代數第四章

目錄

第四章 直角座標與二元一次方程式

在本章中，我們將開始學習直角座標，並將前章學過的二元一次方程式應用到直角座標上，有了這些能力後，就可以解決直角座標上簡單的圖形問題。

學習目標

1. 能理解直角座標，並在直角座標上描點。

2. 能在直角座標平面上畫出二元一次方程式的圖形。

3. 瞭解直角座標平面上二元一次聯立方程式解的意義。

4.1 節 平面上的直角座標

讓我們回想一下，以前老師排座位時會用第幾排、第幾個來表示位置，現在我們則以「數對」來表示所處的位置。

下圖(4.1-1)是某班的座位表：

小李坐在第五排第三個，我們以 (5,3) 表示小李的位置

小博坐在第二排第二個，我們以 (2,2) 表示小博的位置

阿幼坐在第七排第一個，我們以 (7,1) 表示小李的位置

第四個							
第三個					小李		
第二個		小博					
第一個							阿幼
	第一排	第二排	第三排	第四排	第五排	第六排	第七排

講台

圖 4.1-1

像這樣用數對來表示位置，便是**直角座標**的概念。

4.1.1 節 認識直角座標

本小節我們開始正式認識直角座標。

如圖 4.1-2，首先在平面上畫出兩條互相垂直的數線，兩線的交點為原點。

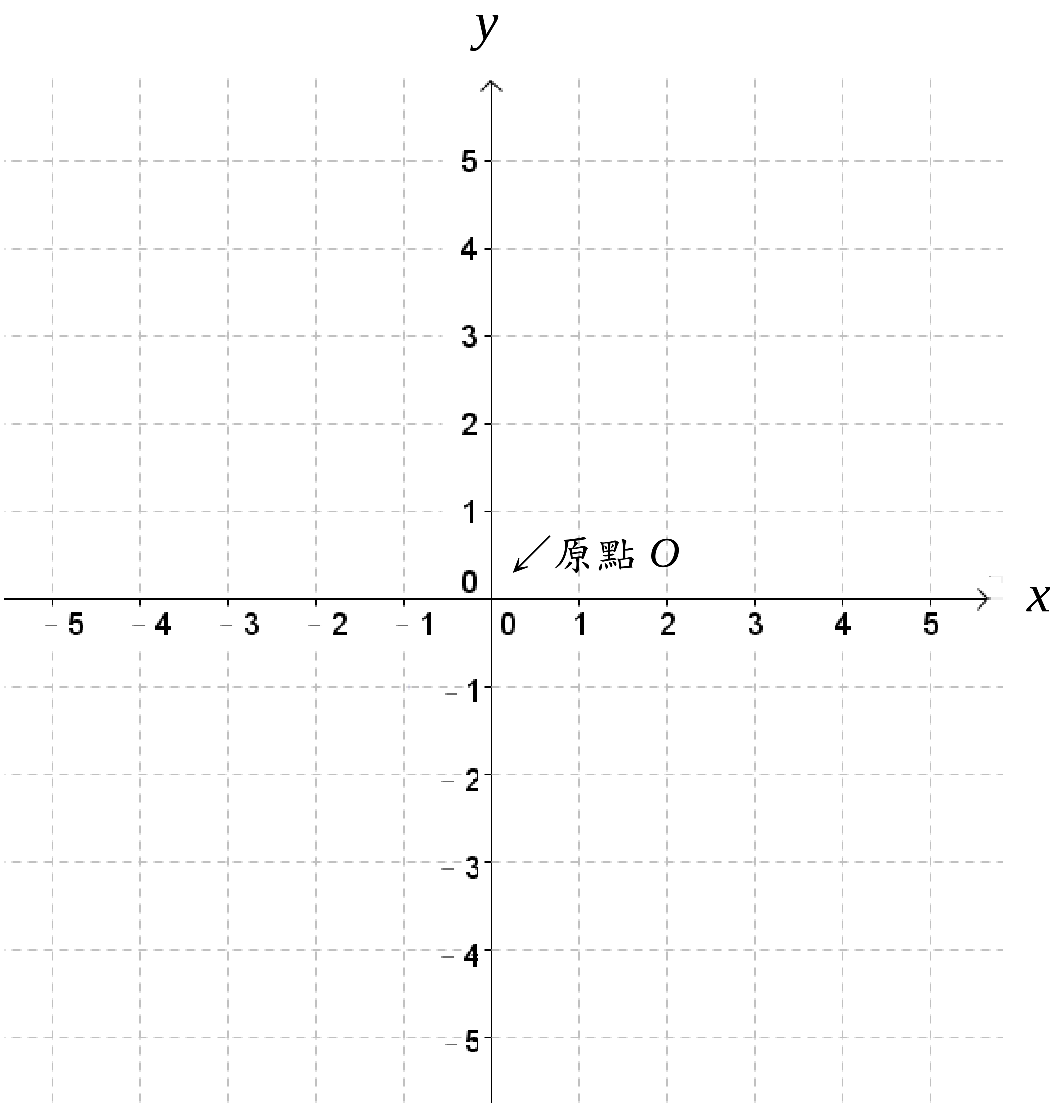


圖 4.1-2 平面座標示意圖

上圖的平面座標圖又稱為直角座標。

水平的數線稱為 ***x* 軸**，向右(箭頭方向)為**正向**，向左為**負向**。

鉛直的數線稱為 ***y* 軸**，向上(箭頭方向)為**正向**，向下為**負向**。

x* 軸**與 ***y* 軸**的交點稱為**原點**，以 *O* 表示。x* 軸**與 ***y* 軸**稱為**座標軸**。

我們來看看在直角座標上的點如何用數對(x,y)表示，x 為 ***x* 軸**的座標，y 為 ***y* 軸**的座標：

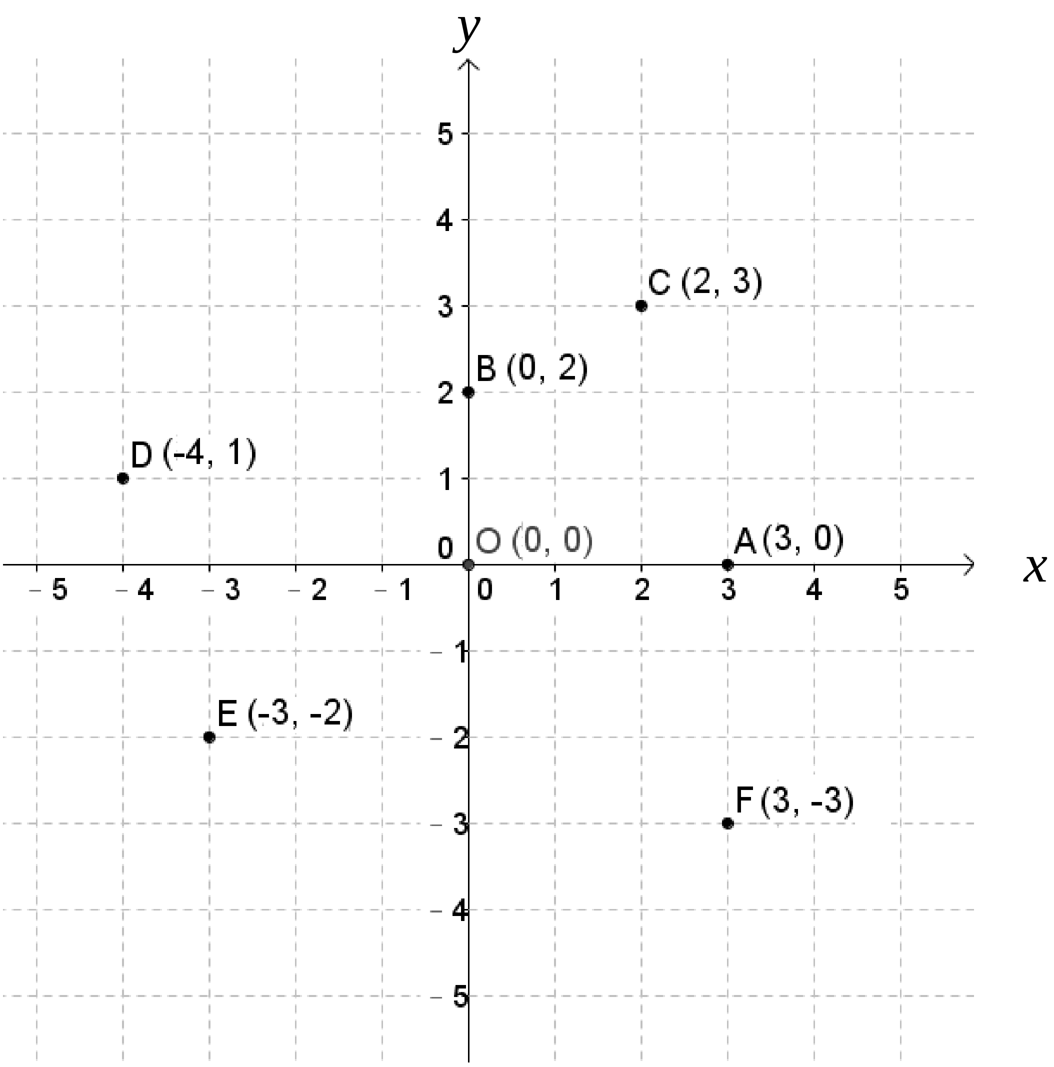


圖 4. 1-3

A：A 點在 x 軸上，且在 x 軸數線上的位置是 3，我們就稱 A 點的座標為 $(3,0)$ 。

其中 3 是 A 點的 ***x* 座標**，0 是 A 點的 ***y* 座標**。

B：B 點在 y 軸上，且在 y 軸數線上的位置是 2，我們稱 B 點的座標為 $(0,2)$ 。

O：O 點在兩軸的位置都是 0，我們稱 O 點的座標為 $(0,0)$ ，也就是原點。

C：C 點不在座標軸上，但若我們從 C 點畫一條鉛直線，會與 x 軸交於 2 這個點，因此我們稱 C 點的 x 座標為 2；同樣地，我們從 C 點畫一條水平線，會與 y 軸交於 3 這個點，因此稱 C 點的 y 座標為 3。

x 座標為 2，y 座標為 3，C 點座標為 $(2,3)$ 。

同樣的方法，我們可以得到 D 點座標為 $(-4,1)$，E 點座標為 $(-3,-2)$ ，F 點座標為 $(3,-3)$ 。

例題 4.1.1-1

寫出下圖中 A、B、C、D 點的座標位置。

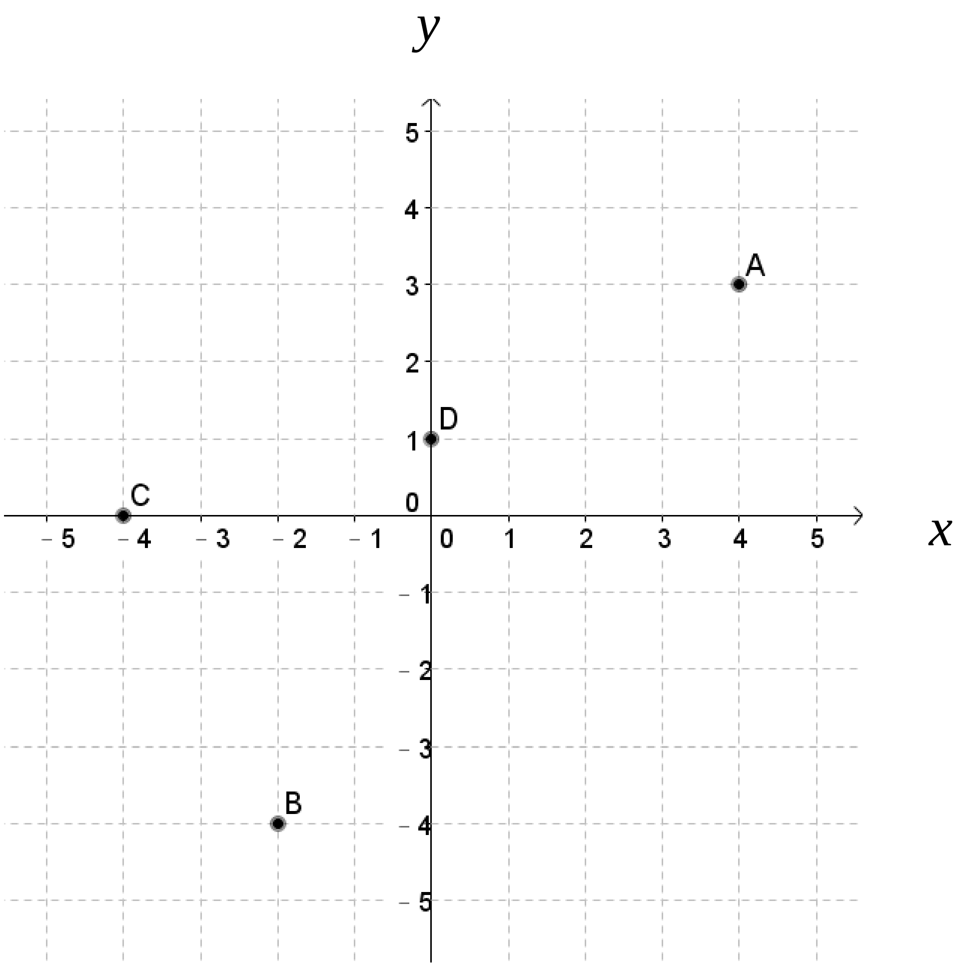


圖 4.1-4

詳解：

A：過 A 點的鉛直線交 x 軸於 4，水平線交 y 軸於 3，A 點座標為 $(4,3)$。

B：過 B 點的鉛直線交 x 軸於－2，水平線交 y 軸於－4，B 點座標為 $(-2,-4)$。

C：C 點在 x 軸上，位置為－4，C 點座標為 $(-4,0)$。

D：D 點在 y 軸上，位置為 1，D 點座標為 $(0,1)$。

【練習】4.1.1-1

寫出下圖中 A、B、C、D 點的座標位置。

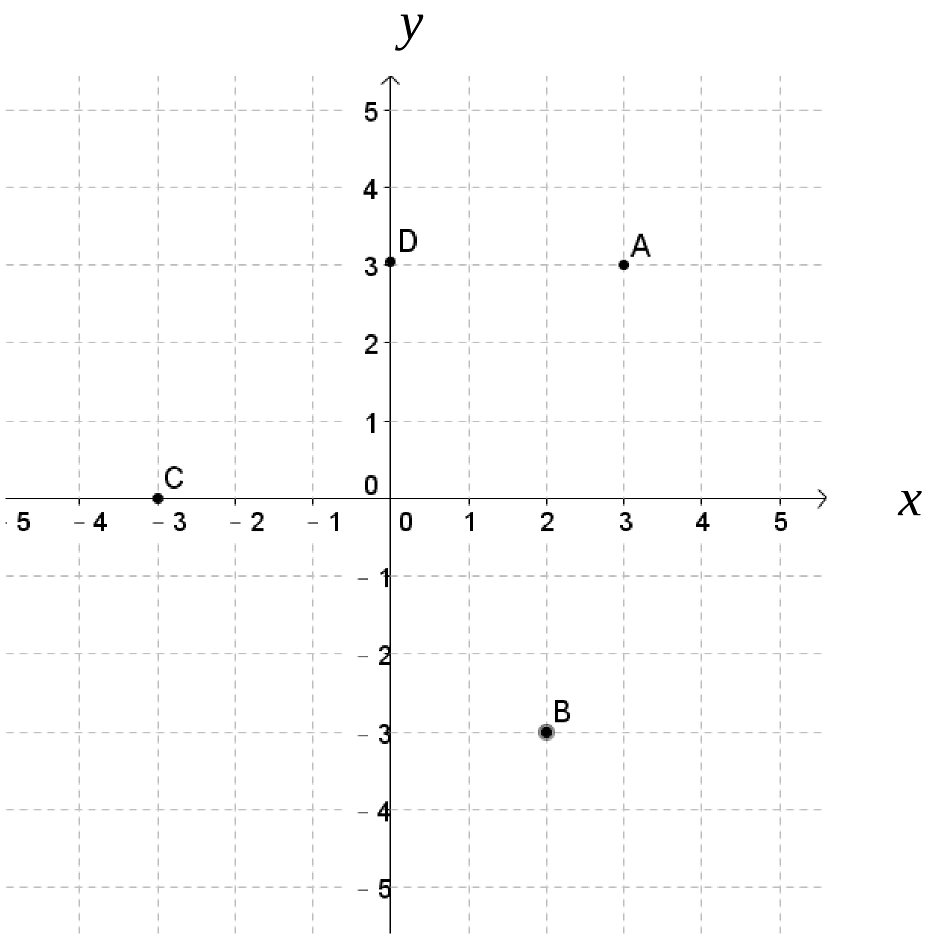


圖 4.1-5

(1)A 點的座標是＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ (2)B 點的座標是＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(3)C 點的座標是＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ (4)D 點的座標是＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

前面已經介紹了從點來找座標的方法。換一個方向來看，我們也可以從座標來找點。

例如有一點 A 的座標為 $(4,2)$ ，我們想要在圖上描出 A 點，可以從原點出發：

A 點的 x 座標為 4，所以我們往右走 4 格到達 $(4,0)$ 。(若為負數則從原點往左走)

A 點的 y 座標為 2，所以我們從 $(4,0)$ 再往上走 2 格，便到達 $(4,2)$ 。(若為負數則從原點往下走)

