16 平方公分	全量等於分量之和 & 由(1) △ADC＝△ABC＝8 平方公分

習題 9.1-23：

如圖 9.1-103，四邊形 ABCD 為長方形，四邊形 BCED 為平行四邊形，若△BCD 的面積為 3 平方單位，求四邊形 ABCE 的面積。

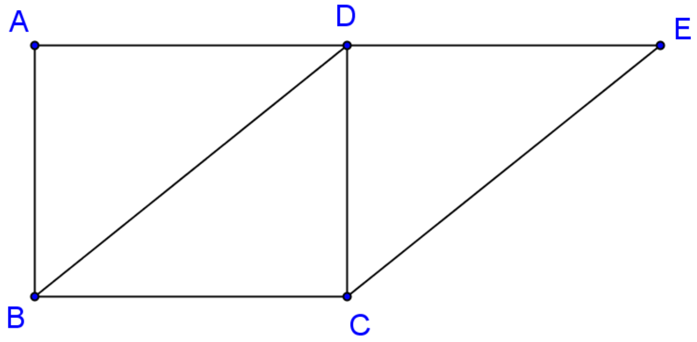


圖 9.1-103

想法：平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形

解：

	敘述	理由
(1)	長方形 ABCD 中 △ABD＝△BCD＝3 平方單位	已知四邊形 ABCD 為長方形 & 長方形也是平行四邊形 & 平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形 & 已知△BCD 的面積為 3 平方單位
(2)	平行四邊形 BCED 中 △CDE＝△BCD＝3 平方單位	已知四邊形 BCED 為平行四邊形 & 平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形 & 已知△BCD 的面積為 3 平方單位
(3)	四邊形 ABCE 的面積 ＝△ABD＋△BCD＋△CDE ＝9 平方單位	如圖 9.1-103 所示，全量等於分量之和 由(1) & (2) △ABD＝△BCD＝△CDE＝3 平方單位

習題 9.1-24：

如圖 9.1-104，平行四邊形 ABCD 的面積為 36 平方公分，$\overline{EF} \parallel \overline{AB}$，$\overline{GH} \parallel \overline{AD}$，求四邊形 EGFH 的面積。

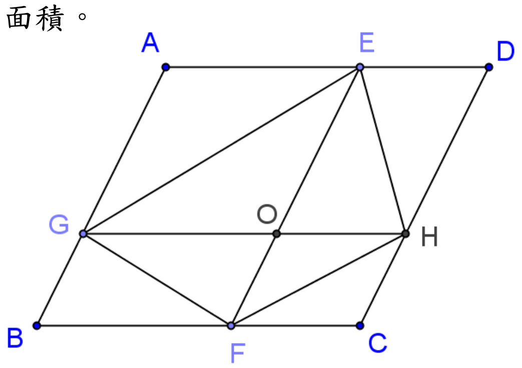


圖 9.1-104

想法： 平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ & $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 平行四邊形兩組對邊平行
(2) $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$ & $\overline{AD} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{GH}$	由(1) & 已知$\overline{EF} \parallel \overline{AB}$，$\overline{GH} \parallel \overline{AD}$
(3) 四邊形 AEOG 為平行四邊形 $\triangle AEG = \triangle OEG = \frac{1}{2}$ 四邊形 AEOG	由(2) $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ & $\overline{AD} \parallel \overline{GH}$ 平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形
(4) 四邊形 BFOG 為平行四邊形 $\triangle BFG = \triangle OFG = \frac{1}{2}$ 四邊形 BFOG	由(2) $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ & $\overline{BC} \parallel \overline{GH}$ 平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形
(5) 四邊形 EDHO 為平行四邊形 $\triangle DEH = \triangle OEH = \frac{1}{2}$ 四邊形 EDHO	由(2) $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$ & $\overline{AD} \parallel \overline{GH}$ 平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形
(6) 四邊形 OFCH 為平行四邊形 $\triangle CFH = \triangle OFH = \frac{1}{2}$ 四邊形 OFCH	由(2) $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$ & $\overline{BC} \parallel \overline{GH}$ 平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形
(7) 四邊形 EGFH 的面積 $= \triangle OEG + \triangle OFG + \triangle OEH + \triangle OFH$ $= \frac{1}{2}$ 四邊形 AEOG $+ \frac{1}{2}$ 四邊形 EDHO $+ \frac{1}{2}$ 四邊形 EDHO $+ \frac{1}{2}$ 四邊形 OFCH	如圖 9.1-104 所示 全量等於分量之和 由(3) $\triangle OEH = \frac{1}{2}$ 四邊形 EDHO 由(4) $\triangle OFG = \frac{1}{2}$ 四邊形 BFOG

$=\frac{1}{2}$(四邊形 AEOG＋四邊形 EDHO＋四邊形 EDHO＋四邊形 OFCH)	由(5)　△OEH＝$\frac{1}{2}$四邊形 EDHO 由(6)　△OFH＝$\frac{1}{2}$四邊形 OFCH
$=\frac{1}{2}$平行四邊形 ABCD 面積	全量等於分量之和
$=\frac{1}{2}\times$(36 平方公分) ＝18 平方公分	已知平行四邊形 ABCD 的面積為 36 平方公分

習題 9.1-25：

如圖 9.1-105，長方形 ABCD 中，$\overline{AB}$＝5 公分，$\overline{BC}$＝4 公分，E 點落在$\overline{CD}$上，求灰色區域的面積。

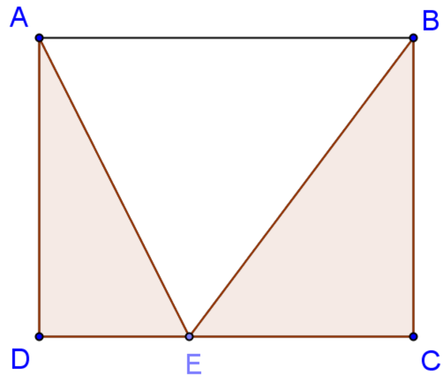


圖 9.1-105

想法：過平行四邊形邊上一點，與對邊兩頂點所形成的三角形面積，等於此平行四邊形面積的一半

解：

敘述	理由
(1) △ABE 面積＝$\frac{1}{2}$長方形 ABCD 面積	已知 ABCD 為長方形，E 點落在$\overline{CD}$上 & 過平行四邊形邊上一點，與對邊兩頂點所形成的三角形面積，等於此平行四邊形面積的一半
(2) 長方形 ABCD 面積 ＝$\overline{AB}$×$\overline{BC}$ ＝(5 公分)×(4 公分)＝20 平方公分	長方形面積為長與寬之乘積 & 已知$\overline{AB}$＝5 公分，$\overline{BC}$＝4 公分
(3) △ABE 面積＝$\frac{1}{2}$×(20 平方公分) ＝10 平方公分	將(2)式代入 (1)式得
(4) 灰色區域的面積 ＝長方形 ABCD 面積－△ABE 面積 ＝(20 平方公分)－(10 平方公分) ＝10 平方公分	全量等於分量之和 & (2) 長方形 ABCD 面積＝20 平方公分 (3) △ABE 面積＝10 平方公分　已證

習題 9.1-26：

如圖 9.1-106，平行四邊形 ABCD 中，$\overline{AE}$＝4 公分，$\overline{DE}$＝3 公分，∠AED＝90°，求四邊形 ABCD 的面積。

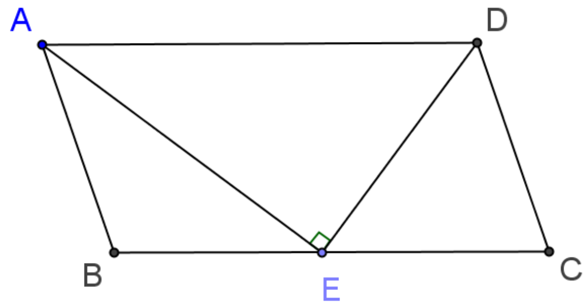


圖 9.1-106

想法：過平行四邊形邊上一點，與對邊兩頂點所形成的三角形面積，等於此平行四邊形面積的一半

解：

敘述	理由
(1) △ADE 面積＝$\frac{1}{2}$四邊形 ABCD 面積	已知 ABCD 為平行四邊形 & 過平行四邊形邊上一點，與對邊兩頂點所形成的三角形面積，等於此平行四邊形面積的一半
(2) △ADE 為直角三角形 △ADE 面積＝$\frac{1}{2}\overline{AE}\times\overline{DE}$ ＝$\frac{1}{2}$×(4 公分)×(3 公分) ＝6 平方公分	已知∠AED＝90° & 三角形面積等於底與高乘積的一半 & 已知$\overline{AE}$＝4 公分，$\overline{DE}$＝3 公分
(3) 6 平方公分＝$\frac{1}{2}$四邊形 ABCD 面積	將(2)式代入(1)式得
(4) 四邊形 ABCD 面積＝2×(6 平方公分) ＝12 平方公分	由(3) 等量乘法公理

習題 9.1-27：

如圖 9.1-107，已知 L || M，四邊形 EFHG 與 IFHJ 皆為平行四邊形，若四邊形 EFHG 面積為 12 平方公分，則四邊形 IFHJ 面積為何？

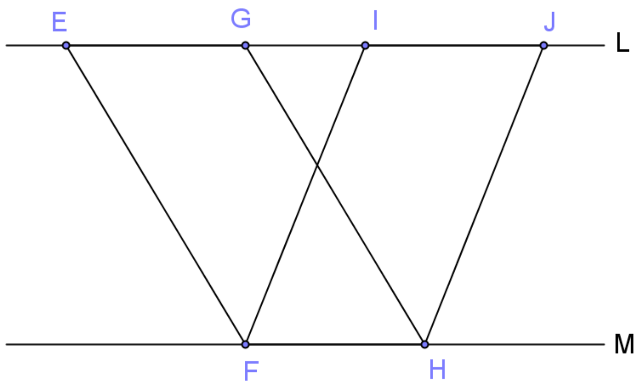


圖 9.1-107

想法：同底等高的平行四邊形面積皆相等

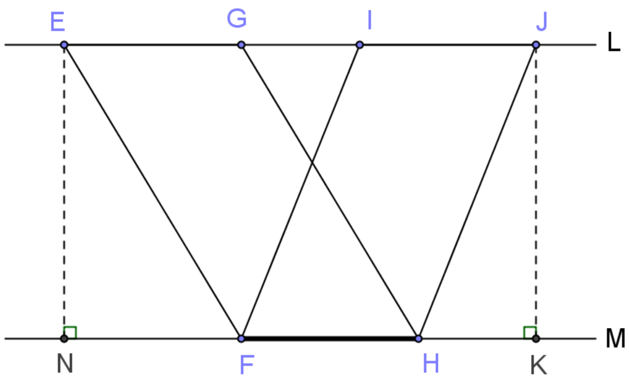


圖 9.1-107(a)

解：

敘述	理由
(1) 作$\overline{EN}\perp$M、$\overline{JK}\perp$M，如圖 9.1-107(a)所示，則$\overline{EN}=\overline{JK}$	作圖 已知 L ‖ M ＆ 平行線間距離不變
(2) 四邊形 EFHG 中，$\overline{FH}$為底、$\overline{EN}$為高	已知四邊形 EFHG 為平行四邊形 ＆ 由(1) 作$\overline{EN}\perp$M
(3) 四邊形 IFHJ 中，$\overline{FH}$為底、$\overline{JK}$為高	已知四邊形 IFHJ 為平行四邊形 ＆ 由(1) 作$\overline{JK}\perp$M
(4) 四邊形 EFHG 與 IFHJ 同底等高	由(1) ＆ (2) ＆ (3) $\overline{FH}$為底、$\overline{EN}=\overline{JK}$為高
(5) 四邊形 IFHJ 面積＝四邊形 EFHG 面積＝12 平方公分	由(4) ＆ 同底等高的平行四邊形面積皆相等 ＆ 已知四邊形 EFHG 面積為 12 平方公分

習題 9.1-28：

如圖 9.1-108，已知 L || M，若△EFH 面積為 8 平方公分，則：

(1) △EFG 面積為何？　　(2) △EFI 面積為何？

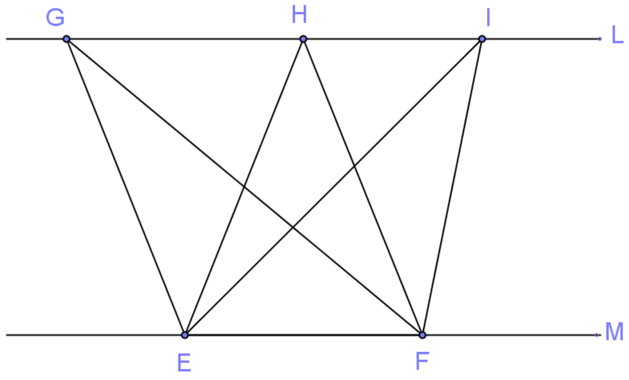


圖 9.1-108

想法：同底等高之三角形面積皆相等

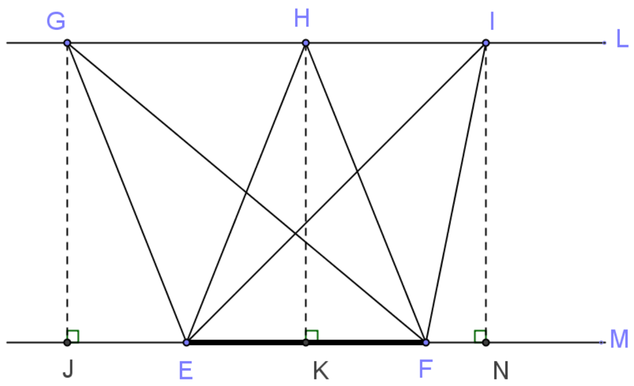


圖 9.1-108(a)

解：

敘述	理由
(1) 作$\overline{GJ}\perp$M、$\overline{HK}\perp$M、$\overline{IN}\perp$M，如圖 9.1-108(a)所示，則$\overline{GJ}=\overline{HK}=\overline{IN}$	作圖 已知 L || M & 平行線間距離不變
(2) △EFH 中，$\overline{EF}$為底、$\overline{HK}$為高	由(1) 作$\overline{HK}\perp$M
(3) △EFG 中，$\overline{EF}$為底、$\overline{GJ}$為高	由(1) 作$\overline{GJ}\perp$M
(4) △EFI 中，$\overline{EF}$為底、$\overline{IN}$為高	由(1) 作$\overline{IN}\perp$M
(5) △EFG、△EFI、△EFH 同底等高	由(1) & (2) & (3) & (4) $\overline{EF}$為底、$\overline{GJ}=\overline{HK}=\overline{IN}$為高
(6) △EFG 面積＝△EFI 面積＝△EFH 面積	由(5) & 同底等高之三角形面積皆相等
(7) △EFG 面積＝△EFI 面積＝8 平方公分	由(6) & 已知△EFH 面積為 8 平方公分

習題 9.1-29：

如圖 9.1-109，已知$\overline{BD}$：$\overline{CD}$＝3：4，若△ABD 面積為 9 平方公分，則△ACD 面積為何？

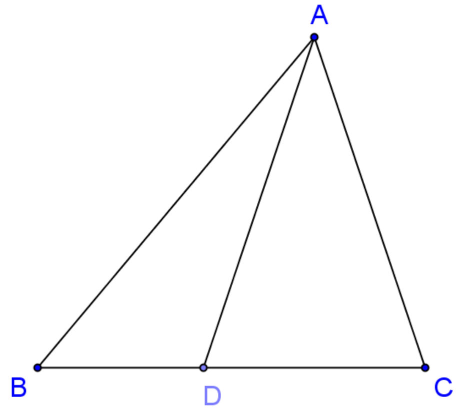


圖 9.1-109

想法：等高三角形的面積比等於底邊長之比

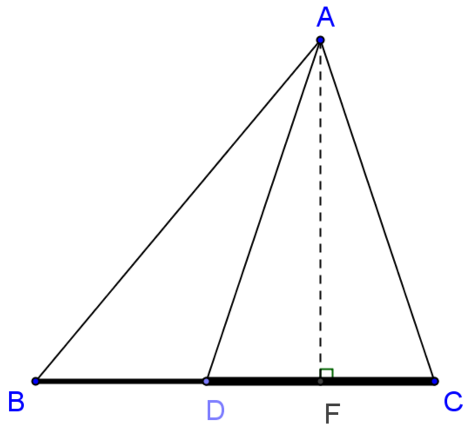


圖 9.1-109(a)

解：

敘述	理由
(1) 過 A 點作$\overline{AE}\perp\overline{BC}$，如圖 9.1-109(a)所示	作圖
(2) △ABD 中，$\overline{BD}$為底、$\overline{AE}$為高	由(1) 作$\overline{AE}\perp\overline{BC}$
(3) △ACD 中，$\overline{CD}$為底、$\overline{AE}$為高	由(1) 作$\overline{AE}\perp\overline{BC}$
(4) △ABD 與△ACD 等高	由(2) & (3) $\overline{AE}$為高
(5) △ABD 面積：△ACD 面積＝$\overline{BD}$：$\overline{CD}$	由(2) & (3) & (4) & 等高三角形的面積比等於底邊長之比
(6) (9 平方公分)：△ACD 面積＝3：4	由(5) & 已知△ABD 面積為 9 平方公分 & 已知$\overline{BD}$：$\overline{CD}$＝3：4
(7) 所以△ACD 面積＝12 平方公分	由(6) 求△ACD 面積之值

習題 9.1-30：

如圖 9.1-110，已知 L ∥ M，$\overline{EF}$：$\overline{HI}$＝3：4，若△EFG 面積為 9 平方公分，則△HIJ 的面積為何？

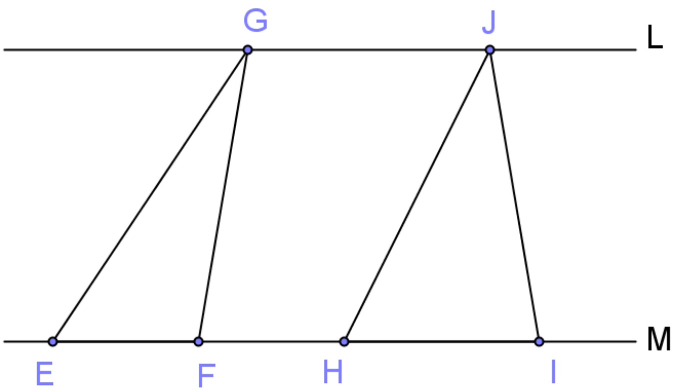


圖 9.1-110

想法：等高之三角形面積比為底邊長之比

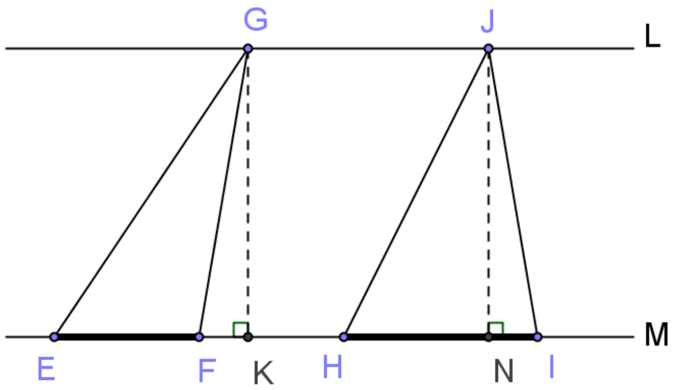


圖 9.1-110(a)

解：

敘述	理由
(1) 作$\overline{GK}\perp$M、$\overline{JN}\perp$M，如圖 9.1-110(a)所示，則$\overline{GK}=\overline{JN}$	作圖 已知 L ∥ M ＆ 平行線間距離不變
(2) △EFG 中，$\overline{EF}$為底、$\overline{GK}$為高	由(1) 作$\overline{GK}\perp$M
(3) △HIJ 中，$\overline{HI}$為底、$\overline{JN}$為高	由(1) 作$\overline{JN}\perp$M
(4) △EFG 與△HIJ 等高	由(1) ＆ (2) ＆ (3) $\overline{GK}=\overline{JN}$為高
(5) △EFG 面積：△HIJ 面積＝$\overline{EF}$：$\overline{HI}$	由(2) ＆ (3) ＆ (4) ＆ 等高之三角形面積比為底邊長之比
(6) (9 平方公分)：△HIJ 面積＝3：4	由(5) ＆ 已知△EFG 面積為 9 平方公分 ＆ 已知$\overline{EF}$：$\overline{HI}$＝3：4
(7) △HIJ 面積＝12 平方公分	由(6) 求△HIJ 面積之值

習題 9.1-31：

如圖 9.1-111，$\overline{AE}$、$\overline{BF}$、$\overline{CD}$為△ABC 的三中線，G 點為△ABC 的重心，已知△ABC 面積為 42 平方公分，求：

(1) △AGD 面積為何？

(2) △BGC 面積為何？

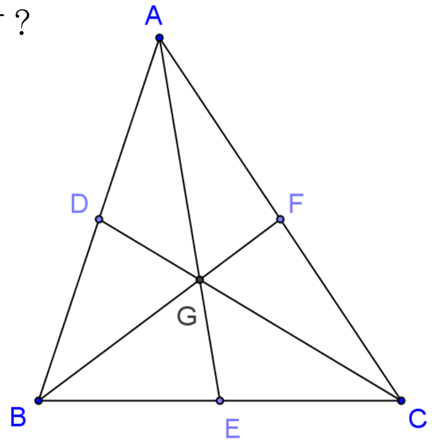


圖 9.1-111

想法：(1) 三角形三中線將此三角形面積平分成 6 個面積相等的小三角形

(2) 三角形的重心與三頂點的連線，將此三角形面積平分成 3 個面積相等的小三角形

解：

敘述	理由
(1) $\triangle AGD=\dfrac{1}{6}\triangle ABC$ $=\dfrac{1}{6}\times$(42 平方公分) =7 平方公分	已知$\overline{AE}$、$\overline{BF}$、$\overline{CD}$為△ABC 的三中線 & 三角形三中線將此三角形面積平分成 6 個面積相等的小三角形 & 已知△ABC 面積為 42 平方公分
(2) $\triangle BGC=\dfrac{1}{3}\triangle ABC$ $=\dfrac{1}{3}\times$(42 平方公分) =14 平方公分	已知 G 點為△ABC 的重心 & 三角形的重心與三頂點的連線，將此三角形面積平分成 3 個面積相等的小三角形 & 已知△ABC 面積為 42 平方公分

習題 9.1-32：

如圖 9.1-112，四邊形 ABCD 為平行四邊形，E 點為$\overline{AB}$中點，$\overline{BD}$與$\overline{CE}$相交於 F 點，若△BFC 面積為 5 平方公分，則平行四邊形 ABCD 面積為何？

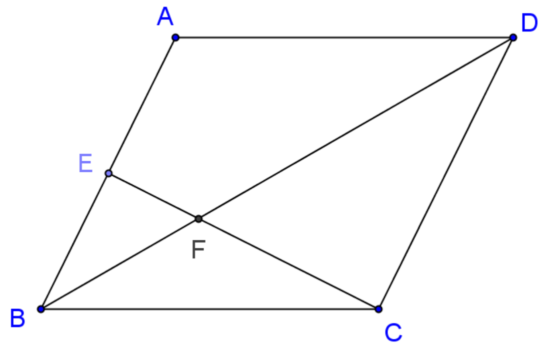


圖 9.1-112

想法：(1) 若能證得 F 點為△ABC 的重心，則可利用三角形的重心與三頂點的連線，將此三角形面積平分成 3 個面積相等的小三角形，求出△ABC 的面積

(2) 再利用平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形，即可得平行四邊形 ABCD 面積

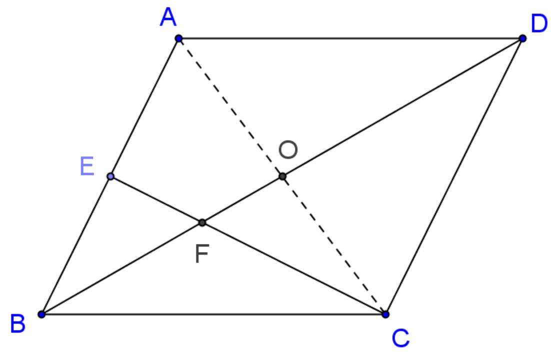


圖 9.1-112(a)

解：

敘述	理由
(1) 作$\overline{AC}$交$\overline{BD}$於 O 點，如圖 9.1-112(a)所示	作圖
(2) O 點$\overline{AC}$為中點，$\overline{OA}=\overline{OC}$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 平行四邊形對角線互相平分
(3) △ABC 中，$\overline{CE}$為中線，$\overline{OB}$為中線	已知 E 點為$\overline{AB}$中點 & (2) O 點$\overline{AC}$為中點
(4) F 點為△ABC 重心	由(3) & 三角形重心為三中線的交點
(5) $\triangle BFC=\dfrac{1}{3}\triangle ABC$	由(4) & 三角形的重心與三頂點的連線，將此三角形面積平分成 3 個面積相等的小三角形

(6) $\triangle ABC=\frac{1}{2}$ 平行四邊形 ABCD 面積	已知 ABCD 為平行四邊形 & 平行四邊形對角線將原平行四邊形平分成兩面積相等的三角形
(7) $\triangle BFC$ $=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$ 平行四邊形 ABCD 面積 $=\frac{1}{6}$ 平行四邊形 ABCD 面積	將(6)式代入(5)式得
(8) 平行四邊形 ABCD 面積 ＝6×△BFC 面積 ＝6×(5 平方公分) ＝30 平方公分	由(7) 移項 & 已知△BFC 面積為 5 平方公分

習題 9.1-33：

如圖 9.1-113，I 為直角三角形 ABC 的內心，若∠A＝90°，且$\overline{AB}$＝5 公分，$\overline{AC}$＝12 公分，已知△AIC 的面積為 5 平方公分，試求△BIC 的面積。

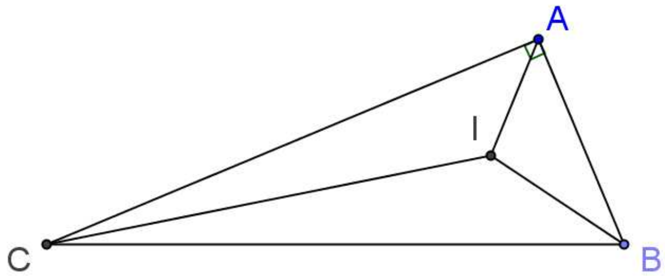


圖 9.1-113

想法：(1)　利用畢氏定理求直角三角形 ABC 第三邊長

(2)　利用例題 9.1-51 結論：
△AIB 面積：△BIC 面積：△CIA 面積＝$\overline{AB}$：$\overline{BC}$：$\overline{CA}$

解：

敘述	理由
(1)　直角三角形 ABC 中， $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$	已知直角三角形 ABC 中，∠A＝90° & 畢氏定理
(2)　$\overline{BC}^2$＝(5 公分)^2＋(12 公分)^2 ＝(25 平方公分)＋(144 平方公分) ＝169 平方公分	由(1) & 已知$\overline{AB}$＝5 公分，$\overline{AC}$＝12 公分
(3)　$\overline{BC}$＝13 公分 或 $\overline{BC}$＝－13 公分	由(2) 求平方根
(4)　$\overline{BC}$＝13 公分	由(3) & $\overline{BC}$為線段長度必大於 0
(5)　$\overline{AB}$：$\overline{BC}$＝(5 公分)：(13 公分) ＝5：13	已知$\overline{AB}$＝5 公分 & (4) $\overline{BC}$＝13 公分 & 倍比定理
(6)　△AIB 面積：△BIC 面積＝$\overline{AB}$：$\overline{BC}$	已知 I 為△ABC 的內心 & 利用例題 9.1-51 結論：
(7)　(5 平方公分)：△BIC 面積＝5：13	由(6) & 已知△AIC 面積為 5 平方公分 & (5) $\overline{AB}$：$\overline{BC}$＝5：13 已證
(8)　5×△BIC 面積＝13×(5 平方公分)	由(7) & 內項乘積等於外項乘積
(9)　△BIC 面積＝13×(5 平方公分)÷5 ＝13 平方公分	由(8) 等量除法公理

習題 9.1-34：

如圖 9.1-114，E 點為四邊形 ABCD 兩對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$的交點，已知△ADE 面積為 3 平方公分，△BCE 面積為 2 平方公分，△ABE 面積為 4 平方公分，則△CDE 面積為何？

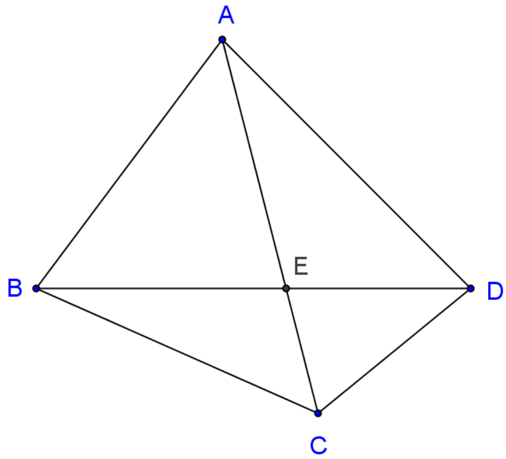


圖 9.1-114

想法：四邊形兩對角線所形成的三角形中，對頂兩個三角形面積的乘積等於另兩個對頂三角形面積的乘積

解：

敘述	理由
(1) △ADE 面積×△BCE 面積 ＝△ABE 面積×△CDE 面積	已知 E 點為四邊形 ABCD 兩對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$的交點 & 四邊形兩對角線所形成的三角形中，對頂兩個三角形面積的乘積等於另兩個對頂三角形面積的乘積
(2) (3 平方公分)×(2 平方公分) ＝(4 平方公分) ×△CDE 面積	由(1) & 已知△ADE 面積為 3 平方公分，△BCE 面積為 2 平方公分，△ABE 面積為 4 平方公分
(3) △CDE 面積 $=\dfrac{(3\text{平方公分})\times(2\text{平方公分})}{4\text{平方公分}}$ ＝1.5 平方公分	由(2) 等量除法公理

習題 9.1-35：

如圖 9.1-115，梯形 ABCD 中，兩對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 E 點，若△ADE 面積為 5 平方公分，△BCE 面積為 20 平方公分，求△ABE 面積與△DCE 面積各為何？

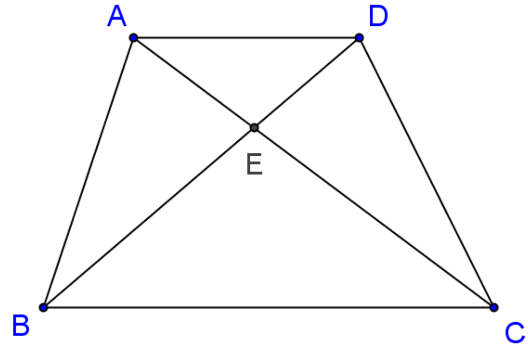


圖 9.1-115

想法：(1) 利用例題 9.1-65 結論：梯形 ABCD 中，若兩對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 E 點，則△ABE 面積＝△DCE 面積

(2) 利用例題 9.1-49 的結論：四邊形兩對角線所形成的三角形中，對頂兩個三角形面積的乘積等於另兩個對頂三角形面積的乘積

解：

敘述	理由
(1) △ABE 面積＝△DCE 面積	已知梯形 ABCD 中，兩對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 E 點 & 例題 9.1-65 結論
(2) 假設△ABE 面積＝△DCE 面積＝a 平方公分	由(1) & 假設
(3) △ADE 面積×△BCE 面積＝△ABE 面積×△DCE 面積	利用例題 9.1-49 的結論：四邊形兩對角線所形成的三角形中，對頂兩個三角形面積的乘積等於另兩個對頂三角形面積的乘積
(4) (5 平方公分)×(20 平方公分)＝(a 平方公分)×(a 平方公分)	由(3) & 已知△ADE 面積為 5 平方公分，△BCE 面積為 20 平方公分 & (2) 假設
(5) a^2＝10	由(4)
(6) a＝10 或 a＝－10	由(5) 求平方根
(7) a＝10	由(6) & a 為三角形面積必大於 0
(8) 所以△ABE 面積＝△DCE 面積＝10 平方公分	由(2) & (7)

習題 9.1-36：

如圖 9.1-116，四邊形 ABCD 為平行四邊形，兩對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 E 點，若△ABE 面積為 8 平方公分，則 ABCD 面積為何？

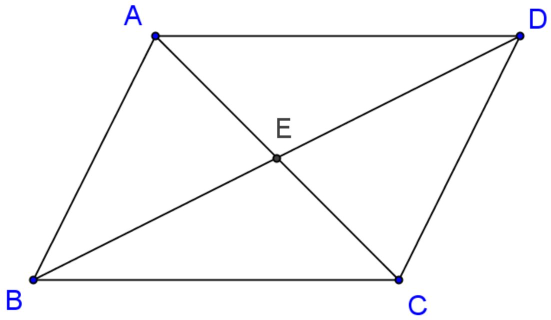


圖 9.1-116

想法：平行四邊形兩對角線將四邊形平分成 4 個等面積的三角形

解：

敘述	理由
(1) △ABE 面積＝△ADE 面積 ＝△CDE 面積＝△BCE 面積	已知四邊形 ABCD 為平行四邊形，兩對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 E 點 & 平行四邊形兩對角線將四邊形平分成 4 個等面積的三角形
(2) ABCD 面積 ＝△ABE 面積＋△ADE 面積 ＋△CDE 面積＋△BCE 面積 ＝4×△ABE 面積 ＝4×(8 平方公分) ＝32 平方公分	如圖 9.1-116 所示 全量等於分量之和 & 由(1) △ABE 面積＝△ADE 面積 ＝△CDE 面積＝△BCE 面積 & 已知△ABE 面積為 8 平方公分

習題 9.1-37：

如圖 9.1-117，平行四邊形 ABCD 中，對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 O 點，若$\overline{OE}\perp\overline{CD}$，$\overline{OE}$＝2 公分，$\overline{BC}$＝6 公分，且平行四邊形 ABCD 的周長為 28 公分，求平行四邊形 ABCD 的面積。

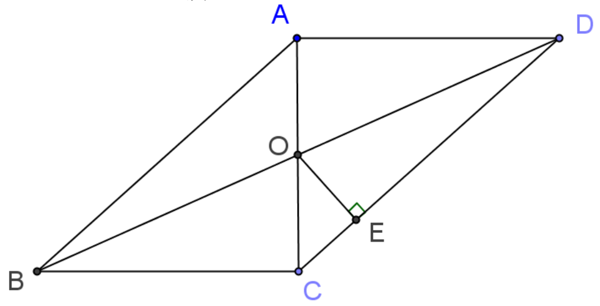


圖 9.1-117

想法：平行四邊形兩對角線將四邊形平分成 4 個等面積的三角形

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AD}=\overline{BC}$ 且 $\overline{AB}=\overline{CD}$	已知 ABCD 為平行四邊形 & 平行四邊形對邊等長
(2) $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}$＝28 公分	已知平行四邊形 ABCD 周長為 28 公分
(3) $\overline{CD}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{BC}$＝28 公分	由(1) & (2) 代換
(4) $2(\overline{BC}+\overline{CD})$＝28 公分	由(3) 式子整理
(5) $\overline{BC}+\overline{CD}$＝(28 公分)÷2＝14 公分	由(4) 等量除法公理
(6) $\overline{CD}$＝14 公分－$\overline{BC}$ ＝14 公分－6 公分＝8 公分	由(5) 等量減法公理 & 已知$\overline{BC}$＝6 公分
(7) △OCD 面積＝$\dfrac{\overline{CD}\times\overline{OE}}{2}$ ＝$\dfrac{(8公分)\times(2公分)}{2}$ ＝8 平方公分	已知$\overline{OE}\perp\overline{CD}$ & 三角形面積為底與高乘積的一半 & (6) $\overline{CD}$＝8 公分　已證 & 已知$\overline{OE}$＝2 公分
(8) △OAB 面積＝△OBC 面積 ＝△OCA 面積＝△OCD 面積 ＝8 平方公分	已知平行四邊形 ABCD 中，對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 O 點 & 平行四邊形兩對角線將四邊形平分成 4 個等面積的三角形 & (7) △OCD 面積＝8 平方公分 已證
(9) 平行四邊形 ABCD 面積 ＝△OAB 面積＋△OBC 面積 ＋△OCA 面積＋△OCD 面積 ＝4×(8 平方公分) ＝32 平方公分	全量等於分量之和 & (8) △OAB 面積＝△OBC 面積 ＝△OCA 面積＝△OCD 面積 ＝8 平方公分　已證

習題 9.1-38：

如圖 9.1-118，平行四邊形 ABCD 與 CDEF 中，P、Q 分別為其對角線交點，已知四邊形 CPDQ 面積為 10 平方公分，△CQF 面積為 4 平方公分，求四邊形 ABCD 的面積。

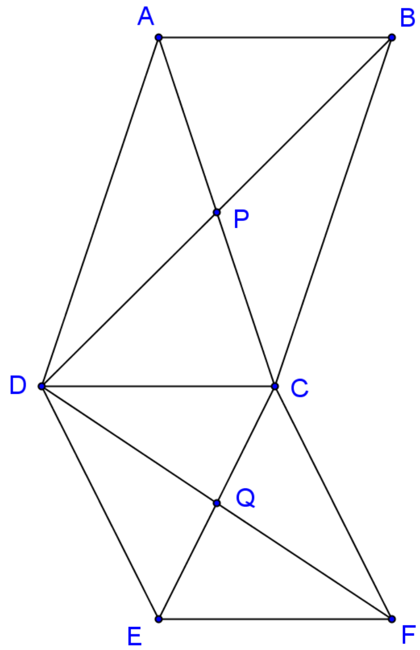


圖 9.1-118

想法：平行四邊形兩對角線將四邊形平分成 4 個等面積的三角形

解：

敘述	理由
(1) 平行四邊形 CDEF 中 △CQD 面積＝△CQF 面積 ＝4 平方公分	已知平行四邊形 CDEF 中，Q 為其對角線交點 & 平行四邊形兩對角線將四邊形平分成 4 個等面積的三角形 & 已知△CQF 面積為 4 平方公分
(2) 四邊形 CPDQ 面積 ＝△CQD 面積＋△CPD 面積	如圖 9.1-118 所示 全量等於分量之和
(3) △CPD 面積 ＝四邊形 CPDQ 面積－△CQD 面積 ＝(10 平方公分)－(4 平方公分) ＝6 平方公分	由(2) 等量減法公理 & 已知四邊形 CPDQ 面積為 10 平方公分 & (1) △CQD 面積＝4 平方公分
(4) 平行四邊形 ABCD 中 △CDP 面積＝$\frac{1}{4}$ABCD 面積	已知平行四邊形 ABCD 中，P 為其對角線交點 & 平行四邊形兩對角線將四邊形平分成 4 個等面積的三角形
(5) 四邊形 ABCD 面積 ＝4×△CDP 面積＝4×(6 平方公分) ＝24 平方公分	由(4) 等量乘法公理 & 由(3) △CPD 面積＝6 平方公分

習題 9.1-39：

如圖 9.1-119，已知△ABC 中，$\overline{AB}=2$ 公分、$\overline{BC}=3$ 公分、$\overline{AC}=4$ 公分，則△ABC 的面積為何？

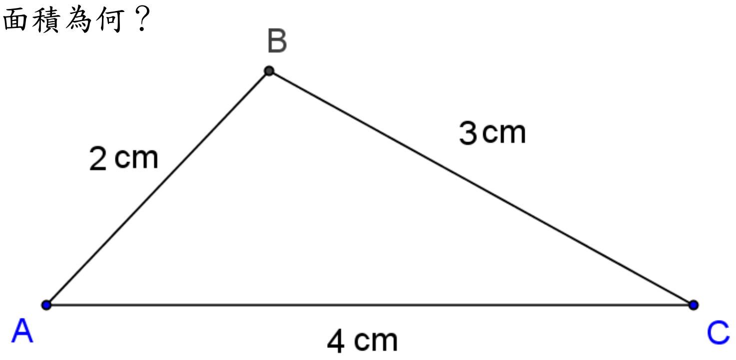


圖 9.1-119

想法：△ABC 的三邊長為 a、b、c，且 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$，

則△ABC 的面積 $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

解：

敘述	理由
(1) $s=\dfrac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}}{2}$ $=\dfrac{(2\text{公分})+(3\text{公分})+(4\text{公分})}{2}$ $=\dfrac{9}{2}$ 公分	已知 $\overline{AB}=2$ 公分、$\overline{BC}=3$ 公分、$\overline{AC}=4$ 公分
(2) △ABC 的面積 $=\sqrt{s(s-\overline{AB})(s-\overline{BC})(s-\overline{AC})}$ $=\sqrt{\frac{9}{2}\text{公分}(\frac{9}{2}\text{公分}-2\text{公分})(\frac{9}{2}\text{公分}-3\text{公分})(\frac{9}{2}\text{公分}-4\text{公分})}$ $=\sqrt{\frac{135}{16}\text{公分}^4}$ $=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$ 平方公分	若△ABC 的三邊長為 a、b、c，且 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$，則△ABC 的面積 $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ & 已知△ABC 中，$\overline{AB}=2$ 公分、$\overline{BC}=3$ 公分、$\overline{AC}=4$ 公分 & (1) $s=\dfrac{9}{2}$ 公分

習題 9.1-40：

如圖 9.1-120，梯形 ABCD 中，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為兩底，$\overline{BE}$為高，且$\overline{AB}$＝6 公分，$\overline{CD}$＝14 公分，$\overline{BE}$＝8 公分，則梯形 ABCD 面積為何？