如圖 4.1-6

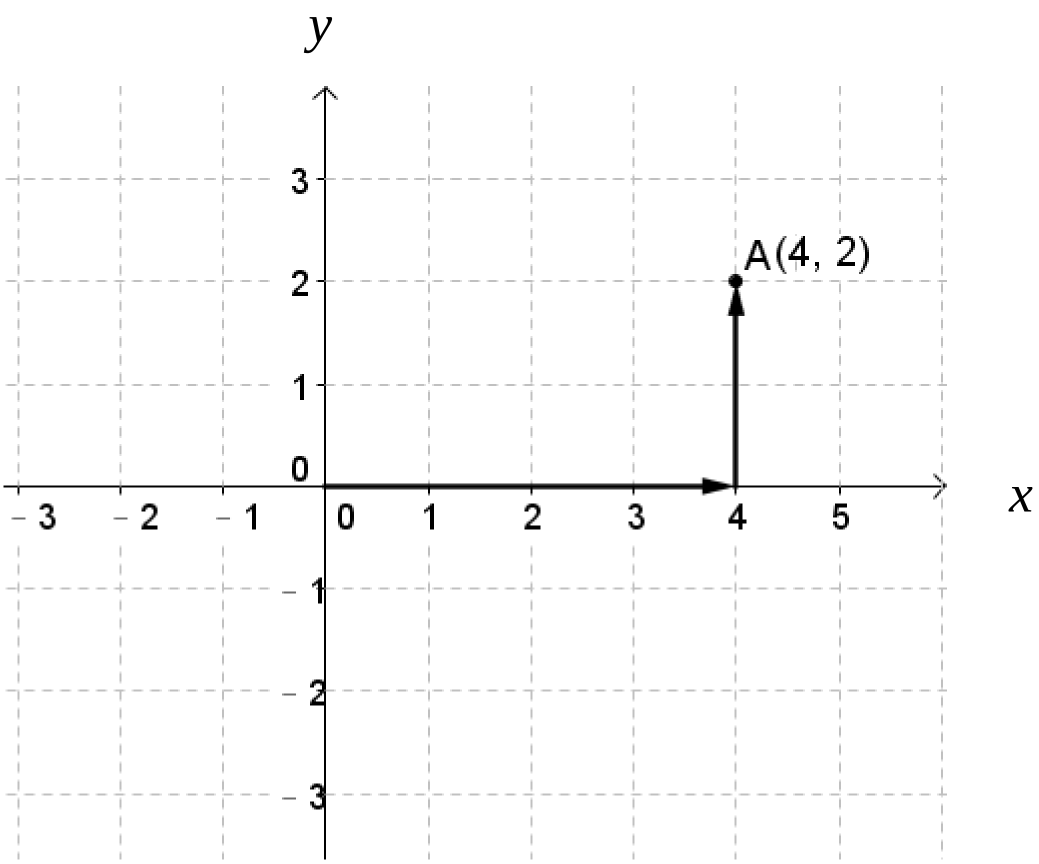


圖 4.1-6

當然我們也可以先找 y 軸位置再找 x 軸位置，也就是先往上走 2 格，再往右走 4 格，也能到達一樣的位置。

例題 4.1.1-2

在圖 4.1-7 中標出下列各點的位置：

（1）A$(1,0)$　　（2）B$(-1,2)$　　（3）C$(0,4)$

（4）D$(2,5)$　　（5）E$(-4,3)$

詳解：

依照前頁所教的作法將點一個一個找出。

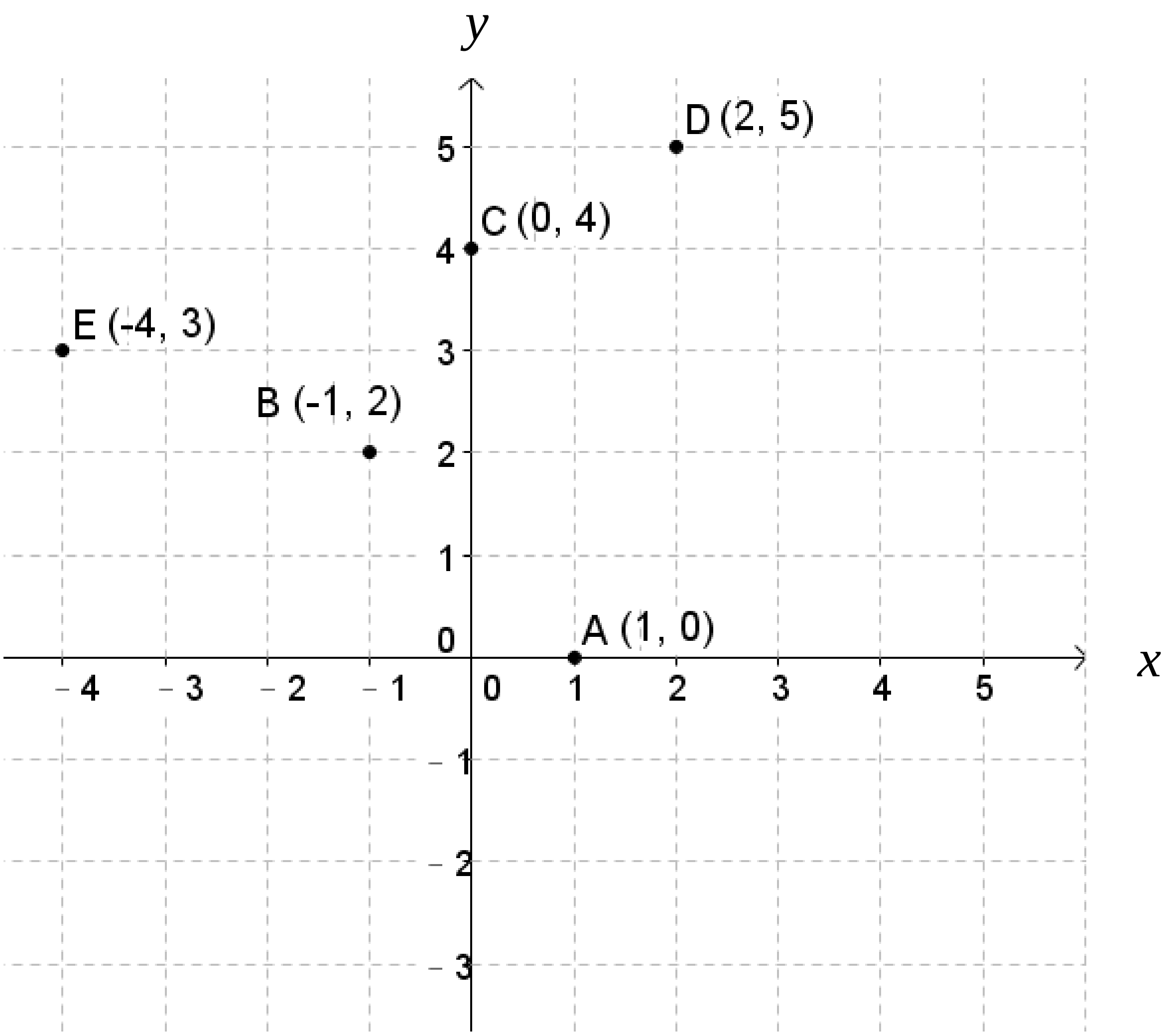


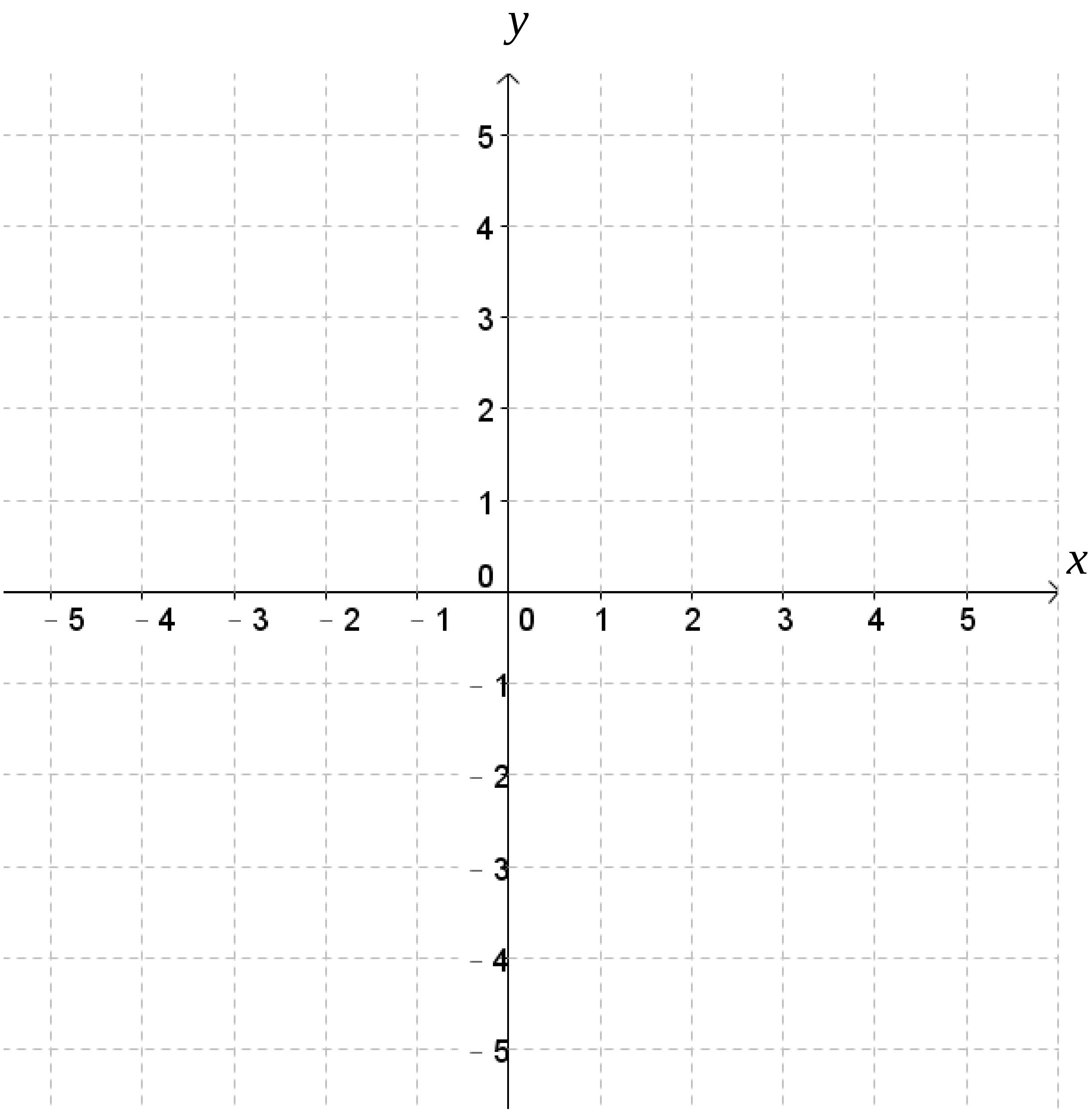
圖 4.1-7

【練習】**4.1.1-2**

在圖中標出下列各點的位置：

（1）A$(-3,0)$　　　　（2）B$(0,-4)$

（3）C$(-5,-3)$　　　（4）D$(4,-2)$



例題 4.1.1-3

在圖 4.1-8 中標出下列各點的位置：

(1) A$(4\frac{1}{3},0)$ (2) B$(-1\frac{3}{4},3)$ (3) C$(-3,\frac{1}{2})$

詳解：

本題含有分數座標

A$(4\frac{1}{3},0)$：我們將 x 座標 4 和 5 做 3 等分，取第 1 等分的點找出 $4\frac{1}{3}$。

B$(-1\frac{3}{4},3)$：我們將 x 座標－1 和－2 做 4 等分，取第 3 等分的點找出 $-1\frac{3}{4}$。

（注意要從－1 開始找）

C$(-3,\frac{1}{2})$：我們將 y 座標 0 和 1 做 2 等分，取第 1 等分的點找出 $\frac{1}{2}$。

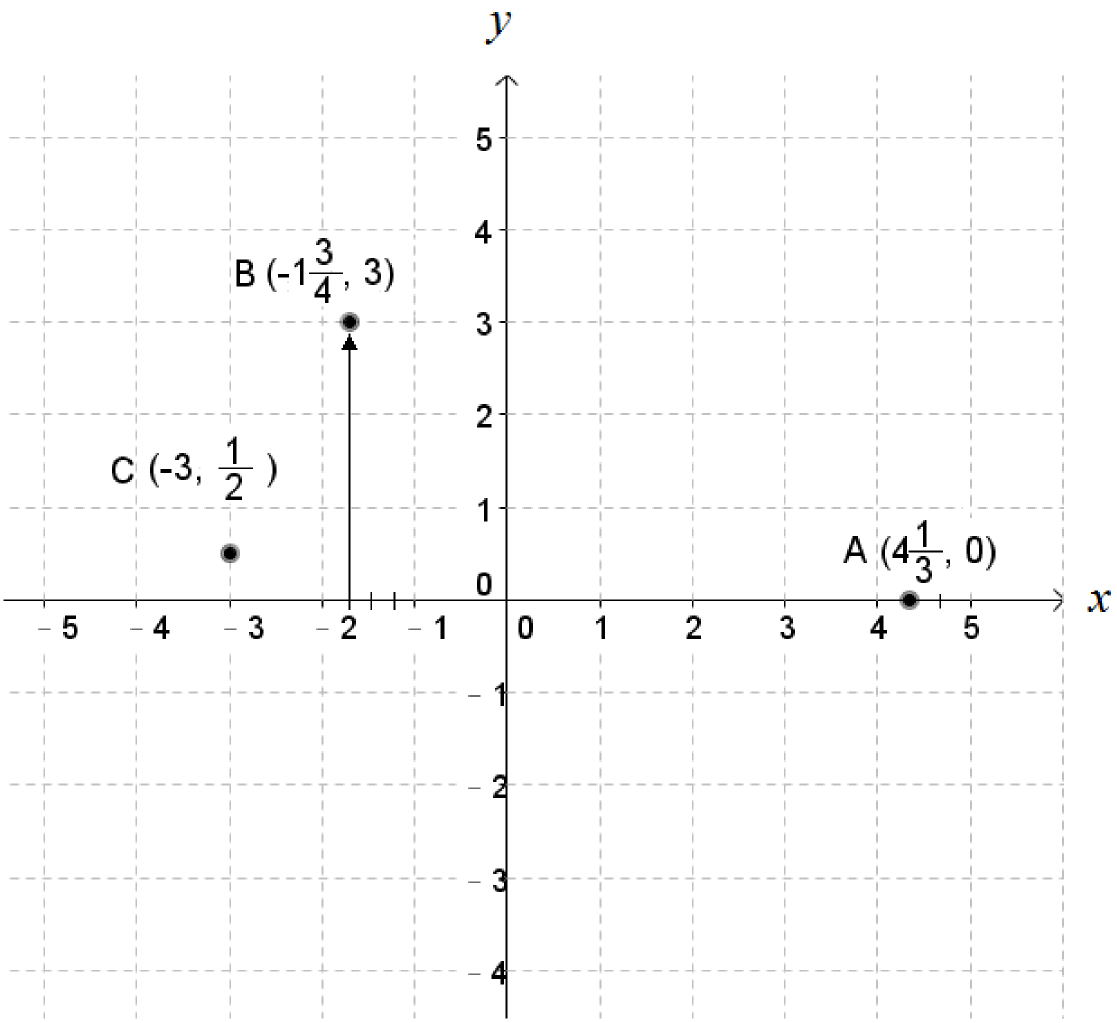
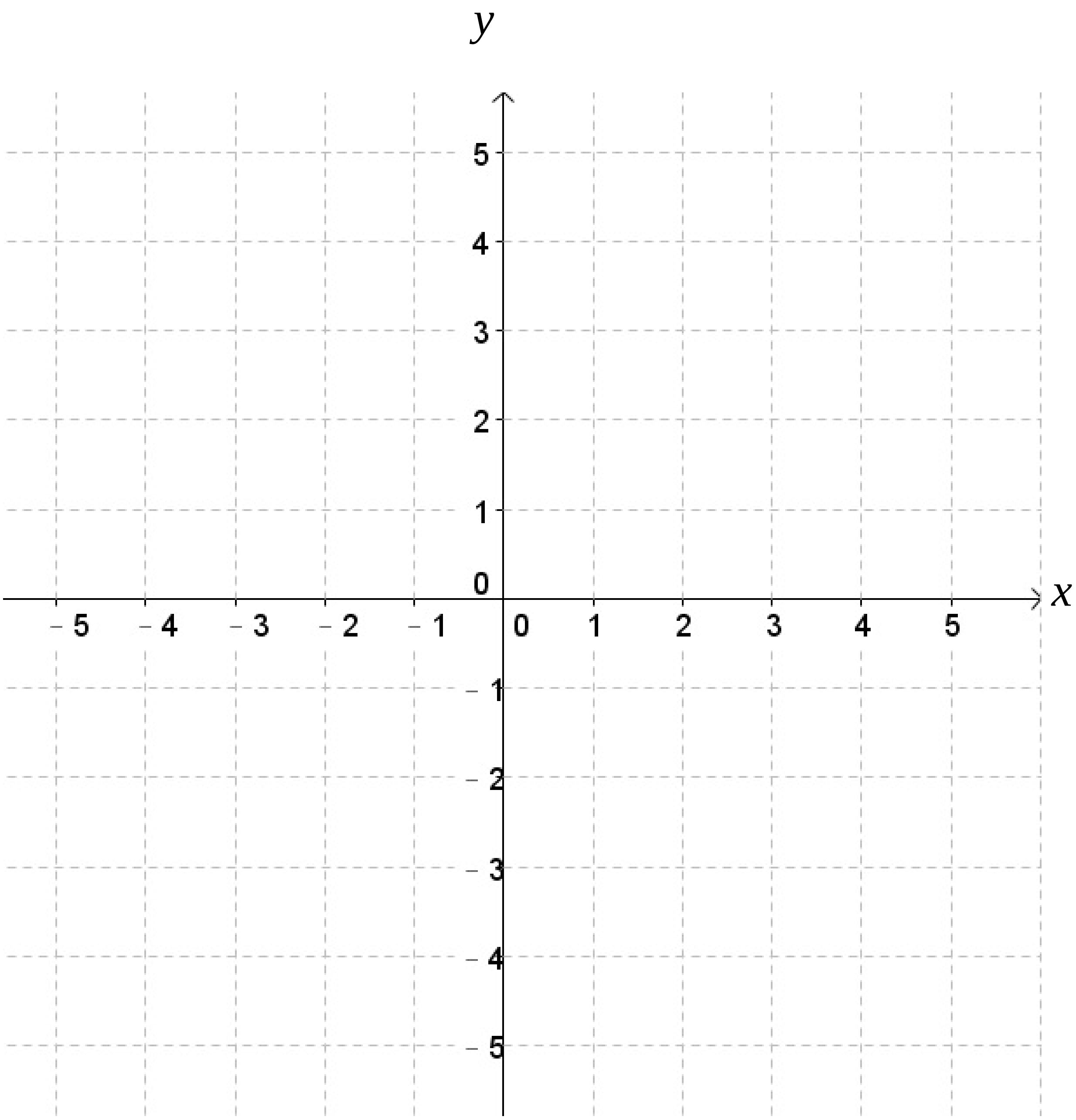


圖 4.1-8

【練習】**4.1.1-3**

在圖中標出下列各點的位置：

(1) A$(3\frac{1}{2},0)$ (2) B$(2,-1\frac{1}{2})$ (3) C$(-3\frac{2}{3},-1\frac{1}{4})$



象限

從前面的例子我們可以觀察到，當一個點的 x 座標與 y 座標都為正數時，這個點會落在原點的右上角區域；x 座標為負，y 座標為正，會落在左上角區域；x 座標為負，y 座標也為負，會落在左下角區域；x 座標為正，y 座標為負，會落在右下角區域。

這四個區域我們稱為**象限**，由 x 軸與 y 軸當分界線。

右上角的區域為**第一象限**，然後逆時針方向依序為**第二象限**，**第三象限**，**第四象限**。

在此請注意一點：因為 x 軸與 y 軸是這些象限的分界線，所以在**座標軸上的任意點都不屬於任一象限**。例如 $(3,0)$ 在 x 軸上，$(0,-2)$ 在 y 軸上，都不屬於任一象限

每一象限的座標都有些特性：
第一象限中的座標，x 座標為正，y 座標也為正，用 $(+,+)$ 表示；
第二象限中的座標，x 座標為負，y 座標為正，用 $(-,+)$ 表示；
第三象限中的座標，x 座標為負，y 座標也為負，用 $(-,-)$ 表示；
第四象限中的座標，x 座標為正，y 座標為負，用 $(+,-)$ 表示。

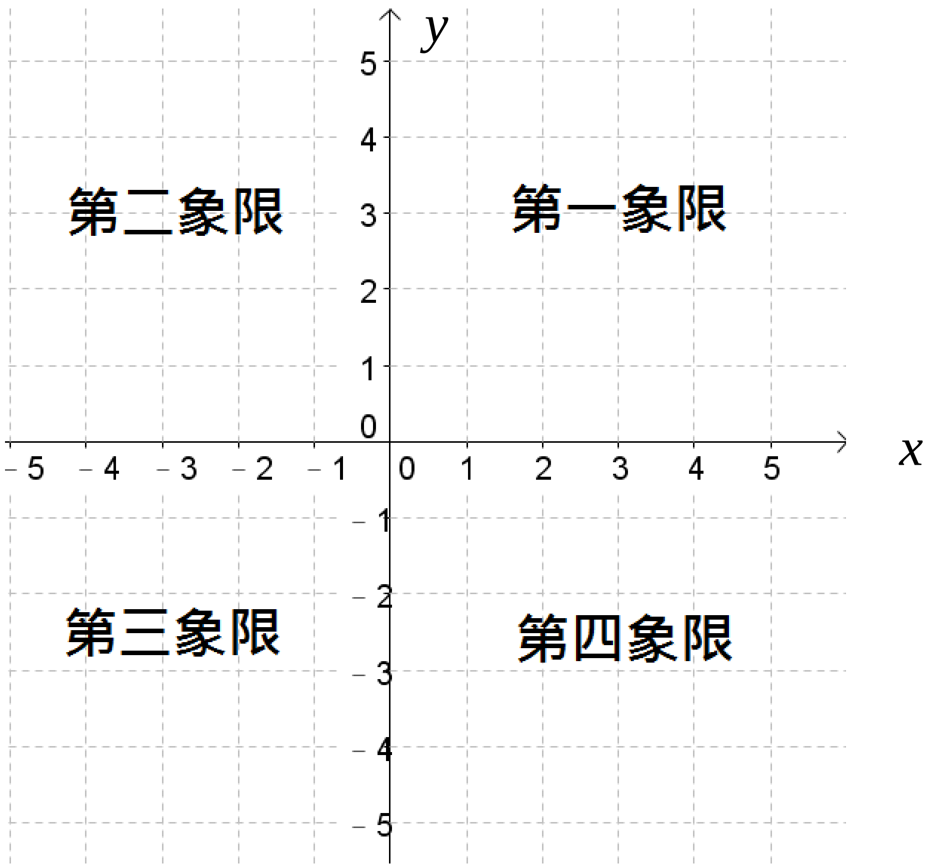


圖 4.1-9

例題 4.1.1-4

寫出下列各點各在第幾象限，並畫在座標平面上。

（1）A$(3,2)$　　（2）B$(-3,-2)$　　（3）C$(3,-2)$　　（4）D$(-3,2)$

詳解：

A 點 x 座標為正，y 座標也為正，在第一象限。

B 點 x 座標為負，y 座標也為負，在第三象限。

C 點 x 座標為正，y 座標為負，在第四象限。

D 點 x 座標為負，y 座標為正，在第二象限。

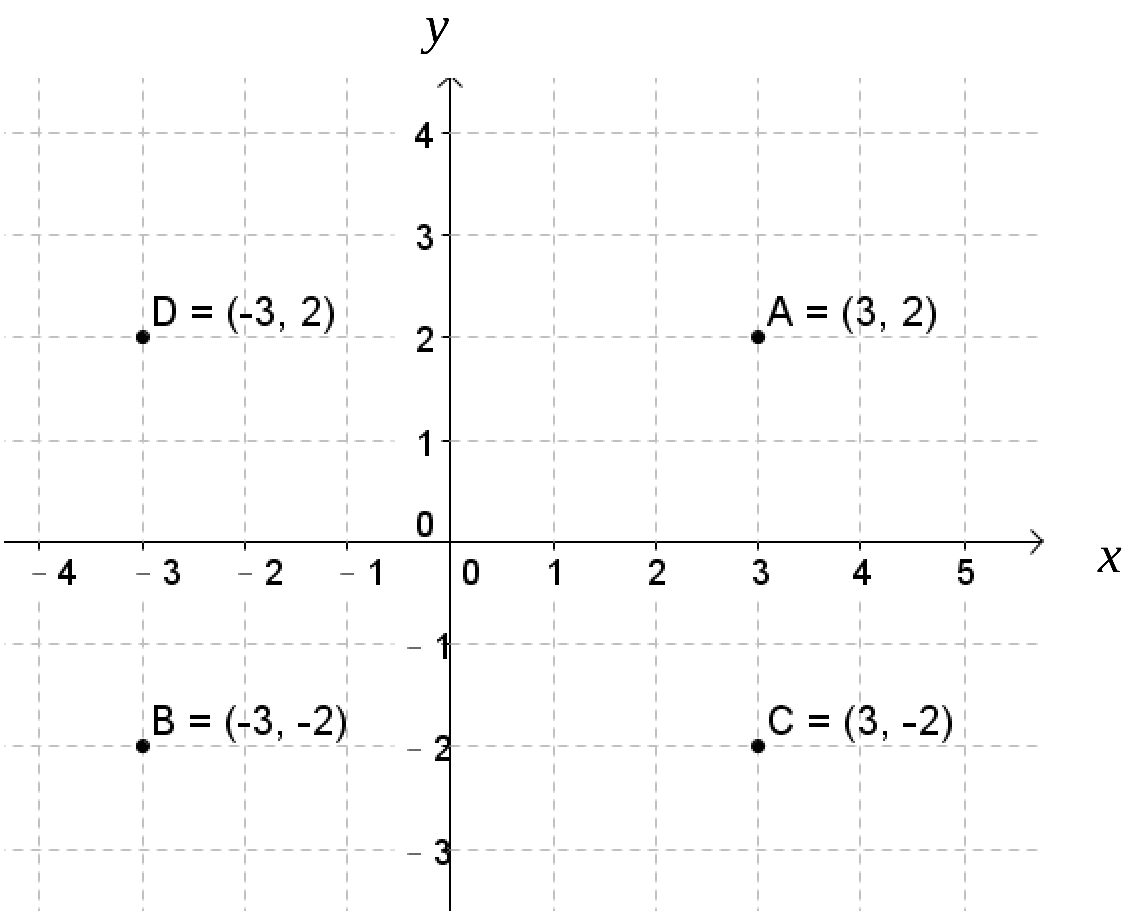


圖 4.1-10

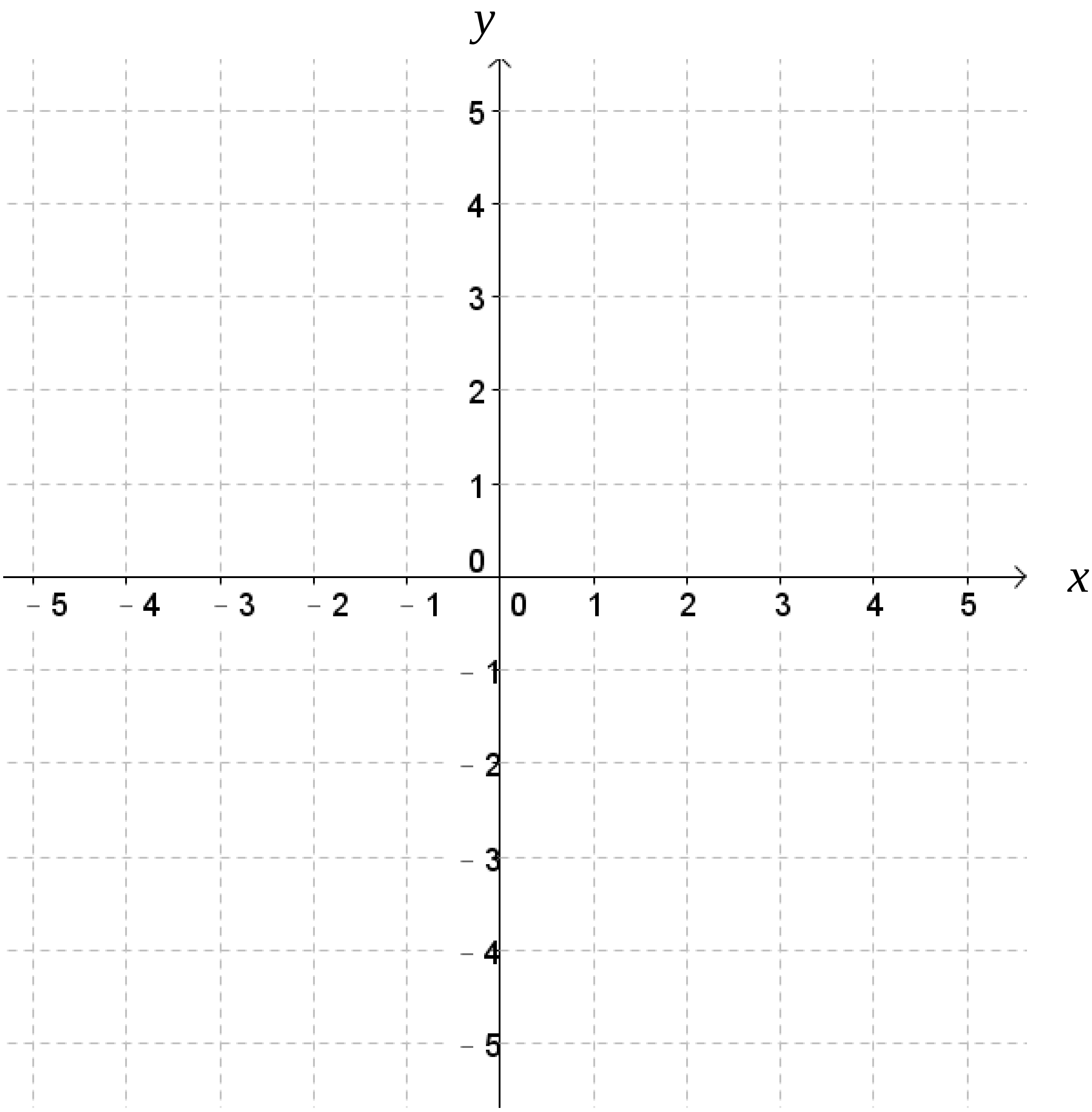
【練習】4.1.1-4

寫出下列各點各在第幾象限，並畫在座標平面上。

(1) A$(-1,4)$　　(2) B$(-1,-4)$　　(3) C$(1,4)$　　(4) D$(1,-4)$

A 點在第________象限；B 點在第________象限；

C 點在第________象限；D 點在第________象限。



4.1.2 節 點與座標軸的距離

本小節會介紹如何計算直角座標上一點到兩座標軸的距離。

現在直角座標平面上有點 $A(3,2)$。

我們想知道 $A(3,2)$ 與 x 軸的距離，可以做一條過 A 點的鉛直線交於 x 軸，如下圖 4.1-11。鉛直線與 x 軸的交點是 $(3,0)$，而 A 到 $(3,0)$ 的線段長是 2，也就是 A 到 x 軸的距離為 2。

接著我們再看 $A(3,2)$ 與 y 軸的距離，做一條過 A 點的水平線段交於 y 軸，水平線與 y 軸的交點是 $(0,2)$，而 A 到 $(0,2)$ 的線段長是 3，也就是 A 到 y 軸的距離為 3。