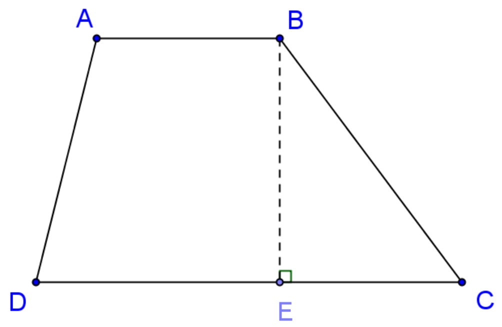


圖 9.1-120

想法：梯形形面積等於兩底和與高之乘積的一半

解：

敘述	理由
(1) 梯形 ABCD 面積 $=\dfrac{(\overline{AB}+\overline{CD})\times\overline{BE}}{2}$ $=\dfrac{(6公分+14公分)\times 8公分}{2}$ ＝80 平方公分	梯形形面積等於兩底和與高之乘積的一半 & 已知梯形 ABCD 中，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為兩底，$\overline{BE}$為高，且$\overline{AB}$＝6 公分，$\overline{CD}$＝14 公分，$\overline{BE}$＝8 公分

習題 9.1-41：

如圖 9.1-121，梯形 ABCD 中，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為兩底，$\overline{BE}$為高，且$\overline{AB}$＝8 公分，$\overline{BE}$＝10 公分，若梯形 ABCD 面積為 140 平方公分，則$\overline{CD}$＝？

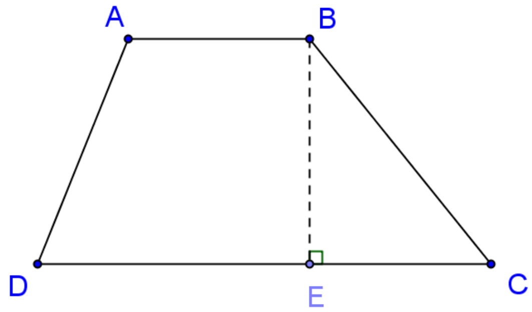


圖 9.1-121

想法：梯形形面積等於兩底和與高之乘積的一半

解：

敘述	理由
(1) 梯形 ABCD 面積＝$\dfrac{(\overline{AB}+\overline{CD})\times\overline{BE}}{2}$	梯形形面積等於兩底和與高之乘積的一半 & 已知梯形 ABCD 中，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為兩底，$\overline{BE}$為高
(2) 140 平方公分＝$\dfrac{(8\text{公分}+\overline{\text{CD}})\times 10\text{公分}}{2}$	由(1) & 已知$\overline{AB}$＝8 公分，$\overline{BE}$＝10 公分，梯形 ABCD 面積為 140 平方公分
(3) (8 公分＋$\overline{CD}$)x(10 公分)＝(140 平方公分)x2	由(2) 等量乘法公理
(4) (8 公分＋$\overline{CD}$)＝(140 平方公分)x2÷(10 公分)	由(3) 等量除法公理
(5) $\overline{CD}$＝(140 平方公分)×2÷(10 公分)－(8 公分)＝20 公分	由(4) 等量減法公理

習題 9.1-42：

如圖 9.1-122，等腰梯形 ABCD 中，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為兩底，且$\overline{AB}$＝6 公分，$\overline{CD}$＝18 公分，若$\overline{BC}$＝10 公分，則梯形 ABCD 面積為何？

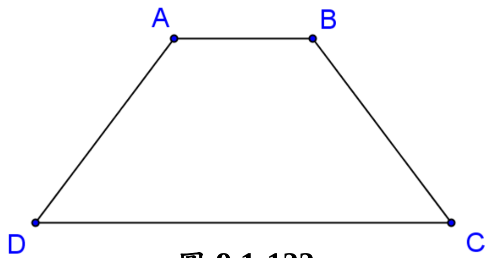


圖 9.1-122

想法：(1) 利用畢氏定理求出梯形的高

(2) 梯形形面積等於兩底和與高之乘積的一半

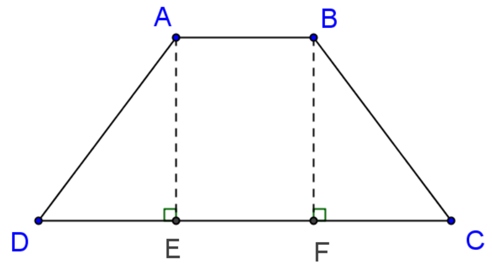


圖 9.1-122(a)

解：

敘述	理由
(1) 過 A 點作$\overline{AE}\perp\overline{CD}$， 過 B 點作$\overline{BF}\perp\overline{CD}$， 如圖 9.1-122(a)	作圖
(2) $\overline{AE}\parallel\overline{BF}$	由(1) $\overline{AE}\perp\overline{CD}$ & $\overline{BF}\perp\overline{CD}$ & 垂直於同一直線之兩線互相平行
(3) $\overline{AB}\parallel\overline{CD}$	已知 ABCD 為梯形 & 梯形一組對邊平行
(4) 四邊形 ABFE 為平行四邊形	由(2) & (3) 兩組對邊平行的四邊形為平行四邊形
(5) $\overline{AE}=\overline{BF}$ & $\overline{EF}=\overline{AB}$＝6 公分	由(4) & 平行四邊形對邊等長 & 已知$\overline{AB}$＝6 公分
(6) 在△ADE 與△BCF 中 $\overline{AD}=\overline{BC}$ $\overline{AE}=\overline{BF}$ ∠AED＝∠BFC＝90°	如圖 9.1-122(a)所示 已知 ABCD 為等腰梯形 & 兩腰等長 由(5) $\overline{AE}=\overline{BF}$ 已證 由(1) $\overline{AE}\perp\overline{CD}$ & $\overline{BF}\perp\overline{CD}$
(7) △ADE ≅ △BCF	由(6) & 根據三角形 R.S.H.全等定理

(8) $\overline{DE}=\overline{CF}$	由(7) ＆ 兩全等三角形之對應邊相等
(9) $\overline{CD}=\overline{CF}+\overline{EF}+\overline{DE}$ $=\overline{CF}+\overline{EF}+\overline{CF}$ $=2\overline{CF}+\overline{EF}$	如圖 9.1-122(a)，全量等於分量之和 將(8) $\overline{DE}=\overline{CF}$ 代入 加法交換律 ＆ 結合律
(10) $2\overline{CF}=\overline{CD}-\overline{EF}$	由(9) 等量減法公理
(11) $\overline{CF}=(\overline{CD}-\overline{EF})\div 2$ ＝(18 公分－6 公分)÷2 ＝6 公分	由(10) 等量除法公理 將已知$\overline{CD}$＝18 公分 ＆ (5)$\overline{EF}$＝6 公分代入
(12) 直角三角形 BCF 中 $\overline{BF}^2+\overline{CF}^2=\overline{BC}^2$	由(1) $\overline{BF}\perp\overline{CD}$ 畢氏定理
(13) $\overline{BF}^2=\overline{BC}^2-\overline{CF}^2$ ＝(10 公分)^2－(6 公分)^2 ＝64 平方公分	由(12) 等量減法公理 將已知$\overline{BC}$＝10 公分 ＆ (10)$\overline{CF}$＝6 公分代入
(14) $\overline{BF}$＝8 公分 或 $\overline{BF}$＝－8 公分	由(13) 求平方根
(15) $\overline{BF}$＝8 公分	由(14) ＆ $\overline{BF}$為線段長度必大於 0
(16) 梯形 ABCD 面積 $=\dfrac{(\overline{AB}+\overline{CD})\times\overline{BF}}{2}$ $=\dfrac{(6\text{公分}+18\text{公分})\times 8\text{公分}}{2}$ ＝96 平方公分	梯形形面積等於兩底和與高之乘積的一半 ＆ 已知等腰梯形 ABCD 中，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為兩底，且$\overline{AB}$＝6 公分，$\overline{CD}$＝18 公分 ＆ (1) $\overline{BF}\perp\overline{CD}$ ＆ (15) $\overline{BF}$＝8 公分

習題 9.1-43：

如圖 9.1-123，等腰梯形 ABCD 中，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，若$\overline{AD}$＝7 公分，$\overline{BC}$＝25 公分，$\overline{AB}$＝15 公分，求梯形 ABCD 的面積。

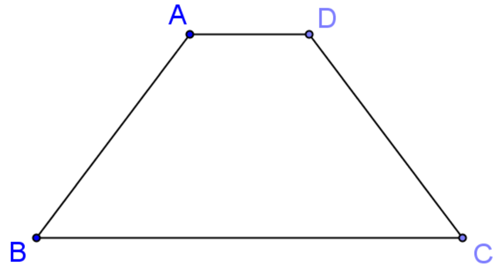


圖 9.1-123

想法：(1) 利用畢氏定理求出梯形的高

(2) 梯形形面積等於兩底和與高之乘積的一半

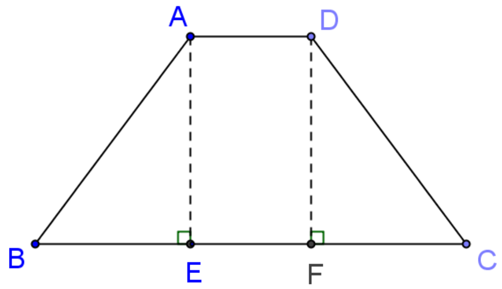


圖 9.1-123(a)

解：

敘述	理由
(1) 過 A 點作$\overline{AE} \perp \overline{BC}$， 過 D 點作$\overline{DF} \perp \overline{BC}$， 如圖 9.1-123(a)	作圖
(2) $\overline{AE} \parallel \overline{DF}$	由(1) $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ & $\overline{DF} \perp \overline{BC}$ & 垂直於同一直線之兩線互相平行
(3) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	已知 ABCD 為梯形 & 梯形一組對邊平行
(4) 四邊形 ADFE 為平行四邊形	由(2) & (3) 兩組對邊平行的四邊形為平行四邊形
(5) $\overline{AE}$＝$\overline{DF}$ & $\overline{EF}$＝$\overline{AD}$＝7 公分	由(4) & 平行四邊形對邊等長 & 已知$\overline{AD}$＝7 公分
(6) 在△ABE 與△DCF 中 $\overline{AB}$＝$\overline{DC}$ $\overline{AE}$＝$\overline{DF}$ ∠AEB＝∠DFC＝90°	如圖 9.1-123(a)所示 已知 ABCD 為等腰梯形 & 兩腰等長 由(5) $\overline{AE}$＝$\overline{DF}$ 已證 由(1) $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ & $\overline{DF} \perp \overline{BC}$

(7) $\triangle$ABE $\cong$ $\triangle$DCF	由(6) ＆ 根據三角形 R.S.H.全等定理
(8) $\overline{BE}=\overline{CF}$	由(7) ＆ 兩全等三角形之對應邊相等
(9) $\overline{BC}=\overline{CF}+\overline{EF}+\overline{BE}$ $=\overline{BE}+\overline{EF}+\overline{BE}$ $=2\overline{BE}+\overline{EF}$	如圖 9.1-123(a)，全量等於分量之和 將(8) $\overline{BE}=\overline{CF}$ 代入 加法交換律 ＆ 結合律
(10) $2\overline{BE}=\overline{BC}-\overline{EF}$	由(9) 等量減法公理
(11) $\overline{BE}=(\overline{BC}-\overline{EF})\div 2$ ＝(25 公分－7 公分)÷2 ＝9 公分	由(10) 等量除法公理 將已知$\overline{BC}$＝25 公分 ＆ (5)$\overline{EF}$＝7 公分代入
(12) 直角三角形 ABE 中 $\overline{BE}^2+\overline{AE}^2=\overline{AB}^2$	由(1) $\overline{AE}\perp\overline{BC}$ 畢氏定理
(13) $\overline{AE}^2=\overline{AB}^2-\overline{BE}^2$ ＝(15 公分)^2－(9 公分)^2 ＝144 平方公分	由(12) 等量減法公理 將已知$\overline{AB}$＝15 公分 ＆ (10)$\overline{BE}$＝9 公分代入
(14) $\overline{AE}$＝12 公分 或 $\overline{AE}$＝－12 公分	由(13) 求平方根
(15) $\overline{AE}$＝12 公分	由(14) ＆ $\overline{AE}$為線段長度必大於 0
(16) 梯形 ABCD 面積 $=\dfrac{(\overline{AD}+\overline{BC})\times\overline{AE}}{2}$ $=\dfrac{(7\text{公分}+25\text{公分})\times 12\text{公分}}{2}$ ＝192 平方公分	梯形形面積等於兩底和與高之乘積的一半 ＆ 已知等腰梯形 ABCD 中，$\overline{AD}\parallel\overline{BC}$， $\overline{AD}$＝7 公分，$\overline{BC}$＝25 公分 ＆ (1) $\overline{AE}\perp\overline{BC}$ ＆ (15) $\overline{AE}$＝12 公分

習題 9.1-44：

如圖 9.1-124，梯形 ABCD 中，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，$\overline{EF}$為梯形中線，$\overline{AG}$為梯形的高，已知$\overline{EF}$＝22 公分，$\overline{AG}$＝16 公分，求梯形 ABCD 的面積。

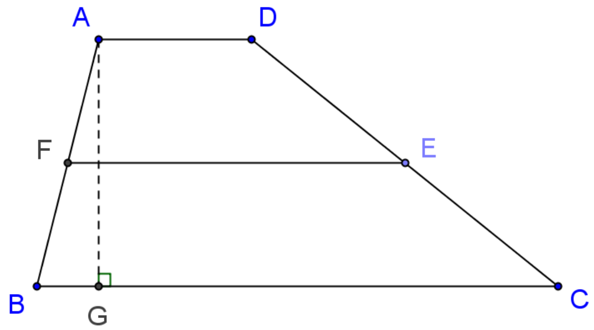


圖 9.1-124

想法：梯形面積等於中線長與高的乘積

解：

敘述	理由
(1) 梯形 ABCD 的面積＝$\overline{EF}\times\overline{AG}$	梯形面積等於中線長與高的乘積 ＆ 已知梯形 ABCD 中，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，$\overline{EF}$為梯形中線，$\overline{AG}$為梯形的高
(2) 梯形 ABCD 的面積 ＝(22 公分)×(16 公分) ＝352 平方公分	由(1) ＆ 已知$\overline{EF}$＝22 公分，$\overline{AG}$＝16 公分

習題 9.1-45：

如圖 9.1-125，已知梯形 ABCD 中，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，$\overline{EF}$為梯形中線，$\overline{AG}$為梯形的高，若$\overline{AG}$＝2 公分，且梯形 ABCD 的面積為 8 平方公分，求$\overline{EF}$＝？

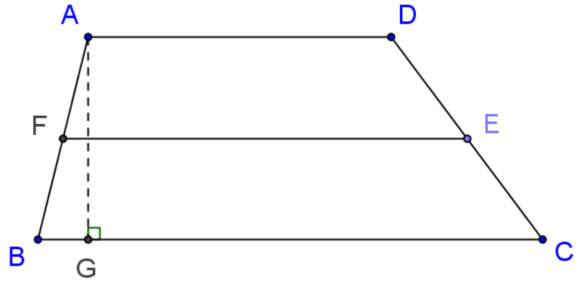


圖 9.1-125

想法：梯形面積等於中線長與高的乘積

解：

敘述	理由
(1) 梯形 ABCD 的面積＝$\overline{EF}$×$\overline{AG}$	梯形面積等於中線長與高的乘積 & 已知梯形 ABCD 中，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，$\overline{EF}$為梯形中線，$\overline{AG}$為梯形的高
(2) 8 平方公分＝$\overline{EF}$×(2 公分)	由(1) & 已知$\overline{AG}$＝2 公分，且梯形 ABCD 的面積為 8 平方公分
(3) $\overline{EF}$＝(8 平方公分)÷(2 公分) ＝4 公分	由(2) 等量除法公理

習題 9.1-46：

如圖 9.1-126，△ABC～△A'B'C'，$\overline{AD}$與$\overline{A'D'}$分別為$\overline{BC}$與$\overline{B'C'}$上的高，若$\overline{AD}$＝4 公分，$\overline{A'D'}$＝3 公分，則$\dfrac{\Delta ABC面積}{\Delta A'B'C'面積}$為何？

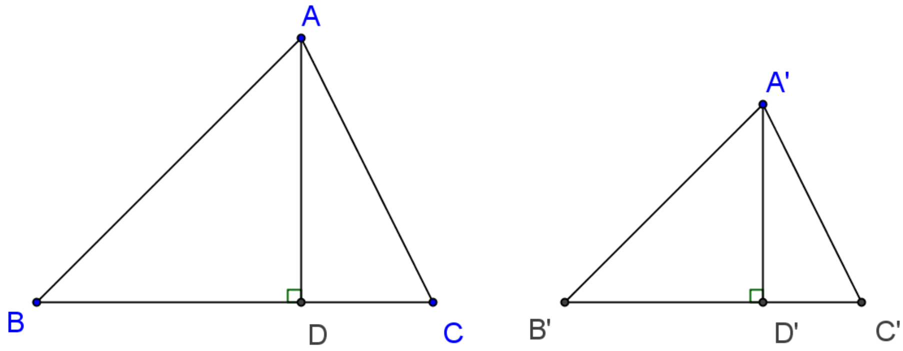


圖 9.1-126

想法：相似三角形面積比等於對應邊的平方比或對應高的平方比

解：

敘述	理由
(1) $\dfrac{\Delta ABC面積}{\Delta A'B'C'面積}$ $=\dfrac{\overline{AD}^2}{\overline{A'D'}^2}$ $=\dfrac{(4公分)^2}{(3公分)^2}$ $=\dfrac{16平方公分}{9平方公分}$ $=\dfrac{16}{9}$	已知△ABC～△A'B'C'，$\overline{AD}$與$\overline{A'D'}$分別為$\overline{BC}$與$\overline{B'C'}$上的高，$\overline{AD}$＝4 公分，$\overline{A'D'}$＝3 公分 & 相似三角形面積比等於對應邊的平方比或對應高的平方比

習題 9.1-47：

如圖 9.1-127，六邊形 ABCDEF 與六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 相似，已知$\overline{AB}$＝3 公分、$\overline{A_1B_1}$＝2 公分，若六邊形 ABCDEF 面積為 21 平方公分，則六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ F_1 面積為何？

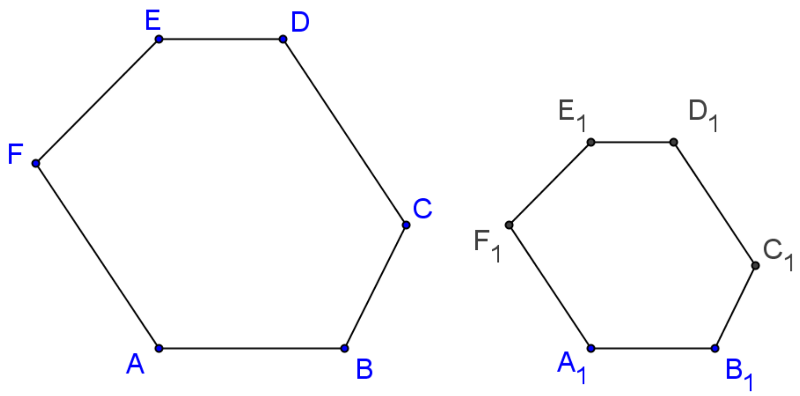


圖 9.1-127

想法：相似多邊形面積比等於對應邊的平方比

解：

敘述	理由
(1) $\dfrac{\text{六邊形ABCDEF面積}}{\text{六邊形}A_1B_1C_1D_1E_1F_1\text{面積}}=\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{A_1B_1}^2}$	已知六邊形 ABCDEF 與六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 相似 & 相似多邊形面積比等於對應邊的平方比
(2) $\dfrac{\text{21平方公分}}{\text{六邊形}A_1B_1C_1D_1E_1F_1\text{面積}}=\dfrac{(3\text{公分})^2}{(2\text{公分})^2}$	由(1) & 已知$\overline{AB}$＝3 公分、$\overline{A_1B_1}$＝2 公分，六邊形 ABCDEF 面積為 21 平方公分
(3) 六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ F_1 面積×(3 公分)^2 ＝(21 平方公分)×(2 公分)^2	由(2) 交叉相乘
(4) 六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ F_1 面積 ＝(21 平方公分)×(2 公分)^2÷(3 公分)^2 ＝$\dfrac{28}{3}$ 平方公分	由(3) 等量除法公理

習題 9.2

習題 9.2-1

如圖 9.2-78，ABCDEF 為邊長為 4 公分的正六邊形，O 點為其中心，已知此正六邊形內切圓半徑為 $2\sqrt{3}$ 公分，求正六邊形 ABCDEF 面積為何？

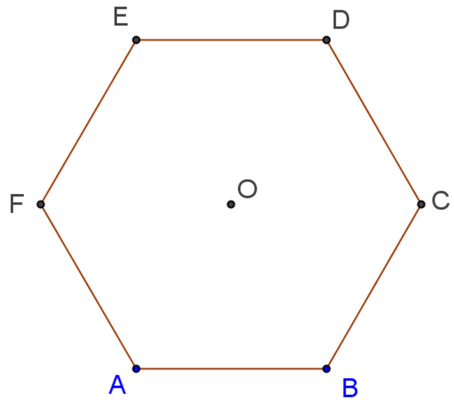


圖 9.2-78

想法：正多邊形的面積等於周長與邊心距乘積的一半

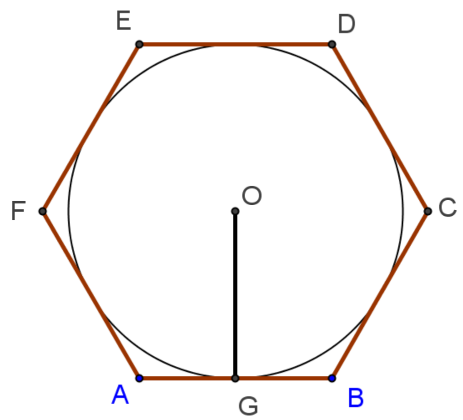


圖 9.2-78(a)

解：

敘述	理由
(1) 以 O 點為圓心，作正六邊形 ABCDEF 的內切圓， 圓 O 與$\overline{AB}$相切於 G 點， 連接$\overline{OG}$，如圖 9.2-78(a)所示， 則$\overline{OG}$為正六邊形之邊心距	正多邊形內切圓的圓心為此正多邊形的中心 & 正多邊形內切圓的半徑，叫做此正多邊形的邊心距
(2) $\overline{OG}=2\sqrt{3}$ 公分	由(1) $\overline{OG}$為正六邊形之邊心距 & 已知此正六邊形內切圓半徑為 $2\sqrt{3}$ 公分

(3) 正六邊形 ABCDEF 周長 $=6\times\overline{AB}=6\times(4$ 公分$)=24$ 公分	正多邊形各邊長相等 & 已知 ABCDEF 為邊長為 4 公分的正六邊形
(4) 正六邊形 ABCDEF 面積 $=\dfrac{(24公分)\times(2\sqrt{3}公分)}{2}$ $=24\sqrt{3}$ 平方公分	正多邊形的面積等於周長與邊心距乘積的一半 & (3) 正六邊形 ABCDEF 周長＝24 公分 & (2) 邊心距$\overline{OG}=2\sqrt{3}$ 公分

習題 9.2-2

若 ABCDEFGH 為一邊長為 4 公分、面積為 96 平方公分的正八邊形，求此正八邊形內切圓半徑為何？

想法：(1) 正多邊形的面積等於周長與邊心距乘積的一半

(2) 正多邊形內切圓的半徑，叫做此正多邊形的邊心距

解：

敘述	理由
(1) 正八邊形 ABCDEFGH 周長 $=8\times(4$ 公分$)=32$ 公分	正多邊形各邊長相等 & 已知 ABCDEFGH 為邊長為 4 公分的正八邊形
(2) 96 平方公分 $=\dfrac{(32公分)\times正八邊形邊心距}{2}$	正多邊形的面積等於周長與邊心距乘積的一半 & 已知 ABCDEFGH 為面積為 96 平方公分的正八邊形 & (1) 正八邊形 ABCDEFGH 周長＝32 公分
(3) (32 平方公)×正八邊形邊心距 ＝(96 平方公分)×2	由(2) 等量乘法公理
(4) 正八邊形邊心距 ＝(96 平方公分)×2÷(32 平方公) ＝6 公分	由(3) 等量除法公理
(5) 正八邊形內切圓半徑＝6 公分	正多邊形內切圓的半徑，叫做此正多邊形的邊心距 & (3) 正八邊形邊心距＝6 公分 已證

習題 9.2-3

如圖 9.2-79，ABCDEF 與 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 分別為邊長為 6 公分及 4 公分的正六邊形，O 點與 O_1 點分別為其中心，$\overline{OG} \perp \overline{AB}$、$\overline{O_1G_1} \perp \overline{A_1B_1}$，則：

(1) $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{O_1A_1}} = ?$　　　(2) $\dfrac{\overline{OG}}{\overline{O_1G_1}} = ?$

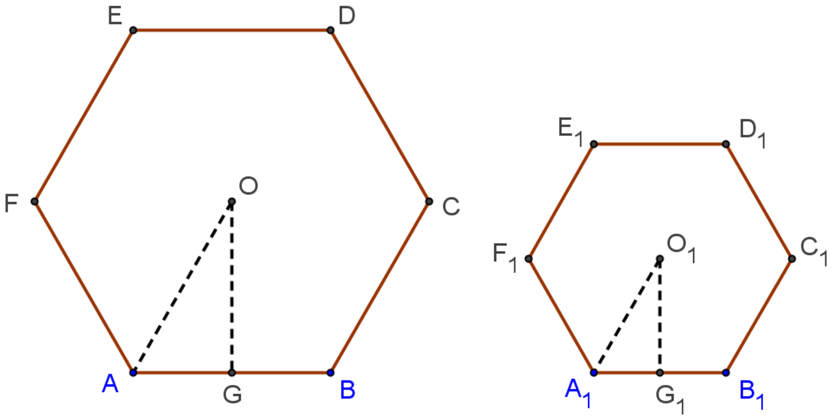


圖 9.2-79

想法：兩個邊數相等的正多邊形的周長比，等於邊長比或半徑比或邊心距比

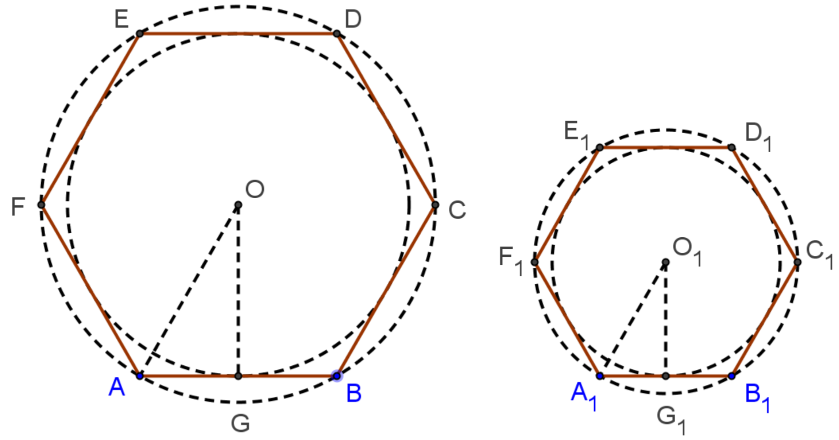


圖 9.2-79(a)

解：

敘述	理由
(1) 以 O 點為圓心，分別以$\overline{OA}$、$\overline{OG}$為半徑作正六邊形 ABCDEF 的外接圓與內切圓；以 O_1 點為圓心，分別以$\overline{O_1A_1}$、$\overline{O_1G_1}$為半徑作正六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的內切圓；如圖 9.2-79(a)所示；其中$\overline{OA}$為正六邊形 ABCDEF 的半徑	已知 O 點與 O_1 點分別為正六邊形 ABCDEF 與正六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的中心 & 正多邊形的中心為此正多邊形外接圓與內切圓圓心 & 正多邊形外接圓半徑為此正多邊形的半徑 &

$\overline{O_1A_1}$為正六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的半徑 $\overline{OG}$為正六邊形 ABCDEF 的邊心距 $\overline{O_1G_1}$為正六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的邊心距	已知$\overline{OG}\perp\overline{AB}$、$\overline{O_1G_1}\perp\overline{A_1B_1}$ ＆ 正多邊形內切圓半徑為此正多邊形的邊心距
(2) $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{O_1A_1}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}}=\dfrac{6\text{公分}}{4\text{公分}}=\dfrac{3}{2}$	由(1) ＆ 兩邊數相等的正多邊形的半徑比等於邊長比 ＆ 已知正六邊形 ABCDEF 與 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的邊長分別為 6 公分及 4 公分
(3) $\dfrac{\overline{OG}}{\overline{O_1G_1}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}}=\dfrac{6\text{公分}}{4\text{公分}}=\dfrac{3}{2}$	由(1) ＆ 兩邊數相等的正多邊形的邊心距比等於邊長比 ＆ 已知正六邊形 ABCDEF 與 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的邊長分別為 6 公分及 4 公分

習題 9.2-4

如圖 9.2-80，ABCDEF 與 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 皆為正六邊形，已知正六邊形 ABCDEF 邊長為 8 公分、面積為 $96\sqrt{3}$ 平方公分，正六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 面積為 $24\sqrt{3}$ 平方公分，且 $\overline{OA}$、$\overline{O_1A_1}$ 分別為正六邊形 ABCDEF 與正六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的半徑，$\overline{OG}$、$\overline{O_1G_1}$ 分別為正六邊形 ABCDEF 與正六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的邊心距，則：

(1) $\overline{A_1B_1}=$？　　(2) $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{O_1A_1}}=$？　　(3) $\dfrac{\overline{OG}}{\overline{O_1G_1}}=$？

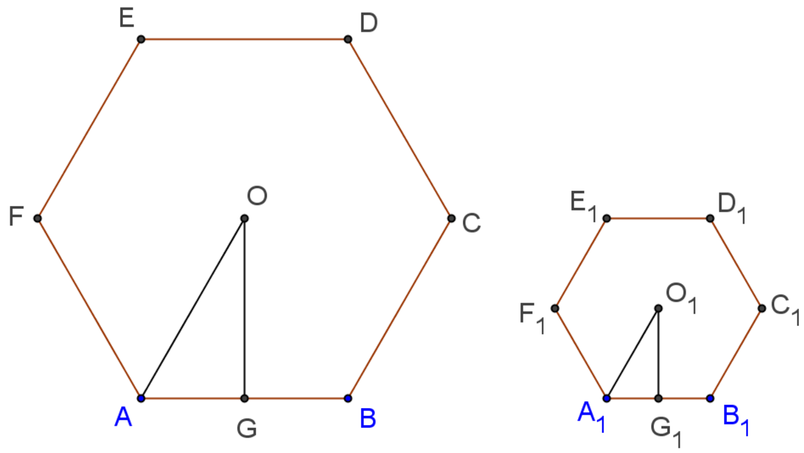


圖 9.2-80

想法： 兩個邊數相等的正多邊形的面積比，等於邊長的平方比或半徑的平方比或邊心距的平方比

解：

敘述	理由
(1) $\dfrac{\text{正六邊形ABCDEF面積}}{\text{正六邊形}A_1B_1C_1D_1E_1F_1\text{面積}}=\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{A_1B_1}^2}=\dfrac{\overline{OA}^2}{\overline{O_1A_1}^2}=\dfrac{\overline{OG}^2}{\overline{O_1G_1}^2}$	已知 ABCDEF 與 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 皆為正六邊形，$\overline{OA}$、$\overline{O_1A_1}$ 分別為正六邊形 ABCDEF 與正六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的半徑，$\overline{OG}$、$\overline{O_1G_1}$ 分別為正六邊形 ABCDEF 與正六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的邊心距 & 兩個邊數相等的正多邊形的面積比，等於邊長的平方比或半徑的平方比或邊心距的平方比
(2) $\dfrac{96\sqrt{3}\text{平方公分}}{24\sqrt{3}\text{平方公分}}=\dfrac{(8\text{公分})^2}{\overline{A_1B_1}^2}=\dfrac{\overline{OA}^2}{\overline{O_1A_1}^2}=\dfrac{\overline{OG}^2}{\overline{O_1G_1}^2}$	由(1) & 已知正六邊形 ABCDEF 邊長為 8 公分、面積為 $96\sqrt{3}$ 平方公分，正六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 面積為 $24\sqrt{3}$ 平方公分

(3) $\overline{A_1B_1}^2\times(96\sqrt{3}\text{ 平方公分})$ $=(24\sqrt{3}\text{ 平方公分})\times(8\text{ 公分})^2$	由(2) 交叉相乘
(4) $\overline{A_1B_1}^2=\dfrac{(24\sqrt{3}\text{平方公分})\times(8\text{公分})^2}{96\sqrt{3}\text{平方公分}}$ $=16$ 平方公分	由(3) 等量除法公理
(5) $\overline{A_1B_1}=-4$ 公分 或 $\overline{A_1B_1}=4$ 公分	由(4) 求平方根
(6) $\overline{A_1B_1}=4$ 公分	由(5) & $\overline{A_1B_1}$為長度必大於 0
(7) $\dfrac{96\sqrt{3}\text{平方公分}}{24\sqrt{3}\text{平方公分}}=\dfrac{\overline{OA}^2}{\overline{O_1A_1}^2}=\dfrac{\overline{OG}^2}{\overline{O_1G_1}^2}$	由(2) $\dfrac{96\sqrt{3}\text{平方公分}}{24\sqrt{3}\text{平方公分}}=\dfrac{\overline{OA}^2}{\overline{O_1A_1}^2}=\dfrac{\overline{OG}^2}{\overline{O_1G_1}^2}$
(8) $\dfrac{\overline{OA}^2}{\overline{O_1A_1}^2}=\dfrac{\overline{OG}^2}{\overline{O_1G_1}^2}=4$	由(7) & 倍比定理
(9) $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{O_1A_1}}=\dfrac{\overline{OG}}{\overline{O_1G_1}}=-2$ 或 $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{O_1A_1}}=\dfrac{\overline{OG}}{\overline{O_1G_1}}=2$	由(8) 求平方根
(10) $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{O_1A_1}}=\dfrac{\overline{OG}}{\overline{O_1G_1}}=2$	由(9) & $\overline{OA}$、$\overline{O_1A_1}$、$\overline{OG}$、$\overline{O_1G_1}$皆為長度，其比值必大於 0

習題 9.2-5

已知圓 O 半徑為 6 公分、圓 O_1 半徑為 4 公分，求圓 O 與圓 O_1 周長之比。

想法：兩圓的圓周比等於兩圓的半徑比

解：

敘述	理由
(1) 圓 O 周長：圓 O_1 周長 ＝(6 公分)：(4 公分) ＝3：2	兩圓的圓周比等於兩圓的半徑比 & 已知圓 O 半徑為 6 公分、圓 O_1 半徑為 4 公分 & 倍比定理

習題 9.2-6

如圖 9.2-81，已知圓 O 半徑$\overline{OA}$＝5 公分，則圓 O 周長為何？

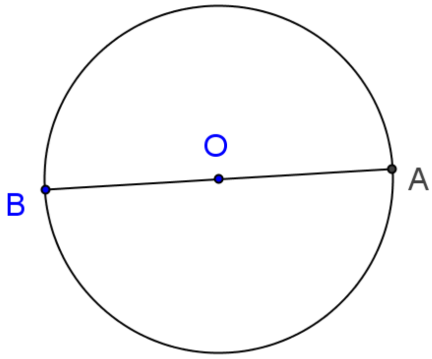


圖 9.2-81

想法：圓周長等於直徑乘以圓周率

解：

敘述	理由
(1) 圓 O 直徑$\overline{AB}$＝2$\overline{OA}$ ＝2×(5 公分)＝10 公分	直徑為半徑的 2 倍 & 已知圓 O 半徑$\overline{OA}$＝5 公分
(2) 圓 O 周長＝(10 公分)×π＝10π 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & (1) 圓 O 直徑＝10 公分

習題 9.2-7

圖 9.2-82 中，圓 O_1 與圓 O_2 內切，且圓 O_1 半徑 $\overline{O_1A}$ 為圓 O_2 直徑，已知 $\overline{O_2A}$＝4 公分，求圓 O_1 的周長為何？

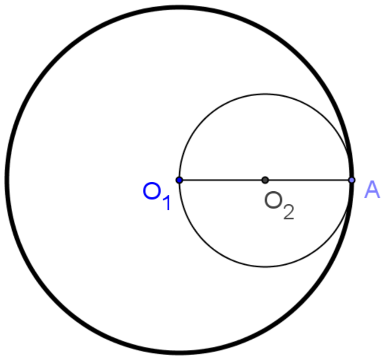


圖 9.2-82

想法：圓周長等於直徑乘以圓周率

解：

敘述	理由
(1) $\overline{O_1A}=2\overline{O_2A}$ ＝2×(4 公分) ＝8 公分	直徑為半徑的 2 倍 & 已知圓 O_1 半徑 $\overline{O_1A}$ 為圓 O_2 直徑， 且 $\overline{O_1A}$＝4 公分
(2) 圓 O_1 直徑＝$2\overline{O_1A}$ ＝2×(8 公分) ＝16 公分	直徑為半徑的 2 倍 & 由(1) $\overline{O_1A}$＝8 公分　已證
(3) 圓 O_1 的周長＝圓 O_1 直徑×π ＝(16 公分) ×π ＝16π 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & 由(2) 圓 O_1 直徑＝16 公分　已證

習題 9.2-8

圖 9.2-83 中，3 個小圓 O_1、圓 O_2、圓 O_3 為等圓且 O_1、O_2、O_3 三點均在 $\overline{AD}$ 上，已知圓 O_1、圓 O_2 外切於 B 點，圓 O_1、圓 O_3 外切於 C 點，且圓 O_2、圓 O_3 分別與大圓 O_1 內切於 A、D 兩點，若大圓 O_1 半徑 $\overline{O_1A}=15$ 公分，求圓 O_3 的周長為何？

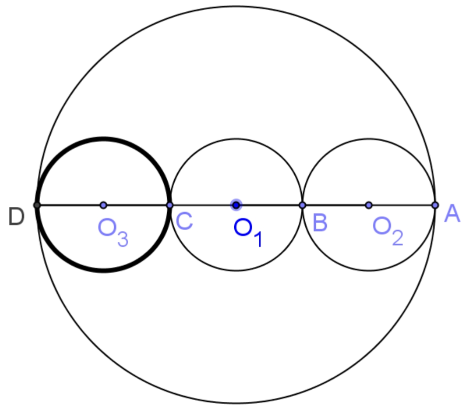


圖 9.2-83

想法：圓周長等於直徑乘以圓周率

解：

敘述	理由
(1) 大圓 O_1 直徑 $\overline{AD}=2\overline{O_1A}$ $=2\times(15$ 公分$)$ $=30$ 公分	圓直徑為圓半徑的 2 倍 & 已知大圓 O_1 半徑 $\overline{O_1A}=15$ 公分
(2) 小圓 O_1 直徑 $\overline{BC}$ ＝小圓 O_2 直徑 $\overline{AB}$ ＝小圓 O_3 直徑 $\overline{CD}$	已知小圓 O_1、圓 O_2、圓 O_3 為等圓 & 等圓直徑相等
(3) $\overline{AD}=\overline{BC}+\overline{AB}+\overline{CD}$ $=\overline{CD}+\overline{CD}+\overline{CD}=3\overline{CD}$	如圖 9.2-83，全量等於分量之和 & 由(2) $\overline{BC}=\overline{AB}=\overline{CD}$
(4) $\overline{CD}=\overline{AD}\div 3$ $=(30$ 公分$)\div 3=10$ 公分	由(3) 等量除法公理 & 由(1) $\overline{AD}=30$ 公分
(5) 圓 O_3 的周長＝圓 O_3 直徑 $\overline{CD}\times\pi$ $=(10$ 公分$)\times\pi$ $=10\pi$ 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & 由(4) 圓 O_3 直徑 $\overline{CD}=10$ 公分

習題 9.2-9

圖 9.2-84 中，正方形 ABCD 和圓 O 的周長相同，若正方形 ABCD 邊長為 20π 公分，請問圓 O 的半徑是多少？

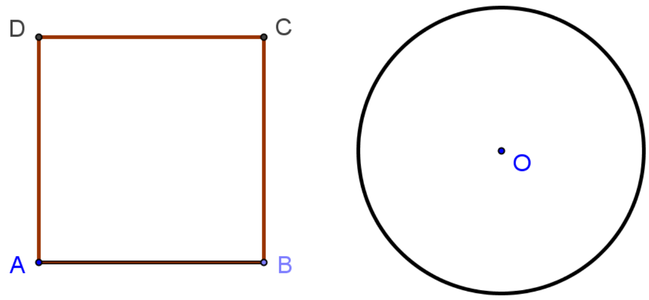


圖 9.2-84

想法：(1) 先算出正方形周長

(2) 再算出圓 O 的半徑

解：

敘述	理由
(1) 正方形 ABCD 周長 ＝4×正方形 ABCD 邊長 ＝4×(20π 公分) ＝80π 公分	正方形四邊等長 & 周長定義 & 已知正方形 ABCD 邊長為 20π 公分
(2) 圓 O 的周長＝正方形 ABCD 周長 ＝80π 公分	已知正方形 ABCD 和圓 O 的周長相同 & 由(1)正方形 ABCD 周長＝80π 公分
(3) 圓 O 直徑×π＝80π 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & 由(2) 圓 O 的周長＝80π 公分
(4) 圓 O 直徑＝(80π 公分)÷π＝80 公分	由(3) 等量除法公理
(5) 圓 O 半徑＝(80 公分)÷2＝40 公分	圓半徑為圓直徑的一半 & 由(4) 圓 O 直徑＝80 公分

習題 9.2-10

圖 9.2-85 中，圓 O 為正方形 ABCD 的內切圓，E、F、G、H 為切點，已知正方形 ABCD 的周長為 16 公分，則圓 O 的周長是多少公分？

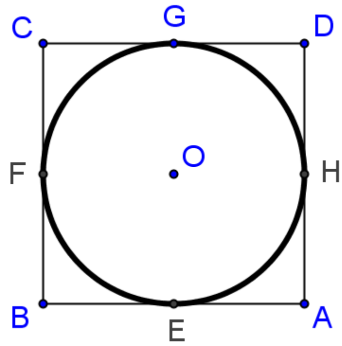


圖 9.2-85

想法：(1) 利用例題 9.2-13 結論：$\overline{FH}$為圓 O 直徑 & $\overline{FH}=\overline{AB}$

(2) 圓周長等於直徑乘以圓周率

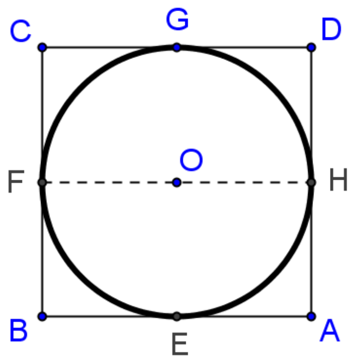


圖 9.2-85(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{FH}$，如圖 9.2-85(a)； 則$\overline{FH}$為圓 O 直徑 & $\overline{FH}=\overline{AB}$	作圖 & 已知圓 O 為正方形 ABCD 的內切圓，E、F、G、H 為切點 & 根據例題 9.2-13 結論
(2) $\overline{AB}$＝(16 公分)÷4＝4 公分	正方形四邊等長 & 已知正方形 ABCD 的周長為 16 公分
(3) 圓 O 直徑$\overline{FH}=\overline{AB}$＝4 公分	由(1) & (2) 遞移律
(4) 圓 O 的周長＝圓 O 直徑$\overline{FH}$×π ＝(4 公分)×π ＝4π 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & 由(3) 圓 O 直徑$\overline{FH}$＝4 公分

習題 9.2-11

已知圓 O 的一弦$\overline{AB}$＝24 公分，弦心距$\overline{OC}$＝5 公分，則圓 O 周長為何？

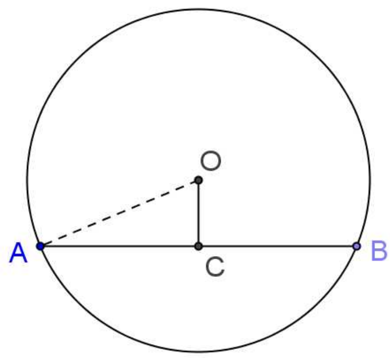


圖 9.2-86

想法：(1) 利用畢氏定理求出圓 O 半徑

(2) 圓周長等於直徑與圓周率的乘積

解：

敘述	理由
(1) $\overline{OC}\perp\overline{AB}$，∠OCA＝90°	已知$\overline{OC}$為弦心距
(2) △ACO 為直角三角形	由(1) & 直角三角形定義
(3) C 點為$\overline{AB}$中點，$\overline{AC}=\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ $=\frac{1}{2}\times$(24 公分)＝12 公分	由(1) & 定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理 $\overline{OC}$垂直平分$\overline{AB}$ & 已知弦$\overline{AB}$＝24 公分
(4) △ACO 中，$\overline{OA}^2=\overline{AC}^2+\overline{OC}^2$	由(2) △ACO 為直角三角形 & 畢氏定理
(5) $\overline{OA}^2$＝(12 公分)^2＋(5 公分)^2 ＝169 平方公分	由(4) & 已知$\overline{OC}$＝5 公分 & (3) $\overline{AC}$＝12 公分
(6) $\overline{OA}$＝13 公分　或　$\overline{OA}$＝－13 公分	由(5) 求平方根
(7) $\overline{OA}$＝13 公分	由(6) & $\overline{OA}$為線段長度必大於 0
(8) 圓 O 周長＝2$\overline{OA}\times\pi$ ＝2×(13 公分)×π ＝26π 公分	圓周長等於直徑與圓周率的乘積 & 圓直徑為圓半徑的 2 倍 & 由(7) $\overline{OA}$＝13 公分　已證

習題 9.2-12

如圖 9.2-87，圓 O 半徑為 10 公分，圓心角$\angle AOB=120^\circ$，則：

(1) 圓 O 周長＝？　(2) $\overset{\frown}{AB}$＝？　(3) $\overset{\frown}{ACB}$＝？

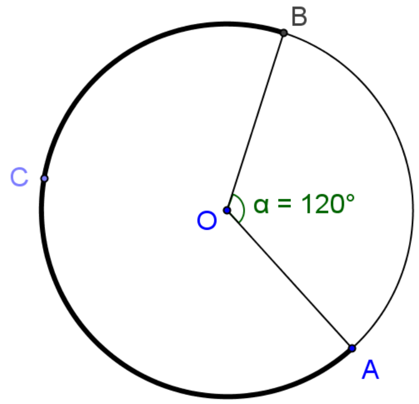


圖 9.2-87

想法：(1) 圓周長等於直徑乘以圓周率

(2) 弧長＝$\dfrac{\text{圓心角度}}{360^\circ}$×圓周長

解：

敘述	理由
(1) 圓 O 直徑＝2×(10 公分)＝20 公分	直徑為半徑的 2 倍 & 已知圓 O 半徑為 10 公分
(2) 圓 O 周長＝(20 公分)×π＝20π公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & (1) 圓 O 直徑＝20 公分
(3) $\overset{\frown}{AB}=\dfrac{120^\circ}{360^\circ}\times$圓 O 周長 $=\dfrac{120^\circ}{360^\circ}\times(20\pi$公分$)$ $=\dfrac{20\pi}{3}$ 公分	已知圓心角$\angle AOB=120^\circ$ & 周角為 360° & (2) 圓 O 周長＝20π公分
(4) $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{ACB}$＝圓 O 周長	全量等於分量之和
(5) $\overset{\frown}{ACB}$＝圓 O 周長－$\overset{\frown}{AB}$ ＝(20π公分)－($\dfrac{20\pi}{3}$ 公分) $=\dfrac{40\pi}{3}$ 公分	由(4) 等量減法公理 & (2) 圓 O 周長＝20π公分 & (3) $\overset{\frown}{AB}=\dfrac{20\pi}{3}$ 公分

習題 9.2-13

如圖 9.2-88，圓 O 半徑為 5 公分，$\overparen{AB}$＝4π 公分，則：

(1) 圓 O 周長＝？ (2) 圓心角∠AOB＝？ (3) $\overparen{ACB}$＝？

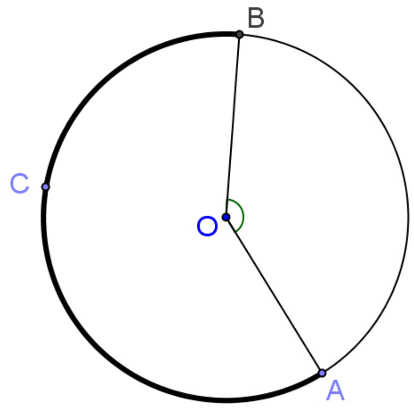


圖 9.2-88

想法：(1) 圓周長等於直徑乘以圓周率

(2) 弧長＝$\dfrac{\text{圓心角度}}{360^\circ}$×圓周長

解：

敘述	理由
(1) 圓 O 直徑＝2×(5 公分)＝10 公分	直徑為半徑的 2 倍 & 已知圓 O 半徑為 5 公分
(2) 圓 O 周長＝(10 公分)×π＝10π 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & (1) 圓 O 直徑＝10 公分
(3) $\overparen{AB}$＝$\dfrac{\angle AOB}{360^\circ}$×圓 O 周長	弧長＝$\dfrac{\text{圓心角度}}{360^\circ}$×圓周長 & $\overparen{AB}$所對的圓心角為∠AOB
(4) 4π 公分＝$\dfrac{\angle AOB}{360^\circ}$×(10π 公分)	由(3) & 已知$\overparen{AB}$＝4π 公分 & (2) 圓 O 周長＝10π 公分
(5) ∠AOB＝144°	由(4) 求∠AOB 之值
(6) $\overparen{AB}$＋$\overparen{ACB}$＝圓 O 周長	全量等於分量之和
(7) $\overparen{ACB}$＝圓 O 周長－$\overparen{AB}$ ＝(10π 公分)－(4π 公分) ＝6π 公分	由(6) 等量減法公理 & (2) 圓 O 周長＝10π 公分 & 已知$\overparen{AB}$＝4π 公分

習題 9.2-14

圖 9.2-89 中，OAB 為半徑為 5 公分、圓心角為 144°的扇形，求扇形 OAB 的周長為何？

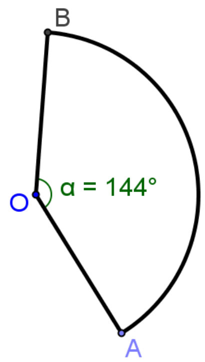


圖 9.2-89

想法：弧長＝$\frac{\text{圓心角度}}{360^\circ}$×圓周長

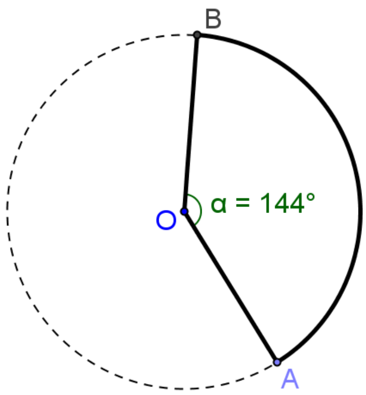


圖 9.2-89(a)

解：

敘述	理由
(1) 以 O 點為圓心，$\overline{OA}$為半徑完成此圓，如圖 9.2-89(a)	作圖
(2) 圓 O 直徑＝2$\overline{OA}$ ＝2×(5 公分)＝10 公分	直徑為半徑的 2 倍 & 已知 OAB 為半徑為 5 公分的扇形
(3) 圓 O 周長＝(10 公分)×π ＝10π 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & (2) 圓 O 直徑＝10 公分
(4) $\overset{\frown}{AB}$＝$\frac{144^\circ}{360^\circ}$×圓 O 周長 ＝$\frac{144^\circ}{360^\circ}$×(10π公分)＝4π 公分	弧長＝$\frac{\text{圓心角度}}{360^\circ}$×圓周長 & 已知 OAB 為圓心角為 144°的扇形 & (3) 圓 O 周長＝10π 公分

(5) 扇形 OAB 的周長 $=\overset{\frown}{AB}+\overline{OA}+\overline{OB}$ $=(4\pi+5+5)$ 公分 $=(4\pi+10)$ 公分	圓周長定義 & (4) $\overset{\frown}{AB}=4\pi$ 公分 & 已知 OAB 為半徑為 5 公分的扇形

習題 9.2-15

圖 9.2-90 為三個半圓所圍成的圖形，其三個圓心 O_1、O_2、O_3 皆在$\overline{AD}$上，已知小圓半徑$\overline{O_2A}$＝$\overline{O_3C}$＝2 公分、大圓半徑$\overline{O_1B}$＝4 公分，請問著色部分的圖形周長是多少公分？

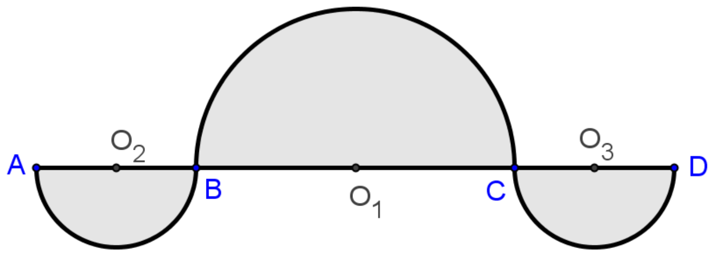


圖 9.2-90

想法：弧長＝$\dfrac{\text{圓心角度}}{360^\circ}$×圓周長

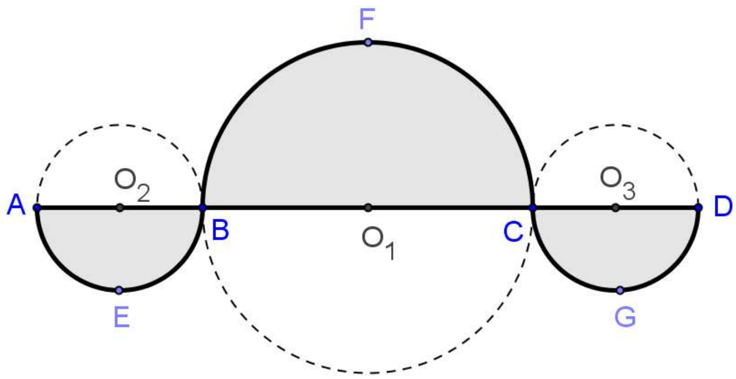


圖 9.2-90(a)

解：

敘述	理由
(1) 分別以 O_1、O_2、O_3 為圓心，$\overline{O_1B}$、$\overline{O_2A}$、$\overline{O_3C}$為半徑完成此三圓，如圖 9.2-90(a)；其中$\overline{BC}$為圓 O_1 直徑、$\overline{AB}$為圓 O_2 直徑、$\overline{CD}$為圓 O_3 直徑	作圖 & 已知此圖形為三個半圓所圍成的圖形，其三個圓心 O1、O2、O3 皆在$\overline{AD}$上，且小圓半徑$\overline{O_2A}$＝$\overline{O_3C}$＝2 公分、大圓半徑$\overline{O_1B}$＝4 公分
(2) 圓 O_2 直徑$\overline{AB}$＝圓 O_3 直徑$\overline{CD}$ ＝2$\overline{O_2A}$＝2$\overline{O_3C}$＝2×(2 公分)＝4 公分	直徑為半徑的 2 倍 & 已知小圓半徑$\overline{O_2A}$＝$\overline{O_3C}$＝2 公分
(3) 圓 O_2 周長＝圓 O_3 周長 ＝(4 公分)×π＝4π 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & (2) 圓 O_2 直徑＝圓 O_3 直徑＝4 公分
(4) $\overset{\frown}{AEB}$＝$\dfrac{180^\circ}{360^\circ}$×圓 O_2 周長 ＝$\dfrac{180^\circ}{360^\circ}$×(4π 公分)＝2π 公分	弧長＝$\dfrac{\text{圓心角度}}{360^\circ}$×圓周長 & 已知此圖形為三個半圓所圍成的圖形 & 半圓圓心角為 180° &

$\overset{\frown}{CGD}=\dfrac{180^{\circ}}{360^{\circ}}\times$圓 O_3 周長 $=\dfrac{180^{\circ}}{360^{\circ}}\times(4\pi$ 公分$)=2\pi$ 公分	由(3) 圓 O_2 周長＝圓 O_3 周長 $=4\pi$ 公分
(5) 圓 O_1 直徑$\overline{BC}=2\overline{O_1B}$ $=2\times(4$ 公分$)=8$ 公分	直徑為半徑的 2 倍 ＆ 已知大圓半徑$\overline{O_1B}=4$ 公分
(6) 圓 O_1 周長$=(8$ 公分$)\times\pi=8\pi$ 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 ＆ (5) 圓 O_1 直徑$=8$ 公分
(7) $\overset{\frown}{BFC}=\dfrac{180^{\circ}}{360^{\circ}}\times$圓 O_1 周長 $=\dfrac{180^{\circ}}{360^{\circ}}\times(8\pi$ 公分$)=4\pi$ 公分	弧長$=\dfrac{\text{圓心角度}}{360^{\circ}}\times$圓周長 ＆ 已知此圖形為三個半圓所圍成的圖形 ＆ 半圓圓心角為 180° ＆ 由(6) 圓 O_1 周長$=8\pi$ 公分
(8) $\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$ $=(4$ 公分$)+(8$ 公分$)+(4$ 公分$)$ $=16$ 公分	已知三個圓心 O_1、O_2、O_3 皆在$\overline{AD}$上 ＆ 全量等於分量之和 ＆ (2) $\overline{AB}=\overline{CD}=4$ 公分 、 (5) $\overline{BC}=8$ 公分
(9) 此圖形的周長 $=\overset{\frown}{AEB}+\overset{\frown}{BFC}+\overset{\frown}{CGD}+\overline{AD}$ $=(2\pi+4\pi+2\pi+16)$ 公分 $=(16+8\pi)$ 公分	全量等於分量之和 ＆ (4) $\overset{\frown}{AEB}=\overset{\frown}{CGD}=2\pi$ 公分 、 (7) $\overset{\frown}{BFC}=4\pi$ 公分 、 (8) $\overline{AD}=16$ 公分

習題 9.2-16

圖 9.2-91 中，圓 O_1 與 O_2 為兩半徑為 6 公分的等圓，已知兩圓相交於 A、B 兩點，且 O_1 在圓 O_2 的圓周之上、O_2 在圓 O_1 的圓周之上，求灰色部分的周長為何？

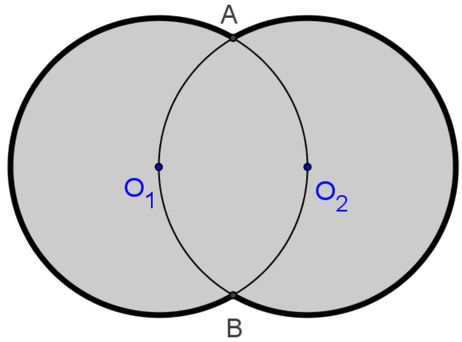


圖 9.2-91

想法： 弧長 $=\dfrac{\text{圓心角度}}{360^\circ}\times$圓周長

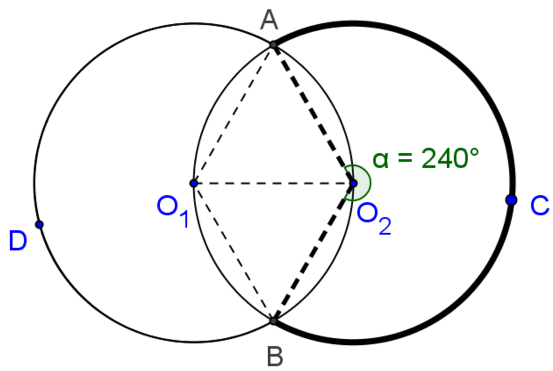


圖 9.2-91(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{AO_1}$、$\overline{BO_1}$、$\overline{BO_2}$、$\overline{AO_2}$及$\overline{O_1O_2}$，如圖 9.2-91(a)所示； 其中$\overline{AO_1}=\overline{BO_1}=\overline{O_1O_2}$為圓 O_1 半徑 $\overline{AO_2}=\overline{BO_2}=\overline{O_1O_2}$為圓 O_2 半徑	作圖 & 已知兩圓相交於 A、B 兩點，且 O_1 在圓 O_2 的圓周之上、O_2 在圓 O_1 的圓周之上
(2) $\overline{AO_1}=\overline{BO_1}=\overline{O_1O_2}=\overline{AO_2}=\overline{BO_2}$ $=6$ 公分	由(1) 遞移律 & 已知圓 O_1 與 O_2 為兩半徑為 6 公分的等圓
(3) $\triangle AO_1O_2$ 為正三角形	由(2) $\overline{AO_1}=\overline{O_1O_2}=\overline{AO_2}$ & 正三角形定義
(4) $\angle AO_2O_1=\angle AO_1O_2=\angle O_1AO_2=60^\circ$	由(3) & 正三角形為等角三角形

(5) $\triangle BO_1O_2$ 為正三角形 $\angle BO_2O_1 = \angle BO_1O_2 = \angle O_1BO_2 = 60°$	由(2) $\overline{BO_1} = \overline{O_1O_2} = \overline{BO_2}$ & 等邊三角形也是等角三角形
(6) $\angle AO_2O_1 + \angle BO_2O_1 + \angle AO_2B = 360°$	全量等於分量之和 & 周角為 360°
(7) $\angle AO_2B = 360° - \angle AO_2O_1 - \angle BO_2O_1$ $= 360° - 60° - 60°$ $= 240°$	由(6) 等量減法公理 & (4) $\angle AO_2O_1 = 60°$、(6) $\angle BO_2O_1 = 60°$
(8) 圓 O_2 直徑 $= 2\overline{AO_2}$ $= 2\times(6$ 公分$)$ $= 12$ 公分	直徑為半徑的 2 倍 & 由(2) $\overline{AO_2} = 6$ 公分
(9) 圓 O_2 周長＝圓 O_2 直徑×π $=(12$ 公分$)\times\pi$ $= 12\pi$ 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & 由(8) 圓 O_2 直徑＝12 公分
(10) $\overset{\frown}{ACB} = \frac{240°}{360°}\times$圓 O_2 周長 $= \frac{240°}{360°}\times(12\pi$ 公分$)$ $= 8\pi$ 公分	弧長＝$\frac{\text{圓心角度}}{360°}\times$圓周長 & 由(7) $\angle AO_2B = 240°$ & 由(9) 圓 O_2 周長＝12π 公分
(11) 同理可證：$\overset{\frown}{ADB} = 8\pi$ 公分	同(1)~(10)步驟，同理可證
(12) 灰色部分的周長 $= \overset{\frown}{ACB} + \overset{\frown}{ADB}$ $= (8\pi + 8\pi)$ 公分 $= 16\pi$ 公分	全量等於分量之和 由(10) $\overset{\frown}{ACB} = 8\pi$ 公分 & (11) $\overset{\frown}{ADB} = 8\pi$ 公分

習題 9.2-17

圖 9.2-92 中，圓 A、圓 B、圓 C 為三個半徑為 8 公分的等圓，已知三個圓兩兩外切，圓 A 與圓 B 外切於 D 點，圓 B 與圓 C 外切於 E 點，圓 C 與圓 A 外切於 F 點，求灰色部分的周長為何？

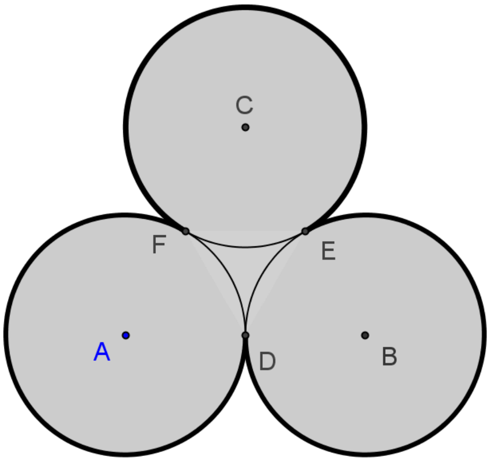


圖 9.2-92

想法： 弧長＝$\dfrac{\text{圓心角度}}{360^\circ}$×圓周長

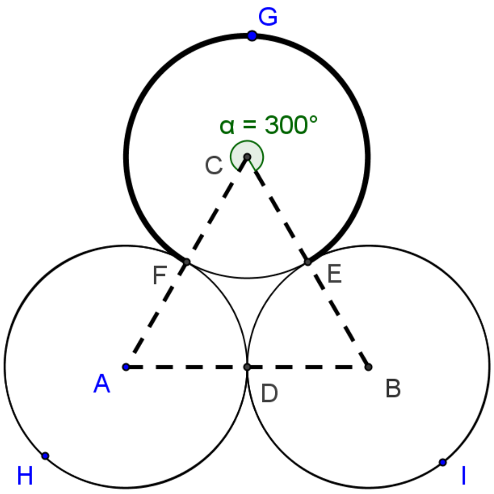


圖 9.2-92(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$，如圖 9.2-92(a) 其中$\overline{AB}$通過 D 點、$\overline{BC}$通過 E 點、$\overline{CA}$通過 F 點	作圖 & 已知圓 A 與圓 B 外切於 D 點，圓 B 與圓 C 外切於 E 點，圓 C 與圓 A 外切於 F 點 & 相切兩圓的連心線，必過切點
(2) $\overline{AD}=\overline{AF}=\overline{BD}=\overline{BE}=\overline{CE}=\overline{CF}$ ＝8 公分	已知圓 A、圓 B、圓 C 為三個半徑為 8 公分的等圓

(3) $\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}$ $=(8\text{ 公分})+(8\text{ 公分})=16$ 公分	全量等於分量之和 & 由(2) $\overline{AD}=\overline{BD}=8$ 公分
(4) $\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{CE}$ $=(8\text{ 公分})+(8\text{ 公分})=16$ 公分	全量等於分量之和 & 由(2) $\overline{BE}=\overline{CE}=8$ 公分
(5) $\overline{CA}=\overline{CF}+\overline{AF}$ $=(8\text{ 公分})+(8\text{ 公分})=16$ 公分	全量等於分量之和 & 由(2) $\overline{CF}=\overline{AF}=8$ 公分
(6) △ABC 為正三角形 $\angle A=\angle B=\angle C=60°$	由(3) 、 (4) & (5) 等邊三角形也是等角三角形
(7) 優角$\angle ECF$＋銳角$\angle ECF=360°$	全量等於分量之和 & 周角為 360°
(8) 優角$\angle ECF=360°-$銳角$\angle ECF$ $=360°-60°=300°$	由(7) 等量減法公理 & (6) 銳角$\angle ECF=60°$
(9) 圓 C 直徑$=2\overline{CE}$ $=2\times(8\text{ 公分})=16$ 公分	直徑為半徑的 2 倍 & (2) $\overline{CE}=8$ 公分
(10) 圓 C 周長＝圓 C 直徑×π $=(16\text{ 公分})\times\pi$ $=16\pi$ 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & 由(9) 圓 C 直徑＝16 公分
(11) $\overset{\frown}{EGF}=\frac{300°}{360°}\times$圓 C 周長 $=\frac{300°}{360°}\times(16\pi\text{ 公分})$ $=\frac{40\pi}{3}$ 公分	弧長$=\frac{\text{圓心角度}}{360°}\times$圓周長 & 由(8) 優角$\angle ECF=300°$ & 由(10) 圓 C 周長$=16\pi$ 公分
(12) 同理可證：$\overset{\frown}{DHF}=\frac{40\pi}{3}$ 公分 $\overset{\frown}{DIE}=\frac{40\pi}{3}$ 公分	同(1)~(11) 步驟 同理可證
(13) 灰色部分的周長 $=\overset{\frown}{EGF}+\overset{\frown}{DHF}+\overset{\frown}{DIE}$ $=(\frac{40\pi}{3}+\frac{40\pi}{3}+\frac{40\pi}{3})$ 公分 $=40\pi$ 公分	全量等於分量之和 & (11) $\overset{\frown}{EGF}=\frac{40\pi}{3}$ 公分 (12) $\overset{\frown}{DHF}=\frac{40\pi}{3}$ 公分 、 $\overset{\frown}{DIE}=\frac{40\pi}{3}$ 公分

習題 9.2-18

圖 9.2-93 為在正方形 ABCD 中，分別以正方形四個邊為直徑畫半圓所形成的圖形，且四個半圓相交於 O 點，若正方形邊長為 6 公分，求灰色部分圖形的周長為何？

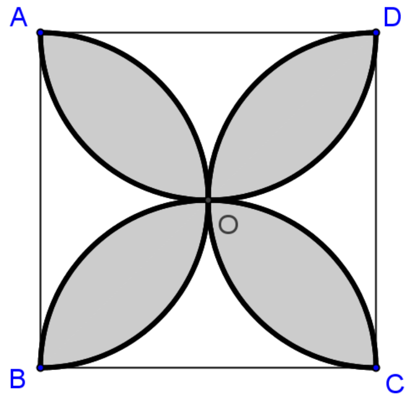


圖 9.2-93

想法：弧長 $=\dfrac{\text{圓心角度}}{360^{\circ}}\times$圓周長

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=6$ 公分	已知正方形邊長為 6 公分
(2) 以$\overline{AB}$為直徑的圓周長 $=\overline{AB}\times\pi=(6$ 公分$)\times\pi=6\pi$ 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & (1) $\overline{AB}=6$ 公分
(3) 以$\overline{AB}$為直徑的半圓周長$\overset{\frown}{AOB}$ $=\dfrac{180^{\circ}}{360^{\circ}}\times$以$\overline{AB}$為直徑的圓周長 $=\dfrac{180^{\circ}}{360^{\circ}}\times(6\pi$ 公分$)=3\pi$ 公分	弧長$=\dfrac{\text{圓心角度}}{360^{\circ}}\times$圓周長 & 已知此圖形為分別以正方形四個邊為直徑畫半圓所形成的圖形 & 半圓圓心角為 180° & (2)以$\overline{AB}$為直徑的圓周長$=6\pi$ 公分
(4) 同理可證： $\overset{\frown}{BOC}=\overset{\frown}{COD}=\overset{\frown}{DOA}=3\pi$ 公分	同(1)~(3)步驟 同理可證
(5) 灰色部分圖形的周長 $=\overset{\frown}{AOB}+\overset{\frown}{BOC}+\overset{\frown}{COD}+\overset{\frown}{DOA}$ $=(3\pi+3\pi+3\pi+3\pi)$ 公分 $=12\pi$ 公分	全量等於分量之和 & (3) $\overset{\frown}{AOB}=3\pi$ 公分 & (4) $\overset{\frown}{BOC}=\overset{\frown}{COD}=\overset{\frown}{DOA}=3\pi$ 公分

習題 9.2-19

圖 9.2-94 為在正方形 ABCD 中，分別以正方形四個頂點為圓心，正方形邊長為半徑畫弧所形成的圖形，且四個弧分別相交於 E、F、G、H 四點，若正方形邊長為 10 公分，求粗線部分圖形的周長為何？

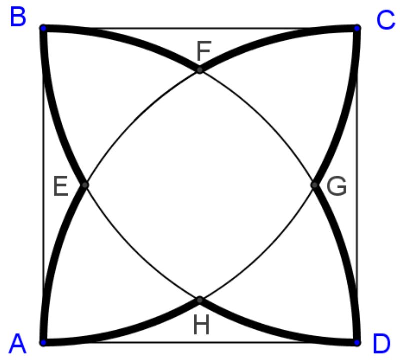


圖 9.2-94

想法：弧長＝$\dfrac{\text{圓心角度}}{360°}$×圓周長

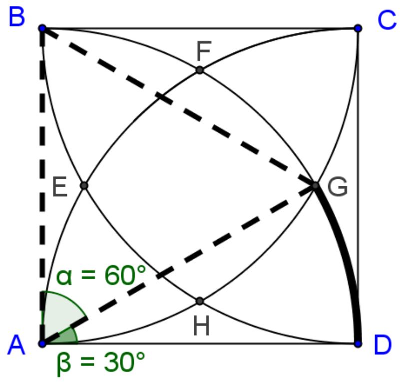


圖 9.2-94(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{AG}$、$\overline{BG}$，如圖 9.2-94(a)所示	作圖
(2) $\overline{AB}$＝$\overline{BC}$＝$\overline{CD}$＝$\overline{DA}$＝10 公分 ∠DAB＝∠ABC＝∠BCD＝∠CDA＝90°	已知 ABCD 為正方形 & 正方形四邊等長、四個角皆為直角 & 已知正方形邊長為 10 公分
(3) $\overline{AG}$＝$\overline{AB}$＝10 公分 $\overline{BG}$＝$\overline{AB}$＝10 公分	已知此圖形為正方形四個頂點為圓心，正方形邊長為半徑畫弧所形成的圖形，且四個弧分別相交於 E、F、G、H 四點 & 同圓半徑皆相等 & (2) $\overline{AB}$＝10 公分

(4) $\overline{AG}=\overline{BG}=\overline{AB}=10$ 公分 $\triangle ABG$ 為正三角形	由(3) 遞移律 & 等邊三角形為正三角形
(5) $\angle BAG=\angle AGB=\angle GBA=60°$	由(4) & 正三角形三內角皆為 60°
(6) $\angle BAG+\angle GAD=\angle DAB$	如圖 9.2-94(a)，全量等於分量之和
(7) $\angle GAD=\angle DAB-\angle BAG$ $=90°-60°=30°$	由(6) 等量減法公理 & (2) $\angle DAB=90°$ & (5) $\angle BAG=60°$
(8) 以$\overline{AB}$為半徑的圓周長 $=2\overline{AB}\times\pi=2\times(10$ 公分$)\times\pi=20\pi$ 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & 圓直徑為半徑的 2 倍 & (2) $\overline{AB}=10$ 公分
(9) $\overset{\frown}{DG}$ $=\frac{30°}{360°}\times$以$\overline{AB}$為半徑的圓周長 $=\frac{30°}{360°}\times(20\pi$ 公分$)=\frac{5\pi}{3}$ 公分	弧長$=\frac{\text{圓心角度}}{360°}\times$圓周長 & 由(7)$\angle GAD=30°$ & (8) 以$\overline{AB}$為半徑的圓周長$=20\pi$ 公分
(10) 同理可證： $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{AH}=\overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CF}=\overset{\frown}{CG}=\overset{\frown}{DH}$ $=\frac{5\pi}{3}$ 公分	同(1)~(9)步驟 同理可證
(11) 粗線部分圖形的周長 $=\overset{\frown}{AE}+\overset{\frown}{AH}+\overset{\frown}{BF}+\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{CF}+\overset{\frown}{CG}+\overset{\frown}{DH}+\overset{\frown}{DG}$ $=(\frac{5\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}+\frac{5\pi}{3})$ 公分 $=\frac{40\pi}{3}$ 公分	題目所求 全量等於分量之和 由(9) $\overset{\frown}{DG}=\frac{5\pi}{3}$ 公分 & (10) $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{AH}=\overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CF}=\overset{\frown}{CG}=\overset{\frown}{DH}=\frac{5\pi}{3}$ 公分

習題 9.2-20

圖 9.2-95 為兩個半圓與一個矩形所形成的圖形，其中兩個半圓分別以$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為直徑，矩形 ABCD 的長邊$\overline{BC}$＝16 公分、短邊$\overline{AB}$＝8 公分，求灰色部分的圖形周長為何？

圖 9.2-95

想法：灰色部分的圖形周長＝$\overset{\frown}{AB}$＋$\overline{BC}$＋$\overset{\frown}{CD}$＋$\overline{AD}$

解：

敘述	理由
(1) $\overline{AD}$＝$\overline{BC}$＝16 公分 $\overline{CD}$＝$\overline{AB}$＝8 公分	已知 ABCD 為矩形 & 矩形兩組對邊等長 & 已知$\overline{BC}$＝16 公分、$\overline{AB}$＝8 公分
(2) 以$\overline{AB}$為直徑的圓周長 ＝$\overline{AB}$×π＝(8 公分)×π＝8π 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & (1) $\overline{AB}$＝8 公分
(3) $\overset{\frown}{AB}$ ＝$\frac{180^\circ}{360^\circ}$×以$\overline{AB}$為直徑的圓周長 ＝$\frac{180^\circ}{360^\circ}$×(8π 公分)＝4π 公分	弧長＝$\frac{圓心角度}{360^\circ}$×圓周長 & 已知兩個半圓分別以$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為直徑 & 半圓的圓心角為 180° & (2) 以$\overline{AB}$為直徑的圓周長＝8π 公分
(4) 以$\overline{CD}$為直徑的圓周長 ＝$\overline{CD}$×π＝(8 公分)×π＝8π 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & (1) $\overline{CD}$＝8 公分
(5) $\overset{\frown}{CD}$ ＝$\frac{180^\circ}{360^\circ}$×以$\overline{CD}$為直徑的圓周長 ＝$\frac{180^\circ}{360^\circ}$×(8π 公分)＝4π 公分	弧長＝$\frac{圓心角度}{360^\circ}$×圓周長 & 已知兩個半圓分別以$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為直徑 & 半圓的圓心角為 180° & (4) 以$\overline{CD}$為直徑的圓周長＝8π 公分
(6) 灰色部分的圖形周長 ＝$\overset{\frown}{AB}$＋$\overline{BC}$＋$\overset{\frown}{CD}$＋$\overline{AD}$ ＝(4π＋16＋4π＋16) 公分 ＝(32＋8π) 公分	全量等於分量之和 & (1) $\overline{AD}$＝$\overline{BC}$＝16 公分 & (3) $\overset{\frown}{AB}$＝4π 公分 & (5) $\overset{\frown}{CD}$＝4π 公分

習題 9.2-21

圖 9.2-96 中，圓 O_1 與圓 O_2 外切，$\overline{AB}$與$\overline{CD}$為兩圓的外公切線，已知兩圓半徑皆為 5 公分，若想用一線段圍繞兩圓，則此線段至少需多少公分？

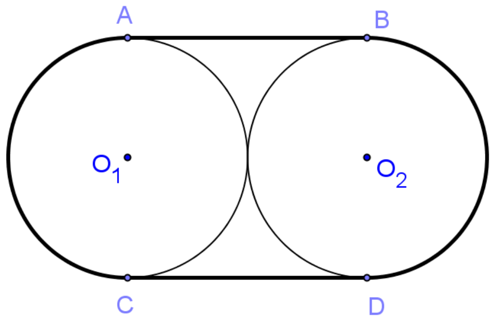


圖 9.2-96

想法：此線段至少需$\overset{\frown}{AC}+\overline{AB}+\overset{\frown}{BD}+\overline{CD}$

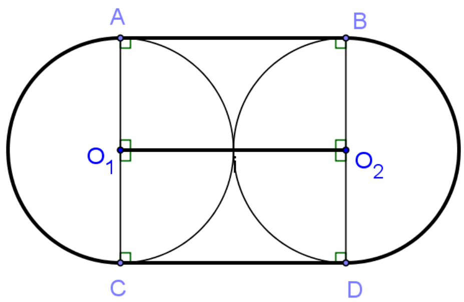


圖 9.2-96(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{O_1O_2}$、$\overline{O_1A}$、$\overline{O_1C}$、$\overline{O_2B}$、$\overline{O_2D}$，如圖 9.2-96(a)所示，其中$\overline{O_1A}\perp\overline{AB}$、$\overline{O_1C}\perp\overline{CD}$、$\overline{O_2B}\perp\overline{AB}$、$\overline{O_2D}\perp\overline{CD}$ (即$\angle BAO_1=\angle ABO_2=\angle DCO_1=\angle CDO_2=90°$)	作圖 & 已知$\overline{AB}$與$\overline{CD}$為兩圓的外公切線 & 圓心與切點的連線垂直切線
(2) 在四邊形 AO_1O_2B 中 $\overline{O_1A}\parallel\overline{O_2B}$ $\overline{O_1A}=\overline{O_2B}=5$ 公分	如圖 9.2-96(a)所示 由(1) $\overline{O_1A}\perp\overline{AB}$、$\overline{O_2B}\perp\overline{AB}$ & 垂直於同一線段的兩線互相平行 已知兩圓半徑皆為 5 公分
(3) 四邊形 AO_1O_2B 為平行四邊形	由(2) & 一組對邊平行且相等的四邊形為平行四邊形
(4) $\overline{AB}\parallel\overline{O_1O_2}$ $\angle BAO_1+\angle AO_1O_2=180°$ & $\angle ABO_2+\angle BO_2O_1=180°$	由(3) 平行四邊形對邊互相平行 & 兩平行線間同側內角互補

(5) $\angle AO_1O_2 = 180° - \angle BAO_1$ $= 180° - 90° = 90°$ & $\angle BO_2O_1 = 180° - \angle ABO_2$ $= 180° - 90° = 90°$	由(4) 等量減法公理 & (1) $\angle BAO_1 = \angle ABO_2 = 90°$
(6) $\angle BAO_1 = \angle ABO_2 = \angle AO_1O_2$ $= \angle BO_2O_1 = 90°$	由(1) $\angle BAO_1 = \angle ABO_2 = 90°$ & (5) $\angle AO_1O_2 = \angle BO_2O_1 = 90°$ 遞移律
(7) 四邊形 AO_1O_2B 為矩形	由(3) & (6) 四個角都為直角的平行四邊形為矩形
(8) $\overline{AB} = \overline{O_1O_2} = 2\times(5$ 公分$) = 10$ 公分	由(7) 矩形對邊相等 & 已知圓 O_1 與圓 O_2 外切，且兩圓半徑皆為 5 公分
(9) 同理可證： $\angle DCO_1 = \angle CDO_2 = \angle CO_1O_2$ $= \angle DO_2O_1 = 90°$ & 四邊形 CO_1O_2D 為矩形 & $\overline{CD} = \overline{O_1O_2} = 2\times(5$ 公分$) = 10$ 公分	重複(1)~(8)步驟 同理可證
(10) $\angle AO_1C + \angle AO_1O_2 + \angle CO_1O_2 = 360°$ $\angle BO_2D + \angle BO_2O_1 + \angle DO_2O_1 = 360°$	如圖 9.2-96(a)所示 全量等於分量之和
(11) $\angle AO_1C = 360° - \angle AO_1O_2 - \angle CO_1O_2$ $= 360° - 90° - 90° = 180°$ $\angle BO_2D = 360° - \angle BO_2O_1 - \angle DO_2O_1$ $= 360° - 90° - 90° = 180°$	由(10) 等量減法公理 & (6) $\angle AO_1O_2 = \angle BO_2O_1 = 90°$ & (9) $\angle CO_1O_2 = \angle DO_2O_1 = 90°$
(12) AO_1C 與 BO_2D 皆為圓心角為 180°的扇形	由(11) & $\overline{O_1A}$、$\overline{O_1C}$、$\overline{O_2B}$、$\overline{O_2D}$皆為圓半徑
(13) 圓 O_1 直徑＝圓 O_2 直徑 $= 2\times(5$ 公分$) = 10$ 公分	圓的直徑為圓半徑的 2 倍 & 已知兩圓半徑皆為 5 公分
(14) 圓 O_1 周長＝圓 O_2 周長 $= (10$ 公分$)\times\pi = 10\pi$公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & (13) 圓 O_1 直徑＝圓 O_2 直徑＝10 公分
(15) $\overset{\frown}{AC} = \frac{180°}{360°}\times$圓 O_1 周長 $= \frac{180°}{360°}\times(10\pi$公分$) = 5\pi$公分	弧長$= \frac{\text{圓心角度}}{360°}\times$圓周長 & 由(12) AO_1C 為圓心角為 180°的扇形 & (14) 圓 O_1 周長＝10π公分
(16) $\overset{\frown}{BD} = \frac{180°}{360°}\times$圓 O_2 周長 $= \frac{180°}{360°}\times(10\pi$公分$) = 5\pi$公分	弧長$= \frac{\text{圓心角度}}{360°}\times$圓周長 & 由(12) BO_2D 為圓心角為 180°的扇形 & (14) 圓 O_2 周長＝10π公分

(17) 此線段至少需 $=\overset{\frown}{AC}+\overline{AB}+\overset{\frown}{BD}+\overline{CD}$ $=5\pi$公分$+10$ 公分$+5\pi$公分$+10$ 公分 $=(20+10\pi)$公分	全量等於分量之和 & (15) $\overset{\frown}{AC}=5\pi$公分 (16) $\overset{\frown}{BD}=5\pi$公分 (8) $\overline{AB}=10$ 公分 (9) $\overline{CD}=10$ 公分