我們再看 $B(-3,-2)$ 到兩軸的距離。

B 到 $(-3,0)$ 的線段長是 2，也就是 B 到 x 軸的距離為 2。

B 到 $(0,-2)$ 的線段長是 3，也就是 B 到 y 軸的距離為 3。

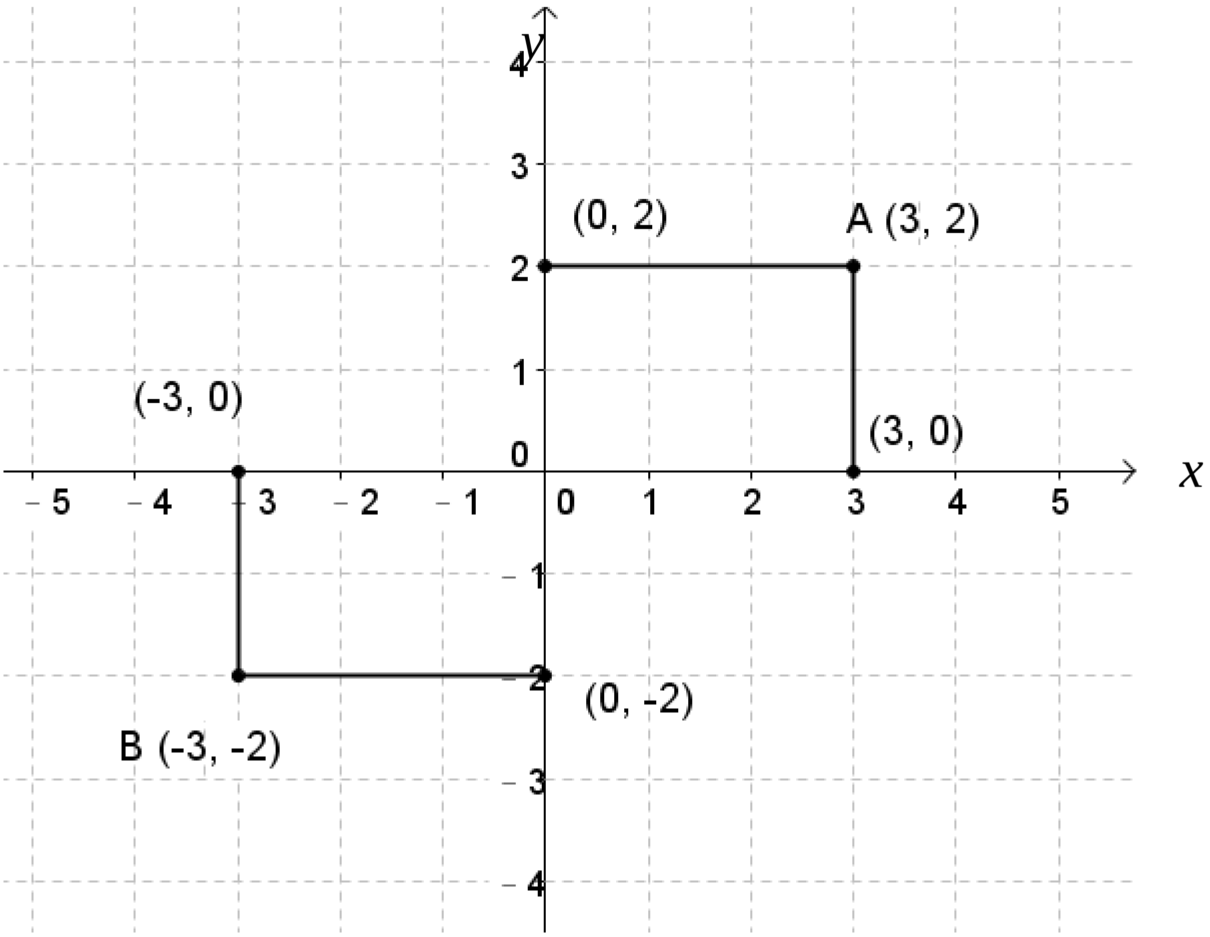


圖 4.1-12

觀察前面例子可以發現，A$(3,2)$到 x 軸的距離是 2，B$(-3,-2)$到 x 軸的距離是 2。

到 x 軸的距離其實就是 y 座標的絕對值。

A$(3,2)$到 y 軸的距離是 3，B$(-3,-2)$到 y 軸的距離是 3。

到 y 軸的距離其實就是 x 座標的絕對值。

也就是說，**座標平面上任一點 P(a,b)，與 x 軸的距離是$|b|$，與 y 軸的距離是$|a|$**。

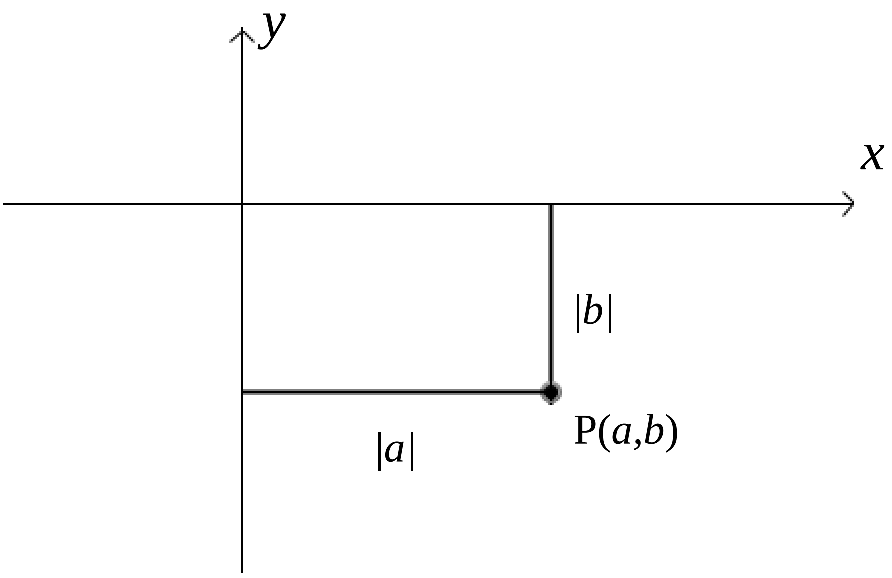


圖 4.1-15

※ 在 x 軸上的點，例如$(3,0)$，到 x 軸的距離是 0。

在 y 軸上的點，例如$(0,5)$，到 y 軸的距離是 0。

例題 4.1.2-1

在座標平面上畫出下列各點，並求各點到兩軸的距離：

（1）A$(1,2)$　　（2）B$(-5,4)$　　（3）C$(-4,-3)$　　（4）D$(2,-5)$

詳解：

A 點到 x 軸距離為 $|2|=2$，到 y 軸距離為 $|1|=1$。

B 點到 x 軸距離為 $|4|=4$，到 y 軸距離為 $|-5|=5$。

C 點到 x 軸距離為 $|-3|=3$，到 y 軸距離為 $|-4|=4$。

D 點到 x 軸距離為 $|-5|=5$，到 y 軸距離為 $|2|=2$。

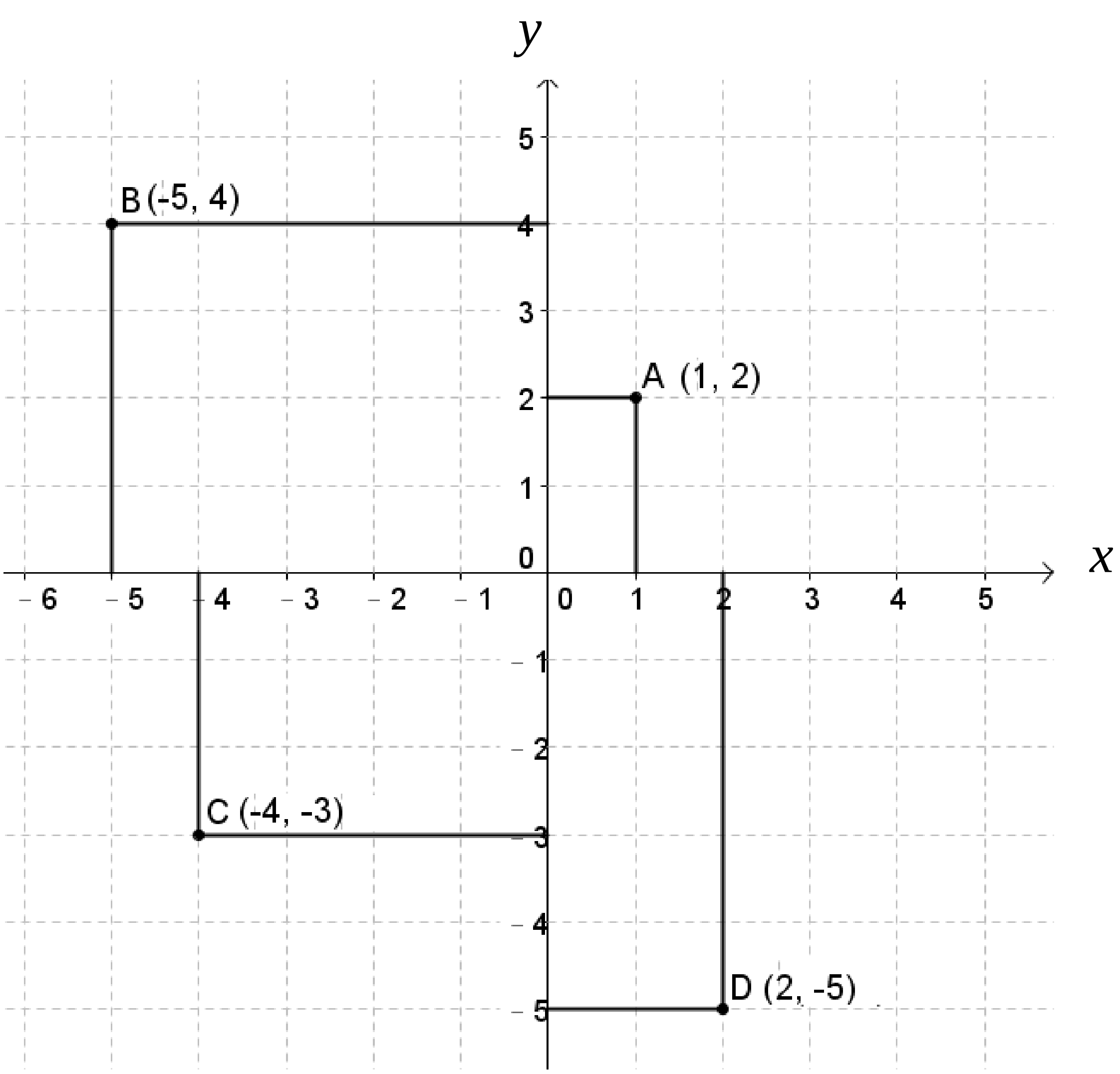


圖 4.1-13

【練習】**4.1.2-1**

在座標平面上畫出下列各點，並求各點到兩軸的距離：

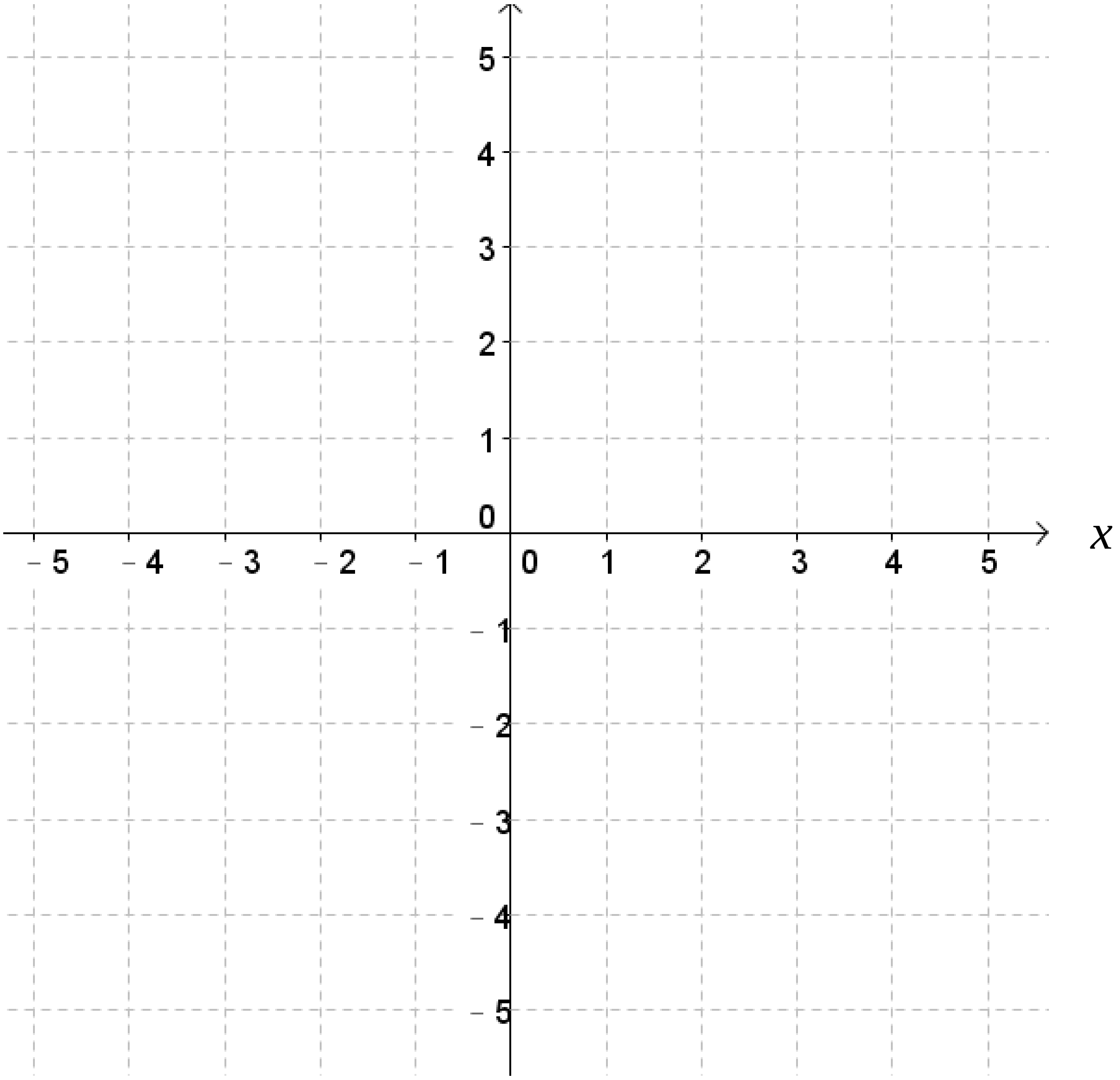
(1) A$(2,3)$　　(2) B$(-3,2)$　　(3) C$(-3,-1)$　　(4) D$(1,-4)$

A 點到 x 軸距離為______________，到 y 軸距離為______________。

B 點到 x 軸距離為______________，到 y 軸距離為______________。

C 點到 x 軸距離為______________，到 y 軸距離為______________。

D 點到 x 軸距離為______________，到 y 軸距離為______________。



例題 4.1.2-2

求下列各點到兩軸的距離：

（1）A$(0,1\frac{1}{2})$　　（2）B$(-3,\frac{2}{3})$　　（3）C$(-3\frac{1}{2},-1)$　　（4）D$(-2,0)$

詳解：

A 點到 x 軸距離為 $\left|1\frac{1}{2}\right|=1\frac{1}{2}$ ，到 y 軸距離為 $|0|=0$ 。

B 點到 x 軸距離為 $\left|\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}$ ，到 y 軸距離為 $|-3|=3$ 。