習題 9.2-22

圖 9.2-97 是用三個半徑皆為 5 cm 的圓兩兩外切所排列成的形體。若想用一條緞帶環繞此形體一周，則此緞帶至少需要___________cm。

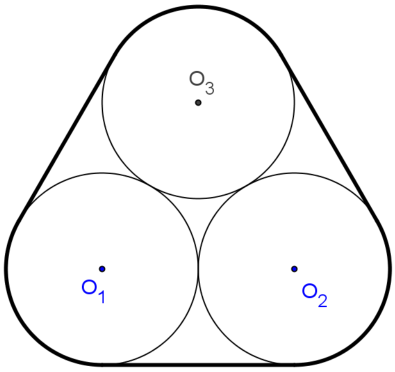


圖 9.2-97

想法：此線段至少需$\overset{\frown}{AB}+\overline{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overline{DE}+\overset{\frown}{EF}+\overline{AF}$，如圖 9.2-97(a)

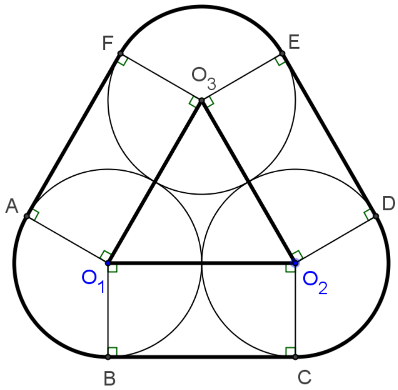


圖 9.2-97(a)

解：

敘述	理由
(1) 在圖形上標示出三圓的圓心 O_1、O_2、O_3；再標示出圓 O1 與圓 O3 外公切線 $\overline{AF}$、圓 O2 與圓 O3 外公切線$\overline{DE}$、圓 O1 與圓 O2 外公切線$\overline{BC}$；連接$\overline{O_1O_2}$、$\overline{O_2O_3}$、$\overline{O_3O_1}$、$\overline{O_1A}$、$\overline{O_1B}$、$\overline{O_2C}$、$\overline{O_2D}$、$\overline{O_3E}$、$\overline{O_3F}$；如圖 9.2-97(a)所示	作圖
(2) $\angle AFO_3=\angle FAO_1=\angle FO_3O_1=\angle AO_1O_3=90°$ & 四邊形 AO_1O_3F 為矩形 & $\overline{AF}=\overline{O_1O_3}=2\times(5$ 公分$)=10$ 公分	由例題 9.2-27 可得知

(3) $\angle BCO_2 = \angle CBO_1 = \angle BO_1O_2 = \angle CO_2O_1 = 90°$ & 四邊形 BO_1O_2C 為矩形 & $\overline{BC} = \overline{O_1O_2} = 2\times(5$ 公分$) = 10$ 公分	由例題 9.2-27 可得知
(4) $\angle DEO_3 = \angle EDO_2 = \angle DO_2O_3 = \angle EO_3O_2 = 90°$ & 四邊形 DO_2O_3E 為矩形 & $\overline{DE} = \overline{O_2O_3} = 2\times(5$ 公分$) = 10$ 公分	由例題 9.2-27 可得知
(5) $\triangle O_1O_2O_3$ 中 $\overline{O_1O_3} = \overline{O_1O_2} = \overline{O_2O_3} = 10$ 公分	如圖 9.2-97(a)所示 已知圖形為三個半徑皆為 5 cm 的圓兩兩外切所排列成的形體
(6) $\triangle O_1O_2O_3$ 為正三角形	由(5) & 等邊三角形為正三角形
(7) $\angle O_1O_2O_3 = \angle O_2O_3O_1 = \angle O_3O_1O_2 = 60°$	由(6) & 正三角形三個內角皆為 60°
(8) $\angle AO_1B + \angle AO_1O_3 + \angle BO_1O_2 + \angle O_3O_1O_2 = 360°$ $\angle CO_2D + \angle CO_2O_1 + \angle DO_2O_3 + \angle O_1O_2O_3 = 360°$ $\angle EO_3F + \angle EO_3O_2 + \angle FO_3O_1 + \angle O_2O_3O_1 = 360°$	如圖 9.2-97(a)所示 全量等於分量之和
(9) $\angle AO_1B$ $= 360° - \angle AO_1O_3 - \angle BO_1O_2 - \angle O_3O_1O_2$ $= 360° - 90° - 90° - 60° = 120°$ $\angle CO_2D$ $= 360° - \angle CO_2O_1 - \angle DO_2O_3 - \angle O_1O_2O_3$ $= 360° - 90° - 90° - 60° = 120°$ $\angle EO_3F$ $= 360° - \angle EO_3O_2 - \angle FO_3O_1 - \angle O_2O_3O_1$ $= 360° - 90° - 90° - 60° = 120°$	由(8) 等量減法公理 & (2) $\angle AO_1O_3 = \angle FO_3O_1 = 90°$ (3) $\angle BO_1O_2 = \angle CO_2O_1 = 90°$ (4) $\angle DO_2O_3 = \angle EO_3O_2 = 90°$ & (7) $\angle O_1O_2O_3 = \angle O_2O_3O_1 = \angle O_3O_1O_2 = 60°$
(10) AO_1B 與 CO_2D 與 EO_3F 皆為圓心角為 120° 的扇形	由(9) & $\overline{O_1A}$、$\overline{O_1B}$、$\overline{O_2C}$、$\overline{O_2D}$、$\overline{O_3E}$、$\overline{O_3F}$皆為圓半徑
(11) 圓 O_1 直徑 = 圓 O_2 直徑 = 圓 O_3 直徑 $= 2\times(5$ 公分$) = 10$ 公分	圓的直徑為圓半徑的 2 倍 & 已知圖形為三個半徑皆為 5 cm 的圓兩兩外切所排列成的形體
(12) 圓 O_1 周長 = 圓 O_2 周長 = 圓 O_3 周長 $= (10$ 公分$)\times\pi = 10\pi$ 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & (11) 圓 O_1 直徑 = 圓 O_2 直徑 = 圓 O_3 直徑 = 10 公分

(13) $\overset{\frown}{AB}=\dfrac{120^{\circ}}{360^{\circ}}\times$圓 O_1 周長 $=\dfrac{120^{\circ}}{360^{\circ}}\times(10\pi$公分$)=\dfrac{10\pi}{3}$ 公分	弧長$=\dfrac{圓心角度}{360^{\circ}}\times$圓周長 & 由(10) AO_1B 為圓心角為 120°的扇形 & (12)圓 O_1 周長＝10π公分
(14) $\overset{\frown}{CD}=\dfrac{120^{\circ}}{360^{\circ}}\times$圓 O_2 周長 $=\dfrac{120^{\circ}}{360^{\circ}}\times(10\pi$公分$)=\dfrac{10\pi}{3}$ 公分	弧長$=\dfrac{圓心角度}{360^{\circ}}\times$圓周長 & 由(10) CO_2D 為圓心角為 120°的扇形 & (12)圓 O_2 周長＝10π公分
(15) $\overset{\frown}{EF}=\dfrac{120^{\circ}}{360^{\circ}}\times$圓 O_3 周長 $=\dfrac{120^{\circ}}{360^{\circ}}\times(10\pi$公分$)=\dfrac{10\pi}{3}$ 公分	弧長$=\dfrac{圓心角度}{360^{\circ}}\times$圓周長 & 由(10) EO_3F 為圓心角為 120°的扇形 & (12)圓 O_3 周長＝10π公分
(16) 此線段至少需 $=\overset{\frown}{AB}+\overline{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overline{DE}+\overset{\frown}{EF}+\overline{AF}$ $=\dfrac{10\pi}{3}$公分＋10 公分＋$\dfrac{10\pi}{3}$公分＋10 公分＋$\dfrac{10\pi}{3}$公分＋10 公分 $=(30+10\pi)$公分	全量等於分量之和 & (13) $\overset{\frown}{AB}=\dfrac{10\pi}{3}$公分、(14) $\overset{\frown}{CD}=\dfrac{10\pi}{3}$公分、(15) $\overset{\frown}{EF}=\dfrac{10\pi}{3}$公分 & (2) $\overline{AF}$＝10 公分、(3) $\overline{BC}$＝10 公分、(4) $\overline{DE}$＝10 公分

習題 9.2-23

圖 9.2-98 中，圓 O 為半徑 6 公分的圓，求圓 O 面積為何？

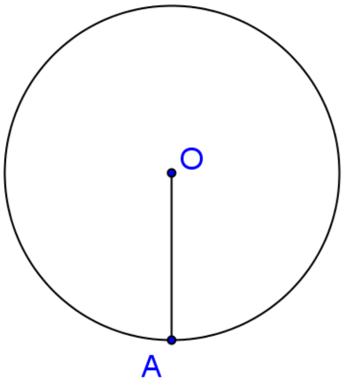


圖 9.2-98

想法：圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積

解：

敘述	理由
(1) 圓 O 半徑$\overline{OA}$＝6 公分	已知圓 O 為半徑 6 公分的圓
(2) 圓 O 面積＝$\pi\times\overline{OA}^2$ ＝$\pi\times$(6 公分)^2 ＝36π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 由(1) 圓 O 半徑$\overline{OA}$＝6 公分

習題 9.2-24

圖 9.2-99 中，3 個小圓 O_1、圓 O_2、圓 O_3 為等圓且 O_1、O_2、O_3 三點均在 $\overline{AD}$ 上，已知圓 O_1、圓 O_2 外切於 B 點，圓 O_1、圓 O_3 外切於 C 點，且圓 O_2、圓 O_3 分別與大圓 O_1 內切於 A、D 兩點，若大圓 O_1 半徑 $\overline{O_1A}$＝15 公分，求灰色部分圖形的面積為何？

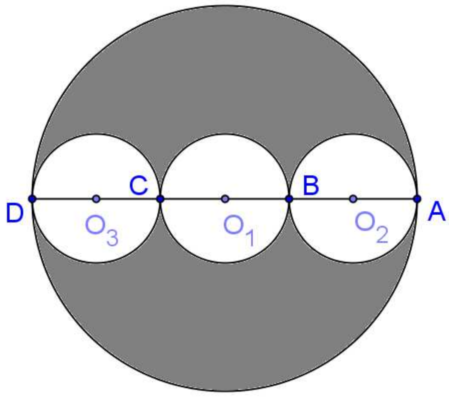


圖 9.2-99

想法： 灰色部分圖形的面積

＝大圓 O_1 面積－小圓 O_1 面積－小圓 O_2 面積－小圓 O_3 面積

解：

	敘述	理由
(1)	大圓 O_1 面積 ＝$\pi\times\overline{O_1A}^2$ ＝$\pi\times$(15 公分)^2＝225π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 已知大圓 O_1 半徑 $\overline{O_1A}$＝15 公分
(2)	大圓 O_1 直徑 $\overline{AD}$＝2$\overline{O_1A}$ ＝2×(15 公分) ＝30 公分	圓直徑為圓半徑的 2 倍 & 已知大圓 O_1 半徑 $\overline{O_1A}$＝15 公分
(3)	小圓 O_1 直徑 $\overline{BC}$ ＝小圓 O_2 直徑 $\overline{AB}$ ＝小圓 O_3 直徑 $\overline{CD}$	已知小圓 O_1、圓 O_2、圓 O_3 為等圓 & 等圓直徑相等
(4)	$\overline{AD}=\overline{BC}+\overline{AB}+\overline{CD}$ $=\overline{CD}+\overline{CD}+\overline{CD}=3\overline{CD}$	如圖 9.2-99 所示，全量等於分量之和 & 由(3) $\overline{BC}=\overline{AB}=\overline{CD}$
(5)	$\overline{CD}=\overline{AD}\div 3$＝(30 公分)÷3＝10 公分	由(4) 等量除法公理 & 由(2) $\overline{AD}$＝30 公分
(6)	小圓 O_1 直徑 $\overline{BC}$ ＝小圓 O_2 直徑 $\overline{AB}$ ＝小圓 O_3 直徑 $\overline{CD}$＝10 公分	由(4) & (5) 遞移律
(7)	小圓 O_1 半徑 $\overline{O_1B}$ ＝$\overline{BC}\div 2$＝(10 公分)÷2＝5 公分	由(6) & 半徑為直徑的一半

小圓 O_2 半徑 $\overline{O_2A}$ $=\overline{AB}\div2=(10$ 公分$)\div2=5$ 公分 小圓 O_3 半徑 $\overline{O_3C}$ $=\overline{CD}\div2=(10$ 公分$)\div2=5$ 公分	
(8) 小圓 O_1 面積 $=\pi\times\overline{O_1B}^2$ $=\pi\times(5$ 公分$)^2=25\pi$ 平方公分 小圓 O_2 面積 $=\pi\times\overline{O_2A}^2$ $=\pi\times(5$ 公分$)^2=25\pi$ 平方公分 小圓 O_3 面積 $=\pi\times\overline{O_3C}^2$ $=\pi\times(5$ 公分$)^2=25\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (6) 小圓 O_1 半徑 $\overline{O_1B}$ ＝小圓 O_2 半徑 $\overline{O_2A}$ ＝小圓 O_3 半徑 $\overline{O_3C}=5$ 公分
(9) 灰色部分圖形的面積 ＝大圓 O_1 面積－小圓 O_1 面積－ 小圓 O_2 面積－小圓 O_3 面積 $=(225\pi-25\pi-25\pi-25\pi)$ 平方公分 $=150\pi$ 平方公分	全量等於分量之和 & (1) 大圓 O_1 面積 $=225\pi$ 平方公分、 (8) 小圓 O_1 面積＝小圓 O_2 面積 ＝小圓 O_3 面積 $=25\pi$ 平方公分

習題 9.2-25

如圖 9.2-100，圓 O 為正方形 ABCD 的內切圓，E、F、G、H 為四個切點，若正方形 ABCD 邊長為 16 公分，則灰色部分圖形面積為何？

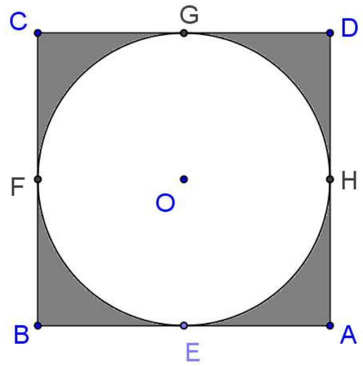


圖 9.2-100

想法：(1) 灰色部分圖形面積＝正方形 ABCD 面積－圓 O 面積

(2) 利用例題 9.2-13 結論

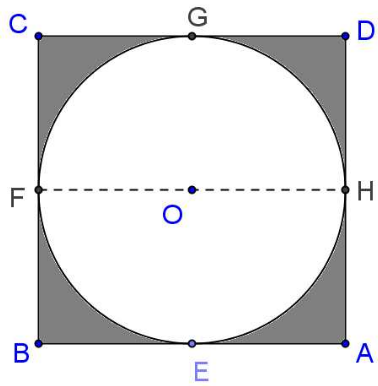


圖 9.2-100(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{FH}$，如上圖 9.2-100(a)所示， 則$\overline{FH}$為圓 O 直徑，且$\overline{FH}=\overline{AB}=16$ 公分	作圖 & 已知圓 O 為正方形 ABCD 的內切圓，E、F、G、H 為四個切點 & 利用例題 9.2-13 結論 & 已知正方形 ABCD 邊長為 16 公分
(2) 圓 O 半徑$\overline{OF}=\overline{FH}\div 2$ $=(16$ 公分$)\div 2=8$ 公分	同圓半徑為直徑的一半 & 由(1) 圓 O 直徑$\overline{FH}=16$ 公分
(3) 圓 O 面積$=\pi\times\overline{OF}^2=\pi\times(8$ 公分$)^2$ $=64\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 由(2) 圓 O 半徑$\overline{OF}=8$ 公分
(4) 正方形 ABCD 面積$=\overline{AB}^2=(16$ 公分$)^2$ $=256$ 平方公分	正方形面積為邊長的平方 & 已知正方形 ABCD 邊長為 16 公分

(5) 灰色部分圖形面積 ＝正方形 ABCD 面積－圓 O 面積 ＝(256 平方公分)－(64π 平方公分) ＝(256－64π) 平方公分	全量等於分量之和 & (4)正方形 ABCD 面積＝256 平方公分 (3) 圓 O 面積＝64π 平方公分

習題 9.2-26

如圖 9.2-101，$\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 為圓 O 的半徑，$\overline{OA}=\overline{OB}=6$ 公分。若∠AOB＝144°，則：
(1) 灰色部分為何圖形？
(2) 灰色部分為圓 O 的幾倍？
(3) 灰色部分的面積為何？

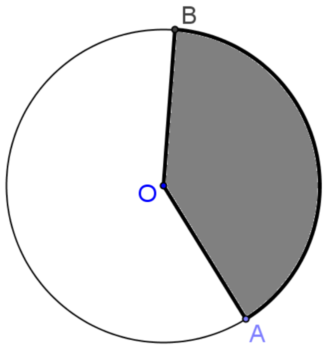


圖 9.2-101

想法：(1) 扇形定義

(2) 扇形面積＝$\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}$×圓面積

解：

敘述	理由
(1) 灰色部分為扇形 AOB	已知$\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 為圓 O 的半徑 & 扇形定義
(2) 扇形 AOB 為圓 O 的($\dfrac{144^\circ}{360^\circ}=\dfrac{2}{5}$)倍	周角為 360° & 已知扇形 AOB 的圓心角∠AOB＝144°
(3) 圓 O 面積＝$\pi\times\overline{OA}^2$ ＝π×(6 公分)^2 ＝36π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 已知圓 O 半徑$\overline{OA}=6$ 公分
(4) 扇形 AOB 的面積 ＝$\dfrac{144^\circ}{360^\circ}$×圓 O 面積 ＝$\dfrac{2}{5}$×(36π 平方公分) ＝$\dfrac{72}{5}$π 平方公分	由(2) 扇形 AOB 為圓 O 的($\dfrac{144^\circ}{360^\circ}=\dfrac{2}{5}$)倍 & (3) 圓 O 面積＝36π 平方公分 已證

習題 9.2-27

圖 9.2-102 中，兩同心圓的半徑$\overline{OA}$＝8 公分，$\overline{OC}$＝5 公分，且∠AOB＝120°，則灰色部分面積為何？

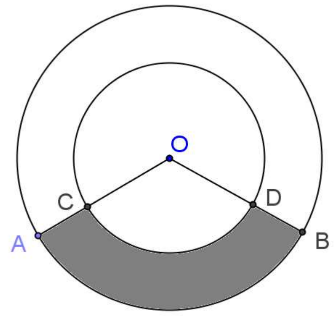


圖 9.2-102

想法：灰色部分面積＝扇形 AOB 的面積－扇形 COD 的面積

解：

敘述	理由
(1) 以$\overline{OA}$為半徑的圓 O 面積 $=\pi\times\overline{OA}^2$ $=\pi\times(8\text{ 公分})^2=64\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 已知圓的半徑$\overline{OA}$＝8 公分
(2) 扇形 AOB 的面積 $=\dfrac{120^\circ}{360^\circ}\times$以$\overline{OA}$為半徑的圓 O 面積 $=\dfrac{120^\circ}{360^\circ}\times(64\pi\text{平方公分})=\dfrac{64\pi}{3}$ 平方公分	扇形面積＝$\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積 & 已知扇形 AOB 圓心角∠AOB＝120° & (1) 以$\overline{OA}$為半徑的圓 O 面積 ＝64π 平方公分
(3) 以$\overline{OC}$為半徑的圓 O 面積 $=\pi\times\overline{OC}^2$ $=\pi\times(5\text{ 公分})^2=25\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 已知圓的半徑$\overline{OC}$＝5 公分
(4) 扇形 COD 的面積 $=\dfrac{120^\circ}{360^\circ}\times$以$\overline{OC}$為半徑的圓 O 面積 $=\dfrac{120^\circ}{360^\circ}\times(25\pi\text{平方公分})=\dfrac{25\pi}{3}$ 平方公分	扇形面積＝$\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積 & 已知扇形 COD 圓心角∠COD＝100° & (3) 以$\overline{OC}$為半徑的圓 O 面積 ＝25π 平方公分
(5) 灰色部分面積 ＝扇形 AOB 的面積－扇形 COD 的面積 $=\dfrac{64\pi}{3}$ 平方公分$-\dfrac{25\pi}{3}$ 平方公分 ＝13π 平方公分	如圖 9.2-102 所示 全量等於分量之和 & (2)扇形 AOB 面積＝$\dfrac{64\pi}{3}$ 平方公分 (4)扇形 COD 面積＝$\dfrac{25\pi}{3}$ 平方公分

習題 9.2-28

圖 9.2-103 兩同心圓的半徑$\overline{OA}$＝12 公分，$\overline{OC}$＝5 公分。若 $\overset{\frown}{AB}$＝8π 公分，則：

(1) $\overset{\frown}{CD}$＝？

(2) 灰色部分面積為何？

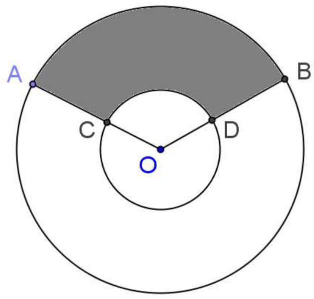


圖 9.2-103

想法：灰色部分面積＝扇形 AOB 的面積－扇形 COD 的面積

解：

敘述	理由
(1) 以$\overline{OA}$為半徑的圓 O 周長 ＝$2\overline{OA}\times\pi$＝2×(12 公分)×π＝24π 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & 直徑為半徑的 2 倍 & 已知$\overline{OA}$＝12 公分
(2) $\overset{\frown}{AB}=\dfrac{\angle AOB}{360^{\circ}}\times$以$\overline{OA}$為半徑的圓 O 周長	$\overset{\frown}{AB}$所對的圓心角為∠AOB & 周角為 360°
(3) 8π 公分＝$\dfrac{\angle AOB}{360^{\circ}}\times$(24π 公分)	由(2) & 已知$\overset{\frown}{AB}$＝8π 公分 & (1)以$\overline{OA}$為半徑的圓 O 周長＝24π公分
(4) ∠AOB＝120° (即∠COD＝120°)	由(3) 求∠AOB 之值
(5) 以$\overline{OC}$為半徑的圓 O 周長 ＝$2\overline{OC}\times\pi$＝2×(5 公分)×π＝10π 公分	圓周長等於直徑乘以圓周率 & 直徑為半徑的 2 倍 & 已知$\overline{OC}$＝5 公分
(6) $\overset{\frown}{CD}=\dfrac{\angle COD}{360^{\circ}}\times$以$\overline{OC}$為半徑的圓 O 周長 $=\dfrac{120^{\circ}}{360^{\circ}}\times$(10π 公分)＝$\dfrac{10\pi}{3}$ 公分	$\overset{\frown}{CD}$所對的圓心角為∠COD & 周角為 360° & (4) ∠COD＝120° & (5)以$\overline{OC}$為半徑的圓 O 周長＝10π公分
(7) 以$\overline{OA}$為半徑的圓 O 面積 ＝$\pi\times\overline{OA}^2$ ＝π×(12 公分)^2＝144π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 已知圓的半徑$\overline{OA}$＝12 公分

(8) 扇形 AOB 的面積 $=\frac{120^\circ}{360^\circ}\times$以$\overline{OA}$為半徑的圓 O 面積 $=\frac{120^\circ}{360^\circ}\times(144\pi$平方公分$)$ $=48\pi$ 平方公分	扇形面積$=\frac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積 & (4) 扇形 AOB 圓心角$\angle AOB=120^\circ$ & (7) 以$\overline{OA}$為半徑的圓 O 面積 $=144\pi$ 平方公分
(9) 以$\overline{OC}$為半徑的圓 O 面積 $=\pi\times\overline{OC}^2$ $=\pi\times(5$ 公分$)^2=25\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 已知圓的半徑$\overline{OC}=5$ 公分
(10) 扇形 COD 的面積 $=\frac{120^\circ}{360^\circ}\times$以$\overline{OC}$為半徑的圓 O 面積 $=\frac{120^\circ}{360^\circ}\times(25\pi$平方公分$)$ $=\frac{25\pi}{3}$ 平方公分	扇形面積$=\frac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積 & (4) 扇形 COD 圓心角$\angle COD=120^\circ$ & (9) 以$\overline{OC}$為半徑的圓 O 面積 $=25\pi$ 平方公分
(11) 灰色部分面積 $=$扇形 AOB 的面積$-$扇形 COD 的面積 $=48\pi$ 平方公分$-\frac{25\pi}{3}$ 平方公分 $=\frac{119\pi}{3}$ 平方公分	如圖 9.2-103 所示 全量等於分量之和 & (8)扇形 AOB 面積$=48\pi$ 平方公分 (10)扇形 COD 面積$=\frac{25\pi}{3}$ 平方公分

習題 9.2-29

圖 9.2-104 為兩個半徑同為 8 公分的半圓外切所形成的圖形，求此圖形的面積為何？

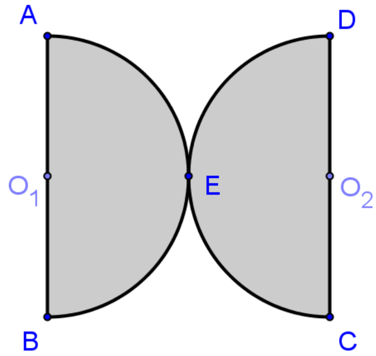


圖 9.2-104

想法：此圖形的面積＝半圓 O_1AB 面積＋半圓 O_2CD 面積

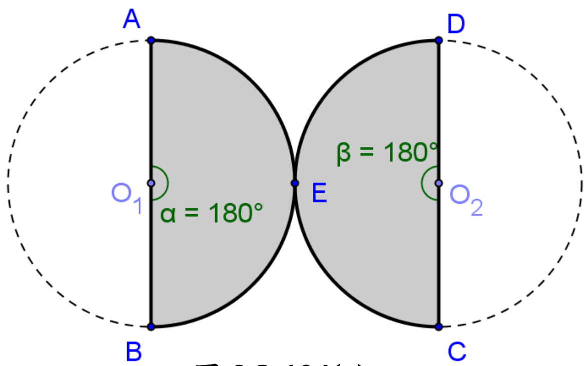


圖 9.2-104(a)

解：

敘述	理由
(1) 分別以 O_1、O_2 為圓心，$\overline{O_1A}$、$\overline{O_2C}$為半徑完成此兩圓，如上圖(a)所示；其中$\overline{O_1A}=\overline{O_2C}$＝8 公分	作圖 & 已知此圖形為兩個半徑同為 8 公分的半圓所形成的圖形
(2) 以$\overline{O_1A}$為半徑的圓 O_1 面積 $=\pi\times\overline{O_1A}^2$ ＝π×(8 公分)^2＝64π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 由(1) $\overline{O_1A}$＝8 公分
(3) 半圓 O_1AB 的面積 $=\dfrac{180^\circ}{360^\circ}\times$以$\overline{O_1A}$為半徑的圓 O_1 面積 $=\dfrac{180^\circ}{360^\circ}\times$(64π 平方公分) ＝32π 平方公分	已知此圖形為兩個半徑同為 8 公分的半圓所形成的圖形 & 扇形面積$=\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積 & 半圓圓心角為 180° & (2) 以$\overline{O_1A}$為半徑的圓 O_1 面積＝64π 平方公分

(4) 以$\overline{O_2C}$為半徑的圓 O_2 面積 $=\pi\times\overline{O_2C}^2$ $=\pi\times(8$ 公分$)^2=64\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 由(1) $\overline{O_2C}=8$ 公分
(5) 半圓 O_2CD 的面積 $=\frac{180^{\circ}}{360^{\circ}}\times$以$\overline{O_2C}$為半徑的圓 O_2 面積 $=\frac{180^{\circ}}{360^{\circ}}\times(64\pi$平方公分$)$ $=32\pi$ 平方公分	已知此圖形為兩個半徑同為 8 公分的半圓所形成的圖形 & 扇形面積$=\frac{\text{圓心角度數}}{360^{\circ}}\times$圓面積 & 半圓圓心角為 180° & (4) 以$\overline{O_2C}$為半徑的圓 O_2 面積 $=64\pi$ 平方公分
(6) 此圖形的面積 ＝半圓 O_1AB 面積＋半圓 O_2CD 面積 $=(32\pi$ 平方公分$)+(32\pi$ 平方公分$)$ $=64\pi$ 平方公分	全量等於分量之和 & (3) 半圓 O_1AB 的面積$=32\pi$ 平方公分、 (5) 半圓 O_2CD 的面積$=32\pi$ 平方公分

習題 9.2-30

圖 9.2-105 為三個半圓所圍成的圖形，其三個圓心 O_1、O_2、O_3 皆在$\overline{AD}$上，已知小圓半徑$\overline{O_2A}=\overline{O_3C}=6$ 公分、大圓半徑$\overline{O_1B}=12$ 公分，請問著色部分的圖形面積為何？

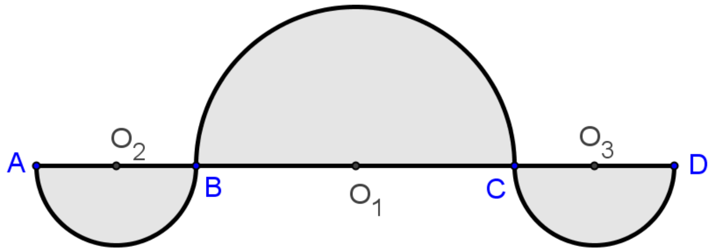


圖 9.2-105

想法：著色部分圖形面積＝半圓 O_1BC 面積＋半圓 O_2AB 面積＋半圓 O_3CD 面積

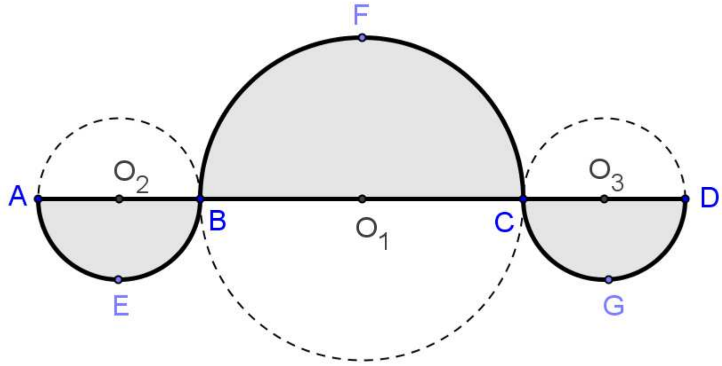


圖 9.2-105(a)

解：

敘述	理由
(1) 分別以 O_1、O_2、O_3 為圓心，以$\overline{O_1B}$、$\overline{O_2A}$、$\overline{O_3C}$為半徑完成此三圓，如上圖(a)所示	作圖
(2) 以$\overline{O_1B}$為半徑的圓 O_1 面積 $=\pi\times\overline{O_1B}^2$ $=\pi\times(12$ 公分$)^2=144\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 已知$\overline{O_1B}=12$ 公分
(3) 半圓 O_1BC 的面積 $=\dfrac{180^\circ}{360^\circ}\times$以$\overline{O_1B}$為半徑的圓 O_1 面積 $=\dfrac{180^\circ}{360^\circ}\times(144\pi$ 平方公分$)$ $=72\pi$ 平方公分	已知此圖形為三個半圓所圍成的圖形 & 扇形面積$=\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積 & 半圓圓心角為 180° & (2) 以$\overline{O_1B}$為半徑的圓 O_1 面積 $=144\pi$ 平方公分
(4) 以$\overline{O_2A}$為半徑的圓 O_2 面積 $=\pi\times\overline{O_2A}^2$ $=\pi\times(6$ 公分$)^2=36\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 已知$\overline{O_2A}=6$ 公分

(5) 半圓 O_2AB 的面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times$以$\overline{O_2A}$為半徑的圓 O_2 面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times(36\pi$ 平方公分$)$ $=18\pi$ 平方公分	已知此圖形為三個半圓所圍成的圖形& 扇形面積$=\frac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積 & 半圓圓心角為 180° & (4) 以$\overline{O_2A}$為半徑的圓 O_2 面積 $=36\pi$ 平方公分
(6) 以$\overline{O_3C}$為半徑的圓 O_3 面積 $=\pi\times\overline{O_3C}^2$ $=\pi\times(6$ 公分$)^2=36\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 已知$\overline{O_3C}=6$ 公分
(7) 半圓 O_3CD 的面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times$以$\overline{O_3C}$為半徑的圓 O_3 面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times(36\pi$ 平方公分$)$ $=18\pi$ 平方公分	已知此圖形為三個半圓所圍成的圖形& 扇形面積$=\frac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積 & 半圓圓心角為 180° & (6) 以$\overline{O_3C}$為半徑的圓 O_3 面積 $=36\pi$ 平方公分
(8) 著色部分的圖形面積 $=$半圓 O_1BC 面積$+$半圓 O_2AB 面積 $+$半圓 O_3CD 面積 $=(72\pi+18\pi+18\pi)$ 平方公分 $=108\pi$ 平方公分	全量等於分量之和 & (3) 半圓 O_1BC 的面積$=72\pi$ 平方公分、 (5) 半圓 O_2AB 的面積$=18\pi$平方公分、 (7) 半圓 O_3CD 的面積$=18\pi$ 平方公分

習題 9.2-31

圖 9.2-106 中，大的半圓的圓心為 D 點、直徑為$\overline{AB}$；小圓的圓心為 C 點、直徑為$\overline{DE}$。且小圓與半圓相切於 E 點，若$\overline{AB}$＝16 公分，則灰色部分圖形面積為何？

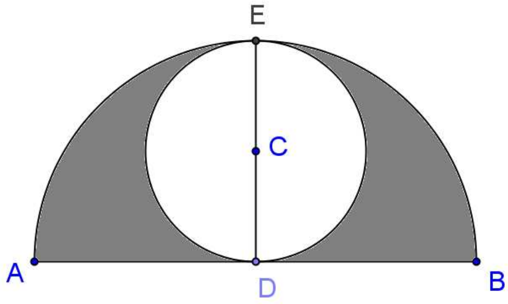


圖 9.2-106

想法：灰色部分圖形面積＝半圓 DAB 面積－圓 C 面積

解：

敘述	理由
(1) $\overline{DE}$也是半圓 DAB 半徑	已知小圓與半圓相切於 E 點 & 半徑定義
(2) 半圓 D 半徑$\overline{DA}=\overline{DB}=\overline{DE}$ $=\overline{AB}\div 2$ ＝(16 公分)÷2 ＝8 公分	同圓半徑為直徑的一半 & 已知大的半圓的圓心為 D 點、直徑為$\overline{AB}$，且$\overline{AB}$＝16 公分
(3) 以$\overline{DA}$為半徑的圓面積 $=\pi\times\overline{DA}^2$ $=\pi\times$(8 公分)^2＝64π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (2) 半圓 D 半徑$\overline{DA}$＝8 公分　已證
(4) 半圓 DAB 面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times$以$\overline{DA}$為半徑的圓面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times$(64π 平方公分) ＝32π 平方公分	扇形面積＝$\frac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積 & 半圓圓心角為 180° & (3)以$\overline{DA}$為半徑的圓面積＝64π平方公分
(5) 圓 C 半徑$\overline{CD}=\overline{CE}=\overline{DE}\div 2$ ＝(8 公分)÷2 ＝4 公分	同圓半徑為直徑的一半 & (2) $\overline{DE}$＝8 公分
(6) 圓 C 面積$=\pi\times\overline{CD}^2=\pi\times$(4 公分)^2 ＝16π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (5) 圓 C 半徑$\overline{CD}$＝4 公分　已證

(7)　灰色部分圖形面積 ＝半圓 DAB 面積－圓 C 面積 ＝($32\pi - 16\pi$) 平方公分 ＝16π 平方公分	全量等於分量之和 ＆ (4) 半圓 DAB 面積＝32π 平方公分、 (6) 圓 C 面積＝16π 平方公分

習題 9.2-32

圖 9.2-107 中，大的半圓的圓心為 F 點、直徑為$\overline{AD}$；三個小半圓的圓心分別為 E 點、F 點及 G 點，直徑分別為$\overline{CD}$、$\overline{BC}$及$\overline{AB}$；已知$\overline{CD}=\overline{BC}=\overline{AB}$，且$\overline{AD}=30$ 公分，則灰色部分圖形面積為何？

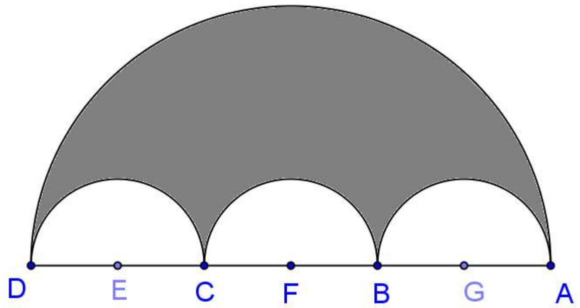


圖 9.2-107

想法： 灰色部分圖形面積

＝半圓 FAD 面積－半圓 ECD 面積－半圓 FBC 面積－半圓 GAB 面積

解：

敘述	理由
(1) 大半圓 F 半徑$\overline{FA}=\overline{FD}$ $=\overline{AD}\div 2$ $=(30$ 公分$)\div 2$ $=15$ 公分	同圓半徑為直徑的一半 & 已知大的半圓的圓心為 F 點、直徑為$\overline{AD}$，且$\overline{AD}=30$ 公分
(2) 以$\overline{FA}$為半徑的圓面積 $=\pi\times\overline{FA}^2$ $=\pi\times(15$ 公分$)^2=225\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (1) 大半圓 F 半徑$\overline{FA}=15$ 公分 已證
(3) 半圓 FAD 面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times$以$\overline{FA}$為半徑的圓面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times(225\pi$ 平方公分$)$ $=\frac{225\pi}{2}$ 平方公分	扇形面積＝$\frac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}$×圓面積 & 已知大的半圓的圓心為 F 點、直徑為$\overline{AD}$ & 半圓圓心角為 180° & (2)以$\overline{FA}$為半徑的圓面積＝225π平方公分
(4) $\overline{AD}=\overline{CD}+\overline{BC}+\overline{AB}$	全量等於分量之和
(5) 30 公分$=\overline{AB}+\overline{AB}+\overline{AB}$	由(4) & 已知$\overline{CD}=\overline{BC}=\overline{AB}$，且$\overline{AD}=30$ 公分
(6) $\overline{AB}=(30$ 公分$)\div 3=10$ 公分	由(5) 求$\overline{AB}$之值

(7) $\overline{CD}=\overline{BC}=\overline{AB}=10$ 公分	由(6) & 已知$\overline{CD}=\overline{BC}=\overline{AB}$ 遞移律
(8) 小半圓 E 半徑 $\overline{EC}=\overline{ED}=\overline{CD}\div 2=(10$ 公分$)\div 2$ $=5$ 公分 小半圓 F 半徑 $\overline{FB}=\overline{FC}=\overline{BC}\div 2=(10$ 公分$)\div 2$ $=5$ 公分 小半圓 G 半徑 $\overline{GA}=\overline{GB}=\overline{AB}\div 2=(10$ 公分$)\div 2$ $=5$ 公分	同圓半徑為直徑的一半 & 三個小半圓的圓心分別為 E 點、F 點及 G 點，直徑分別為$\overline{CD}$、$\overline{BC}$及$\overline{AB}$ & (7) $\overline{CD}=\overline{BC}=\overline{AB}=10$ 公分 已證
(9) 以$\overline{EC}$為半徑的圓面積 $=\pi\times\overline{EC}^2$ $=\pi\times(5$ 公分$)^2=25\pi$ 平方公分 以$\overline{FB}$為半徑的圓面積 $=\pi\times\overline{FB}^2$ $=\pi\times(5$ 公分$)^2=25\pi$ 平方公分 以$\overline{GA}$為半徑的圓面積 $=\pi\times\overline{GA}^2$ $=\pi\times(5$ 公分$)^2=25\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (8) 小半圓 E 半徑$\overline{EC}$＝小半圓 F 半徑$\overline{FB}$ ＝小半圓 G 半徑$\overline{GA}$＝5 公分 已證
(10) 半圓 ECD 面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times$以$\overline{EC}$為半徑的圓面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times(25\pi$ 平方公分$)$ $=\frac{25\pi}{2}$ 平方公分 半圓 FBC 面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times$以$\overline{FB}$為半徑的圓面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times(25\pi$ 平方公分$)$ $=\frac{25\pi}{2}$ 平方公分 半圓 GAB 面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times$以$\overline{GA}$為半徑的圓面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times(25\pi$ 平方公分$)$ $=\frac{25\pi}{2}$ 平方公分	扇形面積$=\frac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積 & 已知三個小半圓的圓心分別為 E 點、F 點及 G 點，直徑分別為$\overline{CD}$、$\overline{BC}$及$\overline{AB}$ & 半圓圓心角為 180° & (9) 以$\overline{EC}$為半徑的圓面積 ＝以$\overline{FB}$為半徑的圓面積 ＝以$\overline{GA}$為半徑的圓面積 ＝25π 平方公分

(11) 灰色部分圖形面積

$=$半圓 FAD 面積$-$半圓 ECD 面積$-$半圓 FBC 面積$-$半圓 GAB 面積

$=(\frac{225\pi}{2}-\frac{25\pi}{2}-\frac{25\pi}{2}-\frac{25\pi}{2})$ 平方公分

$=75\pi$ 平方公分

全量等於分量之和 &

(3) 半圓 FAD 面積$=72\pi$ 平方公分、

(10) 半圓 ECD 面積$=$半圓 FBC 面積

$=$半圓 GAB 面積$=\frac{25\pi}{2}$ 平方公分

習題 9.2-33

圖 9.2-108 中，$\overline{BD}$為圓 A 的直徑，分別以圓 O 半徑$\overline{AB}$與$\overline{AD}$為直徑畫兩半圓，其圓心分別為 C 點與 E 點，已知$\overline{BD}$＝12 公分，則灰色部分圖形面積為何？

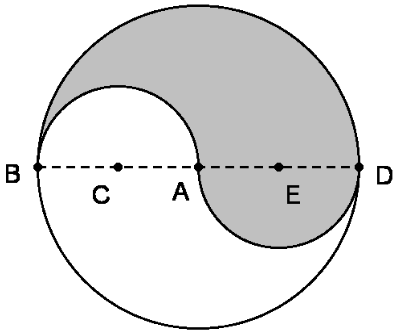


圖 9.2-108

想法：(1) 若半圓 CAB 面積＝半圓 EAD 面積，我們可以將半圓 EAD 面積剪下補到半圓 CAB 面積

(2) 如圖 9.2-108(a)所示：灰色部分圖形面積＝半圓 ABD 面積

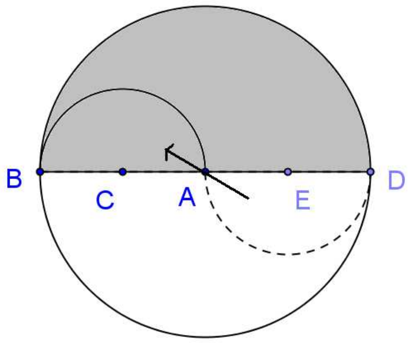


圖 9.2-108(a)

解：

敘述	理由
(1) 圓 A 半徑$\overline{AB}$＝$\overline{AD}$＝$\overline{BD}$÷2 ＝(12 公分)÷2＝6 公分	同圓半徑為直徑的一半 & $\overline{BD}$＝12 公分為圓 A 的直徑
(2) 半圓 C 半徑$\overline{CA}$＝$\overline{CB}$＝$\overline{AB}$÷2 ＝(6 公分)÷2＝3 公分 半圓 E 半徑$\overline{EA}$＝$\overline{ED}$＝$\overline{AD}$÷2 ＝(6 公分)÷2＝3 公分	同圓半徑為直徑的一半 & 已知分別以$\overline{AB}$與$\overline{AD}$為直徑畫兩半圓，其圓心分別為 C 點與 E 點 & (1) $\overline{AB}$＝$\overline{AD}$＝6 公分
(3) 以$\overline{CA}$為半徑的圓面積 ＝$\pi\times\overline{CA}^2$ ＝$\pi\times$(3 公分)^2＝9π 平方公分 以$\overline{EA}$為半徑的圓面積	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (2) 半圓 C 半徑$\overline{CA}$＝半圓 E 半徑$\overline{EA}$ ＝3 公分

$=\pi\times\overline{EA}^2$ $=\pi\times(3$ 公分$)^2=9\pi$ 平方公分	
(4) 半圓 CAB 面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times$以$\overline{CA}$為半徑的圓面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times(9\pi$ 平方公分$)$ $=\frac{9\pi}{2}$ 平方公分 半圓 EAD 面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times$以$\overline{EA}$為半徑的圓面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times(9\pi$ 平方公分$)$ $=\frac{9\pi}{2}$ 平方公分	扇形面積$=\frac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積 & 半圓圓心角為 180° & (3) 以$\overline{CA}$為半徑的圓面積 $=$以$\overline{EA}$為半徑的圓面積 $=9\pi$ 平方公分
(5) 半圓 CAB 面積＝半圓 EAD 面積 $=\frac{9\pi}{2}$ 平方公分	由(4)
(6) 如上圖 9.2-108(a)所示： 灰色部分圖形面積＝半圓 ABD 面積	由(5) & 將塗色的半圓 EAD 面積補到未塗色的半圓 CAB 面積
(7) 以$\overline{AB}$為半徑的圓面積 $=\pi\times\overline{AB}^2$ $=\pi\times(6$ 公分$)^2=36\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (1) $\overline{AB}=6$ 公分
(8) 半圓 ABD 面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times$以$\overline{AB}$為半徑的圓面積 $=\frac{180^\circ}{360^\circ}\times(36\pi$ 平方公分$)$ $=18\pi$ 平方公分	扇形面積$=\frac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積 & 半圓圓心角為 180° & (7)以$\overline{AB}$為半徑的圓面積＝36π平方公分

習題 9.2-34

平面上有 A、C 兩點，若分別以 A、C 為圓心，以$\overline{AC}$為半徑畫兩圓，且$\overleftrightarrow{AC}$分別交兩圓於 B、D 兩點，再分別以$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為直徑畫兩半圓，如圖 9.2-109 所示，已知$\overline{AC}$＝8 公分，則灰色部分圖形面積為何？

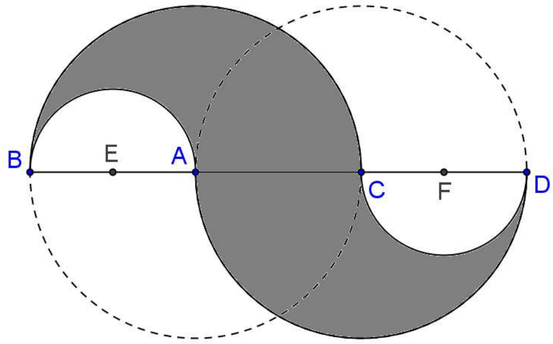


圖 9.2-109

想法：(1) 若能證得 A、C 兩點為以$\overleftrightarrow{HG}$為對稱軸的對稱點、圓 A 與圓 C 以$\overleftrightarrow{HG}$為對稱軸且 E、F 兩點為以$\overleftrightarrow{HG}$為對稱軸的對稱點，則以$\overleftrightarrow{HG}$為對稱軸，將$\overleftrightarrow{HG}$右側的圖形旋轉到$\overleftrightarrow{HG}$左側，使得 C、F、D 三點分別與 A、E、B 三點重合，圓 C 與圓 A 重合，如圖 9.2-109(b)所示

(2) 灰色部分圖形面積＝圓 A 面積－圓 E 面積

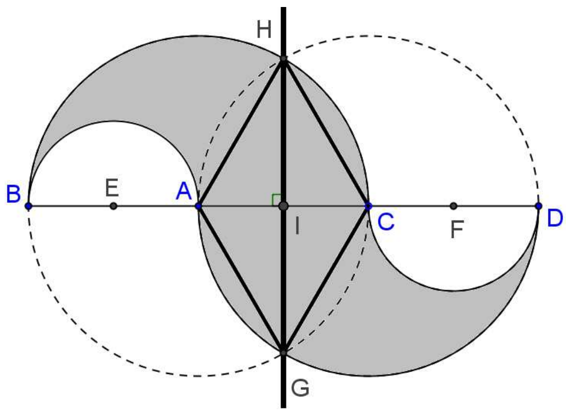


圖 9.2-109(a)

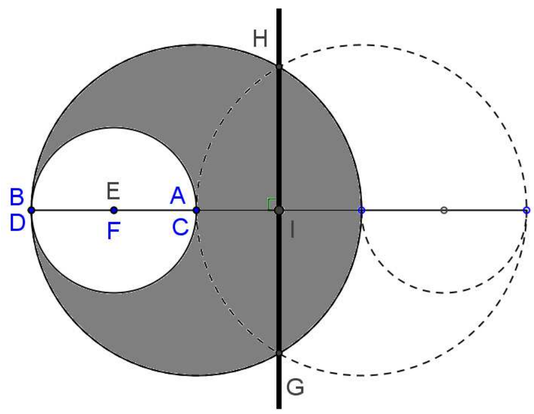


圖 9.2-109(b)

解：

敘述	理由
(1) 假設圓 A 與圓 B 相交於 H、G 兩點， 作$\overleftrightarrow{HG}$ $\overleftrightarrow{AC}$交於 I 點，並連接$\overline{AH}$、 $\overline{CH}$、$\overline{CG}$、$\overline{AG}$，如上圖 9.2-109(a)所示， 則$\overline{AH}=\overline{AG}$為圓 A 半徑、 $\overline{CH}=\overline{CG}$為圓 C 半徑	作圖

(2) 圓 A 中， $\overline{AH}=\overline{AG}=\overline{AB}=\overline{AC}=8$ 公分	已知$\overline{AC}=8$ 公分為圓 A 半徑 & 由(1) $\overline{AH}=\overline{AG}$為圓 A 半徑 & 同圓中半徑皆相等
(3) 圓 C 中， $\overline{CH}=\overline{CG}=\overline{CD}=\overline{AC}=8$ 公分	已知$\overline{AC}=8$ 公分為圓 C 半徑 & 由(1) $\overline{CH}=\overline{CG}$為圓 C 半徑 & 同圓中半徑皆相等
(4) $\overline{AH}=\overline{AG}=\overline{CH}=\overline{CG}=8$ 公分	由(2) $\overline{AH}=\overline{AG}=\overline{AC}=8$ 公分 & (3) $\overline{CH}=\overline{CG}=\overline{AC}=8$ 公分 遞移律
(5) 四邊形 AHCG 為菱形	由(4) & 四邊相等的四邊形為菱形
(6) $\overline{HG}\perp\overline{AC}$ 且 $\overline{IA}=\overline{IC}=\overline{AC}\div2=(8$ 公分$)\div2=4$ 公分	由(5) & 菱形兩對角線互相垂直且平分 & 已知$\overline{AC}=8$ 公分
(7) A、C 兩點為以$\overleftrightarrow{HG}$為對稱軸的對稱點	由(6) $\overline{HG}\perp\overline{AC}$、$\overline{IA}=\overline{IC}$ & 線對稱定義
(8) 圓 A 與圓 C 以$\overleftrightarrow{HG}$為對稱軸	由(7) & 已知圓 A 半徑＝圓 B 半徑
(9) $\overline{IB}=\overline{IA}+\overline{AB}$ $=(4$ 公分$)+(8$ 公分$)=12$ 公分	全量等於分量之和 & (6) $\overline{IA}=4$ 公分、(2) $\overline{AB}=8$ 公分
(10) $\overline{ID}=\overline{IC}+\overline{CD}$ $=(4$ 公分$)+(8$ 公分$)=12$ 公分	全量等於分量之和 & (6) $\overline{IC}=4$ 公分、(3) $\overline{CD}=8$ 公分
(11) $\overline{IB}=\overline{ID}=12$ 公分	由(9) & (10) 遞移律
(12) B、D 兩點為以$\overleftrightarrow{HG}$為對稱軸的對稱點	由(6) $\overline{HG}\perp\overline{AC}$、(11) $\overline{IB}=\overline{ID}$ & 線對稱定義
(13) 以$\overline{AB}$為直徑的半圓中， $\overline{EA}=\overline{EB}=\overline{AB}\div2=(8$ 公分$)\div2=4$ 公分	同圓中半徑為直徑的一半 & (2) $\overline{AB}=8$ 公分
(14) 以$\overline{CD}$為直徑的半圓中， $\overline{FC}=\overline{FD}=\overline{CD}\div2=(8$ 公分$)\div2=4$ 公分	同圓中半徑為直徑的一半 & (3) $\overline{CD}=8$ 公分
(15) $\overline{IE}=\overline{IA}+\overline{EA}$ $=(4$ 公分$)+(4$ 公分$)=8$ 公分	全量等於分量之和 & (6) $\overline{IA}=4$ 公分、(13) $\overline{EA}=4$ 公分
(16) $\overline{IF}=\overline{IC}+\overline{FC}$ $=(4$ 公分$)+(4$ 公分$)=8$ 公分	全量等於分量之和 & (6) $\overline{IC}=4$ 公分、(14) $\overline{FC}=4$ 公分
(17) $\overline{IE}=\overline{IF}=8$ 公分	由(15) & (16) 遞移律
(18) E、F 兩點為以$\overleftrightarrow{HG}$為對稱軸的對稱點	由(6) $\overline{HG}\perp\overline{AC}$、(17) $\overline{IE}=\overline{IF}$ & 線對稱定義

(19) 以$\overleftrightarrow{HG}$為對稱軸，將$\overleftrightarrow{HG}$右側的圖形旋轉到$\overleftrightarrow{HG}$左側，使得 C、F、D 三點分別與 A、E、B 三點重合，圓 C 與圓 A 重合，如上圖 9.2-109(b)所示	由 (7)、(12) & (18) 則 C、F、D 三點分別與 A、E、B 三點重合 由 (8) 則圓 C 與圓 A 重合
(20) 上圖 9.2-109(b)中，以$\overline{AB}$為直徑的半圓與以$\overline{CD}$為直徑的半圓形成一完整的圓，此圓以 E(F)為圓心，以$\overline{AB}$($\overline{CD}$)為直徑	由 (18) & (2) $\overline{AB}$＝8 公分 & (3) $\overline{CD}$＝8 公分
(21) 圓 A 面積＝$\pi\times\overline{AB}^2$＝$\pi\times$(8 公分)^2 ＝64π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (2) 圓 A 半徑$\overline{AB}$＝8 公分
(22) 圓 E 面積＝$\pi\times\overline{EA}^2$＝$\pi\times$(4 公分)^2 ＝16π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (13) $\overline{EA}$＝4 公分
(23) 灰色部分圖形面積 ＝圓 A 面積－圓 E 面積 ＝(64π 平方公分)－(16π 平方公分) ＝48π 平方公分	如圖 9.2-109(b)所示，全量等於分量之和 & (21) 圓 A 面積＝64π 平方公分、 (22) 圓 C 面積＝16π 平方公分

習題 9.2-35

圓 O 中，∠AOB＝45°、∠COD＝60°、∠EOF＝150°，若圓 O 半徑為 8 公分，則灰色部分圖形面積為何？

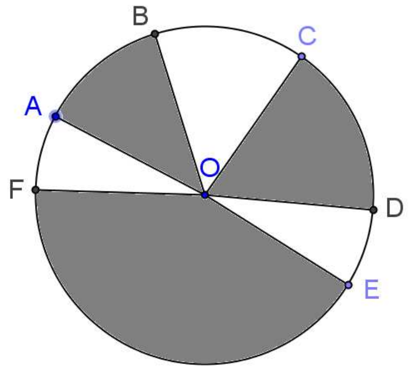


圖 9.2-110

想法：灰色部分圖形面積＝扇形 OAB 面積＋扇形 OCD 面積＋扇形 OEF 面積

解：

敘述	理由
(1) 圓 O 面積＝π×(圓 O 半徑)^2 ＝π×(8 公分)^2 ＝64π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 已知圓 O 半徑為 8 公分
(2) 扇形 OAB 面積＝$\frac{45^\circ}{360^\circ}$×(圓 O 面積) 扇形 OCD 面積＝$\frac{60^\circ}{360^\circ}$×(圓 O 面積) 扇形 OEF 面積＝$\frac{150^\circ}{360^\circ}$×(圓 O 面積)	扇形面積＝$\frac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}$×圓面積 & 已知∠AOB＝45°、∠COD＝60°、∠EOF＝150°
(3) 灰色部分圖形面積 ＝扇形 OAB 面積＋扇形 OCD 面積＋扇形 OEF 面積 ＝$\frac{45^\circ}{360^\circ}$×(圓 O 面積)＋$\frac{60^\circ}{360^\circ}$×(圓 O 面積)＋$\frac{150^\circ}{360^\circ}$×(圓 O 面積) ＝($\frac{45^\circ}{360^\circ}$＋$\frac{60^\circ}{360^\circ}$＋$\frac{150^\circ}{360^\circ}$)×(圓 O 面積) ＝$\frac{255^\circ}{360^\circ}$×(64π 平方公分) ＝$\frac{136\pi}{3}$ 平方公分	全量等於分量之和 & (2) 扇形 OAB 面積＝$\frac{45^\circ}{360^\circ}$×(圓 O 面積) 扇形 OCD 面積＝$\frac{60^\circ}{360^\circ}$×(圓 O 面積) 扇形 OEF 面積＝$\frac{150^\circ}{360^\circ}$×(圓 O 面積) & (1) 圓 O 面積＝64π 平方公分

習題 9.2-36

圖 9.2-111 中，四邊形 ABCD 為邊長為 8 公分的正方形，分別以正方形 A、B、C、D 四個頂點為圓心，以正方形邊長的一半為半徑在正方形外部畫弧，分別交正方形四邊於 E、F、G、H 四點，則灰色部分圖形面積為何？

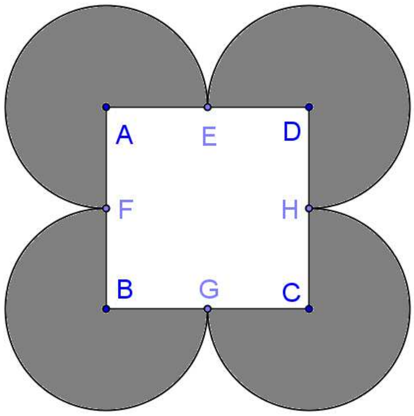


圖 9.2-111

想法： 灰色部分圖形面積

＝扇形 AEF 面積＋扇形 BFG 面積＋扇形 CHG 面積＋扇形 DEH 面積

解：

敘述	理由
(1) $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$ $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=8$ 公分	已知四邊形 ABCD 為邊長為 8 公分的正方形 & 正方形四邊等長且四個角皆為直角
(2) 優角$\angle EAF+\angle A=360°$ 優角$\angle FBG+\angle B=360°$ 優角$\angle HCG+\angle C=360°$ 優角$\angle EDH+\angle D=360°$	全量等於分量之和 & 周角為 360°
(3) 優角$\angle EAF=360°-\angle A$ $=360°-90°=270°$ 優角$\angle FBG=360°-\angle B$ $=360°-90°=270°$ 優角$\angle HCG=360°-\angle C$ $=360°-90°=270°$ 優角$\angle EDH=360°-\angle D$ $=360°-90°=270°$	由(2) 等量減法公理 & (1) $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$ 已證
(4) $\overline{AE}=\overline{AF}=\overline{BF}=\overline{BG}=\overline{CG}=\overline{CH}=\overline{DH}=\overline{DE}=(8$ 公分$)\div 2=4$ 公分	已知分別以正方形 A、B、C、D 四個頂點為圓心，以正方形邊長的一半為半徑畫弧，分別交正方形四邊於 E、F、G、H 四點 & 等圓半徑皆相等

(5) 以$\overline{AE}$為半徑的圓面積 $=\pi\times\overline{AE}^2$ $=\pi\times(4$ 公分$)^2=16\pi$ 平方公分 以$\overline{BF}$為半徑的圓面積 $=\pi\times\overline{BF}^2$ $=\pi\times(4$ 公分$)^2=16\pi$ 平方公分 以$\overline{CG}$為半徑的圓面積 $=\pi\times\overline{CG}^2$ $=\pi\times(4$ 公分$)^2=16\pi$ 平方公分 以$\overline{DH}$為半徑的圓面積 $=\pi\times\overline{DH}^2$ $=\pi\times(4$ 公分$)^2=16\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (4) $\overline{AE}=\overline{BF}=\overline{CG}=\overline{DH}=4$ 公分
(6) 扇形 AEF 面積 $=\frac{270^\circ}{360^\circ}\times$(以$\overline{AE}$為半徑的圓面積) $=\frac{270^\circ}{360^\circ}\times(16\pi$ 平方公分) 扇形 BFG 面積 $=\frac{270^\circ}{360^\circ}\times$(以$\overline{BF}$為半徑的圓面積) $=\frac{270^\circ}{360^\circ}\times(16\pi$ 平方公分) 扇形 CHG 面積 $=\frac{270^\circ}{360^\circ}\times$(以$\overline{CG}$為半徑的圓面積) $=\frac{270^\circ}{360^\circ}\times(16\pi$ 平方公分) 扇形 DEH 面積 $=\frac{270^\circ}{360^\circ}\times$(以$\overline{DH}$為半徑的圓面積) $=\frac{270^\circ}{360^\circ}\times(16\pi$ 平方公分)	扇形面積$=\frac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積 & (3) 優角∠EAF＝優角∠FBG＝優角∠HCG ＝優角∠EDH＝270°、 (5) 以$\overline{AE}$為半徑的圓面積 ＝以$\overline{BF}$為半徑的圓面積 ＝以$\overline{CG}$為半徑的圓面積 ＝以$\overline{DH}$為半徑的圓面積 $=16\pi$ 平方公分
(7) 灰色部分圖形面積 ＝扇形 AEF 面積＋扇形 BFG 面積＋扇形 CHG 面積＋扇形 DEH 面積 $=(\frac{270^\circ}{360^\circ}+\frac{270^\circ}{360^\circ}+\frac{270^\circ}{360^\circ}+\frac{270^\circ}{360^\circ})\times(16\pi$ 平方公分) $=\frac{1080^\circ}{360^\circ}\times(16\pi$ 平方公分) $=48\pi$ 平方公分	全量等於分量之和 & (6) 扇形 AEF 面積＝扇形 BFG 面積 ＝扇形 CHG 面積＝扇形 DEH 面積 $=\frac{270^\circ}{360^\circ}\times(16\pi$ 平方公分)

習題 9.2-37

圖 9.2-112 中，四邊形 ABCD 為邊長為 8 公分的正方形，分別以正方形 A、B、C、D 四個頂點為圓心，以正方形邊長的一半為半徑在正方形內部畫弧，分別交正方形四邊於 E、F、G、H 四點，則灰色部分圖形面積為何？

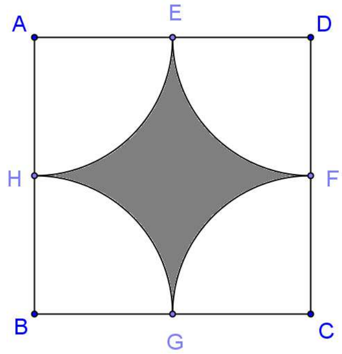


圖 9.2-112

想法： 灰色部分圖形面積

＝正方形 ABCD 面積－(扇形 AEH 面積＋扇形 BHG 面積＋扇形 CFG 面積＋扇形 DEF 面積)

解：

敘述	理由
(1) $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$ $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=8$ 公分	已知四邊形 ABCD 為邊長為 8 公分的正方形 & 正方形四邊等長且四個角皆為直角
(2) 正方形 ABCD 面積 $=\overline{AB}^2=(8$ 公分$)^2=64$ 平方公分	正方形面積為邊長的平方 & 由(1) $\overline{AB}=8$ 公分
(3) $\overline{AE}=\overline{AH}=\overline{BH}=\overline{BG}=\overline{CG}=\overline{CF}=\overline{DF}=\overline{DE}=(8$ 公分$)\div 2=4$ 公分	已知分別以正方形 A、B、C、D 四個頂點為圓心，以正方形邊長的一半為半徑在正方形內部畫弧，分別交正方形四邊於 E、F、G、H 四點 & 等圓半徑皆相等
(4) 以$\overline{AE}$為半徑的圓面積 $=\pi\times\overline{AE}^2$ $=\pi\times(4$ 公分$)^2=16\pi$ 平方公分 以$\overline{BH}$為半徑的圓面積 $=\pi\times\overline{BH}^2$ $=\pi\times(4$ 公分$)^2=16\pi$ 平方公分 以$\overline{CG}$為半徑的圓面積 $=\pi\times\overline{CG}^2$ $=\pi\times(4$ 公分$)^2=16\pi$ 平方公分 以$\overline{DF}$為半徑的圓面積 $=\pi\times\overline{DF}^2$ $=\pi\times(4$ 公分$)^2=16\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (3) $\overline{AE}=\overline{BH}=\overline{CG}=\overline{DF}=4$ 公分

(5) 扇形 AEH 面積

$=\frac{90^{\circ}}{360^{\circ}}\times$(以$\overline{AE}$為半徑的圓面積)

$=\frac{90^{\circ}}{360^{\circ}}\times$(16π 平方公分)

扇形 BHG 面積

$=\frac{90^{\circ}}{360^{\circ}}\times$(以$\overline{BH}$為半徑的圓面積)

$=\frac{90^{\circ}}{360^{\circ}}\times$(16π 平方公分)

扇形 CFG 面積

$=\frac{90^{\circ}}{360^{\circ}}\times$(以$\overline{CG}$為半徑的圓面積)

$=\frac{90^{\circ}}{360^{\circ}}\times$(16π 平方公分)

扇形 DEF 面積

$=\frac{90^{\circ}}{360^{\circ}}\times$(以$\overline{DF}$為半徑的圓面積)

$=\frac{90^{\circ}}{360^{\circ}}\times$(16π 平方公分)

扇形面積＝$\frac{\text{圓心角度數}}{360^{\circ}}\times$圓面積 &

(1) ∠A＝∠B＝∠C＝∠D＝90°、

(4) 以$\overline{AE}$為半徑的圓面積

＝以$\overline{BH}$為半徑的圓面積

＝以$\overline{CG}$為半徑的圓面積

＝以$\overline{DF}$為半徑的圓面積

＝16π 平方公分

(6) 灰色部分圖形面積

＝正方形 ABCD 面積－

(扇形 AEH 面積＋扇形 BHG 面積＋

扇形 CFG 面積＋扇形 DEF 面積)

$=64$ 平方公分$-(\frac{90^{\circ}}{360^{\circ}}+\frac{90^{\circ}}{360^{\circ}}+\frac{90^{\circ}}{360^{\circ}}+\frac{90^{\circ}}{360^{\circ}})\times$(16π 平方公分)

$=(64-\frac{360^{\circ}}{360^{\circ}}\times16\pi)$ 平方公分

＝(64－16π) 平方公分

全量等於分量之和 &

(2) 正方形 ABCD 面積＝64 平方公分、

(4) 扇形 AEH 面積＝扇形 BHG 面積

＝扇形 CFG 面積＝扇形 DEF 面積

$=\frac{90^{\circ}}{360^{\circ}}\times$(16π 平方公分)

習題 9.2-38

圖 9.2-113 中，圓 O 為正方形 ABCD 的內切圓，E、F、G、H 為切點，若正方形邊長為 8 公分，且∠POQ＝120°，則灰色部分圖形面積為何？

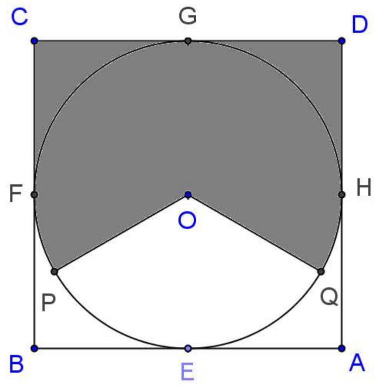


圖 9.2-113

想法：(1) 利用例題 9.2-13 結論：作$\overline{FH}$，則$\overline{FH}$為圓 O 的直徑，且四邊形 ABFH 與 CDHF 皆為矩形，$\overline{FH}$＝$\overline{AB}$＝$\overline{CD}$

(2) 灰色部分圖形面積
＝矩形 CDHF 面積＋(扇形 OFP 面積＋扇形 OHQ 面積)

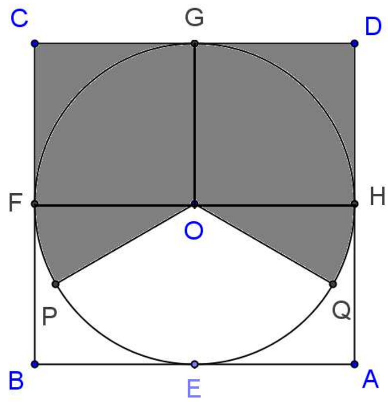


圖 9.2-113(a)

解：

敘述	理由
(1) 作$\overline{FH}$，則$\overline{FH}$為圓 O 的直徑，且四邊形 ABFH 與 CDHF 皆為矩形，$\overline{FH}$＝$\overline{AB}$＝$\overline{CD}$＝8 公分； 作$\overline{OG}$，則四邊形 CGOF 為正方形，$\overline{GO}$＝$\overline{OF}$＝$\overline{CF}$＝$\overline{CG}$； 如上圖 9.2-113(a)所示	作圖 & 已知圓 O 為正方形 ABCD 的內切圓，E、F、G、H 為切點 & 利用例題 9.2-13 結論 & 已知正方形邊長為 8 公分
(2) 圓 O 半徑$\overline{GO}$＝$\overline{OF}$＝$\overline{OH}$＝$\overline{FH}$÷2 ＝(8 公分)÷2＝4 公分	同圓中半徑皆相等且為直徑的一半 & 由(1) $\overline{FH}$為圓 O 的直徑，且$\overline{FH}$＝8 公分

(3) 矩形 CDHF 中，長$\overline{FH}$＝8 公分、寬$\overline{CF}$＝$\overline{GO}$＝4 公分	由(1) $\overline{FH}$＝8 公分，$\overline{CF}$＝$\overline{GO}$ & (2) $\overline{GO}$＝4 公分　遞移律
(4) 矩形 CDHF 面積 ＝$\overline{FH}\times\overline{CF}$＝(8 公分)×(4 公分) ＝32 平方公分	矩形面積為長與寬之乘積 & (3) 矩形 CDHF 中，長$\overline{FH}$＝8 公分、寬$\overline{CF}$＝4 公分
(5) ∠FOH＝180°	由(1) $\overline{FH}$為圓 O 的直徑 & 平角為 180°
(6) ∠FOP＋∠HOQ＋∠POQ＝∠FOH	如圖 9.2-113(a)所示，全量等於分量之和
(7) ∠FOP＋∠HOQ ＝∠FOH－∠POQ ＝180°－120°＝60°	由(6) 等量減法公理 & (5) ∠FOH＝180°、已知∠POQ＝120°
(8) 圓 O 面積＝$\pi\times\overline{OF}^2$＝π×(4 公分)^2 ＝16π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (2) 圓 O 半徑$\overline{OF}$＝4 公分
(9) 扇形 OFP 面積 $=\dfrac{\angle FOP}{360^\circ}\times$(圓 O 面積)	扇形面積$=\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積 & 扇形 OFP 的圓心角為∠FOP
(10) 扇形 OHQ 面積 $=\dfrac{\angle HOQ}{360^\circ}\times$(圓 O 面積)	扇形面積$=\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}\times$圓面積 & 扇形 OHQ 的圓心角為∠HOQ
(11) 扇形 OFP 面積＋扇形 OHQ 面積 $=(\dfrac{\angle FOP}{360^\circ}+\dfrac{\angle HOQ}{360^\circ})\times$(圓 O 面積) $=(\dfrac{\angle FOP+\angle HOQ}{360^\circ})\times$(16π 平方公分) $=\dfrac{60^\circ}{360^\circ}\times$(16π 平方公分) $=\dfrac{8\pi}{3}$ 平方公分	由(9)式 ＋ (10)式 & (7) ∠FOP＋∠HOQ＝60°、(8) 圓 O 面積＝16π 平方公分
(12) 灰色部分圖形面積 ＝矩形 CDHF 面積＋(扇形 OFP 面積＋扇形 OHQ 面積) ＝(32 平方公分)＋($\dfrac{8\pi}{3}$ 平方公分) ＝(32＋$\dfrac{8\pi}{3}$) 平方公分	全量等於分量之和 & (4) 矩形 CDHF 面積＝32 平方公分、(11) 扇形 OFP 面積＋扇形 OHQ 面積 ＝$\dfrac{8\pi}{3}$ 平方公分　已證

習題 9.2-39

圖 9.2-114 中，四邊形 ABCD 為一邊長為 8 公分的正方形，分別以 A、C 為圓心，以正方形邊長為半徑畫$\overset{\frown}{BED}$、$\overset{\frown}{BFD}$，則灰色部分圖形面積為何？

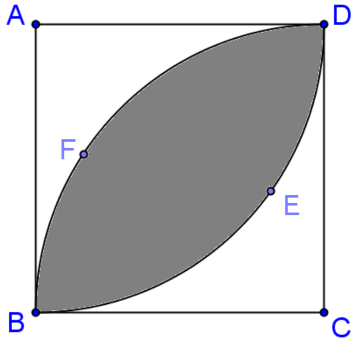


圖 9.2-114

想法：題目中灰色部分面積＝甲面積＋乙面積－丁面積

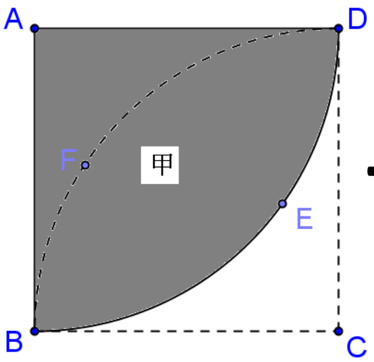


圖 9.2-114(a)-1

＋

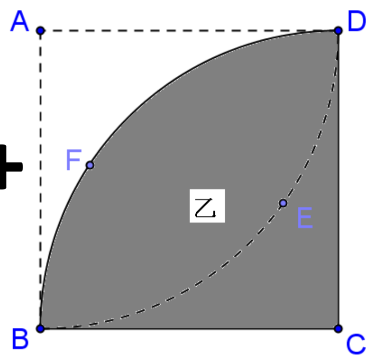


圖 9.2-114(a)-2

＝

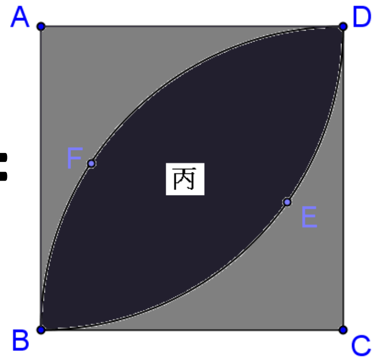


圖 9.2-114(a)-3

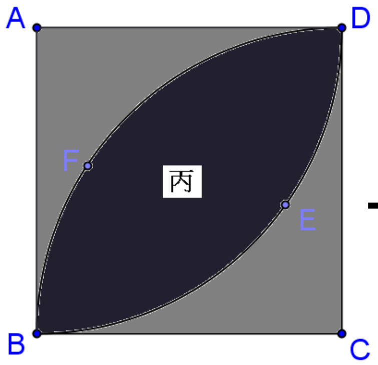


圖 9.2-114(a)-3

－

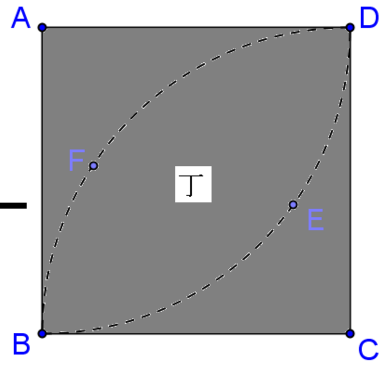


圖 9.2-114(a)-4

＝

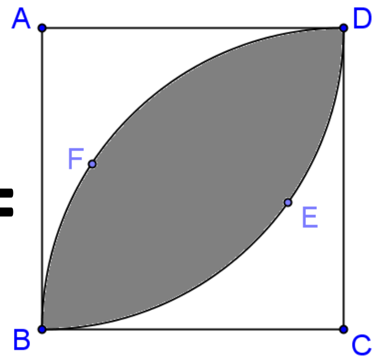


圖 9.2-114(a)-5

解：

敘述	理由
(1) $\angle A=\angle C=90°$ $\overline{AB}=\overline{BC}=8$ 公分	已知四邊形 ABCD 為一邊長為 8 公分的正方形 & 正方形四個內角皆為 90° & 正方形四邊等長

(2) 圖 9.2-114(a)-1 ＋ 圖 9.2-114(a)-2 ＝圖 9.2-114(a)-3 (圖 9.2-114(a)-3 中，丙面積重疊)	如圖 9.2-114(a)-1~圖 9.2-114(a)-3 所示
(3) 圖 9.2-114(a)-3 － 圖 9.2-114(a)-4 ＝圖 9.2-114(a)-5 (圖 9.2-114(a)-5 中，灰色面積即為題目所求)	如圖 9.2-114(a)-3~圖 9.2-114(a)-5 所示
(4) 上圖 92-114(a)-1 中 扇形 ABD 面積(即甲面積) $=\frac{\angle A}{360^\circ}\times$(圓 A 面積) $=\frac{90^\circ}{360^\circ}\times\pi\times$(8 公分)^2 ＝16π 平方公分	扇形面積$=\frac{圓心角度數}{360^\circ}\times$圓面積 & 由(1) 扇形 ABD 的圓心角∠A＝90° 圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 由(1) 圓 A 半徑$\overline{AB}$＝8 公分
(5) 上圖 9.2-114(a)-2 中 扇形 CBD 面積(即乙面積) $=\frac{\angle C}{360^\circ}\times$(圓 C 面積) $=\frac{90^\circ}{360^\circ}\times\pi\times$(8 公分)^2 ＝16π 平方公分	扇形面積$=\frac{圓心角度數}{360^\circ}\times$圓面積 & 由(1) 扇形 CBD 的圓心角∠C＝90° 圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 由(1) 圓 C 半徑$\overline{BC}$＝8 公分
(6) 圖 9.2-114(a)-4 中， 正方形 ABCD 面積(即丁面積) ＝(8 公分)×(8 公分)＝64 平方公分	正方形面積為邊長的平方 & 已知四邊形 ABCD 為一邊長為 8 公分的正方形
(7) 題目中灰色部分面積 ＝甲面積＋乙面積－丁面積 ＝(16π＋16π－64) 平方公分 ＝(32π－64) 平方公分	由(2) & (3) 代換 由(4) 甲面積＝16π 平方公分、 (5) 乙面積＝16π 平方公分、 (6) 丁面積＝64 平方公分

習題 9.2-40

圖 9.2-115 中，四邊形 ABCD 為一邊長為 8 公分的正方形，分別以$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$為直徑畫半圓，且此四個半圓弧相交於 O 點，則灰色部分圖形面積為何？

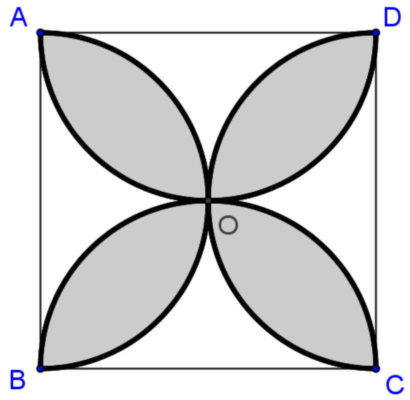


圖 9.2-115

想法：題目中灰色部分面積＝甲面積＋乙面積＋丙面積＋丁面積－壬面積

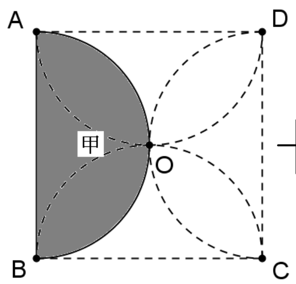


圖 9.2-115(a)-1

＋

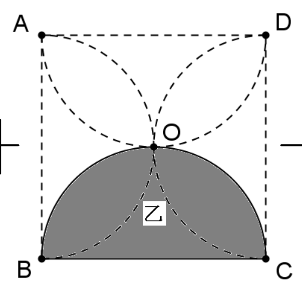


圖 9.2-115(a)-2

＋

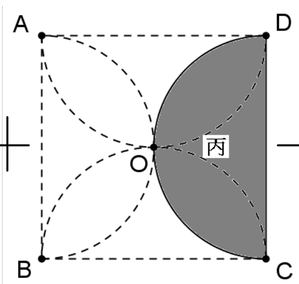


圖 9.2-115(a)-3

＋

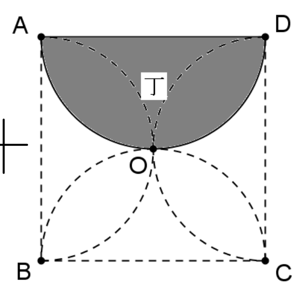


圖 9.2-115(a)-4

||

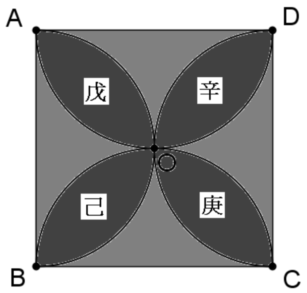


圖 9.2-115(a)-5

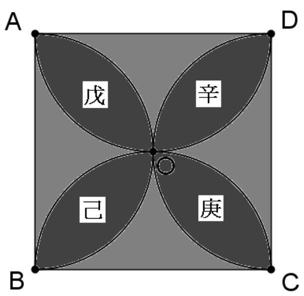


圖 9.2-115(a)-5

－

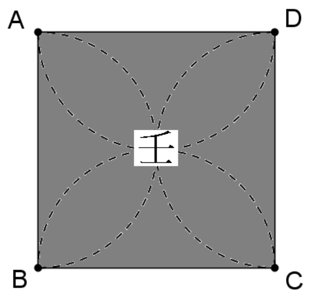


圖 9.2-115(a)-6

＝

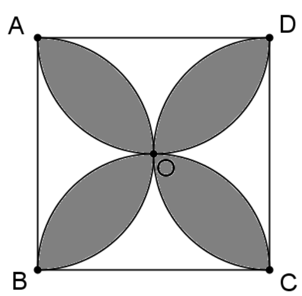


圖 9.2-115(a)-7

解：

敘述	理由
(1) 圖 9.2-115(a)-1＋圖 9.2-115(a)-2 ＋圖 9.2-115(a)-3＋圖 9.2-115(a)-4 ＝圖 9.2-115(a)-5 (圖 9.2-115(a)-5 中，戊、己、庚、辛面積重疊)	如圖 9.2-115(a)-1~圖 9.2-115(a)-5 所示
(2) 圖 9.2-115(a)-5－圖 9.2-115(a)-6 ＝圖 9.2-115(a)-7 (圖 9.2-115(a)-7 中，灰色部分即為題目所求)	如圖 9.2-115(a)-5~圖 9.2-115(a)-7 所示
(3) 圖 9.2-115(a)-1 中， 甲面積＝$\frac{180^{\circ}}{360^{\circ}}\times$(以$\overline{AB}$為直徑的圓面積) $=\frac{180^{\circ}}{360^{\circ}}\times[\pi\times(\frac{\overline{AB}}{2})^2]$ $=\frac{180^{\circ}}{360^{\circ}}\times[\pi\times(\frac{8\text{公分}}{2})^2]$ ＝8π 平方公分	如圖 9.2-115(a)-1 所示， 甲面積為以$\overline{AB}$為直徑的半圓 & 扇形面積＝$\frac{\text{圓心角度數}}{360^{\circ}}\times$圓面積 & 半圓的圓心角為 180° & 圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 已知正方形 ABCD 邊長$\overline{AB}$為 8 公分
(4) 圖 9.2-115(a)-2 中，乙面積＝8π平方公分 圖 9.2-115(a)-3 中，丙面積＝8π平方公分 圖 9.2-115(a)-4 中，丁面積＝8π平方公分	已知四邊形 ABCD 為一邊長為 8 公分的正方形，分別以$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$為直徑畫半圓 & 由(3) 同理可得
(5) 圖 9.2-115(a)-6 中， 正方形 ABCD 面積(即壬面積) ＝(8 公分)×(8 公分)＝64 平方公分	已知四邊形 ABCD 為一邊長為 8 公分的正方形 & 正方形面積為邊長的平方
(6) 題目中灰色部分面積 ＝甲面積＋乙面積＋丙面積＋丁面積 －壬面積 ＝(8π＋8π＋8π＋8π－64) 平方公分 ＝(32π－64) 平方公分	由(1) & (2) 代換 由(3) 甲面積＝8π 平方公分 & (4) 乙面積＝丙面積＝丁面積 ＝8π 平方公分 & (5) 壬面積＝64 平方公分