C 點到 x 軸距離為 $|-1|=1$ ，到 y 軸距離為 $\left|-3\frac{1}{2}\right|=3\frac{1}{2}$ 。

D 點到 x 軸距離為 $|0|=0$ ，到 y 軸距離為 $|-2|=2$ 。

【練習】4.1.2-2

求下列各點到兩軸的距離：

（1）A$(-1,0)$　　（2）B$(-2,-\frac{3}{7})$　　（3）C$(0,-3)$　　（4）D$(-5,3\frac{1}{2})$

A 點到 x 軸距離為____________，到 y 軸距離為____________。

B 點到 x 軸距離為____________，到 y 軸距離為____________。

C 點到 x 軸距離為____________，到 y 軸距離為____________。

D 點到 x 軸距離為____________，到 y 軸距離為____________。

4.1.3 節　點在直角座標上的移動

前幾節我們學習了在座標上描點與計算點和座標軸的距離，接下來我們來看點如何在座標平面上移動。

我們已經知道直角座標是由 x 軸與 y 軸所組成，x 軸從原點往右邊為正、往左邊為負；y 軸從原點往上為正、往下方為負。

在圖 4.1-14 中，

A$(2,1)$ 往右邊移動 1 單位，會到達 A'$(3,1)$

B$(1,2)$ 往上移動 1 單位，會到達 B'$(1,3)$

C$(-2,1)$ 往左邊移動 2 單位，會到達 C'$(-4,1)$

D$(-2,-1)$ 往下移動 2 單位，會到達 D'$(-2,-3)$

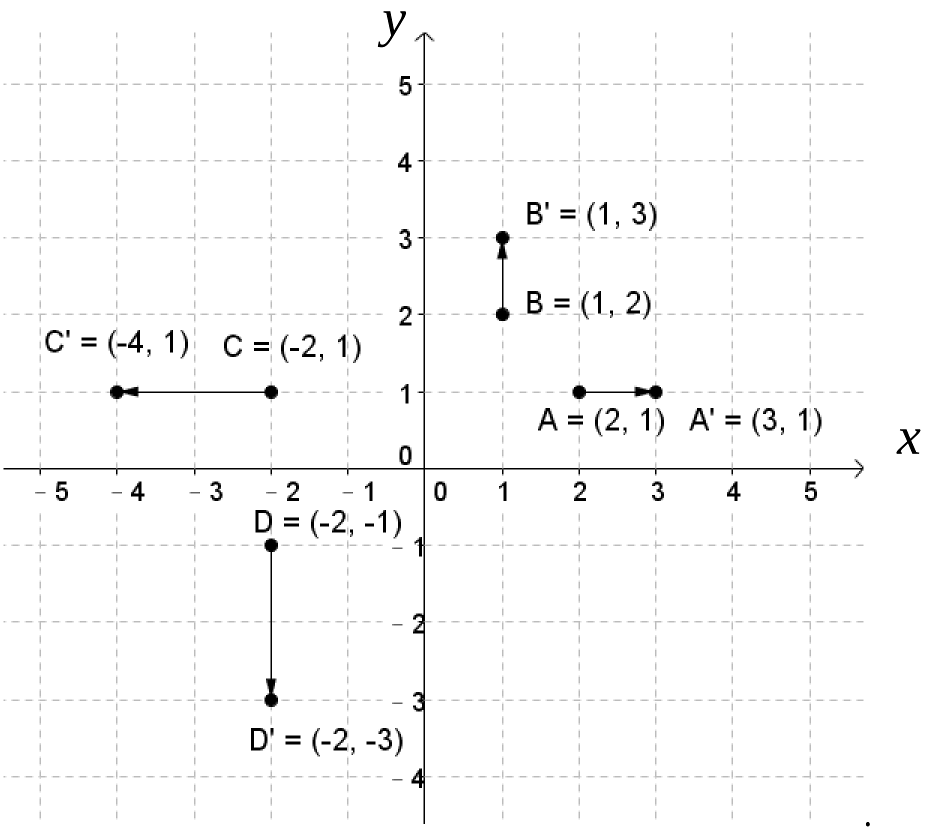


圖 4.1-14

由前面的例子可知，座標平面上的點在移動時有以下規律：

往右邊移動 s 單位，即為 x 座標增加 s；往左邊移動 s 單位，即為 x 座標減少 s。

往上移動 t 單位，即為 y 座標增加 t；往下移動 t 單位，即為 y 座標減少 t。

也就是說圖 4.1-15，若有一點 $\mathrm{P}(a,b)$

(1)往右邊移動 s 單位，會到達 $(a+s,b)$ 。

(2)往左邊移動 s 單位，會到達 $(a-s,b)$ 。

(3)往上移動 t 單位，會到達 $(a,b+t)$ 。

(4)往下移動 t 單位，會到達 $(a,b-t)$ 。

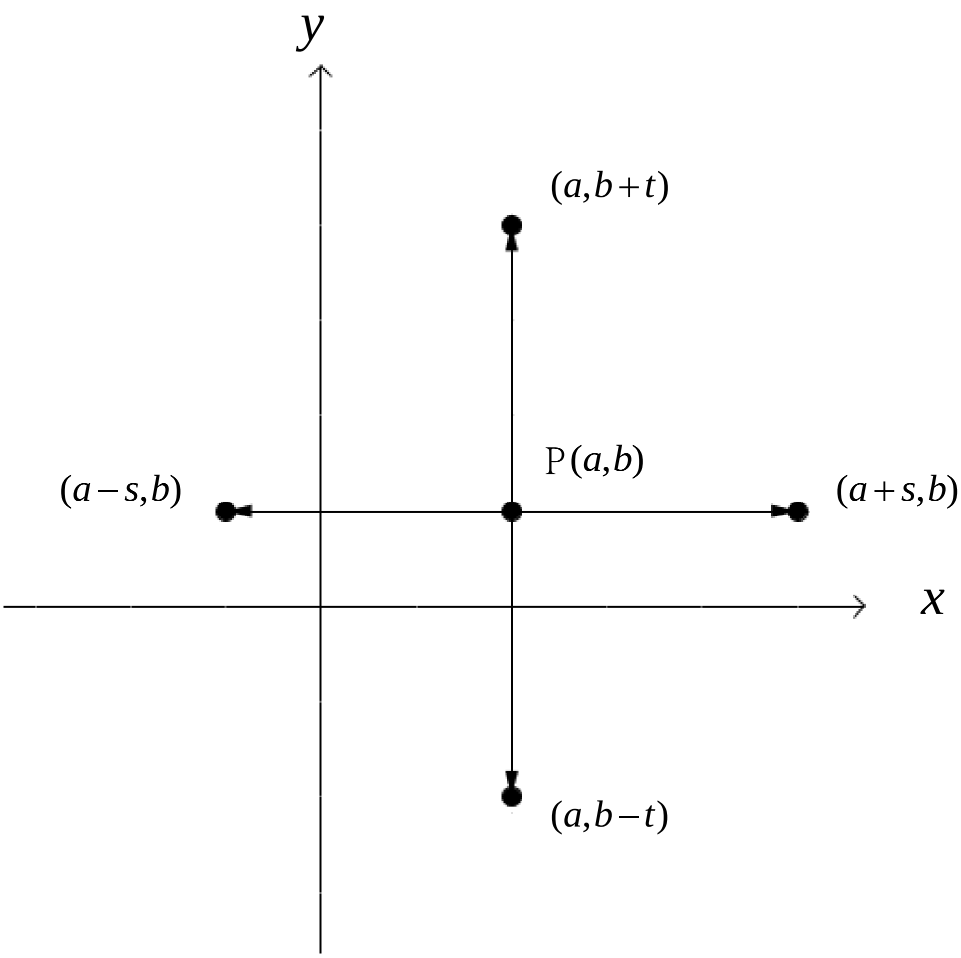


圖 4.1-15

例題 4.1.3-1

寫出下列各點座標；

(1)在座標平面上，由原點出發，往右移動 4 單位，到達 A 點，A 點座標為何？

(2)由 A 點出發，往上移動 3 單位，到達 B 點，B 點座標為何？

(3)由 B 點出發，往左移動 6 單位，到達 C 點，C 點座標為何？

(4)由 C 點出發，往下移動 7 單位，到達 D 點，D 點座標為何？

詳解：

如圖 4.1-16

(1) 原點為 $(0,0)$，往右移動 4 單位，也就是 x 座標加 4。A 點座標為 $(0+4,0)=(4,0)$。

(2) A 點為 $(4,0)$，往上移動 3 單位，也就是 y 座標加 3。B 點座標為 $(4,0+3)=(4,3)$。

(3) B 點為 $(4,3)$，往左移動 6 單位，也就是 x 座標減 6。B 點座標為 $(4-6,3)=(-2,3)$。

(4) C 點為 $(-2,3)$，往下移動 7 單位，也就是 y 座標減 7。

D 點座標為 $(-2,3-7)=(-2,-4)$。

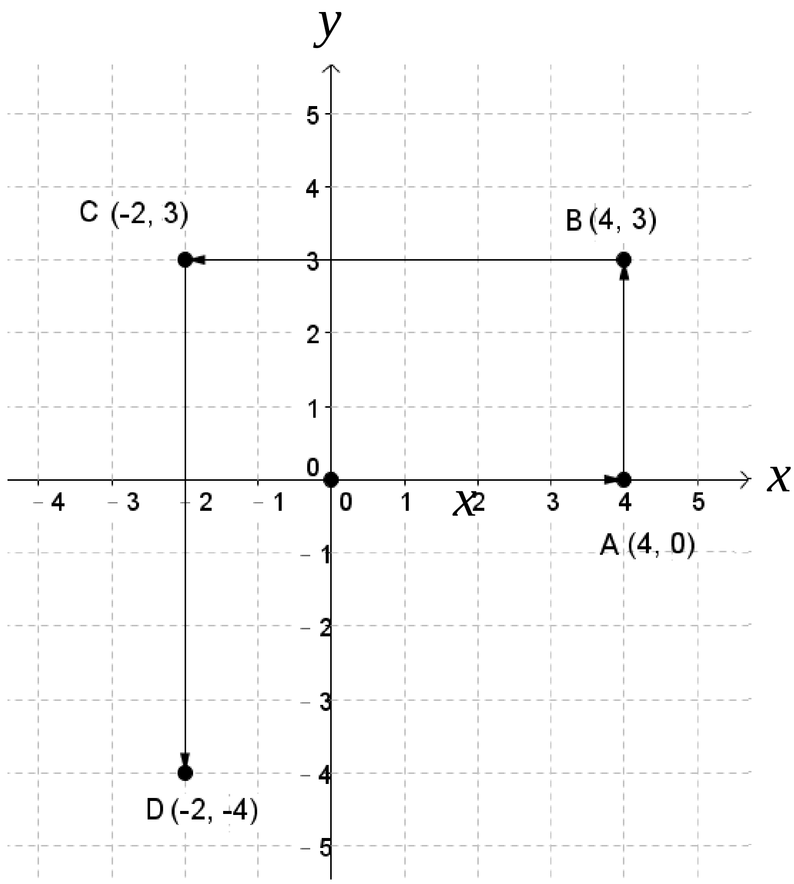


圖 4.1-16

【練習】**4.1.3-1**

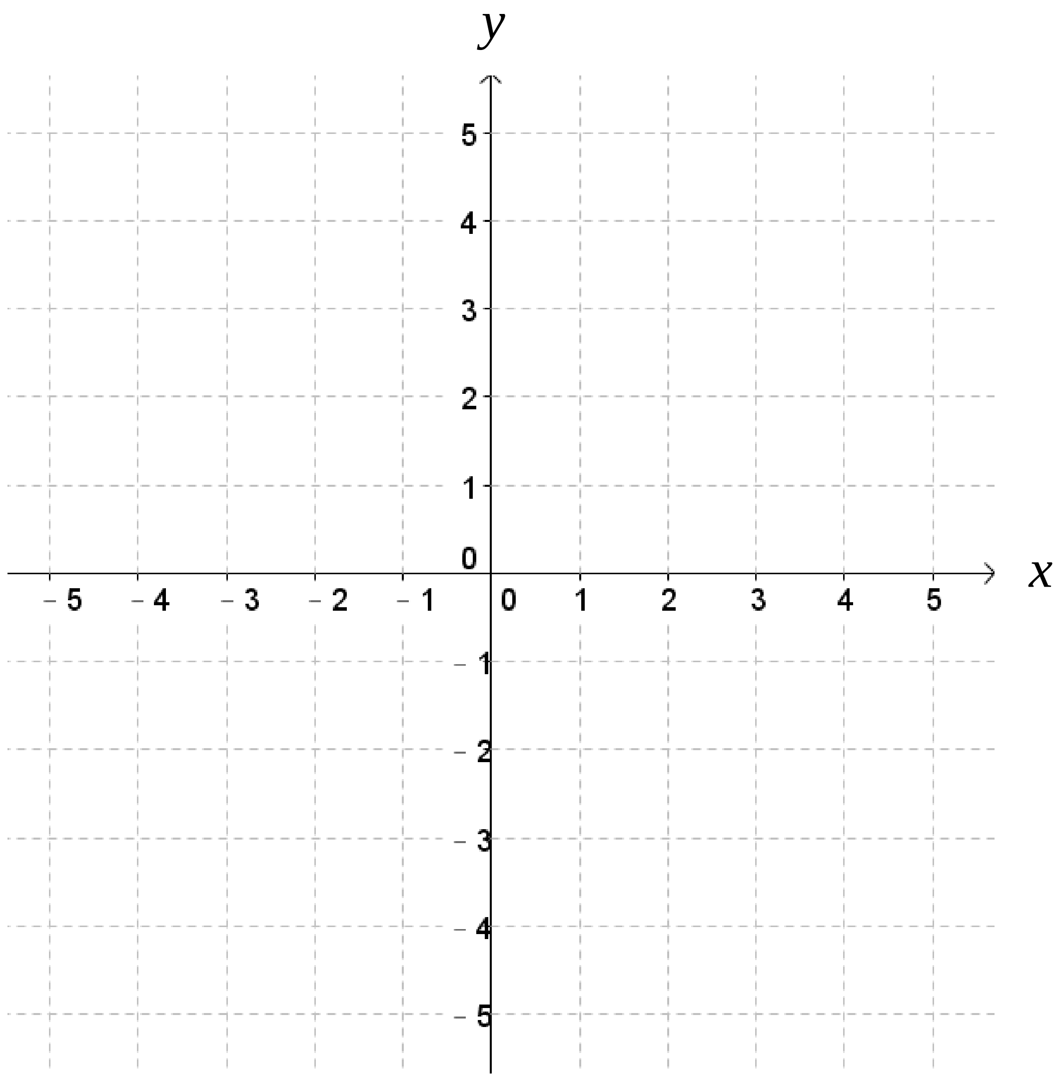
寫出下列各點座標；

(1)在座標平面上，由原點出發，往右移動 3 單位，到達 A 點，A 點座標為何？

(2)由 A 點出發，往下移動 2 單位，到達 B 點，B 點座標為何？

(3)由 B 點出發，往左移動 5 單位，到達 C 點，C 點座標為何？

(4)由 C 點出發，往上移動 6 單位，到達 D 點，D 點座標為何？



例題 4.1.3-2

在座標平面上，甲由原點出發，沿著 x 軸向右走 5 單位，再往下方走 2 單位，到達 A 點，則：

(1)A 點的座標為何？

(2)A 點到 x 軸的距離為何？

(3)A 點到 y 軸的距離為何？

詳解：

甲的移動如圖 4.1-17

(1) 甲由原點出發，沿著 x 軸向右走個 5 單位，也就是 x 座標加 5，

座標為 $(0+5,0)=(5,0)$。

再往下方走個 2 單位，也就是 y 座標減 2，A 點座標為 $(5,0-2)=(5,-2)$。

(2) A 點到 x 軸的距離，也就是 y 座標的絕對值：$|-2|=2$。

(3) A 點到 y 軸的距離，也就是 x 座標的絕對值：$|5|=5$。

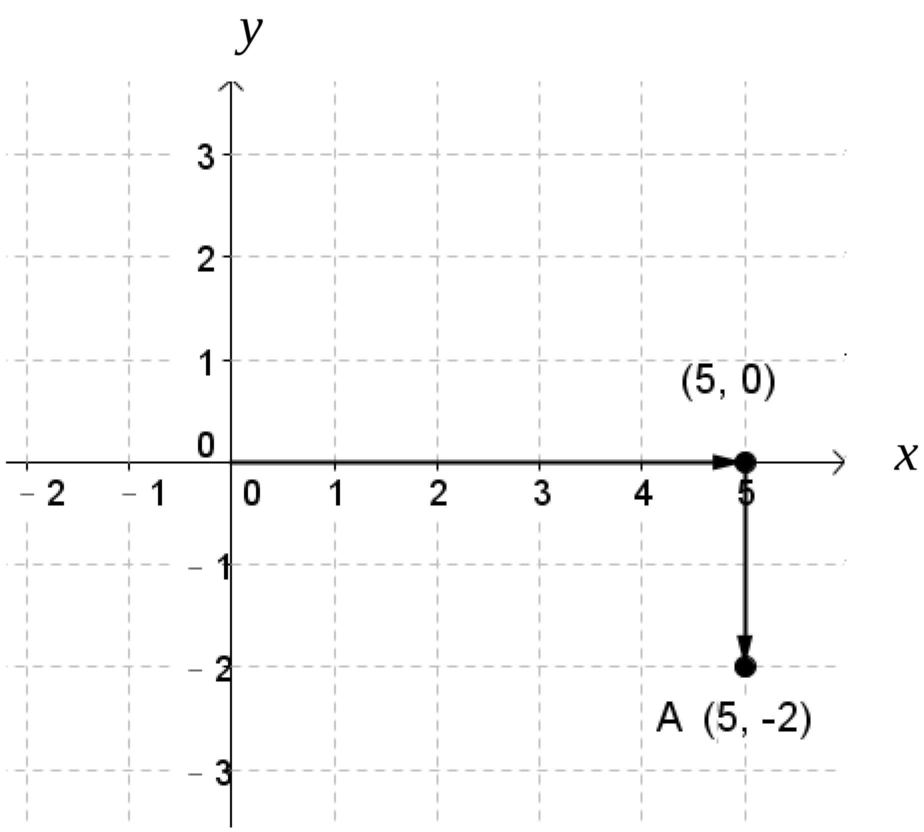


圖 4.1-17

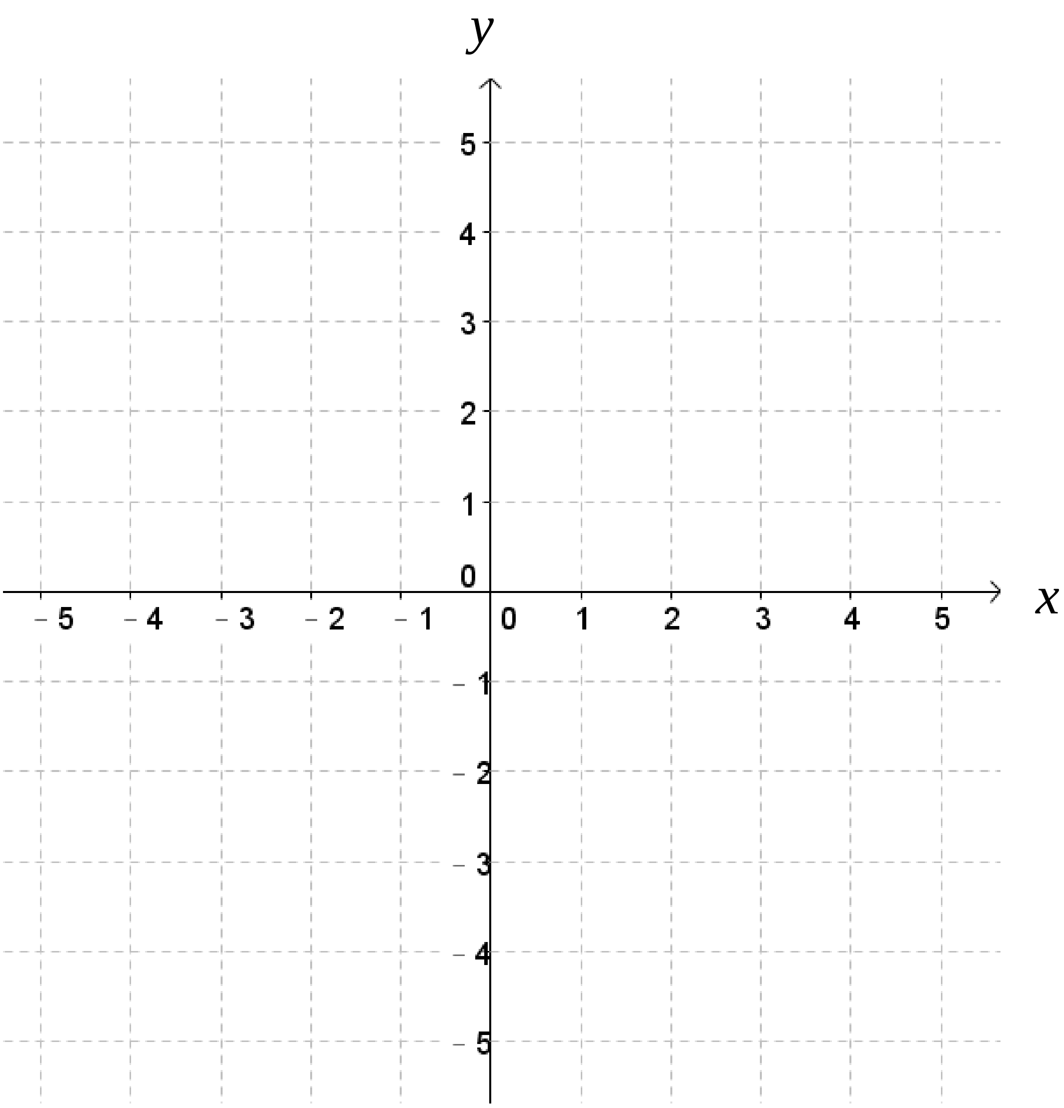
【練習】**4.1.3-2**

在座標平面上，乙由原點出發，沿著 x 軸向左走 3 單位，再往上方走 4 單位，到達 B 點，則：

(1)B 點的座標為何？

(2)B 點到 x 軸的距離為何？

(3)B 點到 y 軸的距離為何？



例題 4.1.3-3

座標平面上，有一點 P(a,b)，若 P 點先向右移動 7 單位，再向下移動 8 單位，會到達 Q$(4,-5)$，則 P 點座標為何？

詳解：

P 的移動如圖 4.1-18

解法一：

我們將點的移動反過來看，從 Q$(4,-5)$ 出發，向上移動 8 單位，再向左移動 7 單位，會到達 P(a,b)。

$(4,-5)$ 向上移動 8 單位，會到達 $(4,-5+8)=(4,3)$

$(4,3)$ 向左移動 7 單位，會到達 $(4-7,3)=(-3,3)$

因此 P 的座標為 $(-3,3)$。

解法二：

P(a,b) 往右移動 7 單位，會到達 $(a+7,b)$

$(a+7,b)$ 向下移動 8 單位，會到達 $(a+7,b-8)$

題目說會到達 Q$(4,-5)$，也就是 $(4,-5)$ 和 $(a+7,b-8)$ 是一樣的，兩邊 x 座標與 y 座標會相等。（這裡運用到點的重合觀念，會在下一節詳細介紹）

可列出聯立方程式：$\begin{cases} a+7=4 \\ b-8=-5 \end{cases}$，解得 $a=-3$、$b=3$。

因此 P 的座標為 $(-3,3)$。

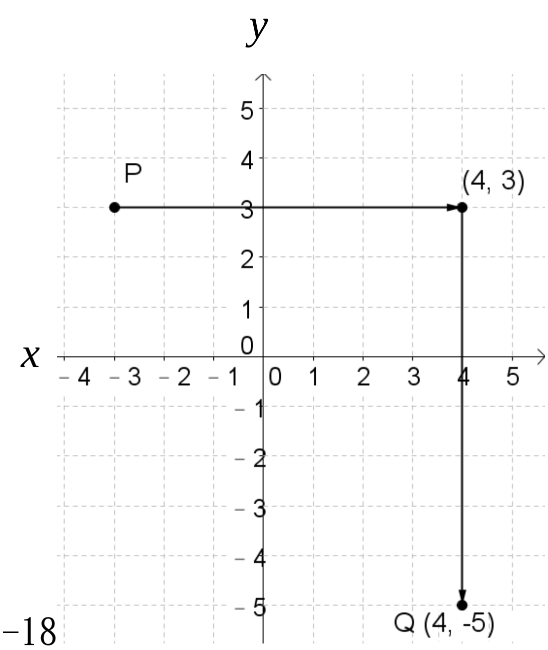
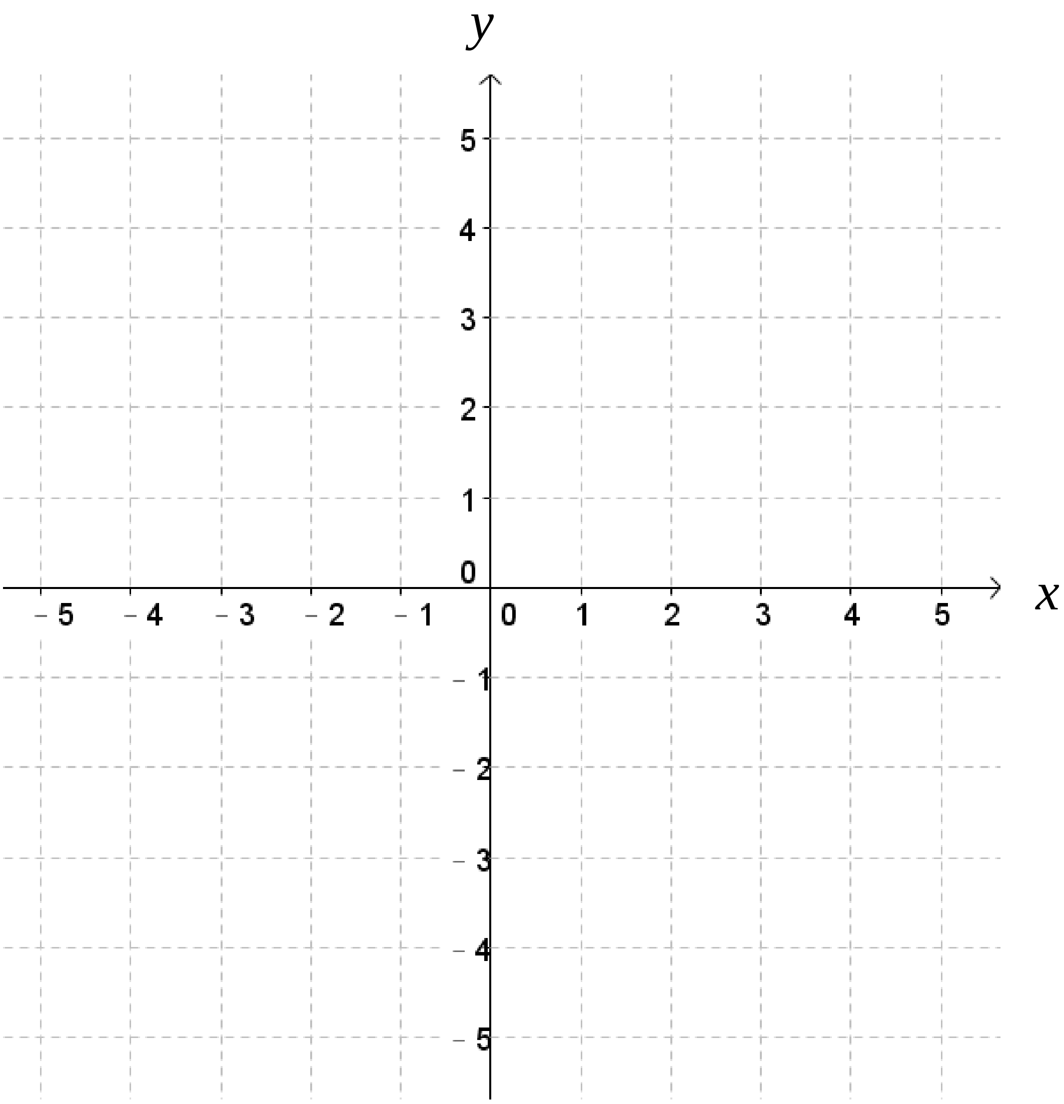


圖 4.1-18

【練習】**4.1.3-3**

座標平面上，有一點 P(a,b)，若 P 點先向上移動 6 單位，再向左移動 7 單位，會到達 Q$(-2,3)$，則 P 點座標為何？



4.1.4 節　兩點的重合與對稱

兩點重合：在座標平面上，若兩點重合，表示兩點的位置相同，所以**兩點的 x 座標相同，y 座標也相同**。

例如若點 $\mathrm{P}(a,b)$ 與 $\mathrm{Q}(1,2)$ 重合，則可得 $a=1$、$b=2$，P 座標為 $(1,2)$。如圖 4.1-19

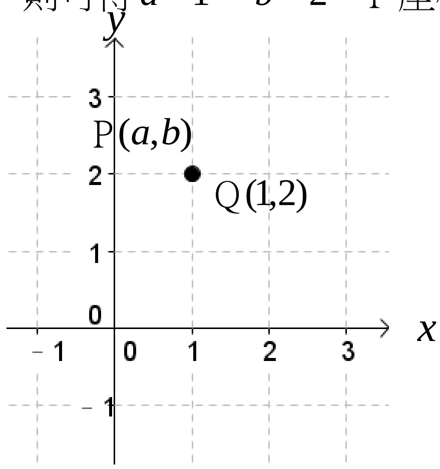


圖 4.1-19

兩點對稱：在座標平面上，若**兩點對稱於 x 軸，則兩點的 x 座標相同，y 座標互為相反數**。若**兩點對稱於 y 軸，則兩點的 y 座標相同，x 座標互為相反數**。