習題 9.2-41

圖 9.2-116 中，△ABC 為邊長為 8 公分的正三角形，以 A 點為圓心，$\overline{AC}$為半徑作扇形 ABC，以 B 點為圓心，$\overline{BC}$為半徑作扇形 BAC，則圖中灰色部分面積為何？

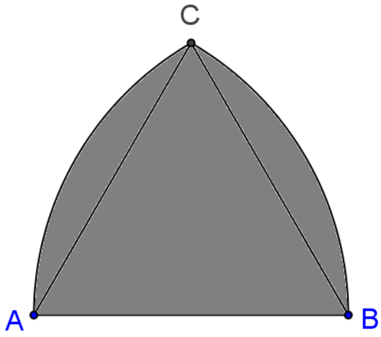
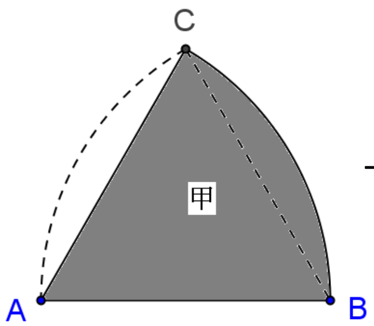
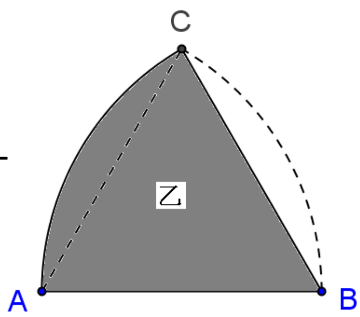


圖 9.2-116

想法：題目所求灰色部分面積＝甲面積＋乙面積－丙面積



＋



＝

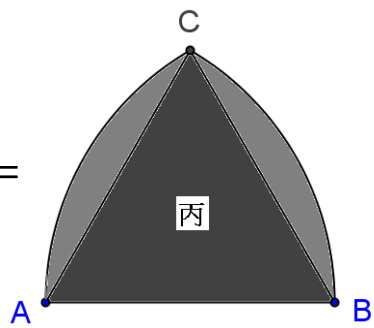
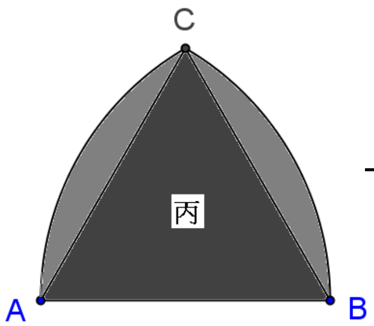
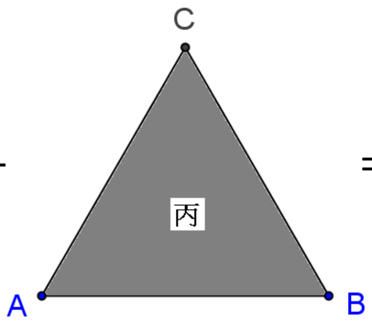


圖 9.2-116(a)-1　**圖 9.2-116(a)-2**　**圖 9.2-116(a)-3**



－



＝

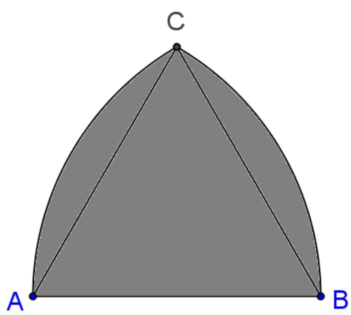


圖 9.2-116(a)-3　**圖 9.2-116(a)-4**　**圖 9.2-116(a)-5**

解：

敘述	理由
(1)　圖 9.2-116(a)-1 ＋ 圖 9.2-116(a)-2 ＝圖 9.2-116(a)-3 (圖 9.2-116(a)-3 中，丙面積重疊)	如圖 9.2-116(a)-1~圖 9.2-116(a)-3 所示

(2) 圖 9.2-116(a)-3 － 圖 9.2-116(a)-4 ＝圖 9.2-116(a)-5 (圖 9.2-116(a)-5 中，灰色面積即為題目所求)	如圖 9.2-116(a)-3~圖 9.2-116(a)-5 所示
(3) $\angle A = \angle B = 60°$	已知△ABC 為正三角形 ＆ 正三角形每一內角皆為 60°
(4) $\overline{AC} = \overline{BC} = 8$ 公分	已知△ABC 為邊長為 8 公分的正三角形 ＆ 正三角形三邊等長
(5) 圖 9.2-116(a)-1 中， 甲面積$= \frac{60°}{360°} \times$(以$\overline{AC}$為半徑的圓面積) $= \frac{60°}{360°} \times [\pi \times (8$ 公分$)^2]$ $= \frac{32}{3}\pi$ 平方公分	扇形面積$= \frac{\text{圓心角度數}}{360°} \times$圓面積 ＆ (3) 扇形 ABC 圓心角$\angle A = 60°$ ＆ 圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 ＆ (4) $\overline{AC} = 8$ 公分
(6) 圖 9.2-116(a)-2 中， 乙面積$= \frac{60°}{360°} \times$(以$\overline{BC}$為半徑的圓面積) $= \frac{60°}{360°} \times [\pi \times (8$ 公分$)^2]$ $= \frac{32}{3}\pi$ 平方公分	扇形面積$= \frac{\text{圓心角度數}}{360°} \times$圓面積 ＆ (3) 扇形 BAC 圓心角$\angle B = 60°$ ＆ 圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 ＆ (4) $\overline{BC} = 8$ 公分
(7) 圖 9.2-116(a)-4 中， △ABC 面積(即丙面積) $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (8$ 公分$)^2 = 16\sqrt{3}$ 平方公分	邊長為a的正三角形面積為$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ＆ 已知△ABC 為邊長 8 公分的正三角形
(8) 題目所求灰色部分面積 ＝甲面積＋乙面積－丙面積 $= (\frac{32}{3}\pi + \frac{32}{3}\pi - 16\sqrt{3})$ 平方公分 $= (\frac{64}{3}\pi - 16\sqrt{3})$ 平方公分	由(1) ＆ (2) 代換 全量等於分量之和 將(5) ＆ (6) ＆ (7) 代入

習題 9.2-42

圖 9.2-117 中，四邊形 ABCD 為邊長為 8 公分的正方形，以 A 點為圓心，$\overline{AD}$ 為半徑作 $\overset{\frown}{BD}$；以 D 點為圓心，$\overline{DA}$ 為半徑作 $\overset{\frown}{AC}$，且 $\overset{\frown}{BD}$ 與 $\overset{\frown}{AC}$ 相交於 E 點，則圖中灰色部分面積為何？

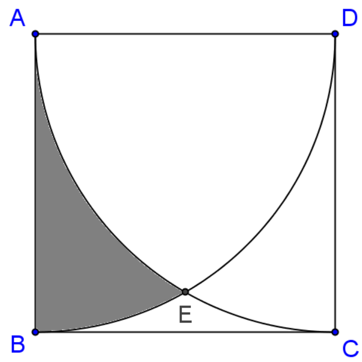


圖 9.2-117

想法：(1) 題目所求灰色部分面積＝甲面積－乙面積

(2) 利用習題 9.2-41 結論：乙面積＝$(\frac{64}{3}\pi-16\sqrt{3})$ 平方公分

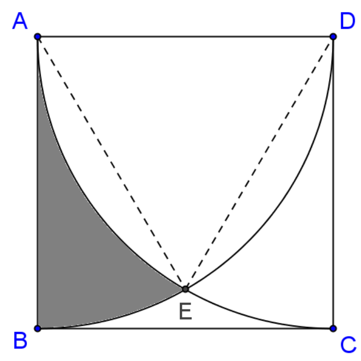


圖 9.2-117(a)

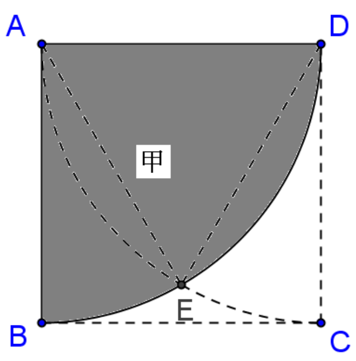


圖 9.2-117(b)-1

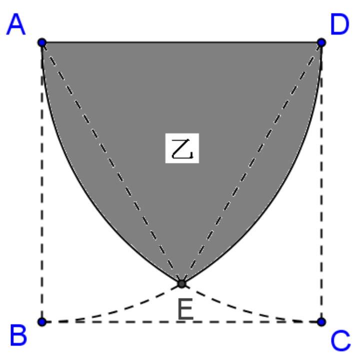


圖 9.2-117(b)-2

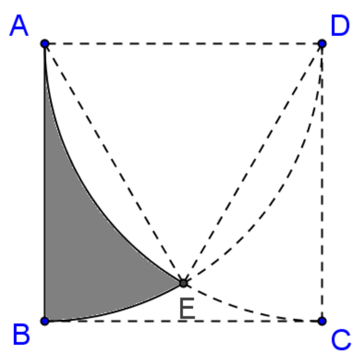


圖 9.2-117(b)-3

解：

敘述	理由
(1) 作$\overline{AE}$、$\overline{DE}$，如上圖 92-117(a)所示	作圖
(2) ∠BAD＝90° & $\overline{AD}$＝8 公分	已知四邊形 ABCD 為邊長為 8 公分的正方形 & 正方形一內角為 90°
(3) $\overline{AE}$＝$\overline{AD}$＝8 公分	已知以 A 點為圓心，$\overline{AD}$為半徑作$\overset{\frown}{BD}$ & 同圓半徑相等 & (2) $\overline{AD}$＝8 公分
(4) $\overline{DE}$＝$\overline{AD}$＝8 公分	已知，以 D 點為圓心，$\overline{DA}$為半徑作$\overset{\frown}{AC}$ & 同圓半徑相等 & (2) $\overline{AD}$＝8 公分
(5) $\overline{AE}$＝$\overline{AD}$＝$\overline{DE}$＝8 公分 △ADE 為正三角形	由(3) & (4) 遞移律 等邊三角形為正三角形
(6) 圖 9.2-117(b)-1 － 圖 9.2-117(b)-2＝圖 9.2-117(b)-3 (圖 9.2-117(b)-3 中，灰色部分即為題目所求)	如圖 9.2-117(b)-1~圖 9.2-117(b)-3 所示
(7) 圖 9.2-117(b)-1 中 甲面積＝$\frac{90^\circ}{360^\circ}$×(以$\overline{AD}$為半徑的圓面積) ＝$\frac{90^\circ}{360^\circ}$×[π×(8 公分)^2] ＝16π 平方公分	扇形面積＝$\frac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}$×圓面積 & (2) 扇形 ABD 圓心角∠BAD＝90° & 圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (2) $\overline{AD}$＝8 公分
(8) 圖 9.2-117(b)-2 中 乙面積＝($\frac{64}{3}$π－16$\sqrt{3}$) 平方公分	由(5) △ADE 為邊長為 8 公分的正三角形 & 已知以 A 點為圓心，$\overline{AD}$為半徑作$\overset{\frown}{BD}$；以 D 點為圓心，$\overline{DA}$為半徑作$\overset{\frown}{AC}$，且$\overset{\frown}{BD}$與$\overset{\frown}{AC}$相交於 E 點 & 利用習題 9.2-41 結論
(9) 題目所求灰色部分面積 ＝甲面積－乙面積 ＝[16π－($\frac{64}{3}$π－16$\sqrt{3}$)] 平方公分 ＝(16$\sqrt{3}$－$\frac{16}{3}$π) 平方公分	由(6) 將(7) & (8) 代入

習題 9.2-43

圖 9.2-118 中，四邊形 ABCD 為邊長為 8 公分的正方形，以 A 點為圓心，$\overline{AD}$ 為半徑作$\overset{\frown}{\mathrm{BD}}$；以 D 點為圓心，$\overline{DA}$為半徑作$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$，且$\overset{\frown}{\mathrm{BD}}$與$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$相交於 E 點，則圖中灰色部分面積為何？

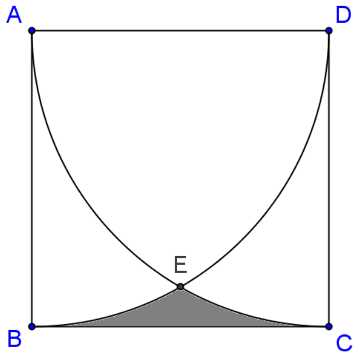


圖 9.2-118

想法：(1) 題目所求灰色部分面積＝甲面積－乙面積－丁面積

(2) 利用習題 9.2-42 結論：丁面積＝$(16\sqrt{3}-\frac{16}{3}\pi)$ 平方公分

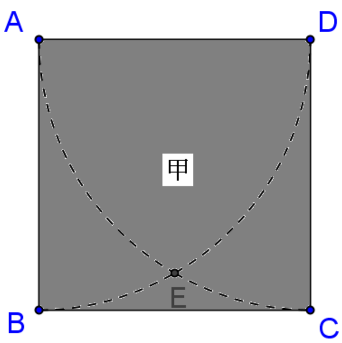


圖 9.2-118(a)-1

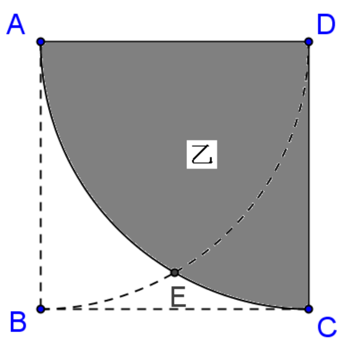


圖 9.2-118(a)-2

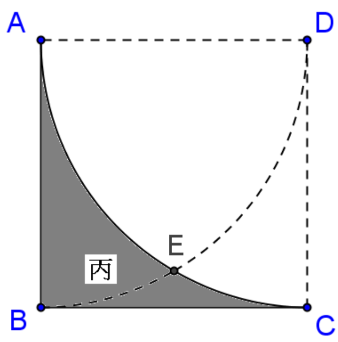


圖 9.2-118(a)-3

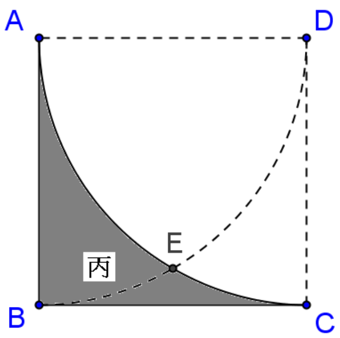


圖 9.2-118(a)-3

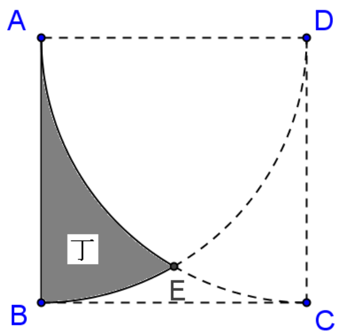


圖 9.2-118(a)-4

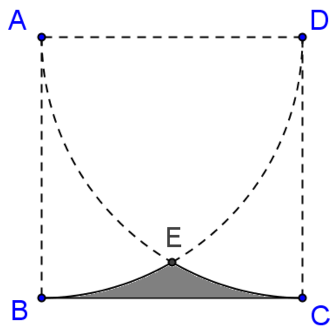


圖 9.2-118(a)-5

解：

敘述	理由
(1) $\angle ADC = 90^\circ$ & $\overline{DA} = 8$ 公分	已知四邊形ABCD為邊長為8公分的正方形 & 正方形一內角為90°
(2) 圖 9.2-118(a)-1 － 圖 9.2-118(a)-2 ＝圖 9.2-118(a)-3	如圖 9.2-118(a)-1~圖 9.2-118(a)-3 所示
(3) 圖 9.2-118(a)-3 － 圖 9.2-118(a)-4 ＝圖 9.2-118(a)-5 (圖 9.2-118(a)-5 中，灰色面積即為題目所求)	如圖 9.2-118(a)-3~圖 9.2-118(a)-5 所示
(4) 圖 9.2-118(a)-1 中 正方形 ABCD 面積(即甲面積) ＝(8 公分)^2＝64 平方公分	正方形面積為邊長的平方 & 已知四邊形ABCD為邊長為8公分的正方形
(5) 圖 9.2-118(a)-2 中 扇形 DAC 面積(即乙面積) $= \frac{90^\circ}{360^\circ} \times$(以$\overline{DA}$為半徑的圓面積) $= \frac{90^\circ}{360^\circ} \times [\pi \times (8\text{ 公分})^2]$ ＝16π 平方公分	扇形面積＝$\frac{\text{圓心角度數}}{360^\circ}$×圓面積 & (1) 扇形 DAC 圓心角$\angle ADC = 90^\circ$ & 圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (1) $\overline{DA} = 8$ 公分
(6) 圖 9.2-118(a)-4 中 丁面積$=(16\sqrt{3} - \frac{16}{3}\pi)$ 平方公分	已知四邊形 ABCD 為邊長為 8 公分的正方形，以 A 點為圓心，$\overline{AD}$為半徑作$\overset{\frown}{BD}$；以 D 點為圓心，$\overline{DA}$為半徑作$\overset{\frown}{AC}$，且$\overset{\frown}{BD}$與$\overset{\frown}{AC}$相交於 E 點 & 利用習題 9.2-42 結論
(7) 題目所求灰色部分面積 ＝甲面積－乙面積－丁面積 $=[64 - 16\pi - (16\sqrt{3} - \frac{16}{3}\pi)]$ 平方公分 $=(64 - 16\sqrt{3} - \frac{32}{3}\pi)$ 平方公分	由(2) & (3) 代換 將(4) 甲面積＝64 平方公分 & (5) 乙面積＝16π 平方公分 & (1) 丁面積$=(16\sqrt{3} - \frac{16}{3}\pi)$ 平方公分 代入

習題 9.2-44

圖 9.2-119 為兩個半圓與一個矩形所形成的圖形，其中兩個半圓分別以$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為直徑，矩形 ABCD 的長邊$\overline{BC}$＝16 公分、短邊$\overline{AB}$＝8 公分，求灰色部分的圖形面積為何？

圖 9.2-119

想法： 灰色部分的圖形面積

＝矩形 ABCD 面積＋以$\overline{AB}$為直徑的半圓面積＋以$\overline{CD}$為直徑的半圓面積

解：

敘述	理由
(1) 矩形 ABCD 面積 ＝$\overline{BC}\times\overline{AB}$ ＝(16 公分)×(8 公分) ＝128 平方公分	矩形面積為長與寬之乘積 & 已知矩形 ABCD 的長邊$\overline{BC}$＝16 公分、 短邊$\overline{AB}$＝8 公分
(2) $\overline{CD}$＝$\overline{AB}$＝8 公分	已知 ABCD 為矩形 & 矩形兩組對邊等長 & 已知$\overline{AB}$＝8 公分
(3) 以$\overline{AB}$為直徑的圓 O_1 半徑$\overline{O_1A}$ ＝$\overline{AB}$÷2＝(8 公分)÷2＝4 公分	同圓半徑為直徑的一半 & 已知$\overline{AB}$＝8 公分
(4) 以$\overline{O_1A}$為半徑的圓 O_1 面積 ＝$\pi\times\overline{O_1A}^2$＝π×(4 公分)^2 ＝16π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (3) 圓 O_1 半徑$\overline{O_1A}$＝4 公分 已證
(5) 以$\overline{AB}$為直徑的半圓面積 ＝$\frac{180^\circ}{360^\circ}$×以$\overline{O_1A}$為半徑的圓 O_1 面積 ＝$\frac{180^\circ}{360^\circ}$×(16π 平方公分) ＝8π 平方公分	已知兩個半圓分別以$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為直徑 & 半圓的圓心角為 180° & 周角為 360° & (4) 以$\overline{O_1A}$為半徑的圓 O_1 面積＝16π 平方公分
(6) 以$\overline{CD}$為直徑的圓 O_2 半徑$\overline{O_2C}$ ＝$\overline{CD}$÷2＝(8 公分)÷2＝4 公分	同圓半徑為直徑的一半 & (2) $\overline{CD}$＝8 公分 已證
(7) 以$\overline{O_2C}$為半徑的圓 O_2 面積 ＝$\pi\times\overline{O_2C}^2$＝π×(4 公分)^2 ＝16π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (6) 圓 O_2 半徑$\overline{O_2C}$＝4 公分 已證

(8)	以$\overline{CD}$為直徑的半圓面積 $=\frac{180^{\circ}}{360^{\circ}}\times$以$\overline{O_2C}$為半徑的圓 O_2 面積 $=\frac{180^{\circ}}{360^{\circ}}\times(16\pi$ 平方公分) $=8\pi$ 平方公分	已知兩個半圓分別以$\overline{AB}$、$\overline{CD}$為直徑 & 半圓的圓心角為 180° & 周角為 360° & (7) 以$\overline{O_2C}$為半徑的圓 O_2 面積$=16\pi$ 平方公分
(9)	灰色部分的圖形面積 ＝矩形 ABCD 面積＋ 以$\overline{AB}$為直徑的半圓面積＋ 以$\overline{CD}$為直徑的半圓面積 $=(128+8\pi+8\pi)$ 平方公分 $=(128+16\pi)$ 平方公分	全量等於分量之和 & (1) 矩形 ABCD 面積＝128 平方公分、 (5) 以$\overline{AB}$為直徑的半圓面積$=8\pi$ 平方公分、 (8) 以$\overline{CD}$為直徑的半圓面積$=8\pi$ 平方公分

習題 9.2-45

圖 9.2-120 中，圓 A、圓 B、圓 C 為三個半徑為 8 公分的等圓，已知三個圓兩兩外切，圓 A 與圓 B 外切於 D 點，圓 B 與圓 C 外切於 E 點，圓 C 與圓 A 外切於 F 點，求灰色部分的面積為何？

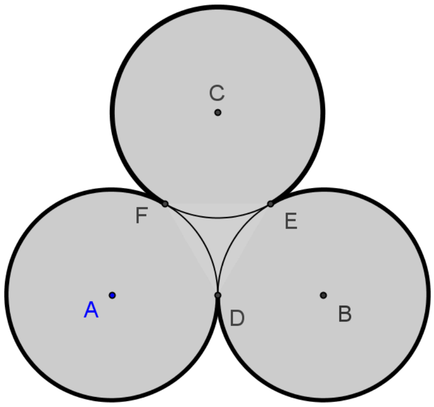


圖 9.2-120

想法： 灰色部分的面積

＝以優角∠ECF 為圓心角的扇形 CEF 面積＋
以優角∠DAF 為圓心角的扇形 ADF 面積＋
以優角∠DBE 為圓心角的扇形 BDE 面積＋△ABC 面積

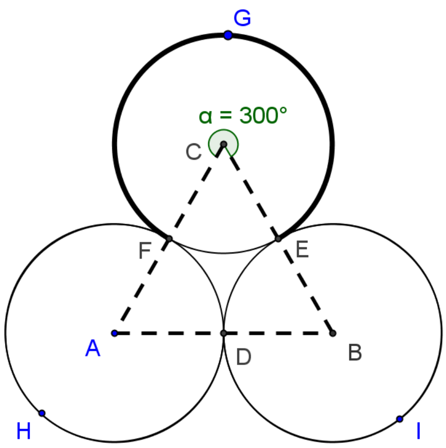


圖 9.2-120(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$，如圖 9.2-120(a) 所示其中$\overline{AB}$通過 D 點、$\overline{BC}$通過 E 點、$\overline{CA}$通過 F 點	作圖 & 已知圓 A 與圓 B 外切於 D 點，圓 B 與圓 C 外切於 E 點，圓 C 與圓 A 外切於 F 點 & 相切兩圓的連心線，必過切點
(2) $\overline{AD}=\overline{AF}=\overline{BD}=\overline{BE}=\overline{CE}=\overline{CF}$ ＝8 公分	已知圓 A、圓 B、圓 C 為三個半徑為 8 公分的等圓

(3) $\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}$ $=$(8 公分)$+$(8 公分)$=$16 公分	全量等於分量之和 & 由(2) $\overline{AD}=\overline{BD}=$8 公分
(4) $\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{CE}$ $=$(8 公分)$+$(8 公分)$=$16 公分	全量等於分量之和 & 由(2) $\overline{BE}=\overline{CE}=$8 公分
(5) $\overline{CA}=\overline{CF}+\overline{AF}$ $=$(8 公分)$+$(8 公分)$=$16 公分	全量等於分量之和 & 由(2) $\overline{CF}=\overline{AF}=$8 公分
(6) △ABC 為正三角形 $\angle A=\angle B=\angle C=60°$	由(3)、(4) & (5) 等邊三角形也是等角三角形
(7) 優角$\angle$ECF＋銳角$\angle$ECF＝360°	全量等於分量之和 & 周角為 360°
(8) 優角$\angle$ECF＝360°－銳角$\angle$ECF $=360°-60°=300°$	由(7) 等量減法公理 & (6) 銳角$\angle$ECF＝60°
(9) 圓 C 面積$=\pi\times\overline{CE}^2$ $=\pi\times$(8 公分)^2 $=64\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (2) 圓 C 半徑$\overline{CE}=$8 公分
(10) 以優角$\angle$ECF 為圓心角的扇形 CEF 面積 $=\dfrac{300^{\circ}}{360^{\circ}}\times$(圓 C 面積) $=\dfrac{300^{\circ}}{360^{\circ}}\times$($64\pi$ 平方公分) $=\dfrac{160\pi}{3}$ 平方公分	由(8) 優角$\angle$ECF＝300° & 周角為 360° & 由(9) 圓 C 面積$=64\pi$ 平方公分
(11) 同理可證： 優角$\angle$DAF＝300° 以優角$\angle$DAF 為圓心角的扇形 ADF 面積$=\dfrac{160\pi}{3}$ 平方公分 & 優角$\angle$DBE＝300° 以優角$\angle$DBE 為圓心角的扇形 BDE 面積$=\dfrac{160\pi}{3}$ 平方公分	同(1)~(10) 步驟 同理可證
(12) △ABC 面積$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\overline{AB}^2$ $=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times$(16 公分)^2 $=64\sqrt{3}$ 平方公分	由(6) & 例題 9.1-19 結論：邊長為 a 單位的正三角形面積為$\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$平方單位 & 由(3) $\overline{AB}=$16 公分

(13)　灰色部分的面積

$=$以優角$\angle$ECF 為圓心角的扇形 CEF 面積$+$以優角$\angle$DAF 為圓心角的扇形 ADF 面積$+$以優角$\angle$DBE 為圓心角的扇形 BDE 面積$+\triangle$ABC 面積

$=(\frac{160\pi}{3}$ 平方公分$)+$

$(\frac{160\pi}{3}$ 平方公分$)+$

$(\frac{160\pi}{3}$ 平方公分$)+$

$(64\sqrt{3}$ 平方公分$)$

$=(160\pi+64\sqrt{3})$ 平方公分

全量等於分量之和 & (10)、(11)

以優角$\angle$ECF 為圓心角的扇形 CEF 面積

$=\frac{160\pi}{3}$ 平方公分、

以優角$\angle$DAF 為圓心角的扇形 ADF 面積

$=\frac{160\pi}{3}$ 平方公分、

以優角$\angle$DBE 為圓心角的扇形 BDE 面積

$=\frac{160\pi}{3}$ 平方公分 &

(12) $\triangle$ABC 面積$=64\sqrt{3}$ 平方公分

習題 9.2-46

圖 9.2-121 是用三個半徑皆為 5 cm 的圓兩兩外切所排列成的形體，再用一條緞帶環繞此形體一周，則灰色部分面積為何？

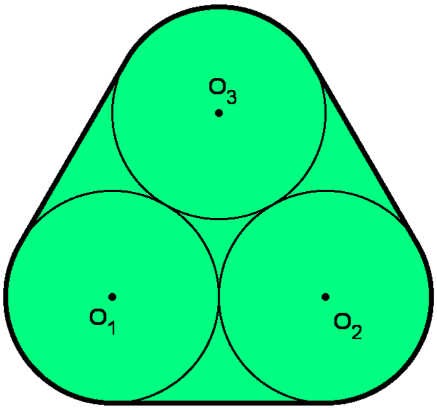


圖 9.2-121

想法： 灰色部分面積

$=\triangle O_1O_2O_3$ 面積＋矩形 AO_1O_3F 面積＋矩形 BO_1O_2C 面積＋矩形 DO_2O_3E 面積＋扇形 AO_1B 面積＋扇形 CO_2D 面積＋扇形 EO_3F 面積

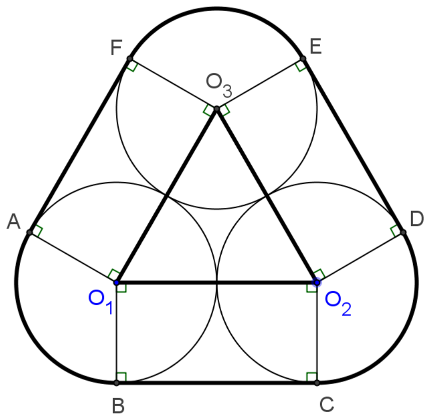


圖 9.2-121(a)

解：

敘述	理由
(1) 在圖形上標示出三圓的圓心 O_1、O_2、O_3； 再標示出圓 O_1 與圓 O_3 外公切線 $\overline{AF}$、圓 O_2 與圓 O_3 外公切線 $\overline{DE}$、圓 O_1 與圓 O_2 外公切線 $\overline{BC}$； 連接 $\overline{O_1O_2}$、$\overline{O_2O_3}$、$\overline{O_3O_1}$、$\overline{O_1A}$、$\overline{O_1B}$、$\overline{O_2C}$、$\overline{O_2D}$、$\overline{O_3E}$、$\overline{O_3F}$； 如圖 9.2-121(a)所示，其中 $\overline{O_1A}=\overline{O_1B}=\overline{O_2C}=\overline{O_2D}=\overline{O_3E}=\overline{O_3F}=5$ 公分； $\overline{O_1O_3}=\overline{O_1O_2}=\overline{O_2O_3}=2\times(5$ 公分$)=10$ 公分	作圖 & 已知圖形為三個半徑皆為 5 cm 的圓兩兩外切所排列成的形體 & 相切兩圓的連心線，必過切點，且連心線長為兩半徑之和

(2) $\triangle O_1O_2O_3$ 為正三角形	由(1)$\overline{O_1O_3}=\overline{O_1O_2}=\overline{O_2O_3}=10$ 公分 & 正三角形定義
(3) $\triangle O_1O_2O_3$ 面積$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\overline{O_1O_2}^2$ $=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(10\text{ 公分})^2$ $=25\sqrt{3}$ 平方公分	由(2) & 例題 9.1-19 結論：邊長為 a 單位的正三角形面積為$\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$平方單位 & 由(1) $\overline{O_1O_2}=10$ 公分
(4) $\angle AFO_3=\angle FAO_1=\angle FO_3O_1=\angle AO_1O_3=90°$ & 四邊形 AO_1O_3F 為矩形 & $\overline{AF}=\overline{O_1O_3}=2\times(5\text{ 公分})=10$ 公分	由例題 9.2-27 可得知
(5) 矩形 AO_1O_3F 面積$=\overline{O_1A}\times\overline{AF}$ $=(5\text{ 公分})\times(10\text{ 公分})$ $=50$ 平方公分	由(4) 四邊形 AO_1O_3F 為矩形 & 矩形面積為長與寬之乘積 & (1)$\overline{O_1A}=5$ 公分、(4) $\overline{AF}=10$ 公分
(6) $\angle BCO_2=\angle CBO_1=\angle BO_1O_2=\angle CO_2O_1=90°$ & 四邊形 BO_1O_2C 為矩形 & $\overline{BC}=\overline{O_1O_2}=2\times(5\text{ 公分})=10$ 公分	由例題 9.2-27 可得知
(7) 矩形 BO_1O_2C 面積$=\overline{O_1B}\times\overline{BC}$ $=(5\text{ 公分})\times(10\text{ 公分})$ $=50$ 平方公分	由(6) 四邊形 BO_1O_2C 為矩形 & 矩形面積為長與寬之乘積 & (1) $\overline{O_1B}=5$ 公分、(6) $\overline{BC}=10$ 公分
(8) $\angle DEO_3=\angle EDO_2=\angle DO_2O_3=\angle EO_3O_2=90°$ & 四邊形 DO_2O_3E 為矩形 & $\overline{DE}=\overline{O_2O_3}=2\times(5\text{ 公分})=10$ 公分	由例題 9.2-27 可得知
(9) 矩形 DO_2O_3E 面積$=\overline{O_1D}\times\overline{DE}$ $=(5\text{ 公分})\times(10\text{ 公分})$ $=50$ 平方公分	由(8) 四邊形 DO_2O_3E 為矩形 & 矩形面積為長與寬之乘積 & (1) $\overline{O_1D}=5$ 公分、(8)$\overline{DE}=10$ 公分
(10) $\angle O_1O_2O_3=\angle O_2O_3O_1=\angle O_3O_1O_2=60°$	由(2)&正三角形三個內角皆為 60°
(11) $\angle AO_1B+\angle AO_1O_3+\angle BO_1O_2+\angle O_3O_1O_2=360°$ $\angle CO_2D+\angle CO_2O_1+\angle DO_2O_3+\angle O_1O_2O_3=360°$ $\angle EO_3F+\angle EO_3O_2+\angle FO_3O_1+\angle O_2O_3O_1=360°$	如圖 9.2-121(a)所示 全量等於分量之和
(12) $\angle AO_1B$ $=360°-\angle AO_1O_3-\angle BO_1O_2-\angle O_3O_1O_2$ $=360°-90°-90°-60°$ $=120°$	由(11) 等量減法公理 & (4) $\angle AO_1O_3=\angle FO_3O_1=90°$ (6) $\angle BO_1O_2=\angle CO_2O_1=90°$ (8) $\angle DO_2O_3=\angle EO_3O_2=90°$ &

$\angle CO_2D$ $=360°-\angle CO_2O_1-\angle DO_2O_3-\angle O_1O_2O_3$ $=360°-90°-90°-60°=120°$ $\angle EO_3F$ $=360°-\angle EO_3O_2-\angle FO_3O_1-\angle O_2O_3O_1$ $=360°-90°-90°-60°=120°$	(10) $\angle O_1O_2O_3=\angle O_2O_3O_1$ $=\angle O_3O_1O_2=60°$
(13) AO_1B 與 CO_2D 與 EO_3F 皆為圓心角為 120° 的扇形	由(12) & $\overline{O_1A}$、$\overline{O_1B}$、$\overline{O_2C}$、$\overline{O_2D}$、$\overline{O_3E}$、$\overline{O_3F}$皆為圓半徑
(14) 圓 O_1 面積＝圓 O_2 面積＝圓 O_3 面積 $=\pi\times(5$ 公分$)^2=25\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 已知圖形為三個半徑皆為 5cm 的圓兩兩外切所排列成的形體
(15) 扇形 AO_1B 面積＝$\frac{120°}{360°}\times$(圓 O_1 面積) $=\frac{120°}{360°}\times(25\pi$ 平方公分$)=\frac{25\pi}{3}$ 平方公分	由(13) AO_1B 為圓心角為 120°的扇形 & 周角為 360° & (14) 圓 O_1 面積＝25π 平方公分
(16) 扇形 CO_2D 面積＝$\frac{120°}{360°}\times$(圓 O_2 面積) $=\frac{120°}{360°}\times(25\pi$ 平方公分$)=\frac{25\pi}{3}$ 平方公分	由(13) CO_2D 為圓心角為 120°的扇形 & 周角為 360° & (14) 圓 O_2 面積＝25π 平方公分
(17) 扇形 EO_3F 面積＝$\frac{120°}{360°}\times$(圓 O_3 面積) $=\frac{120°}{360°}\times(25\pi$ 平方公分$)=\frac{25\pi}{3}$ 平方公分	由(13) EO_3F 為圓心角為 120°的扇形 & 周角為 360° & (14) 圓 O_3 面積＝25π 平方公分
(18) 灰色部分面積 ＝$\triangle O_1O_2O_3$ 面積＋矩形 AO_1O_3F 面積＋矩形 BO_1O_2C 面積＋矩形 DO_2O_3E 面積＋扇形 AO_1B 面積＋扇形 CO_2D 面積＋扇形 EO_3F 面積 $=(25\sqrt{3}+50+50+50+\frac{25\pi}{3}+\frac{25\pi}{3}+\frac{25\pi}{3})$ 平方公分 $=(150+25\pi+25\sqrt{3})$ 平方公分	全量等於分量之和 & (3)$\triangle O_1O_2O_3$ 面積＝$25\sqrt{3}$ 平方公分 (5)矩形 AO_1O_3F 面積＝50 平方公分 (7)矩形 BO_1O_2C 面積＝50 平方公分 (9)矩形 DO_2O_3E 面積＝50 平方公分 (15) 扇形 AO_1B 面積 $=\frac{25\pi}{3}$ 平方公分 (16) 扇形 CO_2D 面積 $=\frac{25\pi}{3}$ 平方公分 (17) 扇形 EO_3F 面積 $=\frac{25\pi}{3}$ 平方公分

習題 9.2-47

圖 9.2-122 中，△ABC 為直角三角形，∠ACB＝90°，分別以$\overline{AC}$為直徑作半圓甲、以$\overline{BC}$為直徑作半圓乙、以$\overline{AB}$為直徑作半圓丙，若甲面積為 4.5π 平方公分，乙面積為 8π 平方公分，則丙面積為何？

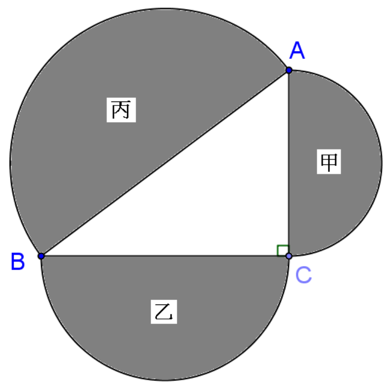


圖 9.2-122

想法：利用例題 9.2-56 結論：丙面積＝甲面積＋乙面積

解：

敘述	理由
(1) 丙面積＝甲面積＋乙面積 ＝(4.5π＋8π) 平方公分 ＝12.5π 平方公分	已知△ABC 為直角三角形，∠ACB＝90°，分別以$\overline{AC}$為直徑作半圓甲、以$\overline{BC}$為直徑作半圓乙、以$\overline{AB}$為直徑作半圓丙，甲面積為 4.5π 平方公分，乙面積為 8π 平方公分 & 利用例題 9.2-56 結論

習題 9.2-48

已知圓 O 的一弦$\overline{AB}$＝16 公分，弦心距$\overline{OC}$＝6 公分，則圓 O 面積為何？

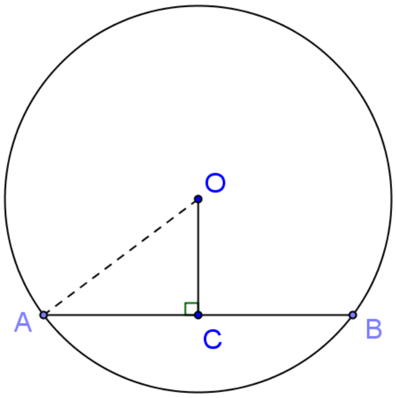


圖 9.2-123

想法：(1) 利用定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理，得$\overline{AC}$＝8 公分

(2) 利用畢氏定理求出$\overline{OA}^2$

(3) 圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積

解：

敘述	理由
(1) $\overline{OC}\perp\overline{AB}$，∠OCA＝90°	已知$\overline{OC}$為弦心距
(2) △ACO 為直角三角形	由(1) & 直角三角形定義
(3) C 點為$\overline{AB}$中點， $\overline{AC}=\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ $=\frac{1}{2}\times$(16 公分)＝8 公分	由(1) & 定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理 $\overline{OC}$垂直平分$\overline{AB}$ & 已知弦$\overline{AB}$＝16 公分
(4) △ACO 中， $\overline{OA}^2=\overline{AC}^2+\overline{OC}^2$	由(2) △ACO 為直角三角形 & 畢氏定理
(5) $\overline{OA}^2$＝(8 公分)^2＋(6 公分)^2 ＝100 平方公分	由(4) & 已知$\overline{OC}$＝6 公分 & (3) $\overline{AC}$＝8 公分
(6) 圓 O 面積＝π×$\overline{OA}^2$ ＝π×(100 平方公分) ＝100π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 由(5) $\overline{OA}^2$＝100 平方公分　已證

習題 9.2-49

如圖 9.2-124，$\overline{AB}$ 為兩同心圓中大圓的弦，交小圓於 C、D。若 $\overline{AB}$＝40 公分，$\overline{CD}$＝28 公分，求兩圓所圍的灰色環狀區域面積。

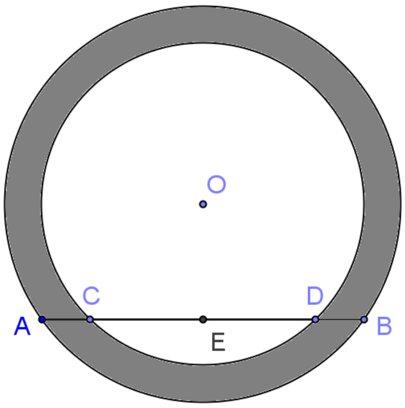


圖 9.2-124

想法：(1) 利用定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理，求出$\overline{AE}$與$\overline{CE}$

(2) 利用畢氏定理得$\overline{OA}^2$與$\overline{OC}^2$

(3) 灰色環狀區域　　　　　　　　以$\overline{OC}$為半徑的圓面積

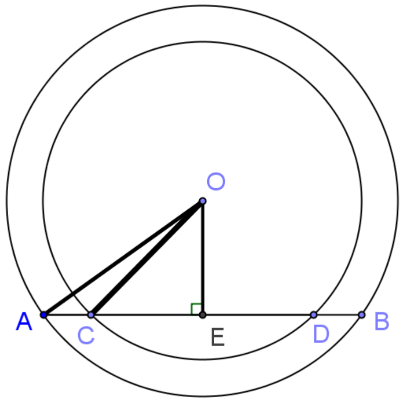


圖 9.2-124(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{OA}$、$\overline{OC}$，並作$\overline{OE}\perp\overline{AB}$， 如上圖 9.2-124(a)所示， 則∠OEA＝90° $\overline{AE}=\overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times$(40 公分) ＝20 公分	作圖 ＆ 定理 7.2-5 垂直於弦的直徑定理 $\overline{OE}$垂直平分$\overline{AB}$ ＆ $\overline{OE}$垂直平分$\overline{CD}$ ＆ 已知$\overline{AB}$＝40 公分、$\overline{CD}$＝28 公分

$\overline{CE}=\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\frac{1}{2}\times$(28 公分) ＝14 公分	
(2) △AEO 為直角三角形 $\overline{OA}^2=\overline{AE}^2+\overline{OE}^2$ $=(20$ 公分$)^2+\overline{OE}^2$ ＝400 平方公分＋$\overline{OE}^2$	由(1) ∠OEA＝90° 直角三角形定義 & 畢氏定理 由(1) $\overline{AE}$＝20 公分　已證
(3) △CEO 為直角三角形 $\overline{OC}^2=\overline{CE}^2+\overline{OE}^2$ $=(14$ 公分$)^2+\overline{OE}^2$ ＝196 平方公分＋$\overline{OE}^2$	由(1) ∠OEA＝90° 直角三角形定義 & 畢氏定理 由(1) $\overline{CE}$＝14 公分　已證
(4) 以$\overline{OA}$為半徑的圓面積 ＝$\pi\times\overline{OA}^2$ ＝π×(400 平方公分＋$\overline{OE}^2$) ＝400π 平方公分＋$\overline{OE}^2\pi$	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (2) $\overline{OA}^2$＝400 平方公分＋$\overline{OE}^2$ 已證
(5) 以$\overline{OC}$為半徑的圓面積 ＝$\pi\times\overline{OC}^2$ ＝π×(196 平方公分＋$\overline{OE}^2$) ＝196π 平方公分＋$\overline{OE}^2\pi$	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (3) $\overline{OC}^2$＝196 平方公分＋$\overline{OE}^2$ 已證
(6) 灰色環狀區域面積 ＝以$\overline{OA}$為半徑的圓面積－ 以$\overline{OC}$為半徑的圓面積 ＝(400π 平方公分＋$\overline{OE}^2\pi$)－ (196π 平方公分＋$\overline{OE}^2\pi$) ＝204π 平方公分	題目所求 全量等於分量之和 & (4) 以$\overline{OA}$為半徑的圓面積 ＝400π 平方公分＋$\overline{OE}^2\pi$　已證 (5) 以$\overline{OC}$為半徑的圓面積 ＝196π 平方公分＋$\overline{OE}^2\pi$　已證

習題 9.2-50

如圖 9.2-125，圓 I 為直角三角形 ABC 的內切圓，D、E、F 為切點，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$。若 $\overline{AB}$＝4 公分，$\overline{BC}$＝3 公分，求圓 I 的面積。

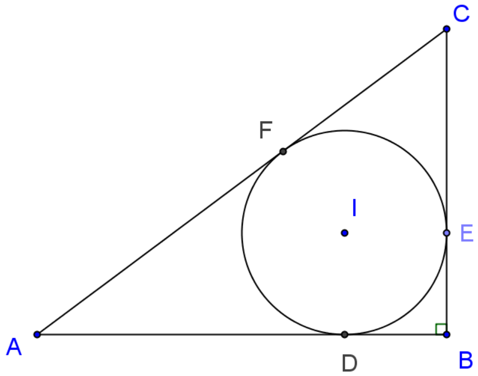


圖 9.2-125

想法：(1) 先利用畢氏定理求出直角三角形的斜邊長

(2) 再利用第七章例題 7.3-11 的結論，求出直角三角形內切圓半徑

(3) 圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積

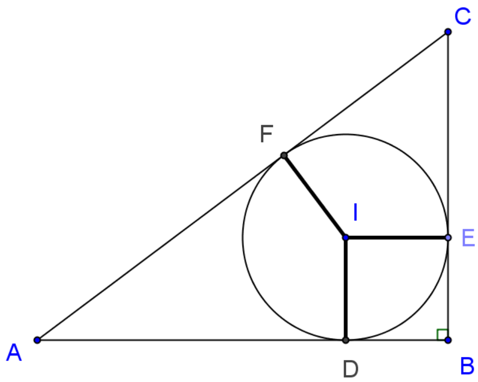


圖 9.2-125(a)

解：

敘述	理由
(1) 連接$\overline{ID}$、$\overline{IE}$、$\overline{IF}$如上圖 9.2-125(a)所示，則$\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}$為圓 I 半徑	作圖 & 已知圓 I 為直角三角形 ABC 的內切圓，D、E、F 為切點
(2) 直角三角形 ABC 中 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$ ＝(4 公分)^2＋(3 公分)^2 ＝16 平方公分＋9 平方公分 ＝25 平方公分	畢氏定理 & 已知直角三角形 ABC 中，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$ & $\overline{AB}$＝4 公分，$\overline{BC}$＝3 公分
(3) $\overline{AC}$＝5 公分 或 $\overline{AC}$＝－5 公分	由(2) 求平方根

(4) $\overline{AC}$＝5 公分	由(3) ＆ $\overline{AC}$為線段長度必大於 0
(5) 圓 I 半徑$\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}$ $=\frac{\overline{AB}+\overline{BC}-\overline{AC}}{2}$ $=\frac{4公分+3公分-5公分}{2}$ ＝1 公分	由(1) $\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}$為圓 I 半徑 ＆ 利用第七章例題 7.3-11 的結論：直角三角形內接圓半徑＝(兩股和減去斜邊)÷2 ＆ 已知圓 I 為直角三角形 ABC 的內切圓，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$ ＆ $\overline{AB}$＝4 公分，$\overline{BC}$＝3 公分 ＆ 由(4) $\overline{AC}$＝5 公分 已證
(6) 圓 I 的面積$=\pi\times\overline{ID}^2$ $=\pi\times(1\text{ 公分})^2$ ＝π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 ＆ 由(5) 圓 I 半徑$\overline{ID}$＝1 公分

習題 9.2-51

如圖 9.2-126，已知 I 為△ABC 的內心，若∠BIC＝135°，且$\overline{AB}$＝10 公分，$\overline{AC}$＝24 公分，試求△ABC 內切圓的面積。

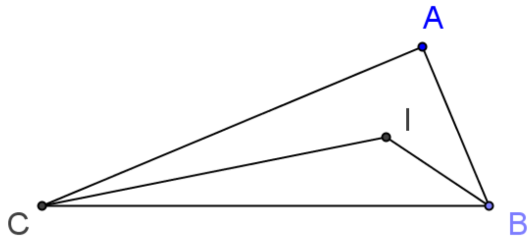


圖 9.2-126

想法：(1) 利用例題 4.3-2 結論：若 I 點為△ABC 的內心，則∠BIC＝90°＋$\frac{1}{2}$∠BAC

(2) 利用畢氏定理求出直角三角形的第三邊

(3) 利用第七章例題 7.3-11 的結論，求出直角三角形內切圓半徑

(4) 圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積

解：

敘述	理由
(1) ∠BIC＝90°＋$\frac{1}{2}$∠BAC	已知 I 點為△ABC 的內心 & 利用例題 4.3-2 結論
(2) 135°＝90°＋$\frac{1}{2}$∠BAC	由(1) & 已知∠BIC＝135°
(3) ∠BAC＝(135°－90°)×2＝90°	由(2) 求∠BAC 之值
(4) △ABC 為直角三角形 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$	由(3) & 直角三角形定義 & 畢氏定理
(5) $\overline{BC}^2$＝(10 公分)^2＋(24 公分)^2 ＝(100＋576) 平方公分 ＝676 平方公分	由(4) & 已知$\overline{AB}$＝10 公分，$\overline{AC}$＝24 公分
(6) $\overline{BC}$＝26 公分 或 $\overline{BC}$＝－26 公分	由(5) 求平方根
(7) $\overline{BC}$＝26 公分	由(6) & $\overline{BC}$為線段長度必大於 0
(8) △ABC 內切圓半徑 $=\frac{\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC}}{2}$ $=\frac{10公分+24公分-26公分}{2}$ ＝4 公分	已知 I 為△ABC 的內心 & 利用第七章例題 7.3-11 的結論 & 已知$\overline{AB}$＝10 公分，$\overline{AC}$＝24 公分 & (7) $\overline{BC}$＝26 公分 已證

(9) △ABC 內切圓的面積 $=\pi\times$(△ABC 內切圓半徑)^2 $=\pi\times$(4 公分)^2 $=16\pi$ 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (8) △ABC 內切圓半徑＝4 公分 已證

習題 9.2-52

已知有甲、乙兩個圓，甲圓半徑為 4 公分、乙圓半徑為 6 公分，則：

(1) 甲圓周長與乙圓周長之比為何？

(2) 甲圓面積與乙圓面積之比為何？

想法：(1) 定理 9.2-6 圓周比定理：兩圓的圓周比等於兩圓的半徑比

(2) 定理 9.2-9 圓面積比定理：兩圓的面積比等於兩圓的半徑平方比

解：

敘述	理由
(1) 甲圓周長：乙圓周長 ＝(4 公分)：(6 公分) ＝2：3	兩圓的圓周比等於兩圓的半徑比 & 已知甲圓半徑為 4 公分、乙圓半徑為 6 公分 & 倍比定理
(2) 甲圓面積：乙圓面積 ＝(4 公分)^2：(6 公分)^2 ＝4：9	兩圓的面積比等於兩圓的半徑平方比 & 已知甲圓半徑為 4 公分、乙圓半徑為 6 公分 & 倍比定理

習題 9.2-53

圖 9.2-127 中，$\overline{AB}$為圓 O_1 的直徑，$\overline{AO_1}$為圓 O_2 的直徑，已知$\overline{AB}$＝10 公分、$\overline{AO_1}$＝5 公分，則圓 O_1 面積是圓 O_2 的幾倍？

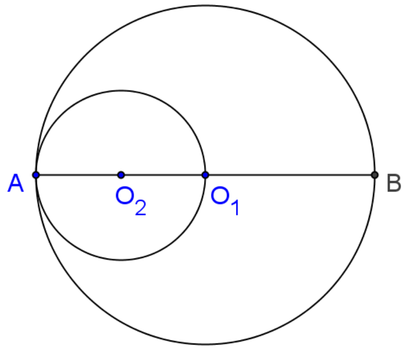


圖 9.2-127

想法：定理 9.2-9 圓面積比定理：兩圓的面積比等於兩圓的半徑平方比

解：

敘述	理由
(1) 圓 O_1 的半徑 ＝$\overline{AB}$÷2 ＝(10 公分)÷2＝5 公分	已知$\overline{AB}$＝10 公分為圓 O_1 的直徑 & 同圓半徑為直徑的一半
(2) 圓 O_2 的半徑 ＝$\overline{AO_1}$÷2 ＝(5 公分)÷2＝2.5 公分	已知$\overline{AO_1}$＝5 公分為圓 O_1 的直徑 & 同圓半徑為直徑的一半
(3) 圓 O_1 面積：圓 O_2 面積 ＝$(5\text{ 公分})^2$：$(2.5\text{ 公分})^2$ ＝4：1	兩圓的面積比等於兩圓的半徑平方比 & 由(1) 圓 O_1 的半徑＝5 公分、 (2) 圓 O_2 的半徑＝2.5 公分 & 倍比定理
(4) 圓 O_1 面積＝4×圓 O_2 面積	由(3) & 外項乘積等於內項乘積
(5) 圓 O_1 面積是圓 O_2 的 4 倍	由(4) 已證

習題 9.2-54

已知圓 O_1 半徑：圓 O_2 半徑＝3：5，若圓 O_1 面積為 18π 平方公分，則圓 O_2 面積為何？

想法：定理 9.2-9 圓面積比定理：兩圓的面積比等於兩圓的半徑平方比

解：

敘述	理由
(1) 假設圓 O_1 半徑＝3r 圓 O_2 半徑＝5r	已知圓 O_1 半徑：圓 O_2 半徑＝3：5 & 假設
(2) 圓 O_1 面積：圓 O_2 面積 ＝$(3r)^2$：$(5r)^2$ ＝9：25	兩圓的面積比等於兩圓的半徑平方比 & 由(1) 假設 & 倍比定理
(3) 9×圓 O_2 面積＝25×圓 O_1 面積	由(2) & 內項乘積等於外項乘積
(4) 圓 O_2 面積＝$\frac{25}{9}$×圓 O_1 面積 ＝$\frac{25}{9}$×(18π 平方公分) ＝50π 平方公分	由(3) 等式兩邊同除以 9 & 已知圓 O_1 面積為 18π 平方公分

習題 9.3

習題 9.3-1

完成以下表格：

	立方體	長方體
面數		
面的形狀		
頂點數		
稜線數		

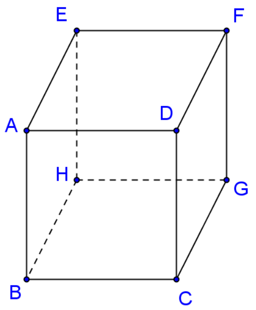


圖 9.3-70(a)

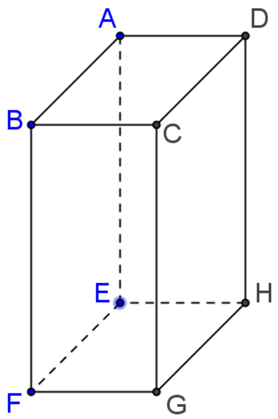


圖 9.3-70(b)

想法：利用立方體及長方體的定義

解：

敘述	理由
(1) 如圖 9.3-70(a)所示， 立方體有 6 個面、8 個頂點、 12 條稜線，且 6 個面皆為正方形	立方體定義 & 面與面的交線，叫做稜線， 稜線與稜線的交點，叫做頂點
(2) 如圖 9.3-70(b)所示， 長方體有 6 個面、8 個頂點、 12 條稜線，且 6 個面皆為長方形	長方體定義 & 面與面的交線，叫做稜線， 稜線與稜線的交點，叫做頂點

習題 9.3-2

已知一立方體的邊長為 5 公分，則此立方體的表面積為何？

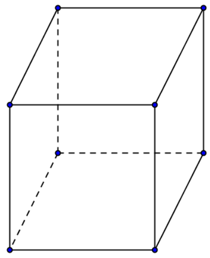


圖 9.3-71

想法：立方體表面積等於邊長平方的 6 倍

解：

敘述	理由
(1) 立方體表面積＝6×(5 公分)^2 ＝150 平方公分	立方體表面積等於邊長平方的 6 倍 & 已知立方體的邊長為 5 公分

習題 9.3-3

已知一立方體的表面積為 54 平方公分，則此立方體的邊長為何？

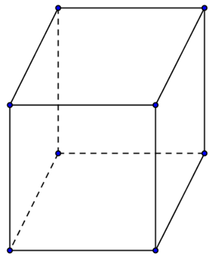


圖 9.3-72

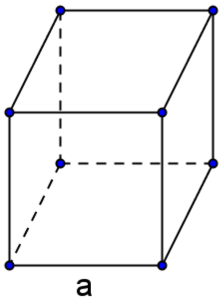
想法：立方體表面積等於邊長平方的 6 倍

解：

敘述	理由
(1) 6×(立方體邊長)^2＝54 平方公分	立方體表面積等於邊長平方的 6 倍 & 已知一立方體的表面積為 54 平方公分
(2) 立方體邊長＝3 公分 或 立方體邊長＝－3 公分	由(1) 求平方根
(3) 所以立方體邊長＝3 公分	由(2) & 立方體邊長必大於 0

習題 9.3-4

已知一立方體的邊長變為原來的 2 倍，則此立方體的表面積變為原來的幾倍？



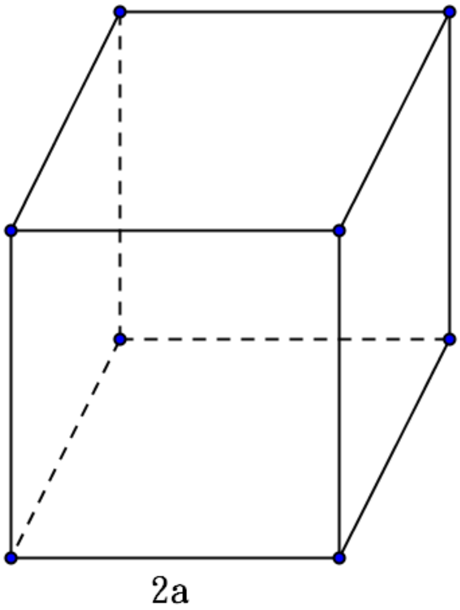


圖 9.3-73(一)　　**圖 9.3-73(二)**

想法：立方體表面積等於邊長平方的 6 倍

解：

敘述	理由
(1) 假設原立方體的邊長為 a， 如圖 9.3-73(一)所示， 則此立方體表面積＝$6a^2$	假設 & 立方體表面積等於邊長平方的 6 倍
(2) 立方體邊長變為 2a， 如圖 9.3-73(二)所示， 則此立方體表面積＝$6\times(2a)^2$＝$24a^2$	由(1) 假設 & 已知一立方體的邊長變為原來的 2 倍 & 立方體表面積等於邊長平方的 6 倍
(3) 圖 9.3-73 (二)立方體表面積 ＝$24\ a^2$ ＝$4\times(6a^2)$ ＝4×圖 9.3-73 (一)立方體表面積	由(1) 圖 9.3-73(一)立方體表面積＝$6a^2$ & (2) 圖 9.3-73 (二)立方體表面積＝$24\ a^2$
(4) 所以表面積變為原來的 4 倍	由(3) 已證

習題 9.3-5

已知一立方體的邊長為 5 公分，則此立方體的體積為何？

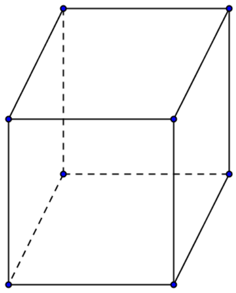


圖 9.3-74

想法：立方體體積等於邊長的立方

解：

敘述	理由
(1) 立方體體積＝$(5\text{ 公分})^3$ ＝125 立方公分	立方體體積等於邊長的立方 & 已知立方體的邊長為 5 公分

習題 9.3-6

已知一立方體的體積為 343 立方公分，則此立方體的邊長為何？

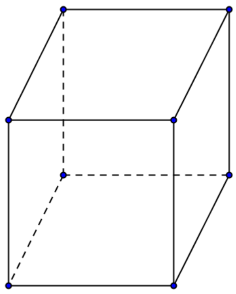


圖 9.3-75

想法：立方體體積等於邊長的立方

解：

敘述	理由
(1) $(\text{立方體邊長})^3$＝343 立方公分	立方體體積等於邊長的立方 & 已知立方體的體積為 343 立方公分
(2) 立方體邊長＝7 公分	由(1) 求立方根

習題 9.3-7

若一立方體的邊長變為原來的 3 倍，則此立方體的體積變為原來的幾倍？

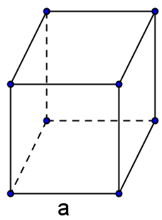


圖 9.3-76(一)

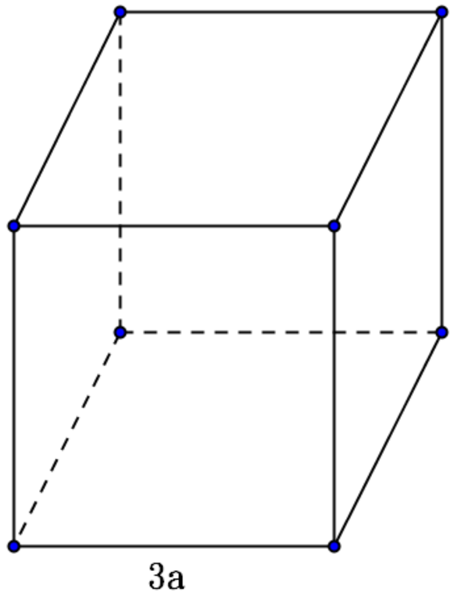


圖 9.3-76(二)

想法：立方體體積等於邊長的立方

解：

敘述	理由
(1) 假設原立方體的邊長為 a， 如圖 9.3-76(一)所示， 則此立方體的體積＝a^3	假設 & 立方體體積等於邊長的立方
(2) 立方體邊長變為 3a， 如圖 9.3-76(二)所示， 則此立方體的體積＝$(3a)^3$＝$27a^3$	由(1) 假設 & 已知一立方體的邊長變為原來的 3 倍 & 立方體體積等於邊長的立方
(3) 圖 9.3-76 (二)立方體的體積 ＝$27a^3$ ＝$27\times(a^3)$ ＝27×圖 9.3-76 (一)立方體的體積	由(1) 圖 9.3-76(一) 立方體的體積＝a^3 & (2) 圖 9.3-76(二) 立方體的體積＝$27a^3$
(4) 所以體積變為原來的 27 倍	由(3) 已證

習題 9.3-8

已知一立方體的表面積為 216 平方公分，則此立方體的體積為何？

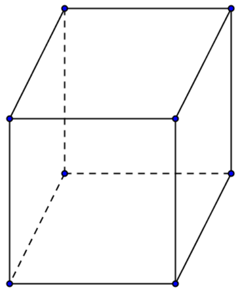


圖 9.3-77

想法：(1) 立方體表面積等於邊長平方的 6 倍

(2) 立方體體積等於邊長的立方

解：

敘述	理由
(1) $6\times$(立方體邊長)^2＝216 平方公分	立方體表面積等於邊長平方的 6 倍 & 已知立方體的表面積為 216 平方公分
(2) 立方體邊長＝6 公分 或 立方體邊長＝－6 公分	由(1) 求平方根
(3) 所以立方體邊長＝6 公分	由(2) & 立方體邊長必大於 0
(4) 立方體體積＝(6 公分)^3 ＝216 立方公分	立方體體積等於邊長的立方 & 由(3) 立方體邊長＝6 公分 已證

習題 9.3-9

已知一立方體的體積為 512 立方公分，則此立方體的表面積為何？

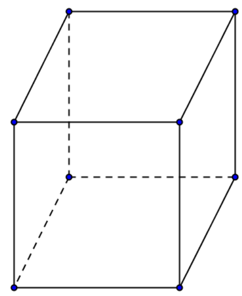


圖 9.3-78

想法：(1) 立方體體積等於邊長的立方

(2) 立方體表面積等於邊長平方的 6 倍

解：

敘述	理由
(1) (立方體邊長)^3＝512 立方公分	立方體體積等於邊長的立方 & 已知立方體的體積為 512 立方公分
(2) 立方體邊長＝8 公分	由(1) 求立方根
(3) 立方體表面積＝6×(8 公分)^2 ＝384 平方公分	立方體表面積等於邊長平方的 6 倍 & 由(2) 立方體邊長＝8 公分

習題 9.3-10

若甲立方體的體積是乙立方體體積的 64 倍，則甲立方體的表面積是乙立方體表面積的幾倍？

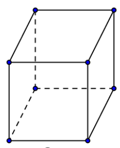


圖 9.3-79(一)

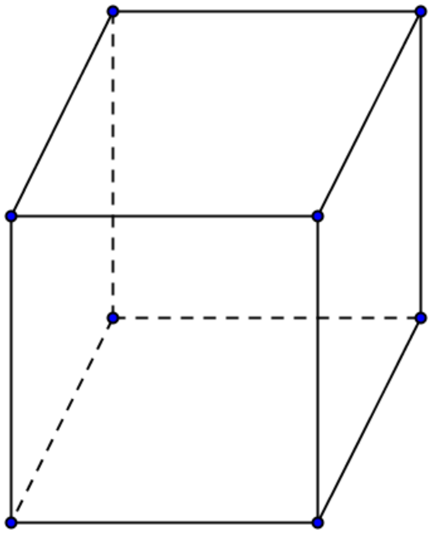


圖 9.3-79(二)

想法：(1) 立方體體積等於邊長的立方

(2) 立方體表面積等於邊長平方的 6 倍

解：

敘述	理由
(1) 假設乙立方體的邊長為 a，如上圖 9.3-79(一) 所示，則： 乙立方體的體積＝a^3， 乙立方體表面積＝$6a^2$	假設 & 立方體體積等於邊長的立方 & 立方體表面積等於邊長平方的 6 倍
(2) 甲立方體的體積＝64 a^3 如圖 9.3-79(二)所示	已知甲立方體的體積是乙立方體體積的 64 倍 & (1) 乙立方體的體積＝a^3
(3) (甲立方體邊長)^3＝64 a^3	由(2) & 立方體體積等於邊長的立方
(4) 甲立方體邊長＝4a	由(3) 求立方根
(5) 甲立方體表面積 ＝$6\times(4a)^2$ ＝$96a^2$ ＝$16\times(6a^2)$ ＝16×(乙立方體表面積)	由(3) 甲立方體邊長＝4a & 立方體表面積等於邊長平方的 6 倍 由(1) 乙立方體表面積＝$6a^2$
(6) 所以甲立方體表面積是乙立方體表面積的 16 倍	由(5) 已證

習題 9.3-11

已知一長方體的長為 4 公分、寬為 3 公分、高為 2 公分，則此長方體的表面積為何？

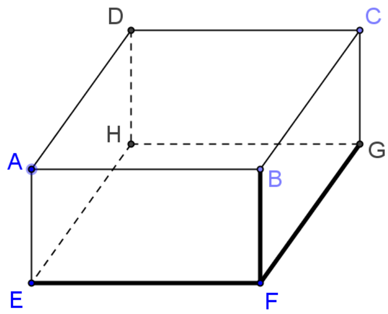


圖 9.3-80

想法：長立方體的表面積，等於不相等三邊每兩邊相乘和的兩倍

解：

敘述	理由
(1) 長方體表面積 ＝2×[(4 公分)×(3 公分)＋(3 公分)×(2 公分) ＋(2 公分)×(4 公分)] ＝2×[12＋6＋8] 平方公分 ＝52 平方公分	長立方體的表面積，等於不相等三邊每兩邊相乘和的兩倍 & 已知一長方體的長為 4 公分、寬為 3 公分、高為 2 公分

習題 9.3-12

已知一長方體的長為 4 公分、寬為 5 公分，且其表面積為 220 平方公分，則此長方體的高為何？

想法：長立方體的表面積，等於不相等三邊每兩邊相乘和的兩倍

解：

敘述	理由
(1) 假設此長方體的高為 h 公分	假設
(2) 220＝2×(4×5＋5×h＋h×4)	長立方體的表面積，等於不相等三邊每兩邊相乘和的兩倍 & 已知一長方體的長為 4 公分、寬為 5 公分，且其表面積為 220 平方公分 & 由(1) 假設此長方體的高為 h 公分
(3) h＝10	由(2) 解一元一次方程式
(4) 所以此長方體的高為 10 公分	由(1) & (3) 已證

習題 9.3-13

已知一長方體的長為 8 公分、寬為 6 公分、高為 4 公分，則此長方體的體積為何？

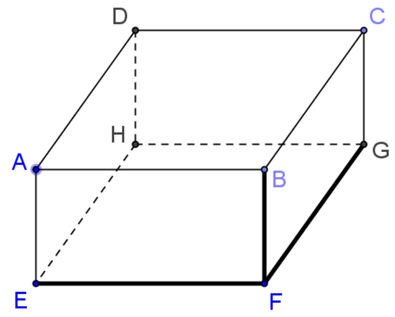


圖 9.3-81

想法：長方體的體積，等於長寬高三邊的乘積

解：

敘述	理由
(1) 長方體體積 ＝(8 公分)×(6 公分)×(4 公分) ＝192 立方公分	長方體的體積，等於長寬高三邊的乘積 & 已知一長方體的長為 8 公分、寬為 6 公分、高為 4 公分

習題 9.3-14

有一長方體，其底面為邊長 6 公分的正方形，高為 10 公分，若將底面正方形邊長增加 4 公分，則高要變為幾公分，體積才不會改變？

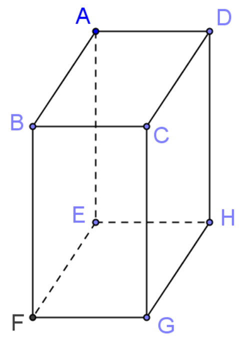


圖 9.3-82(a)

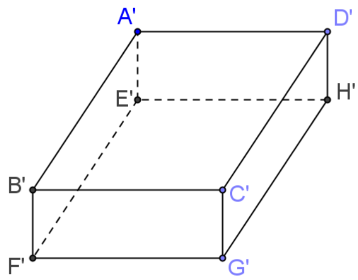


圖 9.3-82(b)

想法：長方體的體積，等於長寬高三邊的乘積

解：

敘述	理由
(1) 依題意畫圖，如圖 9.3-82(a)，其中 長方體的長$\overline{FG}$＝6 公分， 長方體的寬$\overline{GH}$＝6 公分， 長方體的高$\overline{GC}$＝10 公分 則長方體體積 ＝(6 公分)×(6 公分)×(10 公分) ＝360 立方公分	長方體的體積，等於長寬高三邊的乘積 & 已知有一長方體，其底面為邊長 6 公分的正方形，高為 10 公分
(2) 依題意假設，如圖 9.3-82 (b)，其中 長方體的長$\overline{F'G'}$＝10 公分， 長方體的寬$\overline{G'H'}$＝10 公分， 假設長方體的高$\overline{G'C'}$＝h 公分 則長方體體積 ＝(10 公分)×(10 公分)×(h 公分) ＝(100×h) 立方公分	長方體的體積，等於長寬高三邊的乘積 & 已知將底面正方形邊長增加 4 公分 & 假設
(3) 360 立方公分＝(100×h) 立方公分	題意說明體積不變 & 由(1)、(2) 已證
(4) h＝360÷100＝3.6	由(3) 求 h 之值
(5) 所以長方體的高變為 3.6 公分	由(2) 假設長方體的高$\overline{G'C'}$＝h 公分 & (4) h＝3.6 已證

習題 9.3-15

已知一長方體和一立方體的體積相同，若此長方體的長為 12 公分、寬為 6 公分、高為 3 公分，求立方體的表面積。

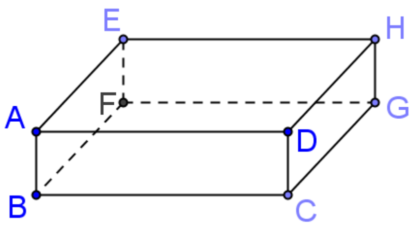


圖 9.3-83(a)

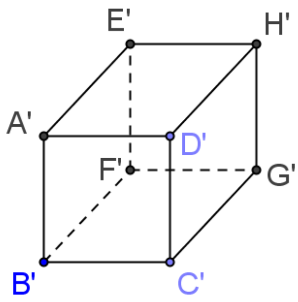


圖 9.3-83(b)

想法：(1) 長方體的體積，等於長寬高三邊的乘積

(2) 立方體體積等於邊長的立方

(3) 立方體表面積等於邊長平方的 6 倍

解：

敘述	理由
(1) 依題意畫圖，如圖 9.3-83(a)，其中長方體的長$\overline{BC}$＝12 公分，長方體的寬$\overline{CG}$＝6 公分，長方體的高$\overline{CD}$＝3 公分 則長方體體積 ＝(12 公分)×(6 公分)×(3 公分) ＝216 立方公分	長方體的體積，等於長寬高三邊的乘積 & 已知此長方體的長為 12 公分、寬為 6 公分、高為 3 公分
(2) 假設此立方體的邊長為 a 公分，如圖 9.3-83 (b)所示， 則立方體體積＝a^3 立方公分	立方體體積等於邊長的立方 & 假設
(3) 216 立方公分＝a^3 立方公分	已知長方體和立方體的體積相同 & 由(1)、(2) 已證
(4) a＝6 (即立方體邊長為 6 公分)	由(3) 求立方根 & (2) 假設
(5) 立方體的表面積 ＝6×(6 公分)^2＝216 平方公分	立方體表面積等於邊長平方的 6 倍 & 由(4) 立方體邊長為 6 公分 已證

習題 9.3-16

完成以下表格：(以下柱體皆為直角柱)

	面數	頂點數	稜線數	底面形狀	側面形狀
三角柱					
四角柱					
五角柱					
n 角柱					

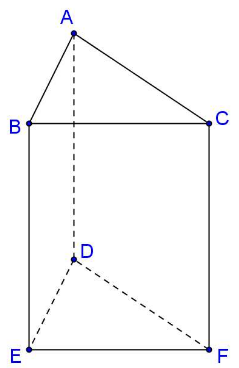


圖 9.3-84(a)

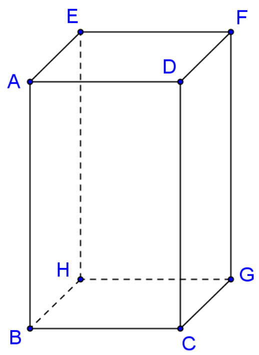


圖 9.3-84(b)

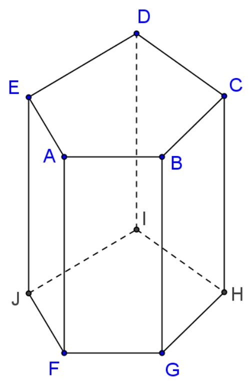


圖 9.3-84(c)

想法：利用直角柱體的定義

解：

敘述	理由
(1) 如圖 9.3-84(a)所示，三角柱有 5 個面、6 個頂點、9 條稜線，且 2 個底面皆為三角形、3 個側面皆為矩形	三角柱定義 & 面與面的交線，叫做稜線，稜線與稜線的交點，叫做頂點
(2) 如圖 9.3-84(b)所示，四角柱有 6 個面、8 個頂點、12 條稜線，且 2 個底面與 4 個側面皆為矩形	四角柱定義 & 面與面的交線，叫做稜線，稜線與稜線的交點，叫做頂點

(3) 如圖 9.3-84(c)所示， 五角柱有 7 個面、10 個頂點、15 條稜線，且 2 個底面皆為五邊形、5 個側面皆為矩形	五角柱定義 & 面與面的交線，叫做稜線，稜線與稜線的交點，叫做頂點
(4) n 角柱有(n＋2)個面、(2n)個頂點、(3n)條稜線，且 2 個底面皆為 n 邊形、n 個側面皆為矩形	n 角柱定義 & 面與面的交線，叫做稜線，稜線與稜線的交點，叫做頂點 & 由(1)～(3) 歸納得知

習題 9.3-17

若某個直角柱有 15 條稜邊、a 個頂點與 b 個面，求 a×b 之值為何？

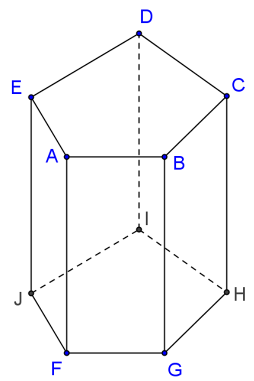


圖 9.3-85

想法：n 角柱有(n＋2)個面、(2n)個頂點、(3n)條稜線

解：

敘述	理由
(1) 假設此直角柱為 n 直角柱，則此 n 直角柱有(3n)條稜線	假設 & n 角柱有(3n)條稜線
(2) 3n＝15	由(1) & 已知某個直角柱有 15 條稜邊
(3) n＝15÷3＝5	由(2) 求 n 之值
(4) 所以此直角柱為五角柱， 五角柱有 2×5＝10 個頂點、 有 5＋2＝7 個面	由(1) 假設 & (3) n＝5 已證 & n 角柱(2n)個頂點、有(n＋2)個面
(5) a＝10 且 b＝7	由(4) & 已知某個直角柱有 a 個頂點與 b 個面
(6) a×b＝10×7＝70	由(5)

習題 9.3-18

圖 9.3-58 為一六角柱體，已知其底面面積為 $54\sqrt{3}$ 平方公分，底面周長為 36 公分，若柱體的高為 3 公分，則此六角柱體的體積與表面積各為何？

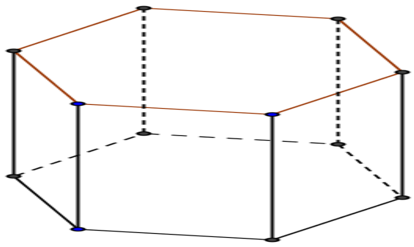


圖 9.3-58

想法：(1) 角柱的體積等於底面積乘以角柱的高

(2) 角柱的底面積為 A、底面周長為 S、柱高為 h，則角柱表面積＝2A＋S×h

解：

敘述	理由
(1) 此六角柱體的體積 ＝($54\sqrt{3}$ 平方公分)×(3 公分) ＝$162\sqrt{3}$ 平方公分	角柱的體積等於底面積乘以角柱的高 & 已知六角柱體的底面面積為 $54\sqrt{3}$ 平方公分， 柱體的高為 3 公分
(2) 此六角柱表面積 ＝2×($54\sqrt{3}$ 平方公分) ＋(36 公分)×(3 公分) ＝($108＋108\sqrt{3}$) 平方公分	角柱的底面積為 A、底面周長為 S、柱高為 h， 則角柱表面積＝2A＋S×h & 已知六角柱的底面面積為 $54\sqrt{3}$ 平方公分， 底面周長為 36 公分，柱體的高為 3 公分

習題 9.3-19

圖 9.3-59 是底面為梯形的四角柱，已知梯形的上底$\overline{AB}$＝12 公分、梯形的下底$\overline{DC}$＝18 公分、梯形的高$\overline{BC}$＝8 公分且梯形另一邊$\overline{AD}$＝10 公分，若四角柱的高$\overline{FB}$＝20 公分，則此四角柱的體積與表面積各為何？

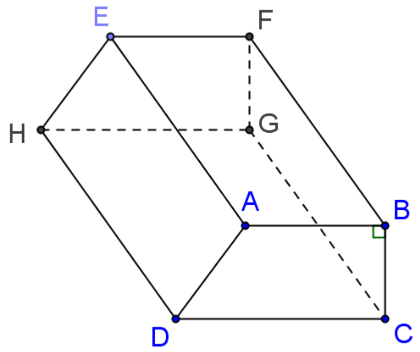


圖 9.3-59

想法：(1) 角柱的體積等於底面積乘以角柱的高

(2) 角柱的底面積為 A、底面周長為 S、柱高為 h，則角柱表面積＝2A＋S×h

解：

敘述	理由
(1) 上底面梯形 ABCD 面積 $=\dfrac{(\overline{AB}+\overline{CD})\times\overline{BC}}{2}$ $=\dfrac{(12\text{公分}+18\text{公分})\times(8\text{公分})}{2}$ ＝120 平方公分	梯形面積等於兩底和與高之乘積的一半 & 已知梯形的上底$\overline{AB}$＝12 公分、梯形的下底$\overline{DC}$＝18 公分、梯形的高$\overline{BC}$＝8 公分
(2) 此四角柱的體積 ＝(120 平方公分)×(20 公分) ＝2400 立方公分	角柱的體積等於底面積乘以角柱的高 & (1) 底面梯形 ABCD 面積＝120 平方公分 & 已知四角柱的高$\overline{FB}$＝20 公分
(3) 上底面梯形 ABCD 周長 $=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{DC}+\overline{AD}$ ＝(12＋8＋18＋10) 公分 ＝48 公分	周長定義 & 已知梯形的上底$\overline{AB}$＝12 公分、梯形的下底$\overline{DC}$＝18 公分、梯形的高$\overline{BC}$＝8 公分且梯形另一邊$\overline{AD}$＝10 公分
(4) 此四角柱的表面積 ＝2×(120 平方公分)＋(48 公分)×(20 公分) ＝1200 平方公分	角柱的底面積為 A、底面周長為 S、柱高為 h，則角柱的表面積＝2A＋S×h & (1) 底面梯形 ABCD 面積＝120 平方公分、 (3) 底面梯形 ABCD 周長＝48 公分 & 已知四角柱的高$\overline{FB}$＝20 公分

習題 9.3-20

有一三角柱體，其底面為直角三角形，兩股長分別為 5 公分及 12 公分，若三角柱體的高為 10 公分，則此三角柱體的體積與表面積各為何？

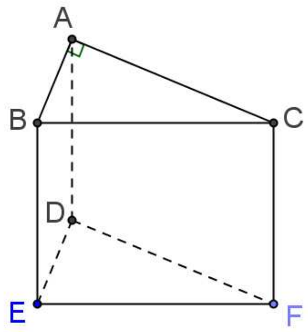


圖 9.3-86(a)

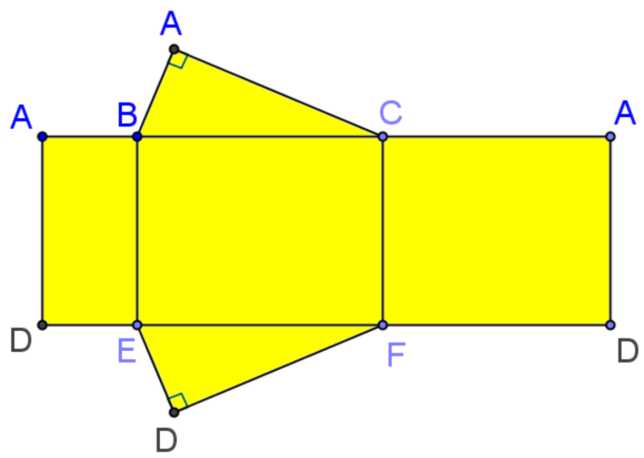


圖 9.3-86(b)