若**兩點對稱於原點，則兩點的 x 座標、y 座標皆互為相反數**。

※相反數：在數線上分別位於兩點兩邊，且與原點距離相等的兩個點所代表的兩數，如 8 與－8。

圖 4.1-20 中，A、B 兩點對稱於 x 軸。

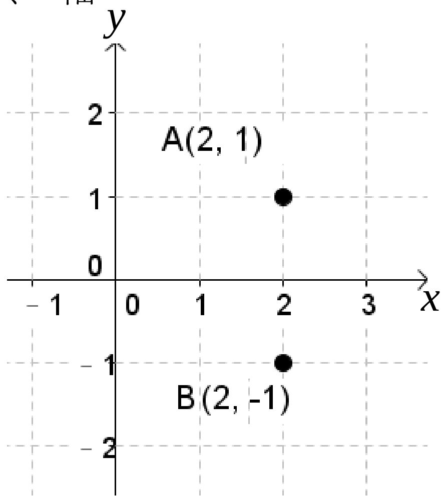


圖 4.1-20

圖 4.1-21 中，C、D 兩點對稱於 y 軸。

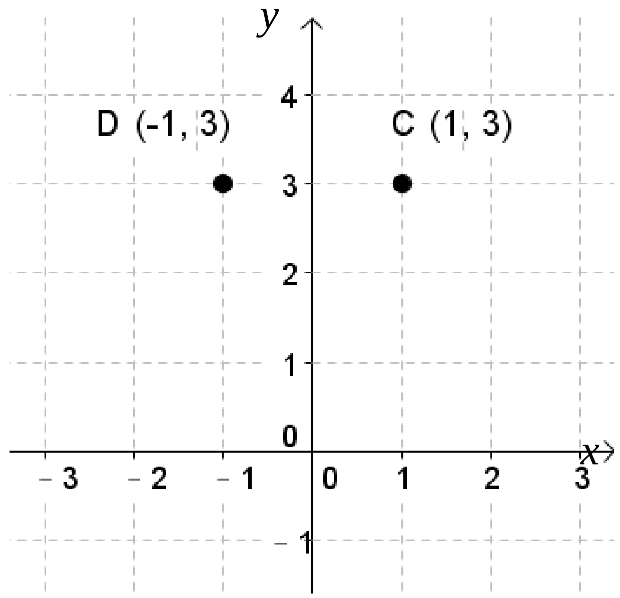


圖 4.1-21

若有 P、Q 兩點對稱於 x 軸，且 P 座標為 (a,b) ，則 Q 座標為 $(a,-b)$ 。

若有 P、K 兩點對稱於 y 軸，且 P 座標為 (a,b) ，則 K 座標為 $(-a,b)$ 。

如圖 4.1-22

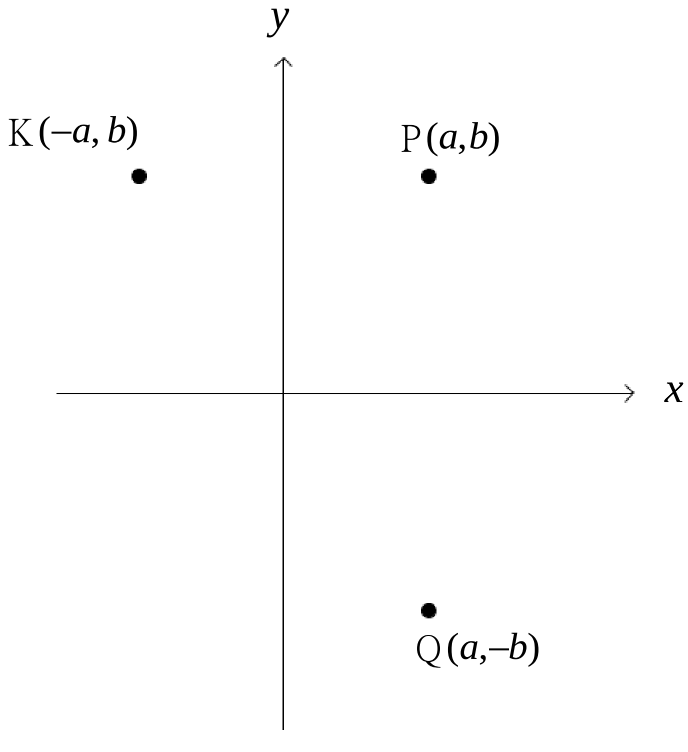


圖 4.1-22

例題 4.1.4-1

A$(a+2,b-1)$與 B$(4,-5)$為座標平面上重合的兩點，試求 a、b 之值。

詳解：

A、B 兩點重合，因此 x 座標相同，y 座標也相同。

可列出聯立方程式：$\begin{cases} a+2=4 \\ b-1=-5 \end{cases}$

解得 $a=2$ 、 $b=-4$

【練習】4.1.4-1

A$(a-1,b+3)$與 B$(3,5)$為座標平面上重合的兩點，試求 a、b 之值。

例題 4.1.4-2

A$(a+5,2b-7)$與 B$(b-1,3a+6)$為座標平面上重合的兩點，試求 A 點座標。

詳解：

A、B 兩點重合，因此 x 座標相同，y 座標也相同。

可列出聯立方程式：$\begin{cases} a+5=b-1 \\ 2b-7=3a+6 \end{cases}$

化簡得$\begin{cases} a-b=-6 \\ -3a+2b=13 \end{cases}$

解得 $a=-1$ 、 $b=5$

將 a、b 之值代入 A 點座標：

x 座標：$a+5=(-1)+5=4$

y 座標：$2b-7=2\times(5)-7=3$

得 A 點座標為 $(4,3)$

驗算：

將 a、b 之值代入 B 點座標：

x 座標：$b-1=5-1=4$

y 座標：$3a+6=3\times(-1)+6=3$

得 B 點座標為 $(4,3)$

A 點與 B 點兩點重合，符合題意，故答案正確。

【練習】4.1.4-2

A$(a+2b,6-a)$ 與 B$(4,b-1)$ 為座標平面上重合的兩點，試求 a、b 之值與 B 點座標。

例題 4.1.4-3

座標平面上，A$(2,3)$與 B(a,b)對稱於 x 軸，試求 B 點座標。

詳解：

A、B 兩點對稱於 x 軸，即 x 座標相同，y 座標互為相反數。

因此 B 的 x 座標為 2，y 座標為$-(3)=-3$

B 點座標為$(2,-3)$

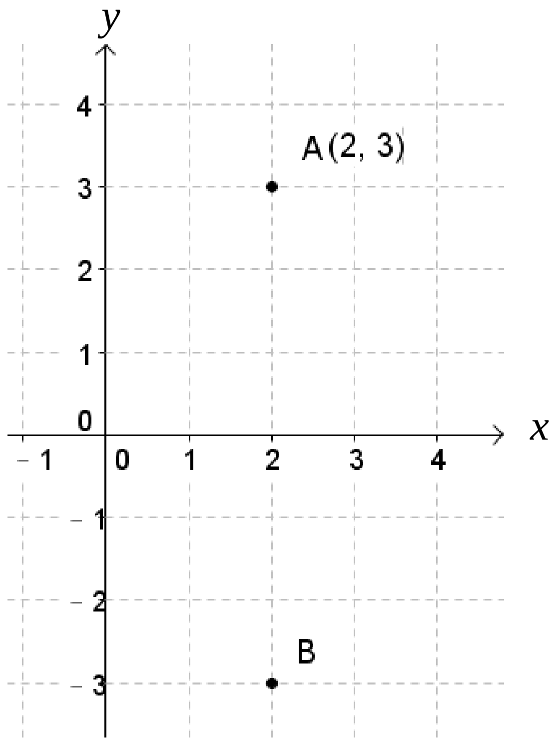
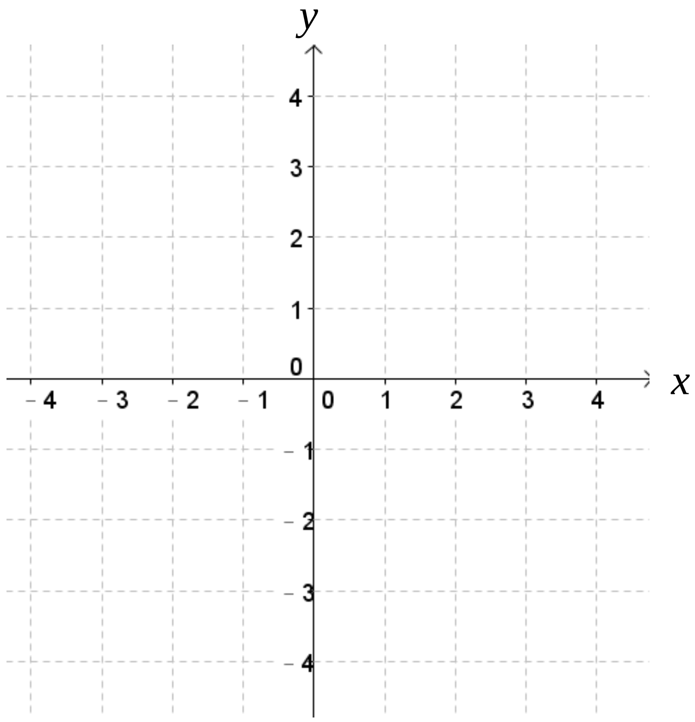


圖 4.1-23

【練習】**4.1.4-3**

座標平面上，A$(-2,-3)$與B(a,b)對稱於y軸，試求B點座標。



例題 4.1.4-4

座標平面上，A$(2a+1,2-b)$與B$(b,3a)$對稱於y軸，試求A點座標。

詳解：

A、B兩點對稱於y軸，即x座標互為相反數，y座標相同。

x座標互為相反數：$2a+1=-(b)$，化簡得$2a+b=-1$

y座標相同；$2-b=3a$，化簡得$3a+b=2$

可列出聯立方程式：$\begin{cases}2a+b=-1\\3a+b=2\end{cases}$

解得$a=3$，$b=-7$

代入A點x座標：$2a+1=2\times3+1=7$

代入A點y座標：$2-b=2-(-7)=9$

得A點座標為$(7,9)$

驗算：

B點座標為$(b,3a)=(-7,3\times3)=(-7,9)$，與點A(7, 9)對稱y軸，故答案正確。

【練習】4.1.4-4

座標平面上，A$(3a+1,b+1)$與 B$(2b+1,-2a)$對稱於 x 軸，試求 A 點座標。

4.1.5 節 由座標求周長與面積

在座標平面上，我們可以用點與線來做出一些幾何圖形，例如三角形、長方形和正方形等。當然也可以再利用座標計算這些圖形的周長與面積。

長方形周長＝(長＋寬)×2
長方形面積＝長×寬
三角形面積＝底×高÷2

例題 4.1.5-1

如圖 4.1-24，長方形 ABCD 中，A 點座標為(1,2)，B 點座標為(1,1)，C 點座標為(3,1)，D 點座標為(3,2)，試求長方形 ABCD 的周長與面積。

詳解：

要計算周長，首先需要先算出長與寬的長度，
也就是 A、B 兩點的距離與 B、C 兩點的距離
若兩點間的 x 座標相同，則距離為 y 座標相減的絕對值。
若兩點間的 y 座標相同，則距離為 x 座標相減的絕對值。

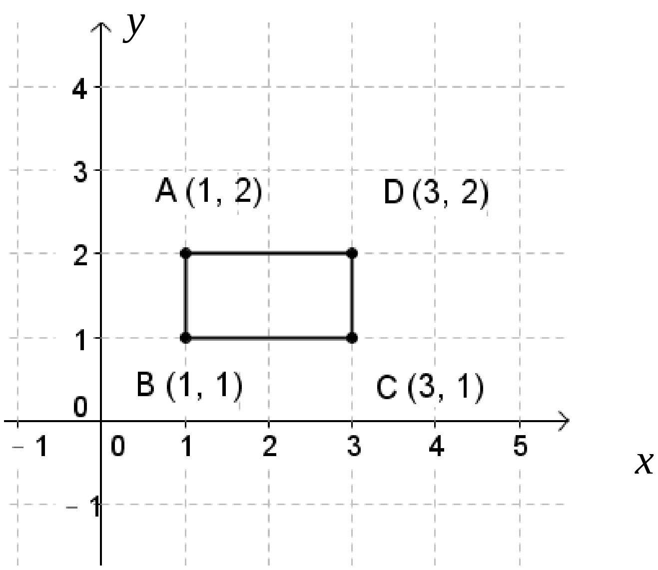


圖 4.1-24

A、B 兩點因為 x 座標相同，因此距離為 y 座標相減的絕對值。

A、B 距離為$|2-1|=1$，即長方形的寬為 1。

B、C 兩點因為 y 座標相同，因此距離為 x 座標相減的絕對值。

B、C 距離為$|3-1|=2$ ，即長方形的長為 2。

長方形 ABCD 周長＝$(1+2)\times 2=6$

長方形面積是長×寬

長方形 ABCD 面積＝$2\times 1=2$

長方形 ABCD 的周長為 6 單位，面積為 2 平方單位。

【練習】**4.1.5-1**

如圖 4.1-25，長方形 ABCD 中，A 點座標為$(1,1)$，B 點座標為$(1,-3)$，C 點座標為$(3,-3)$，D 點座標為$(3,1)$ ，試求長方形 ABCD 的周長與面積。

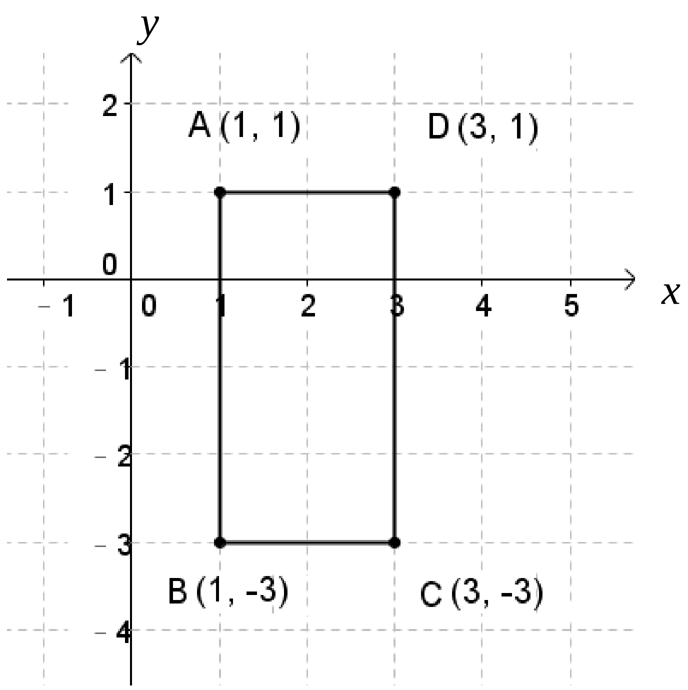


圖 4.1-25

例題 4.1.5-2

如圖 4.1-26，三角形 ABC 中，A 點座標為 $(-1,1)$，B 點座標為 $(2,1)$，C 點座標為 $(2,5)$，試求三角形 ABC 的面積。

詳解：

三角形 ABC 面積：底×高÷2＝ $\overline{AB}\times\overline{BC}\div 2$

（這裡 $\overline{AB}$ 代表 A 點與 B 點的距離，$\overline{BC}$ 代表 B 點與 C 點的距離。）

A、B 兩點因為 y 座標相同，因此距離為 x 座標相減的絕對值。

$\overline{AB}=|(-1)-2|=|-3|=3$

B、C 兩點因為 x 座標相同，因此距離為 y 座標相減的絕對值。

$\overline{BC}=|1-5|=|-4|=4$

三角形 ABC 面積＝ $\overline{AB}\times\overline{BC}\div 2=3\times 4\div 2=6$

三角形 ABC 面積為 6 平方單位。

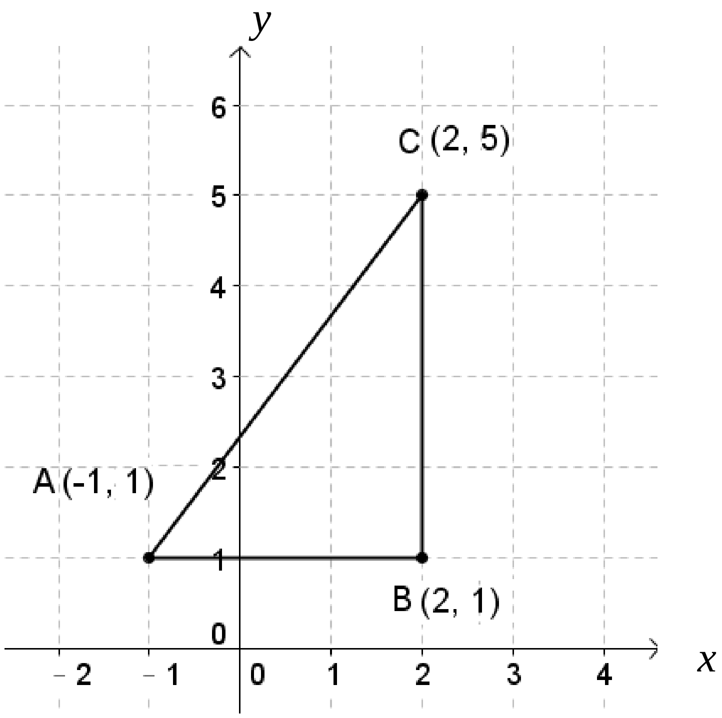
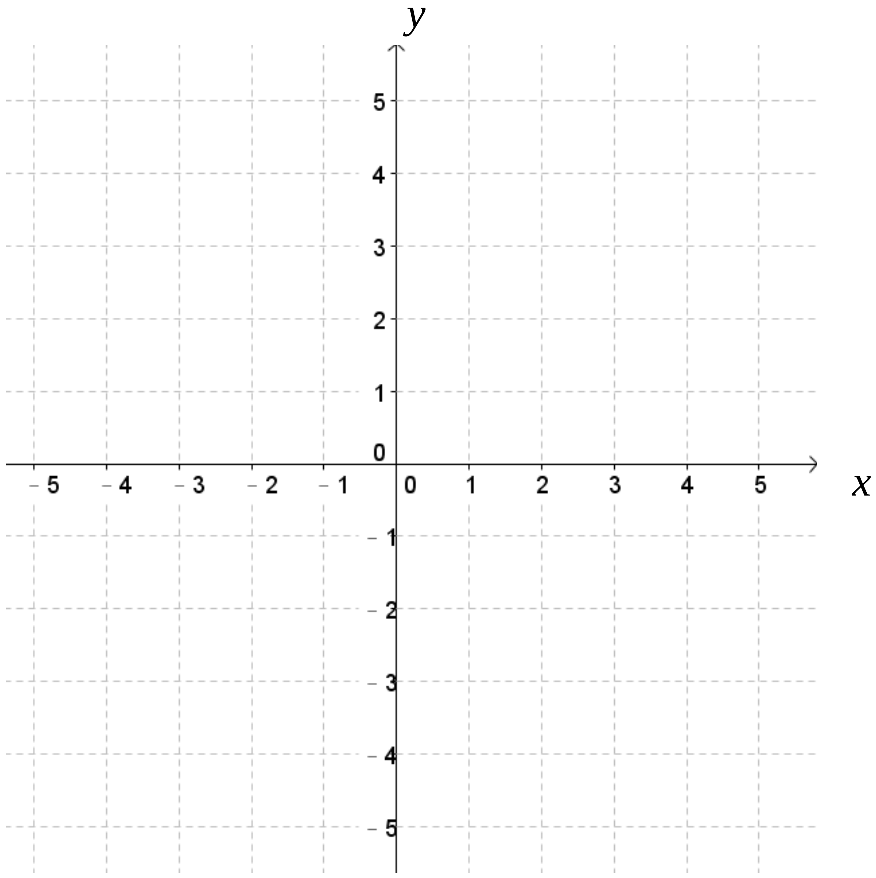


圖 4.1-26

【練習】4.1.5-2

三角形 ABC 中，A 點座標為 $(-1,2)$ ，B 點座標為 $(-1,-3)$ ，C 點座標為 $(3,-3)$ ，試求三角形 ABC 的面積。



例題 4.1.5-3

如圖 4.1-27，三角形 ABC 中，A 點座標為 $(-2,0)$，B 點座標為 $(4,0)$，C 點座標為 $(2,4)$，試求三角形 ABC 的面積。

詳解：

三角形 ABC 面積：底×高÷2

底為 $\overline{AB}$ ，$\overline{AB}=|4-(-2)|=6$

高為 C 點到 x 軸的距離，也就是 y 座標的絕對值，高：$|4|=4$

三角形 ABC 的面積＝底×高÷2＝$6\times4\div2=12$

三角形 ABC 面積為 12 平方單位。

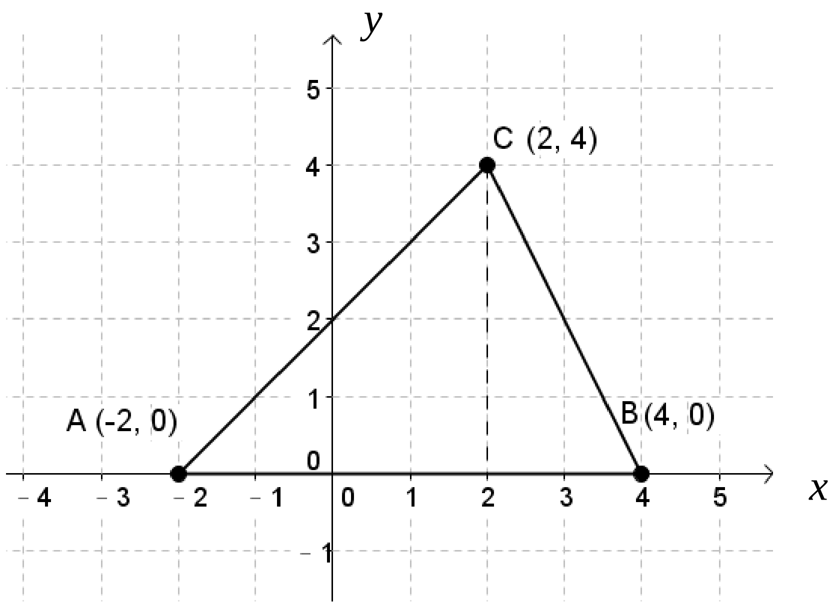
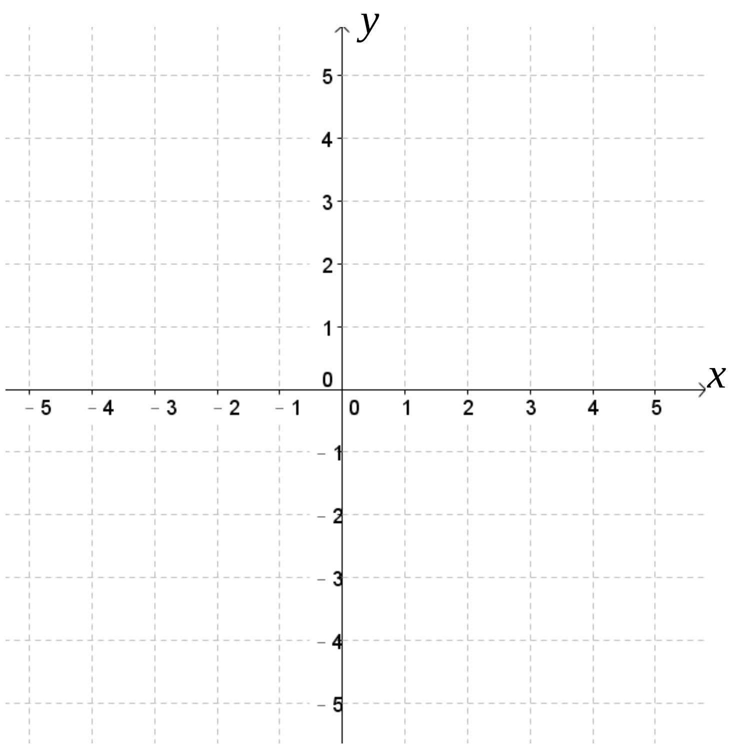


圖 4.1-27

【練習】**4.1.5-3**

三角形 ABC 中，A 點座標為 (0,3)，B 點座標為 (0,–3)，C 點座標為 (5,1)，試求三角形 ABC 的面積。



例題 4.1.5-4

如圖 4.1-28，三角形 ABC 中，A 點座標為 $(-2,-2)$，B 點座標為 $(4,-2)$，C 點座標為 $(2,2)$，試求三角形 ABC 的面積。

詳解：

三角形 ABC 面積：底×高÷2

底為 $\overline{AB}$，$\overline{AB}=|4-(-2)|=6$

高為 C 點到 $\overline{AB}$ 的距離，由 C 作鉛直線交 $\overline{AB}$ 於 D 點，由圖形可知 D 點座標為 $(2,-2)$

高為 $\overline{CD}$，$\overline{CD}=|2-(-2)|=4$

三角形 ABC 的面積＝底×高÷2＝$6\times4\div2=12$

三角形 ABC 面積為 12 平方單位。

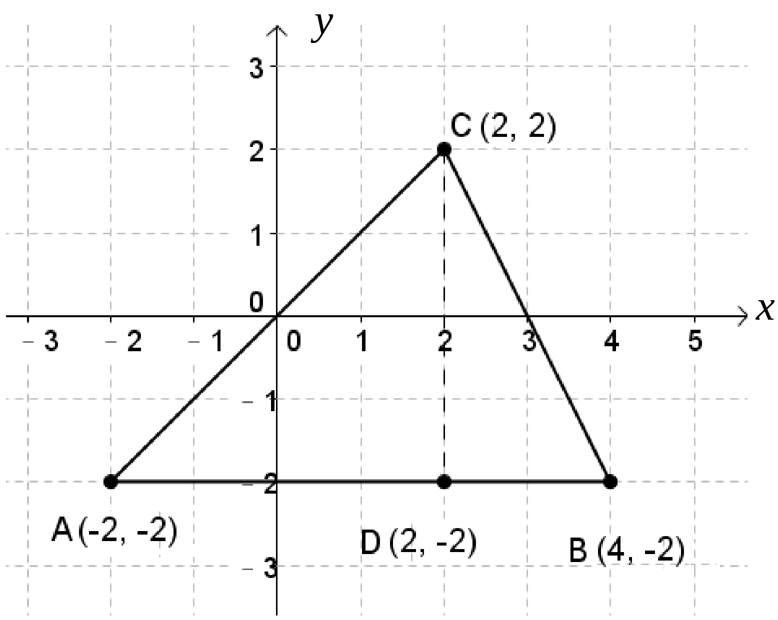
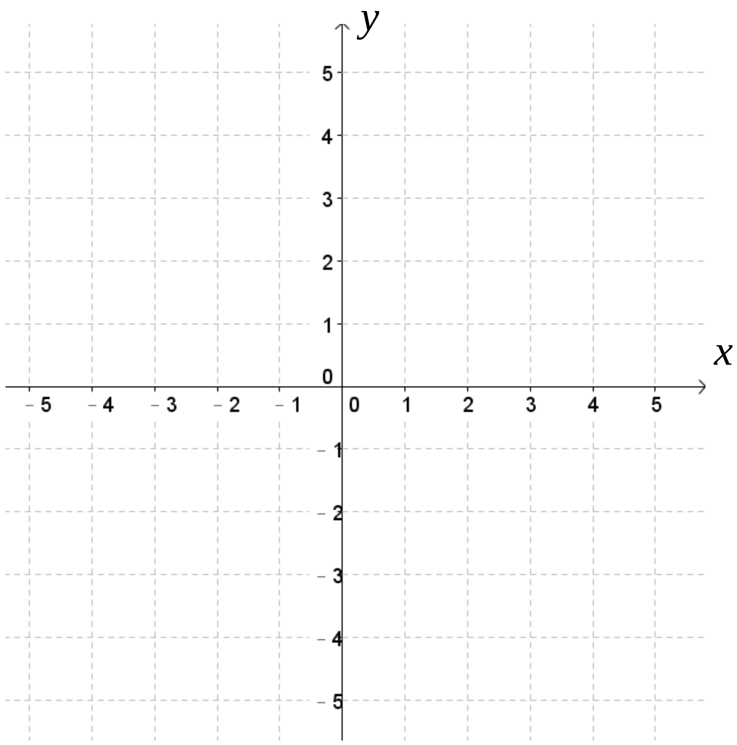