想法：(1) 利用畢氏定理求出直角三角形斜邊，並求出底面周長

(2) 三角形面積為底與高乘積的一半

(3) 角柱的體積等於底面積乘以角柱的高

(4) 角柱的底面積為 A、底面周長為 S、柱高為 h，則角柱表面積＝2A＋S×h

解：

敘述	理由
(1) 依題意繪圖， 如圖 9.3-86(a) 三角柱透視圖、 圖 9.3-86(b) 三角柱展開圖	作圖
(2) 上底面△ABC 為直角三角形， 其中∠A＝90°、$\overline{AB}$＝5 公分、 $\overline{AC}$＝12 公分	如圖 9.3-86(b)所示 已知有一三角柱體，其底面為直角三角形，兩股長分別為 5 公分及 12 公分
(3) △ABC 中， $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$	畢氏定理
(4) $\overline{BC}^2$＝(5 公分)^2＋(12 公分)^2 ＝169 平方公分	將(2) $\overline{AB}$＝5 公分、$\overline{AC}$＝12 公分 代入(3) 式得
(5) $\overline{BC}$＝13 公分 或 $\overline{BC}$＝－13 公分	由(4) 求平方根
(6) 所以$\overline{BC}$＝13 公分	由(5) & $\overline{BC}$為線段長度必大於 0

(7) △ABC 周長 ＝$\overline{AB}$＋$\overline{AC}$＋$\overline{BC}$ ＝5 公分＋12 公分＋13 公分＝30 公分	周長定義 ＆ (2) $\overline{AB}$＝5 公分、$\overline{AC}$＝12 公分 ＆ (6) $\overline{BC}$＝13 公分
(8) △ABC 面積 ＝($\overline{AB}$×$\overline{AC}$)÷2 ＝(5 公分)×(12 公分)÷2 ＝30 平方公分	三角形面積為底與高乘積的一半 ＆ (2) $\overline{AB}$＝5 公分、$\overline{AC}$＝12 公分
(9) 三角柱表面積 ＝2×(△ABC 面積)＋ (△ABC 周長)×(三角柱體的高) ＝2×(30 平方公分)＋(30 公分)×(10 公分) ＝360 平方公分	若角柱的底面積為 A、底面周長為 S、柱高為 h，則角柱的表面積＝2A＋S×h ＆ (8) △ABC 面積＝30 平方公分、 (7) △ABC 周長＝30 公分 ＆ 已知三角柱體的高為 10 公分
(10) 此三角柱體的體積 ＝(30 平方公分)×(10 公分) ＝300 立方公分	角柱的體積等於底面積乘以角柱的高 ＆ (8) 底面△ABC 面積＝30 平方公分 ＆ 已知三角柱體的高＝10 公分

習題 9.3-21

圖 9.3-60 為一正圓柱體，已知其底面半徑為 4 公分，柱體的高為 10 公分，則此正圓柱體的體積與表面積各為何？

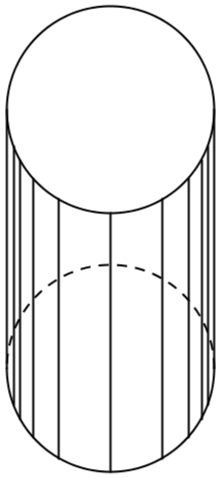


圖 9.3-60

想法：(1) 正圓柱體的底面半徑為 r，高為 h，則正圓柱體的表面積＝$2\pi r^2+2\pi rh$

(2) 正圓柱體的底面半徑為 r，高為 h，則正圓柱體的體積＝πr^2h

解：

敘述	理由
(1) 正圓柱體表面積 ＝$2\pi\times$(4 公分)^2＋$2\pi\times$(4 公分)$\times$(10 公分) ＝112π 平方公分	正圓柱體的底面半徑為 r，高為 h，則正圓柱體的表面積＝$2\pi r^2+2\pi rh$ & 已知正圓柱體的底面半徑為 4 公分，柱體的高為 10 公分
(2) 正圓柱體體積 ＝$\pi\times$(4 公分)$^2\times$(10 公分) ＝160π 立方公分	正圓柱體的底面半徑為 r，高為 h，則正圓柱體的體積＝πr^2h & 已知正圓柱體的底面半徑為 4 公分，柱體的高為 10 公分

習題 9.3-22

完成以下表格：

	面數	頂點數	稜線數	底面形狀	側面形狀
三角錐					
四角錐					
五角錐					
n 角錐					

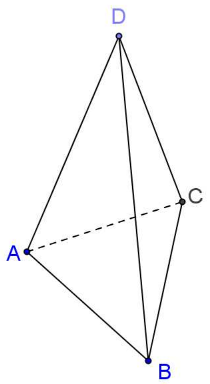


圖 9.3-87(a)

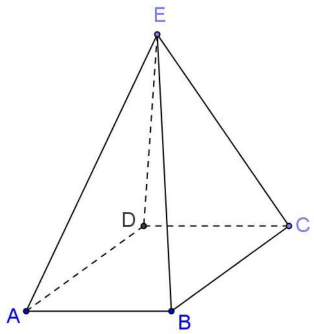


圖 9.3-87(b)

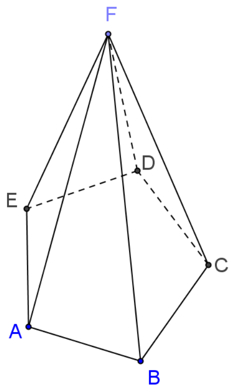


圖 9.3-87(c)

想法：利用角錐的定義

解：

敘述	理由
(1) 如圖 9.3-87(a)所示， 三角錐有 4 個面、4 個頂點、 6 條稜線，且底面為三角形、 3 個側面皆為三角形	三角錐定義 & 面與面的交線，叫做稜線， 稜線與稜線的交點，叫做頂點
(2) 如圖 9.3-87 (b)所示， 四角錐有 5 個面、5 個頂點、 8 條稜線，且底面為四邊形、 4 個側面皆為三角形	四角錐定義 & 面與面的交線，叫做稜線， 稜線與稜線的交點，叫做頂點

(3) 如圖 9.3-87 (c)所示， 五角錐有 6 個面、6 個頂點、 10 條稜線，且底面為五邊形、 5 個側面皆為三角形	五角錐定義 & 面與面的交線，叫做稜線，稜線與稜線的交點，叫做頂點
(4) n 角錐有(n＋1)個面、(n＋1)個頂點、(2n)條稜線，且底面為 n 邊形、n 個側面皆為三角形	n 角錐定義 & 面與面的交線，叫做稜線，稜線與稜線的交點，叫做頂點 & 由(1)～(3) 歸納得知

習題 9.3-23

已知一四角錐的底面是一個邊長為 5 公分的正方形，且側面的四個三角形的面積都是 30 平方公分，求此四角錐的表面積。

想法：角錐的表面積為底面積與所有側面積的和

解：

敘述	理由
(1) 四角錐的表面積 ＝底面正方形面積＋側面 4 個三角形面積 ＝(5 公分)×(5 公分)＋4×(30 平方公分) ＝145 平方公分	角錐的表面積為底面積與所有側面積的和 & 已知已知四角錐的底面是一個邊長為 5 公分的正方形，且側面的四個三角形的面積都是 30 平方公分

習題 9.3-24

圖 9.3-61 為一正三角錐的透視圖，其側面三角形的底$\overline{AB}$=3 公分，高$\overline{DE}$=4 公分，求此正三角錐的表面積。

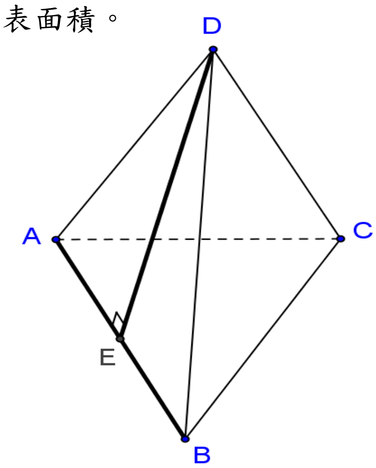


圖 9.3-61

想法：(1) 三角錐側面三角形面積為底與高乘積的一半

(2) 三角錐底面正三角形面積$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$(邊長)^2

(3) 角錐的表面積為底面積與所有側面積的和

解：

敘述	理由
(1) △BCD 面積＝△ACD 面積 ＝△ABD 面積 $=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{DE}}{2}$ $=\dfrac{(3公分)\times(4公分)}{2}$ ＝6 平方公分	正三角錐側面 3 個三角形為全等之等腰三角形 & 已知側面三角形的底$\overline{AB}$=3 公分，高$\overline{DE}$=4 公分 & 三角形面積為底與高乘積的一半
(2) △ABC 面積 $=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(\overline{AB})^2$ $=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(3公分)^2=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ 平方公分	正三角錐底面為一正三角形 & 正三角形面積$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$(邊長)^2 & 已知底面邊長$\overline{AB}$=3 公分
(3) 正三角錐的表面積 ＝△ABC 面積＋3×△ABD 面積 $=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ 平方公分＋3×(6 平方公分) $=(18+\dfrac{9\sqrt{3}}{4})$ 平方公分	角錐的表面積為底面積與所有側面積的和 & (1) △BCD 面積＝△ACD 面積＝△ABD 面積＝6 平方公分、(2) △ABC 面積$=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ 平方公分

習題 9.3-25

圖 9.3-62 為正四角錐的展開圖，若底面為邊長為 20 公分的正方形，且側面等腰三角形的腰長為 26 公分，求此正四角錐的表面積。

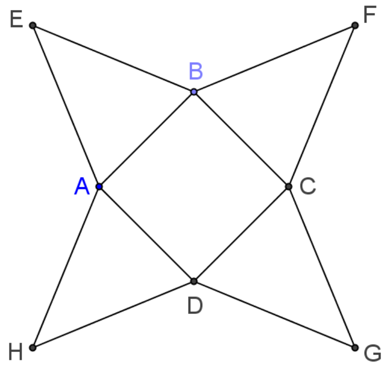


圖 9.3-62

想法：(1) 利用尺規作圖，作側面等腰三角形的高，並利用畢氏定理求出高之值

(2) 四角錐側面三角形面積為底與高乘積的一半

(3) 四角錐底面正方形面積為邊長平方

(4) 角錐的表面積為底面積與所有側面積的和

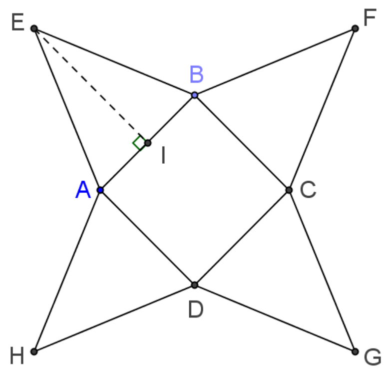


圖 9.3-62(a)

解：

敘述	理由
(1) 作∠AEB 的角平分線交$\overline{AB}$於 I 點，如圖 9.3-62(a)所示，則： $\overline{EI}\perp\overline{AB}$，∠EIA＝90°； $\overline{AI}=\overline{BI}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times$(20 公分) ＝10 公分	正四角錐 4 個側面均為等腰三角形 & 等腰三角形頂角平分線垂直平分底邊 & 已知此正四角錐的底面為邊長為 20 公分的正方形
(2) △EIA 中，$\overline{EI}^2+\overline{AI}^2=\overline{AE}^2$	由(1) ∠EIA＝90° & 畢氏定理

(3) $\overline{EI}^2=\overline{AE}^2-\overline{AI}^2$ $=(26\text{ 公分})^2-(10\text{ 公分})^2$ $=576$ 平方公分	由(2) 等量減法公理＆ (1) $\overline{AI}=10$ 公分、已知此正四角錐側面等腰三角形的腰長為 26 公分
(4) $\overline{EI}=24$ 公分 或 $\overline{EI}=-24$ 公分	由(3) 求平方根
(5) 所以$\overline{EI}=24$ 公分	由(4) ＆ $\overline{EI}$為線段長度必大於 0
(6) △ABE 面積 $=\dfrac{\overline{AI}\times\overline{EI}}{2}$ $=\dfrac{(10\text{公分})\times(24\text{公分})}{2}$ $=120$ 平方公分	三角形面積為底與高乘積的一半 ＆ (1) $\overline{AI}=10$ 公分、(5) $\overline{EI}=24$ 公分
(7) 正方形 ABCD 面積 $=(20\text{ 公分})^2$ $=400$ 平方公分	正方形面積為邊長平方 ＆ 已知此正四角錐的底面為邊長為 20 公分的正方形
(8) 此正四角錐的表面積 ＝正方形 ABCD 面積＋4×△ABE 面積 ＝400 平方公分＋4×(120 平方公分) ＝880 平方公分	角錐的表面積為底面積與所有側面積的和 ＆ (7)正方形 ABCD 面積＝400 平方公分 (6) △ABE 面積＝120 平方公分

習題 9.3-26

已知一直圓錐體底面半徑為 4 公分，側面展開扇形的半徑為 10 公分，則此直圓錐體的表面積為何？

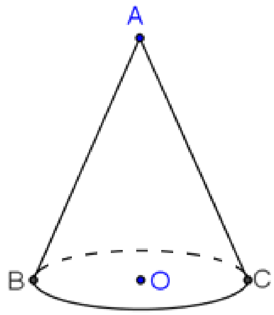


圖 9.3-63

想法：(1) 利用直圓錐體底面圓形的周長等於側面扇形的弧長，求出側面扇形的圓心角

(2) 直圓錐體的表面積為底面圓面積與側面扇形面積之和

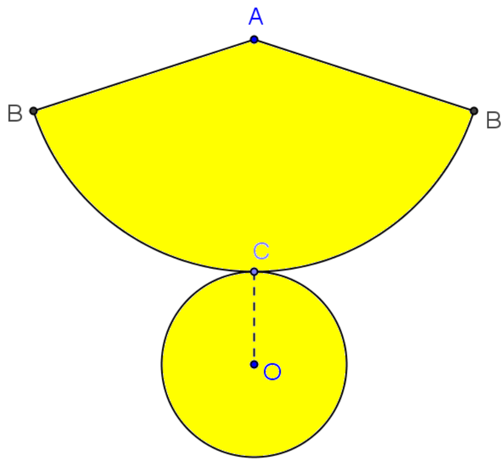


圖 9.3-63(a)

解：

敘述	理由
(1) 依題意畫直圓錐展開圖，如圖 9.3-63(a)所示，則：$\overline{OC}$＝4 公分、$\overline{AB}$＝10 公分	已知一直圓錐體底面半徑為 4 公分，側面展開扇形的半徑為 10 公分 & 作圖
(2) 底面圓 O 周長＝2×π×(4 公分) ＝8π 公分 底面圓 O 面積＝π×(4 公分)^2 ＝16π 平方公分	圓周長為直徑與圓周率之乘積 & 已知底面圓半徑為 4 公分 圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & 已知底面圓半徑為 4 公分

(3) 側面扇形弧長$\overset{\frown}{BCB}$ $=\dfrac{\angle BAB}{360^o}\times$圓 A 周長 $=\dfrac{\angle BAB}{360^o}\times 2\times\pi\times(10$ 公分$)$ $=\dfrac{\angle BAB}{360^o}\times 20\pi$ 公分	扇形弧長$=\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^o}\times$圓周長 & 已知側面展開扇形的半徑為 10 公分
(4) $\dfrac{\angle BAB}{360^o}\times 20\pi$ 公分$=8\pi$ 公分	圓錐底面圓周長等於側面扇形弧長 & (2) 底面圓 O 周長$=8\pi$ 公分、 (3) 側面扇形弧長$\overset{\frown}{BCB}=\dfrac{\angle BAB}{360^o}\times 20\pi$ 公分
(5) $\angle BAB=144°$	由(4) 求$\angle BAB$之值
(6) 側面扇形 BAB 面積 $=\dfrac{\angle BAB}{360^o}\times$圓 A 面積 $=\dfrac{144^o}{360^o}\times\pi\times(10$ 公分$)^2$ $=40\pi$ 平方公分	扇形面積$=\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^o}\times$圓面積 & 圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (5) 扇形圓心角$\angle BAB=144°$ 、 已知側面展開扇形的半徑為 10 公分
(7) 此直圓錐表面積 $=(16\pi+40\pi)$ 平方公分 $=56\pi$ 平方公分	直圓錐體的表面積為底面圓面積與側面扇形面積之和 & (2) 底面圓 O 面積$=16\pi$ 平方公分、 (6) 側面扇形 BAB 面積$=40\pi$ 平方公分

習題 9.3-27

圖 9.3-64 為一圓錐體的展開圖，其側面扇形的圓心角為 180°，側面扇形的半徑為 20 公分，求此圓錐體的表面積。

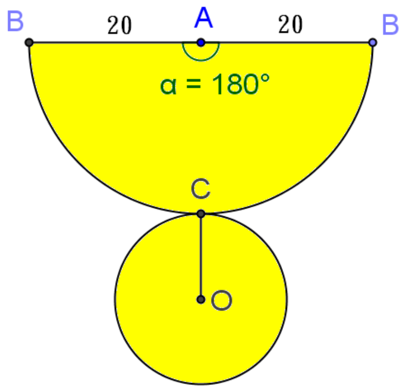


圖 9.3-64

想法：(1) 利用直圓錐體底面圓形的周長等於側面扇形的弧長，求出底面圓半徑

(2) 直圓錐體的表面積為底面圓面積與側面扇形面積之和

解：

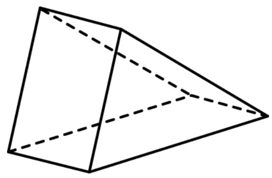
敘述	理由
(1) 側面扇形弧長$\overset{\frown}{BCB}$ $=\dfrac{\angle BAB}{360^{\circ}}\times$圓 A 周長 $=\dfrac{180^{\circ}}{360^{\circ}}\times 2\times\pi\times(20$ 公分$)$ $=20\pi$ 公分	扇形弧長$=\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^{\circ}}\times$圓周長 & 已知側面扇形的圓心角為 180°，側面扇形的半徑為 20 公分
側面扇形 BAB 面積 $=\dfrac{\angle BAB}{360^{\circ}}\times$圓 A 面積 $=\dfrac{180^{\circ}}{360^{\circ}}\times\pi\times(20$ 公分$)^2$ $=200\pi$ 平方公分	扇形面積$=\dfrac{\text{圓心角度數}}{360^{\circ}}\times$圓面積 & 已知側面扇形的圓心角為 180°，側面扇形的半徑為 20 公分
(2) 底面圓 O 周長$=2\times\pi\times\overline{OC}$	圓周長為直徑與圓周率之乘積 & 底面圓 O 半徑為$\overline{OC}$
(3) $2\times\pi\times\overline{OC}=20\pi$ 公分	圓錐底面圓周長等於側面扇形弧長 & (2) 底面圓 O 周長$=2\times\pi\times\overline{OC}$、(1) 側面扇形弧長$\overset{\frown}{BCB}=20\pi$ 公分

(4) $\overline{OC}$＝10 公分	由(3) 求$\overline{OC}$之值
(5) 底面圓 O 面積＝$\pi\times(\overline{OC})^2$ ＝$\pi\times$(10 公分)^2 ＝100π 平方公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (4) 底面圓 O 半徑$\overline{OC}$＝10 公分
(6) 此直圓錐表面積 ＝(100π＋200π) 平方公分 ＝300π 平方公分	直圓錐體的表面積為底面圓面積與側面扇形面積之和 & (5) 底面圓 O 面積＝100π 平方公分、 (1) 側面扇形 BAB 面積＝200π 平方公分

習題 9.3-28

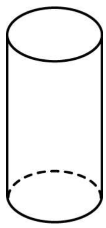
寫出下列各立體圖形的名稱：

(1)



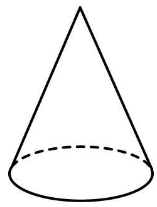
____

(2)



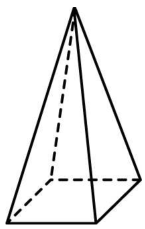
____

(3)



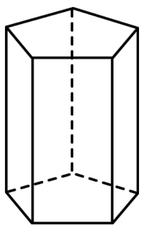
____

(4)



____

(5)



____

想法：利用各立體圖形的定義

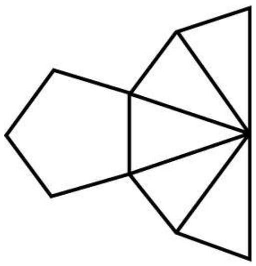
解：

敘述	理由
(1) 此圖形為三角柱體的透視圖	三角柱體的定義
(2) 此圖形為正圓柱體的透視圖	正圓柱體的定義
(3) 此圖形為直圓錐體的透視圖	直圓錐體的定義
(4) 此圖形為四角錐體的透視圖	四角錐體的定義
(5) 此圖形為五角柱體的透視圖	五角柱體的定義

習題 9.3-29

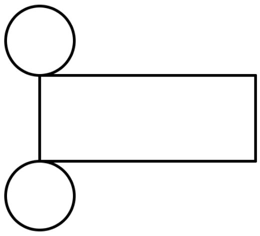
寫出下列各展開圖所構成的立體圖形名稱：

(1)



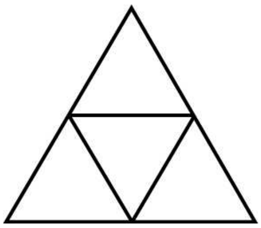
____

(2)



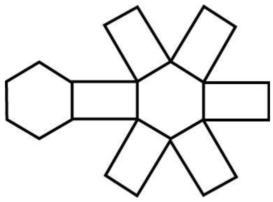
____

(3)



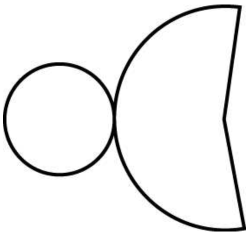
____

(4)



____

(5)



____

想法：利用各立體圖形的定義

解：

敘述	理由
(1) 此圖形為五角錐體的展開圖	五角錐體的定義
(2) 此圖形為正圓柱體的展開圖	正圓柱體的定義
(3) 此圖形為三角錐體的展開圖	三角錐體的定義
(4) 此圖形為六角柱體的展開圖	六角柱體的定義
(5) 此圖形為直圓錐體的展開圖	直圓錐體的定義

習題 9.3-30

如圖 9.3-65，有一「凸」形的柱體，求此柱體的體積與表面積。
（每個角皆為直角；單位：公分）

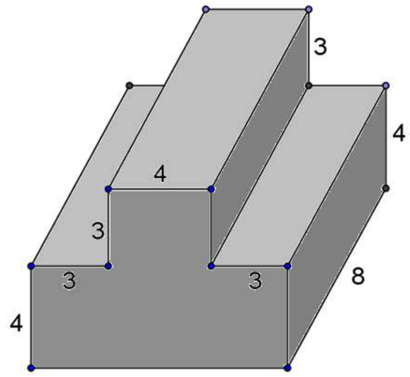


圖 9.3-65

想法：(1)　柱體的體積等於柱體底面積乘以柱體的高

(2) 角柱的底面積為 A、底面周長為 S、柱高為 h，則：
角柱的表面積＝2A＋S×h

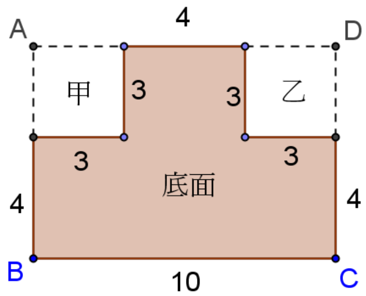


圖 9.3-65(a)

解：

敘述	理由
(1) 依題意，先求出柱體底面面積， 如圖 9.3-65(a)所示； 甲、乙皆為矩形，因此 甲面積＝(3 公分)×(3 公分) ＝9 平方公分 乙面積＝(3 公分)×(3 公分) ＝9 平方公分	已知每個角皆為直角，因此圖(a)中甲、乙及四邊形 ABCD 皆為矩形 & 矩形面積為長與寬之乘積
(2) 矩形 ABCD 面積 ＝$\overline{BC}\times\overline{AB}$ ＝(10 公分)×(7 公分) ＝70 平方公分	矩形面積為長與寬之乘積

(3) 底面面積 ＝矩形 ABCD 面積－甲面積－乙面積 ＝(70－9－9) 平方公分 ＝52 平方公分	全量等於分量之和 ＆ (2) 矩形 ABCD 面積＝70 平方公分 (1) 甲面積＝9 平方公分、 乙面積＝9 平方公分 已證
(4) 底面周長 ＝(4＋3＋3＋4＋3＋3＋4＋10) 公分 ＝34 公分	周長定義 ＆ 全量等於分量之和
(5) 柱體體積 ＝(底面面積)×(柱體的高) ＝(52 平方公分)×(8 公分) ＝416 立方公分	柱體的體積等於柱體底面積乘以柱體的高 ＆ (3) 底面面積＝52 平方公分、 已知柱體的高為 8 公分(如圖所示)
(6) 柱體表面積 ＝2×(底面面積)＋(底面周長)×(柱高) ＝2×(52 平方公分)＋(34 公分)×(8 公分) ＝104 平方公分＋272 平方公分 ＝376 平方公分	角柱的底面積為 A、底面周長為 S、柱高為 h，角柱的表面積＝2A＋S×h ＆ (3) 底面面積＝52 平方公分、 (4) 底面周長＝34 公分、 已知柱體的高為 8 公分(如圖所示)

習題 9.3-31

如圖 9.3-66，一個長為 8 公分，寬為 6 公分，高為 10 公分的長方體，中間挖去一半徑為 2 公分的圓柱，求剩下柱體的體積與表面積。

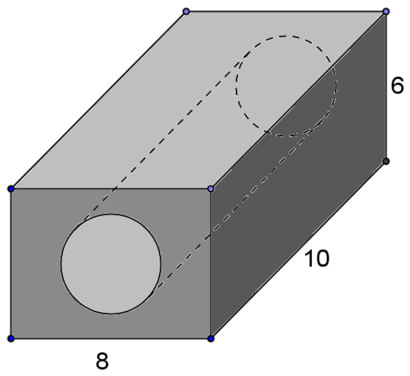


圖 9.3-66

想法：(1) 柱體的體積等於柱體底面積乘以柱體的高

(2) 角柱的底面積為 A、底面周長為 S、柱高為 h，則：
角柱的表面積＝2A＋S×h

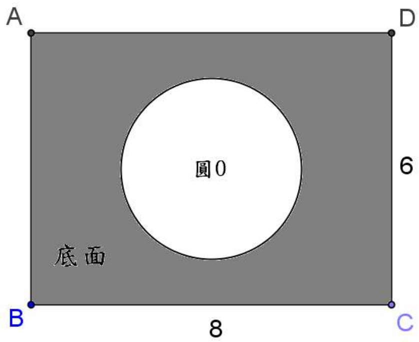


圖 9.3-66(a)

解：

敘述	理由
(1) 依題意，先求出柱體底面面積，如圖 9.3-66(a)所示； 矩形 ABCD 面積＝(8 公分)×(6 公分) ＝48 平方公分 圓 O 面積＝$\pi\times(2\text{ 公分})^2$＝4π 平方公分 圓 O 周長＝2×π×(2 公分)＝4π 公分	長方體六個面皆為矩形 & 已知圖行為一長為 8 公分，寬為 6 公分，高為 10 公分的長方體，中間挖去一半徑為 2 公分的圓柱 & 矩形面積為長與寬之乘積 & 圓面積為圓周率與半徑平方的乘積 & 圓周長為直徑與圓周率的乘積
(2) 底面積＝矩形 ABCD 面積－圓 O 面積 ＝(48－4π) 平方公分	全量等於分量之和 & (1) 矩形 ABCD 面積＝48 平方公分、圓 O 面積＝4π 平方公分

(3) 底面周長 ＝矩形 ABCD 周長＋圓 O 周長 ＝$(8+6+8+6)$ 公分＋4π 公分 ＝$(28+4\pi)$ 公分	周長定義 ＆ 已知長方體的長為 8 公分，寬為 6 公分 ＆ (1) 圓 O 周長＝4π 公分　已證
(4) 剩下柱體的體積 ＝(底面積)×(柱體的高) ＝[$(48-4\pi)$ 平方公分]×(10 公分) ＝$(480-40\pi)$ 立方公分	柱體的體積等於柱體底面積乘以柱體的高 ＆ (2) 底面積＝$(48-4\pi)$ 平方公分、 已知長方體的高為 10 公分
(5) 剩下柱體的表面積 ＝2×(底面面積)＋(底面周長)×(柱高) ＝2×[$(48-4\pi)$ 平方公分]＋ [$(28+4\pi)$ 公分]×(10 公分) ＝$(376+32\pi)$ 平方公分	角柱的底面積為 A、底面周長為 S、柱高為 h，角柱的表面積＝$2A+S\times h$ ＆ (2) 底面積＝$(48-4\pi)$ 平方公分、 (3) 底面周長＝$(28+4\pi)$ 公分、 已知長方體的高為 10 公分

習題 9.3-32

如圖 9.3-67，將兩個圓柱積木黏在一起，上層的圓柱積木半徑為 5 公分，高為 7 公分；下層的圓柱積木半徑為 8 公分，高為 10 公分，求此立體圖形的體積與表面積各為何？

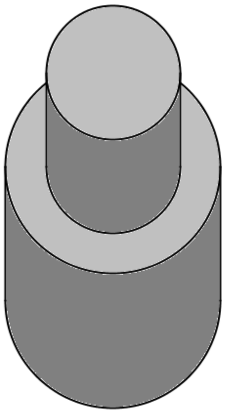


圖 9.3-67

想法：(1) 柱體的體積等於柱體底面積乘以柱體的高

(2) 圓柱體展開側面矩形的長度等於底面圓周長

(3) 立體圖形的表面積等於展開後所有平面的總和

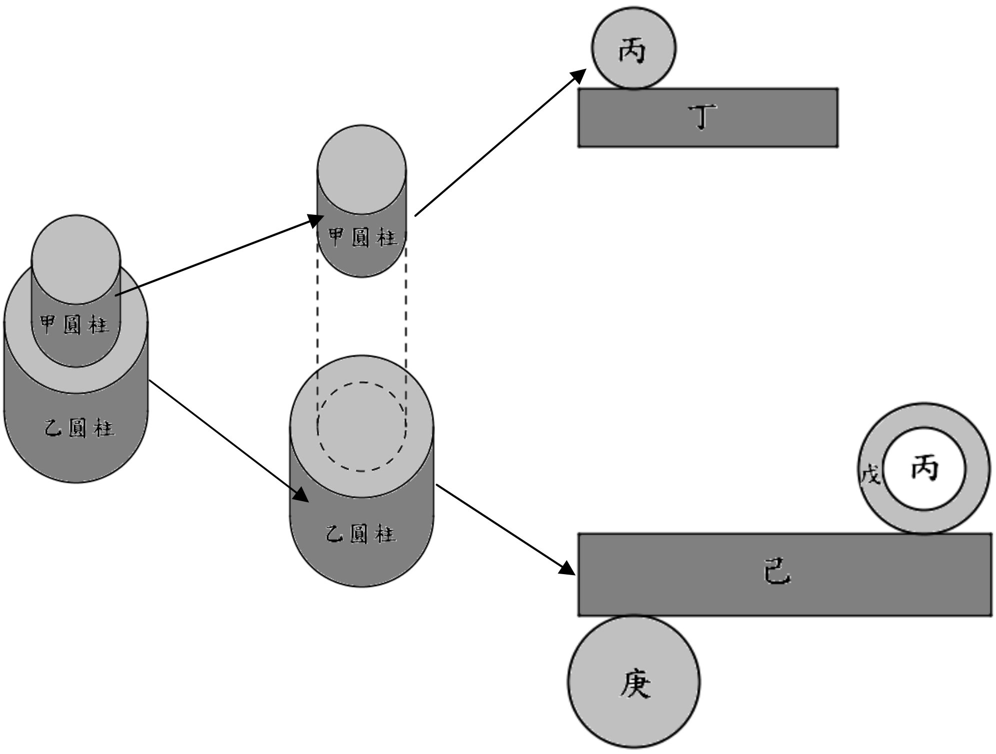


圖 9.3-67(a)

解：

敘述	理由
(1) 將此立體圖形拆開成為甲圓柱、乙圓柱；如圖 9.3-67(a)所示，則： 甲圓柱展開後為丙、丁兩平面，其中丙為半徑 5 公分的圓、丁為矩形； 乙圓柱展開後為戊、己、庚三平面，其中戊為半徑 8 公分的圓減去半徑 5 公分的圓所成的圓環、己為矩形、庚為半徑 8 公分的圓	全量等於分量之和 & 已知上層的圓柱積木半徑為 5 公分，高為 7 公分；下層的圓柱積木半徑為 8 公分，高為 10 公分
(2) 甲圓柱展開圖中， 丙圓面積＝$\pi\times(5$ 公分$)^2$ ＝25π 平方公分 丁矩形的長＝丙圓的周長 ＝$2\times\pi\times(5$ 公分$)$ ＝10π 公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (1) 丙圓半徑為 5 公分 圓柱體展開側面矩形的長度等於底面圓周長 & 圓周長為直徑與圓周率的乘積 & (1) 丙圓半徑為 5 公分
(3) 丁矩形面積 ＝$(10\pi$ 公分$)\times(7$ 公分$)$ ＝70π 平方公分	矩形面積為長與寬之乘積 & (2) 丁矩形的長＝10π 公分、 已知上層的圓柱積木高為 7 公分
(4) 乙圓柱展開圖中， 戊圓環面積 ＝$\pi\times(8$ 公分$)^2-\pi\times(5$ 公分$)^2$ ＝39π 平方公分 庚圓面積 ＝$\pi\times(8$ 公分$)^2$＝64π 平方公分 己矩形的長 ＝庚圓的周長 ＝$2\times\pi\times(8$ 公分$)$ ＝16π 公分	圓面積等於圓周率與圓半徑平方的乘積 & (1) 戊為半徑 8 公分的圓減去半徑 5 公分的圓所成的圓環、 庚為半徑 8 公分的圓 圓柱體展開側面矩形的長度等於底面圓周長 & 圓周長為直徑與圓周率的乘積 & (1) 庚為半徑 8 公分的圓
(5) 己矩形面積 ＝$(16\pi$ 公分$)\times(10$ 公分$)$ ＝160π 平方公分	矩形面積為長與寬之乘積 & (4) 己矩形的長＝16π 公分、 已知下層的圓柱積木高為 10 公分
(6) 此立體圖形表面積 ＝丙面積＋丁面積＋戊面積＋己面積＋庚面積 ＝$(25\pi+70\pi+39\pi+160\pi+64\pi)$ 平方公分 ＝358π 平方公分	全量等於分量之和 & (2) 丙圓面積＝25π 平方公分、 (3) 丁矩形面積＝70π 平方公分、 (4) 戊圓環面積＝39π 平方公分、 (5) 己矩形面積＝160π 平方公分、 (4) 庚圓面積＝64π 平方公分

(7) 甲圓柱體積 ＝丙面積×甲圓柱高 ＝(25π 平方公分)×(7 公分) ＝175π 立方公分	柱體的體積等於柱體底面積乘以柱體的高 & (2) 丙圓面積＝25π 平方公分、 已知上層的圓柱積木高為 7 公分
(8) 乙圓柱體積 ＝庚面積×乙圓柱高 ＝(64π 平方公分)×(10 公分) ＝640π 立方公分	柱體的體積等於柱體底面積乘以柱體的高 & (4) 庚圓面積＝64π 平方公分、 已知下層的圓柱積木高為 10 公分
(9) 此立體圖形體積 ＝甲圓柱體積＋乙圓柱體積 ＝(175π＋640π) 立方公分 ＝815π 立方公分	全量等於分量之和 & (7) 甲圓柱體積＝175π 立方公分、 (8) 乙圓柱體積＝640π 立方公分

習題 9.3-33

如圖 9.3-68，在一長 10 公分、寬 5 公分、高 7 公分的大長方體中，挖去一個長 6 公分、寬 4 公分、高 3 公分的小長方體，求此立體圖形的體積與表面積。

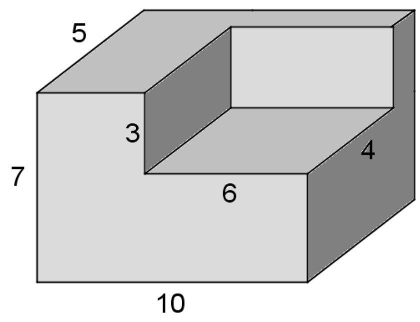


圖 9.3-68

想法：(1) 長方體體積等於長寬高三邊的乘積

(2) 長方體的表面積，等於不相等三邊每兩邊相乘和的兩倍

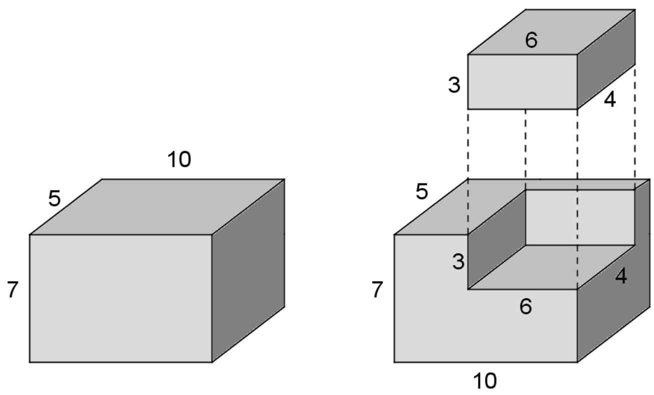


圖 9.3-68(a)

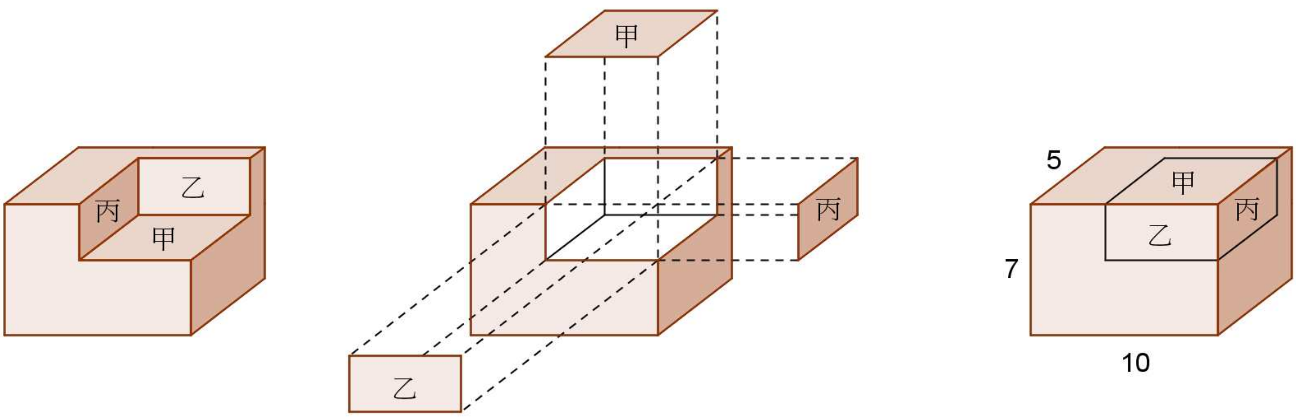


圖 9.3-68(b)

解：

敘述	理由
(1) 如圖 9.3-68(a)中所示， 此立體圖形體積 ＝大長方體體積－小長方體體積 ＝(10 公分)×(5 公分)×(7 公分)－(6 公分)×(4 公分)×(3 公分) ＝(350－72) 立方公分 ＝278 立方公分	全量等於分量之和 & 長方體體積等於長寬高三邊的乘積 & 已知此立體圖形為在一長 10 公分、寬 5 公分、高 7 公分的大長方體中，挖去一個長 6 公分、寬 4 公分、高 3 公分的小長方體
(2) 如圖 9.3-68(b)中所示， 甲矩形可上下自由平移、 乙矩形可前後自由平移、 丙矩形可左右自由平移， 所以此立體圖形表面積 ＝大長方體的表面積 ＝2×[(10 公分)×(5 公分)＋(5 公分)×(7 公分)＋(7 公分)×(10 公分)] ＝2×(50＋35＋70) 平方公分 ＝310 平方公分	圖形平移其面積不變 & 長方體的表面積，等於不相等三邊每兩邊相乘和的兩倍 & 已知大長方體的長 10 公分、寬 5 公分、高 7 公分

習題 9.3-34

將一底面積為 100π 平方公分，高為 24 公分的圓柱，切割成如下圖所示，求切割後立體圖形的體積。

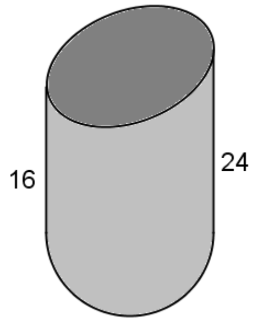


圖 9.3-69

想法：正圓柱的體積等於底面積乘以高

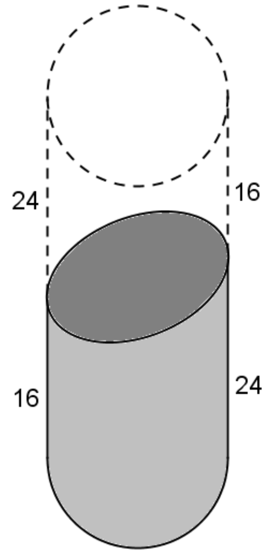


圖 9.3-69(a)

解：

敘述	理由
(1) 如圖 9.3-69(a)所示，將 2 個題目中的立體圖形上下相疊合，會組合成一個底面積為 100π 平方公分，高為 40 公分的正圓柱體	全量等於分量之和 & 已知題目的立體圖形為底面積為 100π 平方公分，高為 24 公分的圓柱體所切割成的形體，切割後一邊的高仍為 24 公分，另一邊變為 16 公分 & 24 公分＋16 公分＝40 公分
(2) 因此題目所求立體圖形的體積為圖 9.3-69(a)中正圓柱體體積的一半 ＝[(100π 平方公分)×(40 公分)]÷2 ＝2000π 立方公分	由(1) 將 2 個題目中的立體圖形上下相疊合，會組合成一個底面積為 100π 平方公分，高為 40 公分的正圓柱體 & 正圓柱的體積等於底面積乘以高