圖 4.1-28

【練習】**4.1.5-4**

三角形 ABC 中，A 點座標為$(-2,4)$，B 點座標為$(-2-2)$，C 點座標為$(3,1)$，試求三角形 ABC 的面積。



4.1.6 節　象限問題

在 4.1.1 節中，我們已介紹了象限的基本意義，如圖 4.1-29。

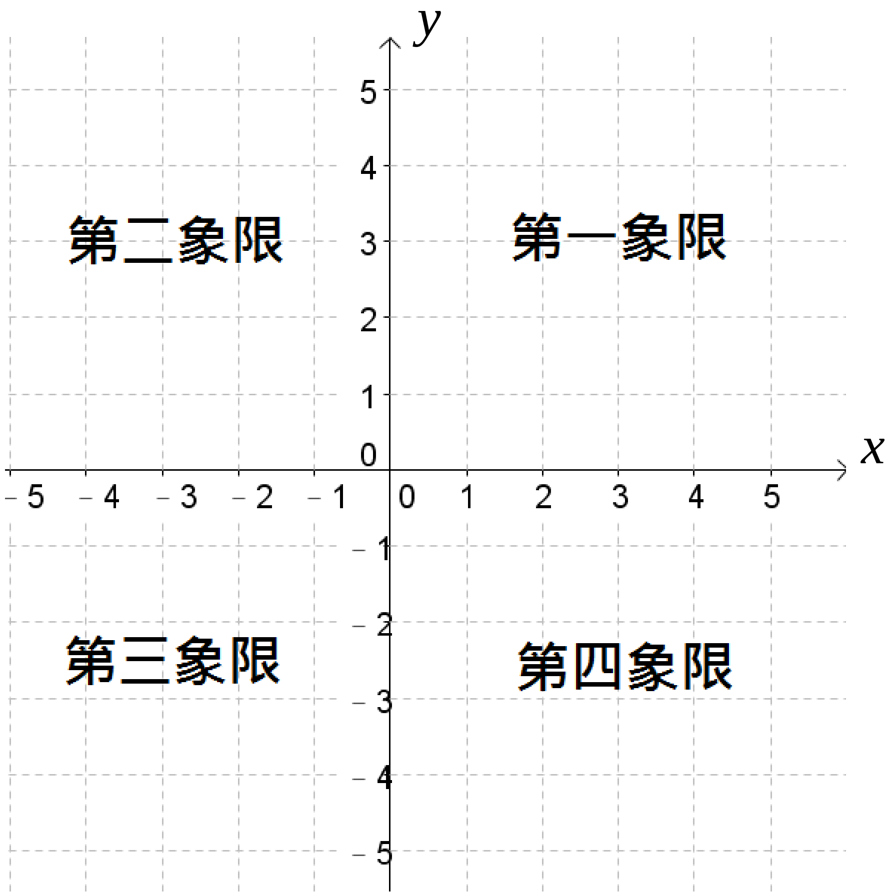


圖 4.1-29

第一象限中的座標，x 座標為正，y 座標也為正，用 $(+,+)$ 表示；
第二象限中的座標，x 座標為負，y 座標為正，用 $(-,+)$ 表示；
第三象限中的座標，x 座標為負，y 座標也為負，用 $(-,-)$ 表示；
第四象限中的座標，x 座標為正，y 座標為負，用 $(+,-)$ 表示。

本節我們將更進一步介紹象限的相關問題。

例題 4.1.6-1

座標平面上，若點(a,b)在第二象限，求下列各點分別在哪一象限或哪一座標軸上：

(1) $(-a,b)$　(2) $(a,-b)$　(3) (a,ab)

(4) $(-a,0)$　(5) $(0,b)$　(6) $(-ab,a)$

詳解：

(a,b)在第二象限，符號表示為$(-,+)$，即$a<0$、$b>0$。

(1) $a<0\to -a>0$，即$(-a,b)$的x座標為正，y座標也為正，

符號表示為$(+,+)$，在第一象限。

(2) $b>0\to -b<0$，即$(a,-b)$的x座標為負，y座標也為負，

符號表示為$(-,-)$，在第三象限。

(3) $a<0$、$b>0\to ab<0$，即(a,ab)的x座標為負，y座標也為負，

符號表示為$(-,-)$，在第三象限。

(4) $(-a,0)$的x座標不為零，y座標為零，在x軸上。

(5) $(0,b)$的x座標為零，y座標不為零，在y軸上。

(6) $ab<0\to -ab>0$；即$(-ab,a)$的x座標為正，y座標為負，

符號表示為$(+,-)$，在第四象限。

【練習】4.1.6-1

座標平面上，若點(a,b)在第三象限，求下列各點分別在哪一象限或哪一座標軸上：

點	(b,a)	$(-a,0)$	$(-b,a)$	$(0,a)$	(ab,b)	$(-ab,-a)$
象限或座標軸						

例題 4.1.6-2

座標平面上，若點$(a,-ab)$在第二象限，求下列各點分別在哪一象限或哪一座標軸上：

(1) (a,b)　　(2) $(ab,\dfrac{a}{b})$　　(3) $(b,-a)$

詳解：

$(a,-ab)$在第二象限，符號表示為$(-,+)$，即$a<0$、$-ab>0$。

$-ab>0 \rightarrow ab<0$

因為$a<0$，可得$b>0$（若 a、b 都小於 0，那麼 ab 會大於 0）

(1) $a<0$、$b>0$，即(a,b)的 x 座標為負，y 座標為正，

符號表示為$(-,+)$，在第二象限。

(2) $ab<0$、$\dfrac{a}{b}<0$，即$(ab,\dfrac{a}{b})$的 x 座標為負，y 座標也為負，

符號表示為$(-,-)$，在第三象限。

(3) $b>0$、$-a>0$，即$(b,-a)$的 x 座標為正，y 座標也為正，

符號表示為$(+,+)$，在第一象限。

【練習】4.1.6-2

座標平面上，若點$(-a,ab)$在第四象限，求下列各點分別在哪一象限或哪一座標軸上：

點	(a,b)	$(-ab,a)$	$(0,-b)$
象限或座標軸			

例題 4.1.6-3

座標平面上，若點 A$(a+1,2a+7)$在第三象限內，且 A 點到 x 軸距離為 1，則 A 點到 y 軸距離是多少？

詳解：

A 點到 x 軸距離為 1，即 y 座標為 1 或－1……(1)

A 點在第三象限，可知 y 座標為負……(2)

由(1)(2)得 A 點的 y 座標為－1

y 座標：$2a+7=-1$，解得 $a=-4$

將 $a=-4$ 代入 x 座標：$a+1=(-4)+1=-3$，得 x 座標為－3

A 點到 y 軸距離為 x 座標的絕對值：$|-3|=3$

得 A 點到 y 軸距離為 3。

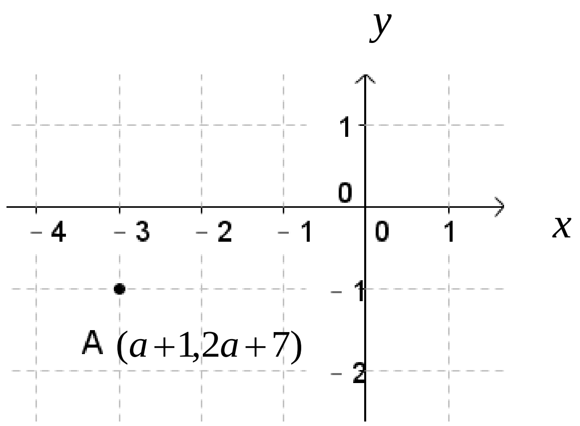
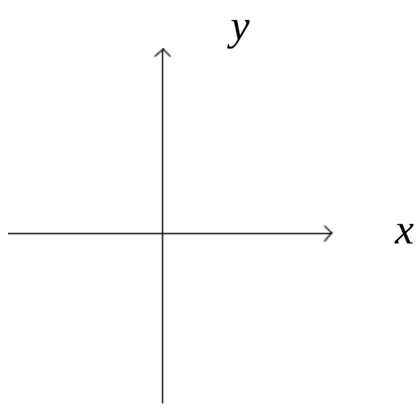


圖 4.1-30

【練習】4.1.6-3

座標平面上，若 B 點$(b-9,b-1)$在第二象限內，且 B 點到 x 軸距離為 4，則 B 點到 y 軸距離是多少？



4.1 節 習題

習題 4.1-1

圖 4.1-31 是博幼國中 1 年 3 班的座位表，座位位置以數對(行,個)來表示，例如小博的位置是(2,4)。請回答下列的問題：

第五個			小美		
第四個	小惠	小博	小新		阿明
第三個				小強	
第二個		小白			
第一個	小李		小幼		
	第一行	第二行	第三行	第四行	第五行

圖 4.1-31

(1)小李的位置在_________　　(2)小惠的位置在_________

(3)小強的位置在_________　　(4)阿明的位置在_________

(5)坐在(3,4)的是________　　(6)坐在(3,1)的是________

習題 4.1-2

依據圖 4.1-32，寫出各點座標：

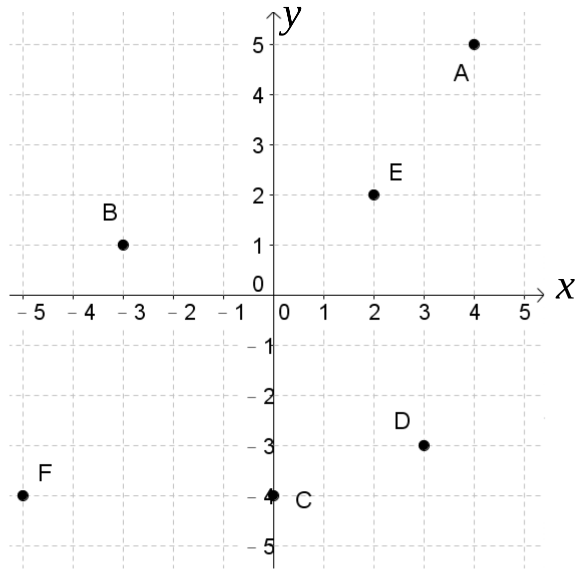


圖 4.1-32

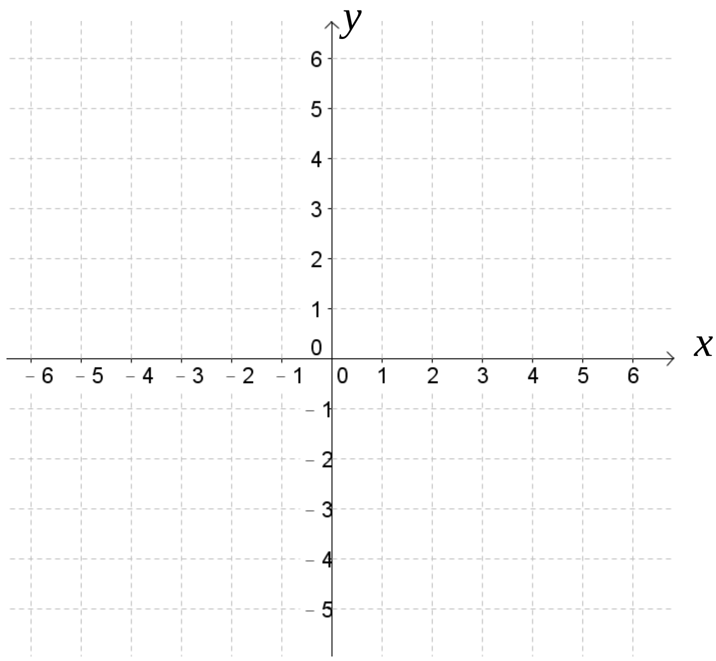
(1)A 點座標為_________ (2)B 點座標為_________ (3)C 點座標為_________

(4)D 點座標為_________ (5)E 點座標為_________ (6)F 點座標為_________

習題 4.1-3

在座標平面上標出下列各點的位置：

A(2,3)、 B(3,–5)、C(–2.5,–4)、D(–4,0)、E(–3,3.5)



習題 4.1-4

座標平面上，求下列各點到 x 軸與 y 軸的距離：

(1)A$(4,-4)$到 x 軸的距離是____單位長，到 y 軸的距離是____單位長。

(2)B$(-8,6)$到 x 軸的距離是____單位長，到 y 軸的距離是____單位長。

(3)C$(2.5,-3)$到 x 軸的距離是____單位長，到 y 軸的距離是____單位長。

(4)D$(-5,-4)$到 x 軸的距離是____單位長，到 y 軸的距離是____單位長。

習題 4.1-5

在座標平面上有 A$(4,4)$、B$(3,-4)$、C$(4,-3)$、D$(-3,4)$四點，請問哪一點和 x 軸的距離最近？

習題 4.1-6

直角座標上有一點 A(-1,-2)，從 A 往上移動 2 個單位長，再向右移動 3 個單位長，請問移動後的座標位置是？

習題 4.1-7

在座標平面上，從 A 點出發，先往上 2 個單位長，再向右 4 個單位長，最後再往下 5 個單位長，便可回到原點。則 A 點的座標為?

習題 4.1-8

座標平面上有一點 P$(a+b,a-b)$，若 P 點先向右移動 10 個單位，再向上移動 7 個單位，最後到達 Q$(5,2)$，求 a、b 之值及 P 點座標。

習題 4.1-9

有一隻螞蟻從座標平面上 A 點向東走 2 單位，又向南走 3 單位，再向西走 1 單位，最後到達 $(0,-1)$，則 A 點座標為何？（東為 x 軸正向；北為 y 軸正向）

習題 4.1-10

在座標平面上，甲由原點出發，沿著 x 軸向右走 5 單位，再往下走 2 單位，到達 A 點，則：

(1)A 點的座標為__________。

(2)A 點到 x 軸的距離為__________。

(3)A 點到 y 軸的距離為__________。

習題 4.1-11

設 A 為座標平面上的一點，若 A 與 x 軸的距離是 4，A 與 y 軸的距離是 3，且 A 在第二象限內，則 A 的座標為多少？

習題 4.1-12

在座標平面上，若點 A$(3a-5,a)$在第二象限內，且 A 點到 y 軸距離為 2，則 A 點到 x 軸距離是多少？

習題 4.1-13

座標平面上，若兩點 $(a,2)$ 與 $(1,2)$ 距離 4 個單位長，則 $a=$？

習題 4.1-14

在座標平面上，乙由$(-6,7)$出發，向________（填入左或右）移動________個單位，再向________（填入上或下）移動__________個單位後，將可到達原點。

習題 4.1-15

座標平面上，以 x 軸為對稱軸，則 A$(-3,5)$ 的對稱點座標為__________。

習題 4.1-16

座標平面上，A$(2a+b,4a-b)$、B$(a+3b,a-18)$兩點互相對稱於 x 軸，求 a、b 之值與 A 點座標。

習題 4.1-17

已知座標平面上兩點 A$(2,a+b)$、B$(a,2a+1)$重合，則 A 點座標為__________。

習題 4.1-18

已知座標平面上兩點 A$(a+3b,3a-b)$、B$(2a+b,5)$重合，則 A 點座標為__________。

習題 4.1-19

A 點座標為$(5,-1)$，若 B 點與 A 點對稱於 x 軸，C 點與 A 點對稱於 y 軸，試求 B、C 兩點的座標。

習題 4.1-20

座標平面上有 A$(a+1,b-1)$，B$(-4,1)$兩點，若 A 點向左移動 5 個單位後即與 B 點重合，試求 a、b 之值。

習題 4.1-21

長方形四個頂點座標分別為 A$(2,3)$、B$(0,3)$、C$(0,0)$、D$(2,0)$，
試求此長方形的周長與面積。

習題 4.1-22

甲由原點 O 出發，沿著 x 軸向右方走 5 個單位到達 A 點，接著向上方走 6 個單位到達 B 點，再向左方走 5 個單位到達 C 點，試回答下列問題：

(1)求 A、B、C 的座標。

(2)四邊形 OABC 是何種四邊形？

(3)求四邊形 OABC 的周長與面積。

習題 4.1-23

如圖 4.1-33，四邊形 ABCD 為長方形，且 $\overline{AB}$ 與 x 軸垂直，試回答下列問題：

(1)B 點座標為何？

(2)D 點座標為何？

(3)四邊形 ABCD 之面積為何？

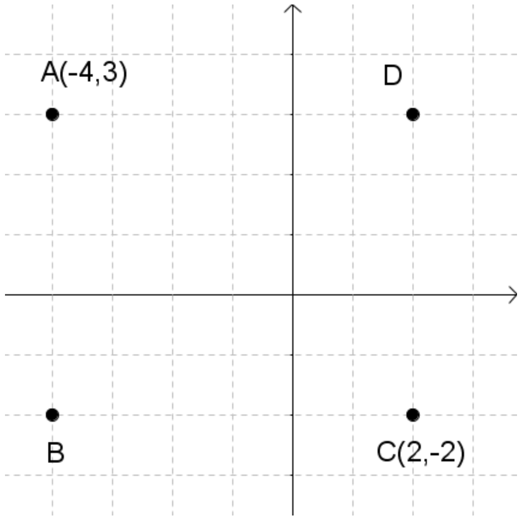


圖 4.1-33

習題 4.1-24

座標平面上有三點 A$(0,3)$、B$(0,-5)$、C$(4,1)$，試求三角形 ABC 的面積。

習題 4.1-25

座標平面上，A$(m,2m-3n)$ 在 x 軸上，B$(3m-3n-3,n)$ 在 y 軸上。

O 為原點，則三角形 AOB 的面積為____________平方單位。

習題 4.1-26

如圖 4.1-34，長方形 ABCD 中，已知 A 點座標為 $(-2,3)$，C 點座標為 $(3,-1)$，且 $\overline{AB}$ 與 x 軸垂直，求長方形 ABCD 的周長。

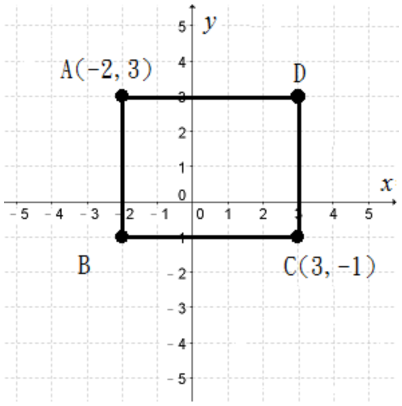


圖 4.1-34

習題 4.1-27

座標平面上有 $P(-3,4)$、$Q(2,2)$、$R(-3,-2)$ 三點，求三角形 PQR 的面積。

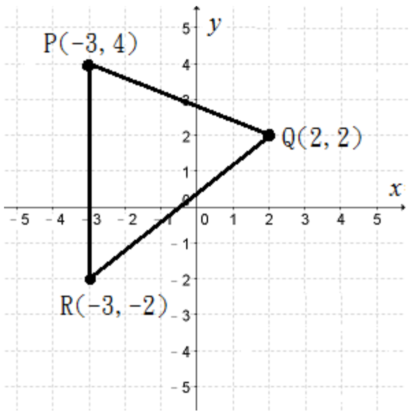


圖 4.1-35

習題 4.1-28

下表中各點分別在哪一象限內或哪一個座標軸上？

點	(2,0)	(7,2)	(–5,–3)	(6,–2)	(0,–8)
象限或座標軸					

習題 4.1-29

若 $a>0$，$b<0$，則下表中各點分別在哪一象限內或哪一個座標軸上？

點	(a,b)	$(-a,0)$	(b,a)	$(-a,ab)$	$(0,-ab)$
象限或座標軸					

習題 4.1-30

若 (a,b) 在第二象限，則下表中各點分別在哪一象限內或哪一個座標軸上？

點	(b,a)	$(\frac{b}{a},\frac{a}{b})$	$(b-a,a)$	$(a^2,0)$	$(ab,-ab)$
象限或座標軸					

習題 4.1-31

在座標平面上，已知點 (a,b) 在第二象限，點 (c,d) 在第三象限，則點 $(a+c,b-d)$ 在第幾象限？

4.2 節 二元一次方程式的圖形

4.1 節中我們學習了直角座標上點的表示，本節將結合第三章學過的二元一次方程式，將其圖形畫在直角座標上。

4.2.1 節 畫出二元一次方程式的圖形

若現在有一個二元一次方程式：$x-y=0$

我們將二元一次方程式 $x-y=0$ 的解用數對表示，有 $(5,5)$、$(3,3)$、$(2,2)$、$(0,0)$、$(-4,-4)$ 等無限多組，將這些數對記在直角座標上，如圖 4.2-1。

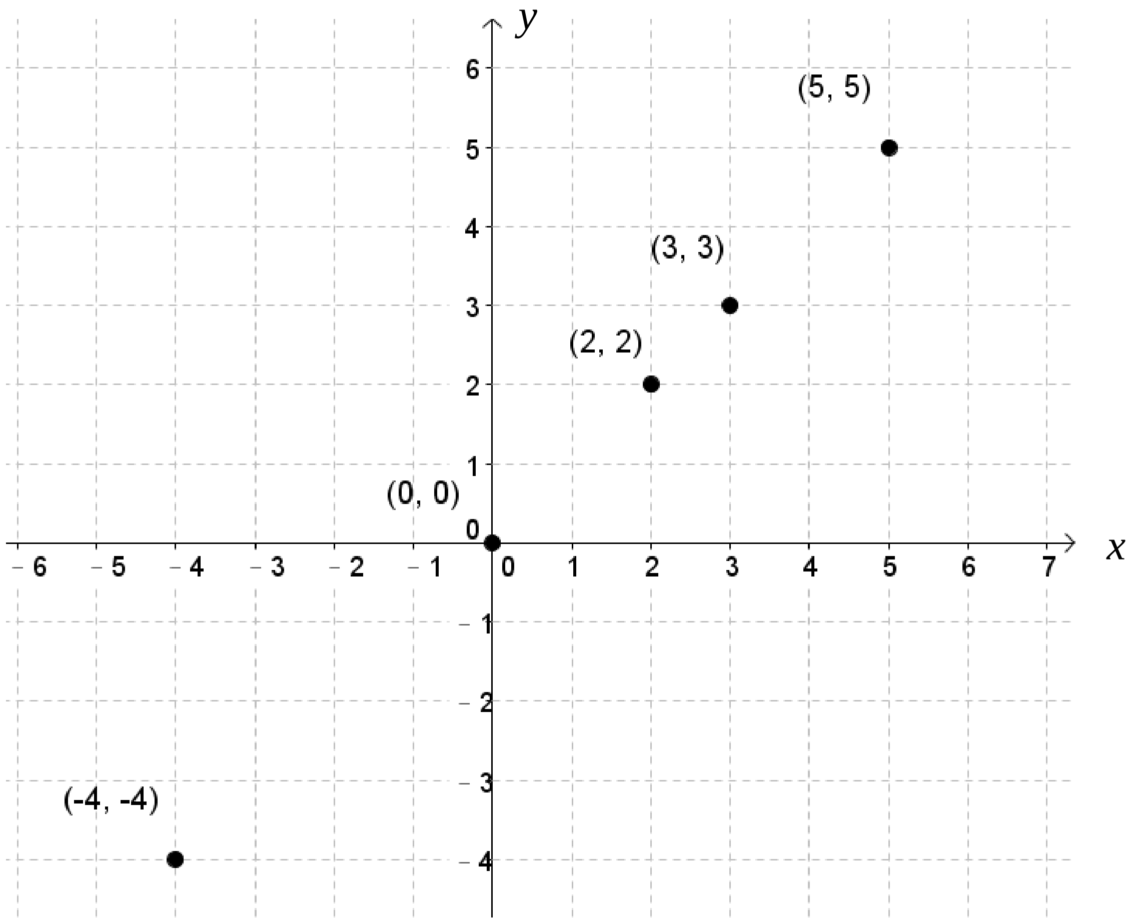


圖 4.2-1

若將圖 4.2-1 的點連接起來，會得到一條直線，如圖 4.2-2：

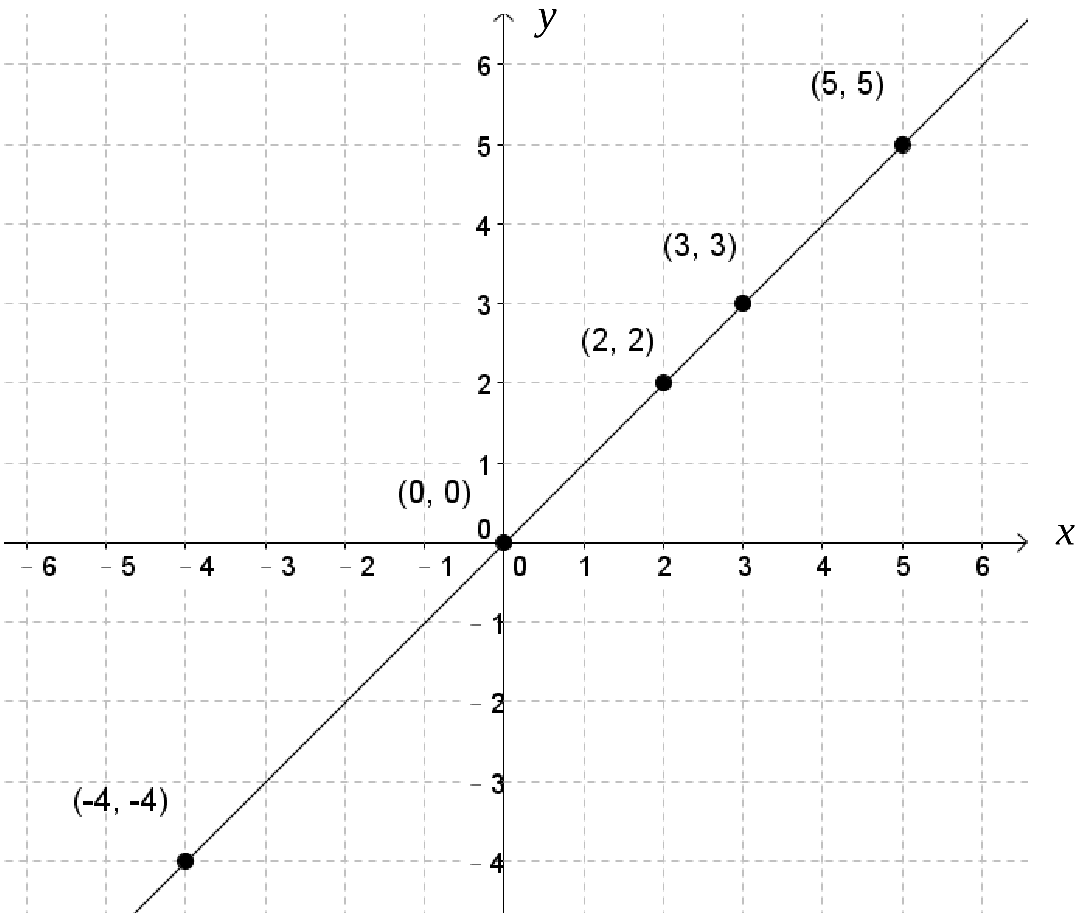


圖 4.2-2

事實上，二元一次方程式的圖形都是一條**直線**。

因為兩點可以決定一條直線，所以若我們想在座標平面畫出二元一次方程式的圖形，只需要找出二元一次方程式的兩組不同的解，標在座標平面上，再畫出過此兩點的直線即為此二元一次方程式的圖形。

例題 4.2.1-1

下表中的 x、y 值都是二元一次方程式 $x-y=2$ 的解，請完成下表，並在座標平面上標出各數對的位置。

x	5	3			
y			0	−2	−5

詳解：

方程式為 $x-y=2$

(1) $x=5$ 時，$(5)-y=2$，解得 $y=3$

(2) $x=3$ 時，$(3)-y=2$，解得 $y=1$

(3) $y=0$ 時，$x-(0)=2$，解得 $x=2$

(4) $y=-2$ 時，$x-(-2)=2$，解得 $x=0$

(5) $y=-5$ 時，$x-(-5)=2$，解得 $x=-3$

填入表格：

x	5	3	2	0	−3
y	3	1	0	−2	−5

標在座標平面：

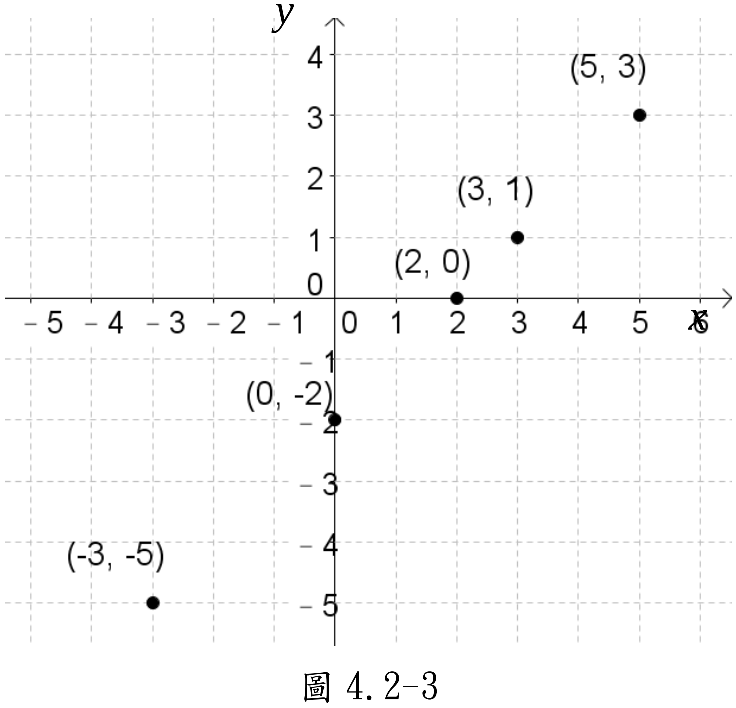
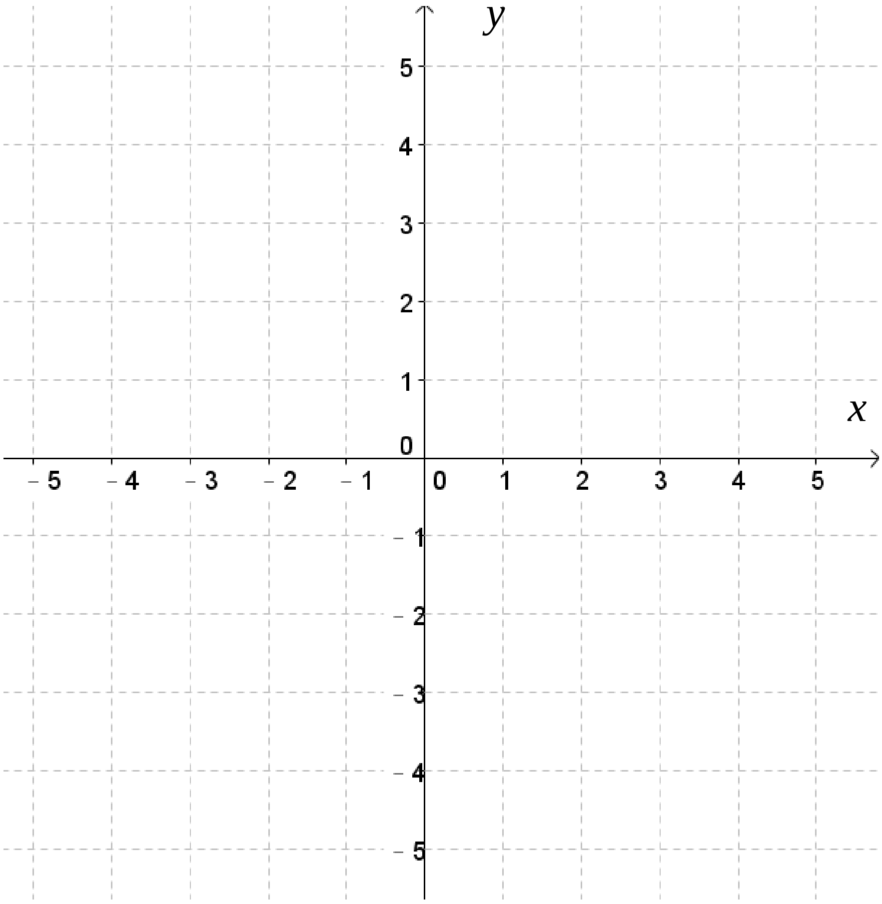


圖 4.2-3

【練習】**4.2.1-1**

下表中的 x、y 值都是二元一次方程式 $2x-y=1$ 的解，請完成下表，並在座標平面上標出各數對的位置。

x	3	1	0		
y				-3	-5



例題 4.2.1-2

在座標平面上畫出二元一次方程式$x-3y=3$的圖形。

詳解：

因為二元一次方程式的圖形是一條直線，所以我們只要找到方便計算的兩組解，標在座標平面上，再畫出過這兩點的直線即可。

將$x=0$代入$x-3y=3$，得到$(0)-3y=3$，解得$y=-1$。即$(0,-1)$為一解。
將$y=0$代入$x-3y=3$，得到$x-3\times(0)=3$，解得$x=3$。即$(3,0)$為一解。

將$(0,-1)$和$(3,0)$畫在座標平面上，並過此兩點做直線。

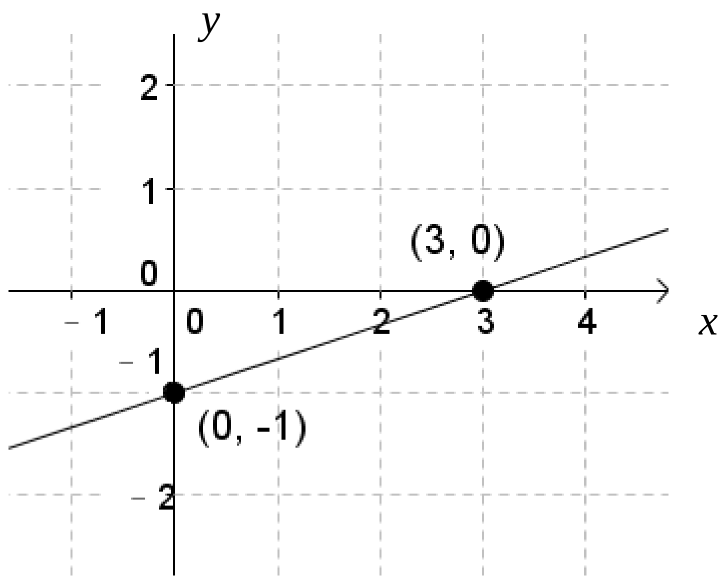
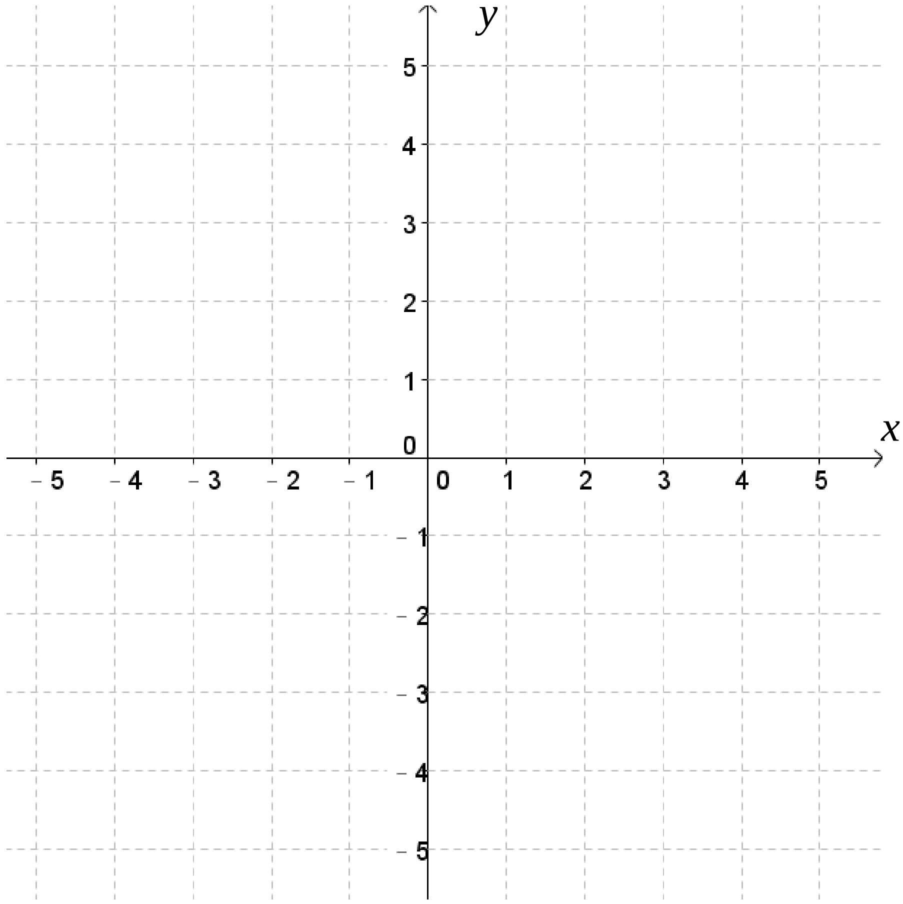


圖 4.2-4

【練習】**4.2.1-2**

在座標平面上畫出二元一次方程式 $x+y=5$ 的圖形。



例題 4.2.1-3

在座標平面上畫出二元一次方程式 $3x+2y=6$ 的圖形。

詳解：

將 $x=0$ 代入 $3x+2y=6$，得到 $3\times(0)+2y=6$，解得 $y=3$。即 $(0,3)$ 為一解。
將 $y=0$ 代入 $3x+2y=6$，得到 $3x+2\times(0)=6$，解得 $x=2$。即 $(2,0)$ 為一解。

將 $(0,3)$ 和 $(2,0)$ 畫在座標平面上，並過此兩點做直線。

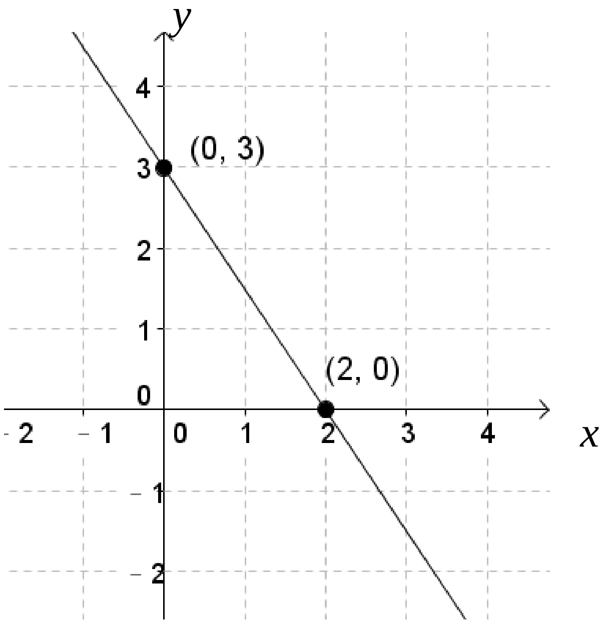
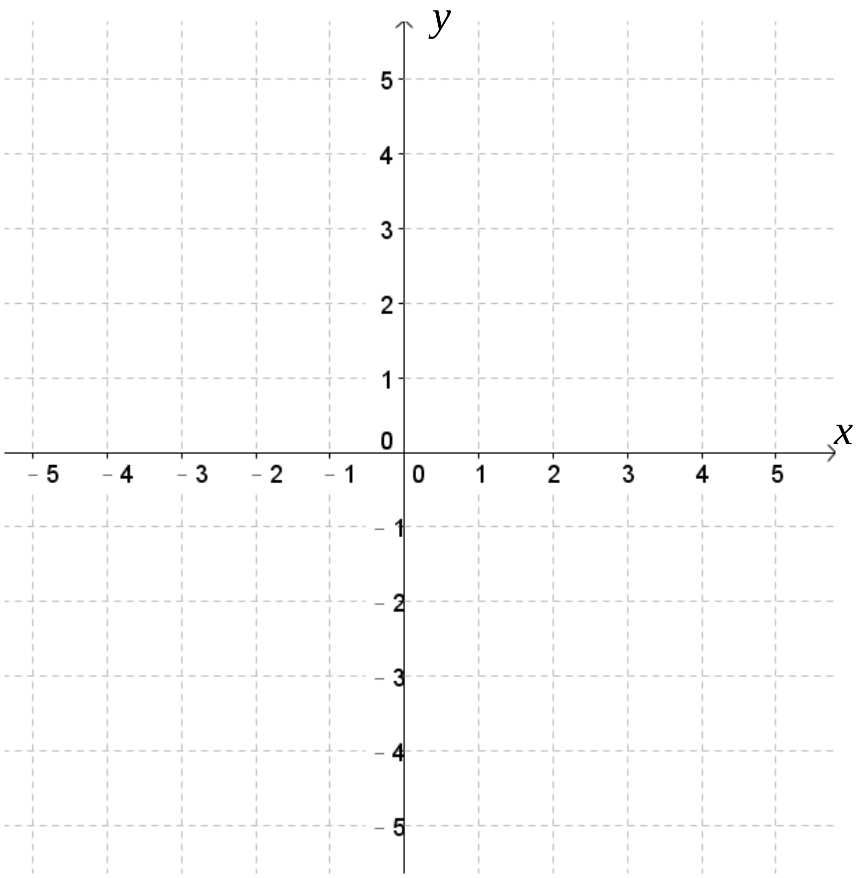


圖 4.2-5

【練習】**4.2.1-3**

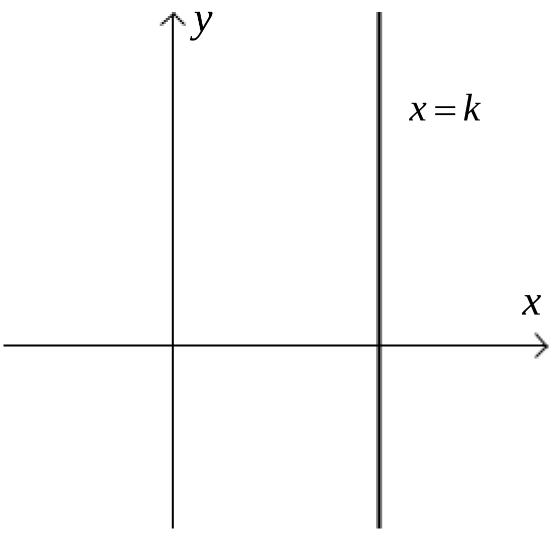
在座標平面上畫出二元一次方程式 $4x+3y=-12$ 的圖形。



瞭解了基本的二元一次方程式圖形後，我們再來看看幾個較特殊的方程式：

若方程式的形式為 $x=k$，則其圖形為垂直 x 軸或平行 y 軸的直線。

若方程式的形式為 $y=h$，則其圖形為平行 x 軸或垂直 y 軸的直線。



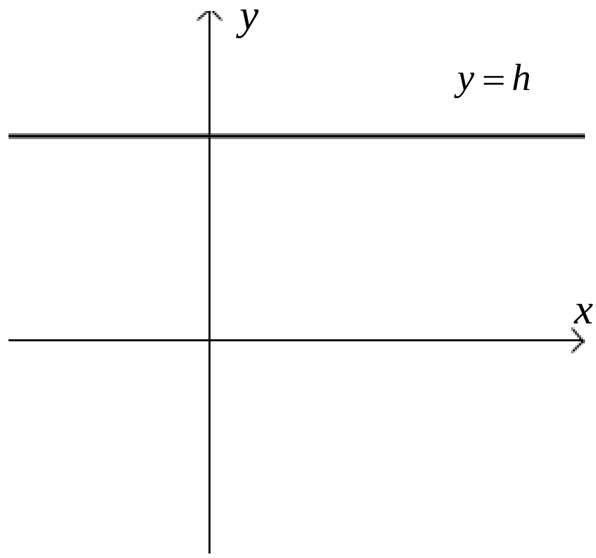


圖 4.2-6

若方程式的形式為 $ax \pm by = 0$，也就是常數項為 0。因為將 $(0,0)$ 代入可使等號成立 $(a \times 0 \pm b \times 0 = 0)$，可知此方程式圖形必通過原點。

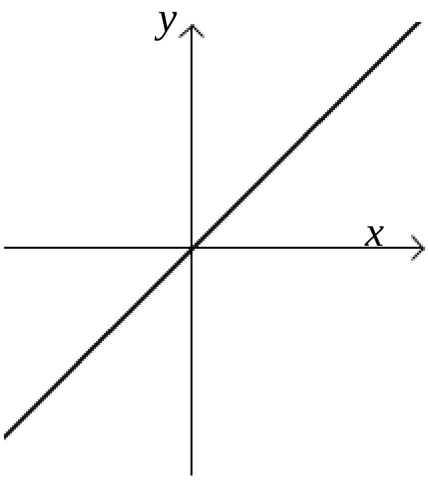


圖 4.2-7

例題 4.2.1-4

在座標平面上畫出二元一次方程式$x=3$的圖形。

詳解：

方程式為$x=3$，也就是其解的y座標為任意數，只要x座標為3即可。

因此像$(3,2)$、$(3,5)$、$(3,11)$、$(3,0)$、$(3,-8)$ 等全都是解。

我們取其中兩組解$(3,2)$ $(3,5)$，標在直角座標上畫出圖形。

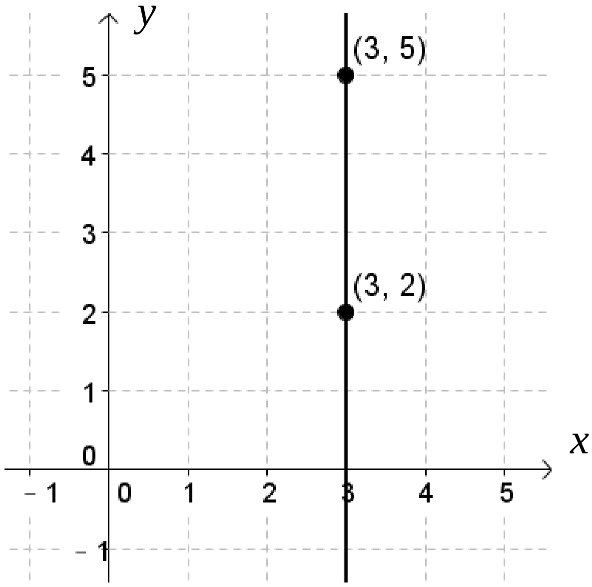
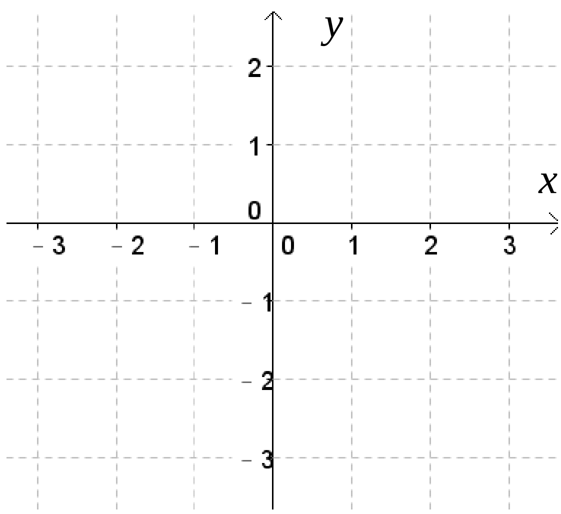


圖 4.2-8

【練習】4.2.1-4

在座標平面上畫出二元一次方程式$y=-2$的圖形。



例題 4.2.1-5

在座標平面上畫出下列圖形：

(1) 通過$(-1,-2)$且垂直 x 軸的直線。

(2) 通過$(3,2)$且平行 x 軸的直線。

詳解：

(1) 垂直 x 軸的直線為鉛垂線。

先在座標平面標出點$(-1,-2)$，

再畫出通過此點的鉛垂線。

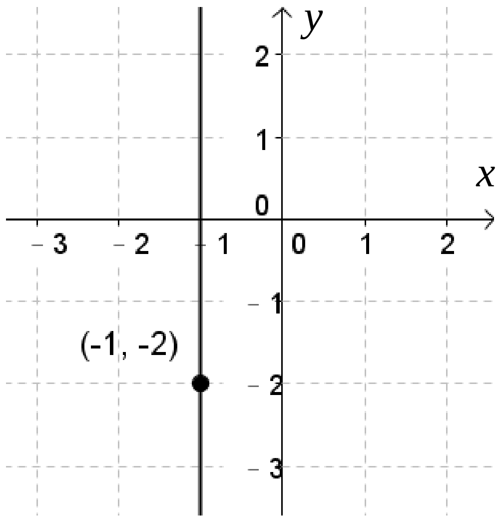


圖 4.2-9

(2) 平行 x 軸的直線為水平線。

先在座標平面標出點$(3,2)$，

再畫出通過此點的水平線。

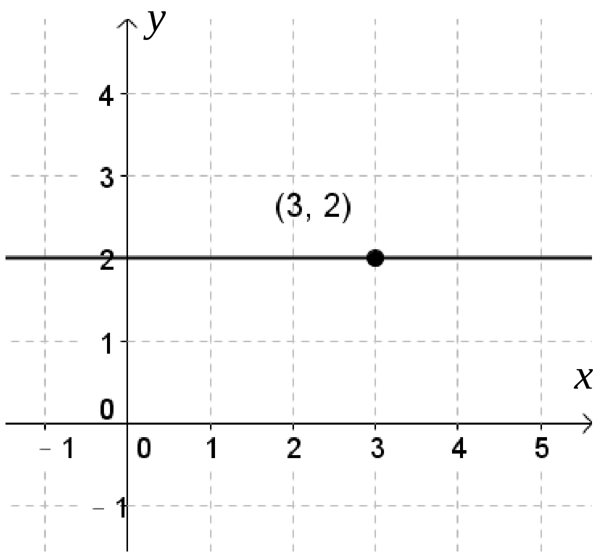


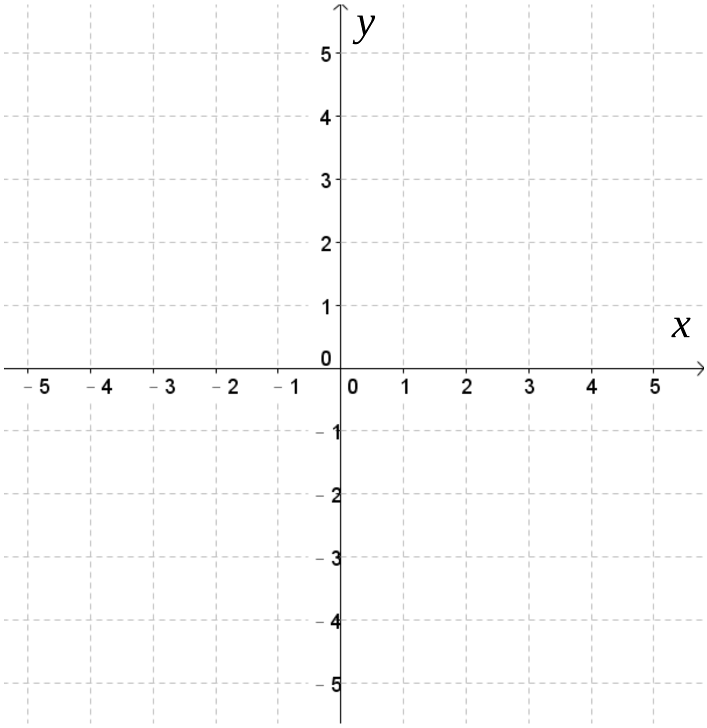
圖 4.2-10

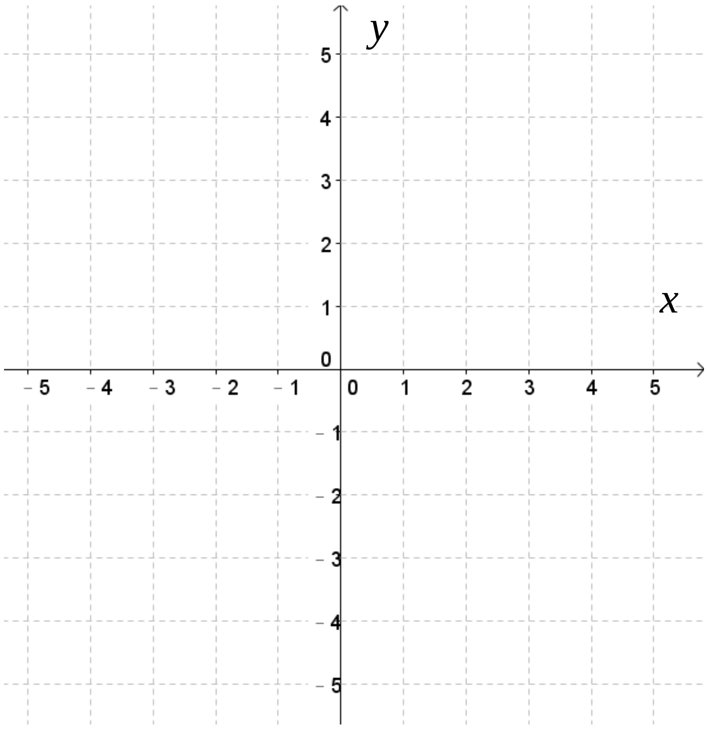
【練習】**4.2.1-5**

在座標平面上畫出下列圖形：

(1) 通過$(2,-2)$且垂直 y 軸的直線。

(2) 通過$(-3,2)$且平行 y 軸的直線。





例題 4.2.1-6

在座標平面上畫出二元一次方程式$2x-3y=0$的圖形。

詳解：

二元一次方程式常數項等於 0，圖形為通過原點的直線。

將$x=0$代入$2x-3y=0$，得到$2\times(0)-3y=0$，解得$y=3$。即$(0,0)$為一解。

將$x=3$代入$2x-3y=0$，得到$2\times(3)-3y=0$，解得$y=2$。即$(3,2)$為一解。

將$(0,0)$和$(3,2)$畫在座標平面上，並過此兩點做直線。

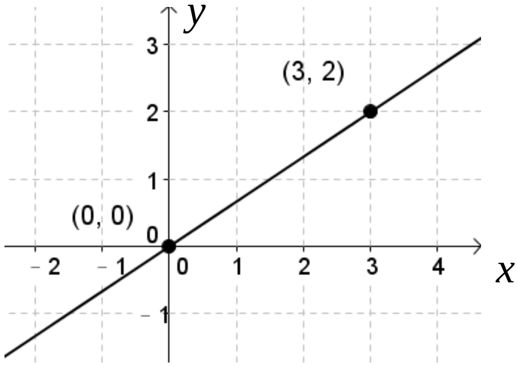
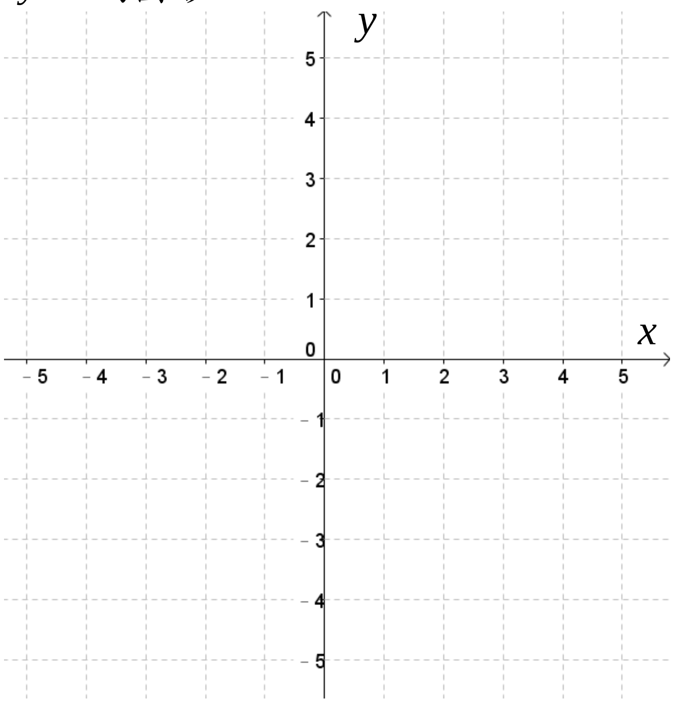


圖 4.2-11

【練習】**4.2.1-6**

在座標平面上畫出二元一次方程式$-4x+3y=0$的圖形。



座標平面上的直線方程式圖形，與 x 軸相交時，y 座標為 0。因此，我們若想求直線與 x 軸的交點，將 $y=0$ 代入方程式即可。同樣地，若想求直線與 y 座軸的交點，將 $x=0$ 代入方程式即可。

例題 4.2.1-7

座標平面上有一直線方程式 $2x+y=4$，求：

(1)此直線與 x 軸、y 軸的交點座標。

(2)此直線與兩軸圍成的三角形面積。

(3)此直線不通過哪個象限?

詳解：

(1) 將 $y=0$ 代入 $2x+y=4$，得到 $2x+(0)=4$，解得 $x=2$。

與 x 軸交點為 $(2,0)$。

將 $x=0$ 代入 $2x+y=4$，得到 $2\times(0)+y=4$，解得 $y=4$。

與 y 軸交點為 $(0,4)$。

(2) 如圖 4.2-12

直線 $2x+y=4$ 與兩軸圍成的三角形，

底為 2 （$(0,0)$ 到 $(2,0)$ 距離為 2）

高為 4 （$(0,0)$ 到 $(0,4)$ 距離為 4）

面積為 $2\times4\times\dfrac{1}{2}=4$（平方單位）

(3) 如圖 4.2-12，此直線不通過第三象限。

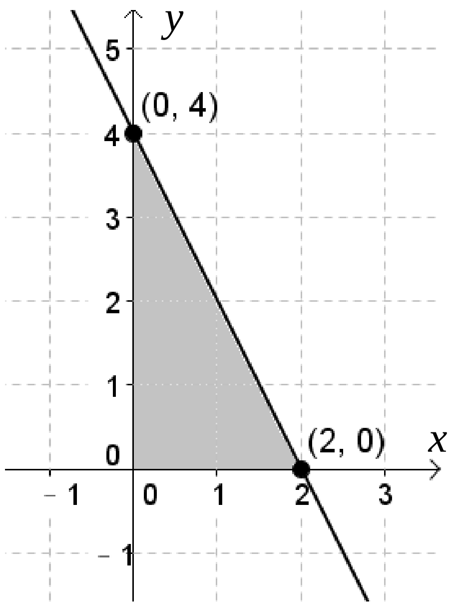


圖 4.2-12

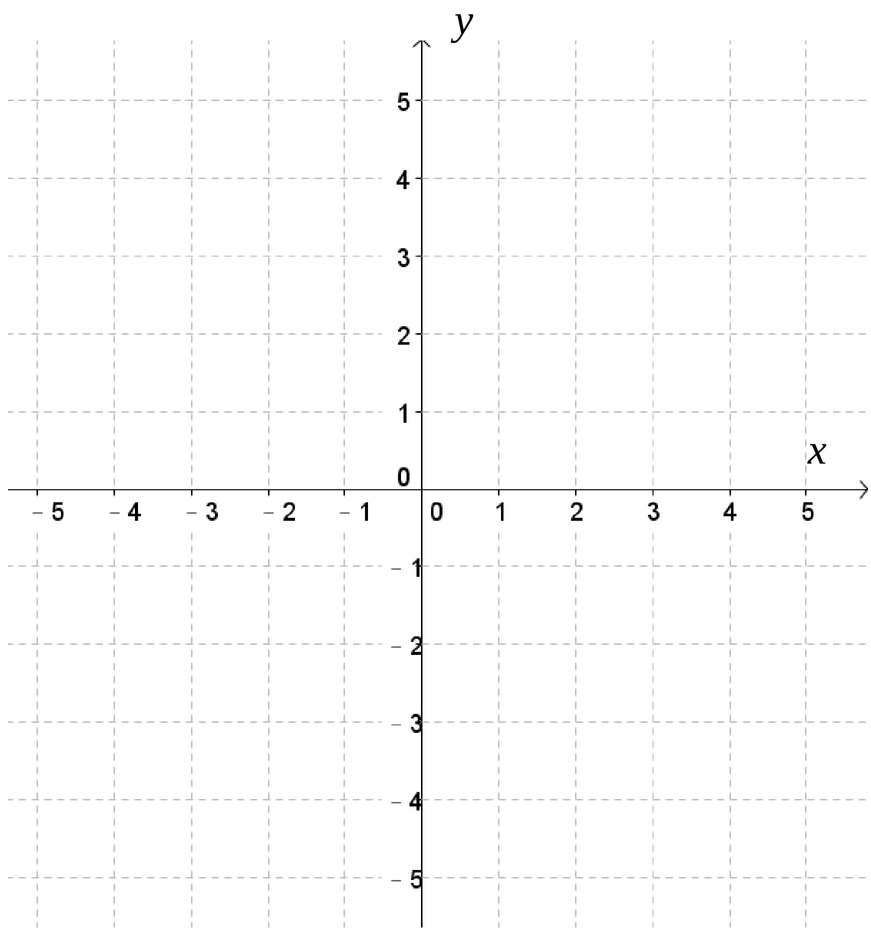
【練習】**4.2.1-7**

座標平面上有一直線方程式$5x-4y=20$，求：

(1)此直線與 x 軸、y 軸的交點座標。

(2)此直線與兩軸圍成的三角形面積。

(3)此直線不通過哪個象限?



4.2.2 節 求直線方程式

4.2.1 小節中我們學習了如何由二元一次方程式畫出圖形，在本節中，我們將反過來，學習如何利用平面上兩個點的座標找出二元一次方程式。

我們知道任何一個二元一次方程式都可以用 $ax+by=c$ 來表示，但其實我們也可以寫成 $y=ax+b$ 的形式。

例如：

	$3x+2y=9$		$-5x+2y=-4$
移項得	$2y=-3x+9$	移項得	$2y=5x-4$
	$y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{9}{2}$		$y=\dfrac{5}{2}x-2$

為什麼要寫成 $y=ax+b$ 的形式呢？

因為這麼一來，若是已知方程式通過哪些點，則未知數只有 a 、b 兩個。

我們可以用二元一次聯立方程式的解法來找出 a 、b 之值。

例如在座標平面上，若有直線通過 $(1,3)$ 、 $(-1,-1)$ 兩點，我們想將找出其方程式，可以先將方程式設為 $y=ax+b$ ，然後分別將兩點座標代入：

代入 $(1,3)$ $\rightarrow$ $3=a+b$ 化簡得 $a+b=3$

代入 $(-1,-1)$ $\rightarrow$ $-1=-a+b$ 化簡得 $-a+b=-1$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} a+b=3 & ......(1) \\ -a+b=-1 & ......(2) \end{cases}$$

由 $(1)+(2)$ 得 $2b=2$ ，解得 $b=1$

再將 $b=1$ 代入(1)，解得 $a=2$

於是我們知道了，通過 $(1,3)$ 、 $(-1,-1)$ 兩點的直線方程式 $y=ax+b$ ，就是 $y=2x+1$ 。

例題 4.2.2-1

求通過$(1,2)$和$(2,1)$的直線方程式。

詳解：

設直線方程式為$y=ax+b$，然後分別將兩點座標代入：

代入$(1,2)$：$2=a+b$　　化簡得$a+b=2$

代入$(2,1)$：$1=2a+b$　　化簡得$2a+b=1$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} a+b=2 & \text{......(1)} \\ 2a+b=1 & \text{......(2)} \end{cases}$$

由$(2)-(1)$得$a=-1$

再將$a=-1$代入(1)，解得$b=3$

直線方程式為$y=-x+3$

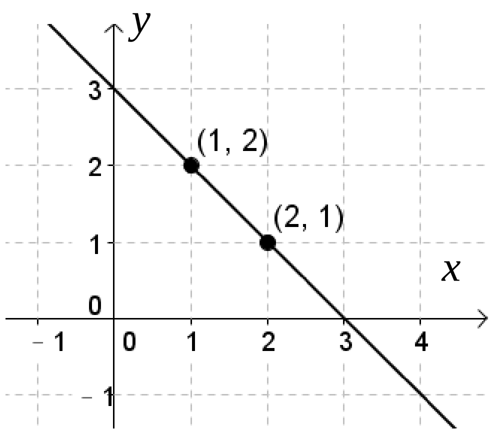
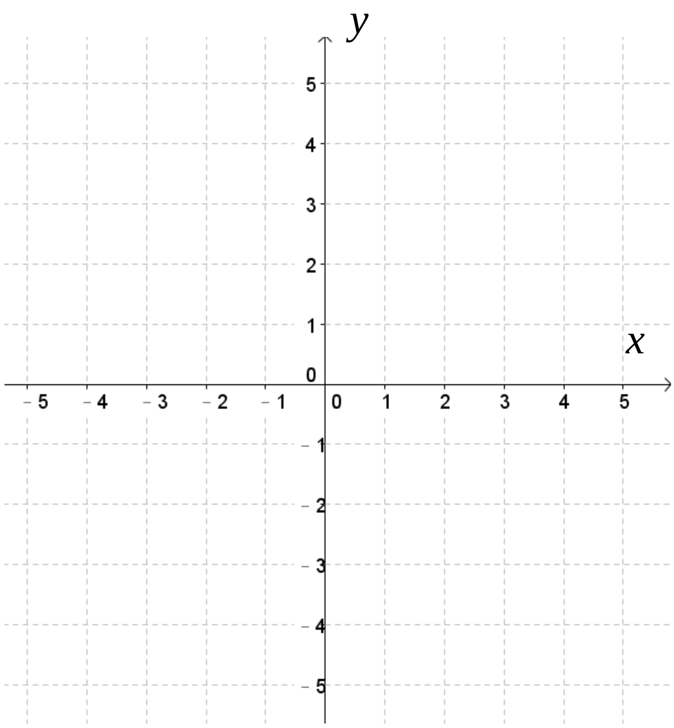


圖 4.2-13

【練習】4.2.2-1

求通過$(1,3)$和$(2,4)$的直線方程式。



例題 4.2.2-2

求通過$(1,4)$和$(2,3)$的直線方程式。

詳解：

設直線方程式為$y=ax+b$，然後分別將兩點座標代入：

代入$(1,4)$：$4=a+b$　　化簡得$a+b=4$

代入$(2,3)$：$3=2a+b$　　化簡得$2a+b=3$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} a+b=4 \quad ......(1) \\ 2a+b=3 \quad ......(2) \end{cases}$$

由$(2)-(1)$得$a=-1$

再將$a=-1$代入(1)，解得$b=5$

直線方程式為$y=-x+5$

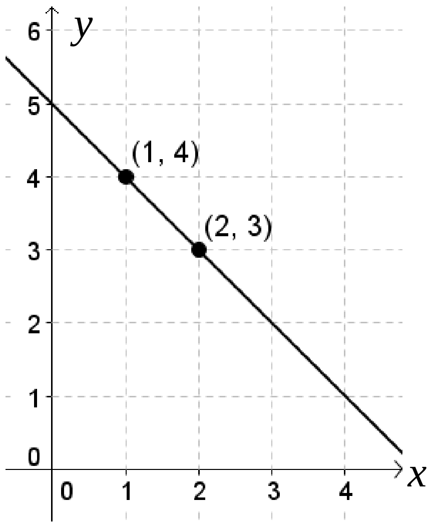
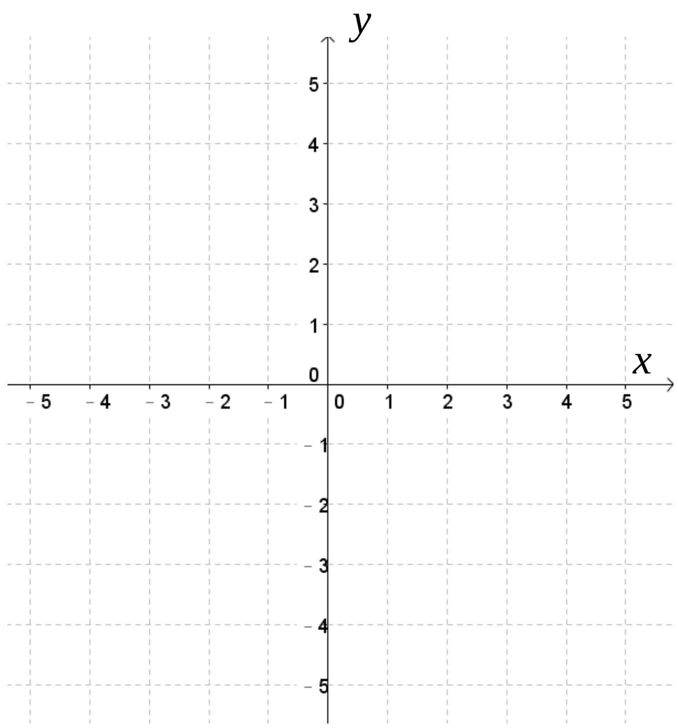


圖 4.2-14

【練習】4.2.2-2

求通過$(2,2)$和$(1,4)$的直線方程式。



例題 4.2.2-3

求通過 $(1,-1)$ 和 $(-2,2)$ 的直線方程式。

詳解：

設直線方程式為 $y=ax+b$，然後分別將兩點座標代入：

代入 $(1,-1)$ ： $-1=a+b$　化簡得 $a+b=-1$

代入 $(-2,2)$ ： $2=-2a+b$　　化簡得 $-2a+b=2$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} a+b=-1 & \text{......(1)} \\ -2a+b=2 & \text{......(2)} \end{cases}$$

由 $(1)-(2)$ 得 $a=-1$

再將 $a=-1$ 代入(1)，解得 $b=0$

直線方程式為 $y=-x$

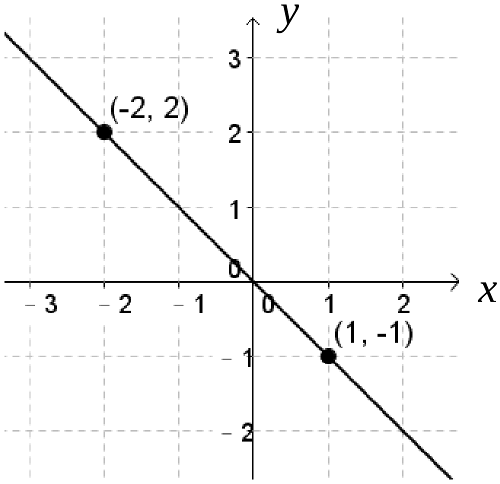
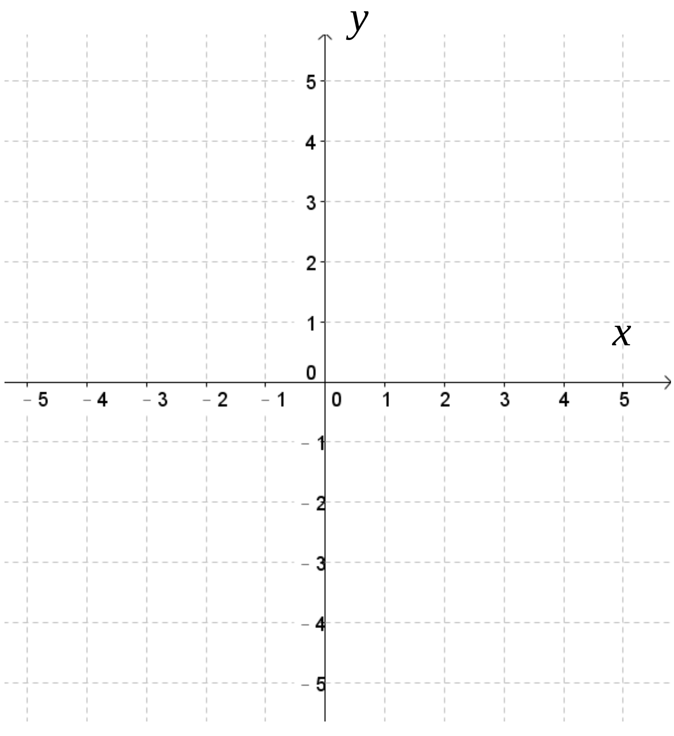


圖 4.2-14

【練習】4.2.2-3

求通過 $(1,1)$ 和 $(2,2)$ 的直線方程式。



例題 4.2.2-4

求通過 $(-1,-2)$ 和 $(0,3)$ 的直線方程式。

詳解：

設直線方程式為 $y=ax+b$，然後分別將兩點座標代入：

代入 $(-1,-2)$：$-2=-a+b$　化簡得 $-a+b=-2$

代入 $(0,3)$：$3=b$　化簡得 $b=3$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} -a+b=-2 & ......(1) \\ \quad b=3 & ......(2) \end{cases}$$

將(2)代入(1)得 $a=5$

直線方程式為 $y=5x+3$

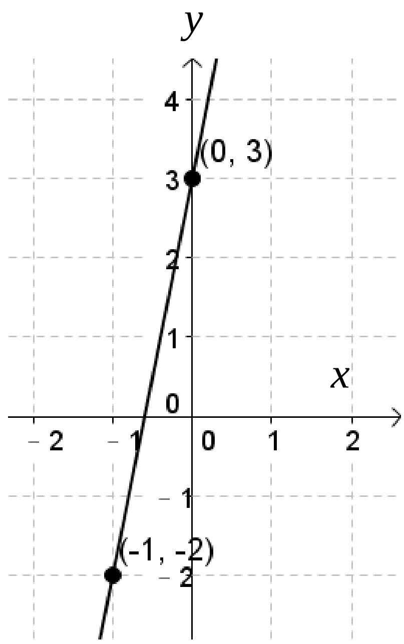
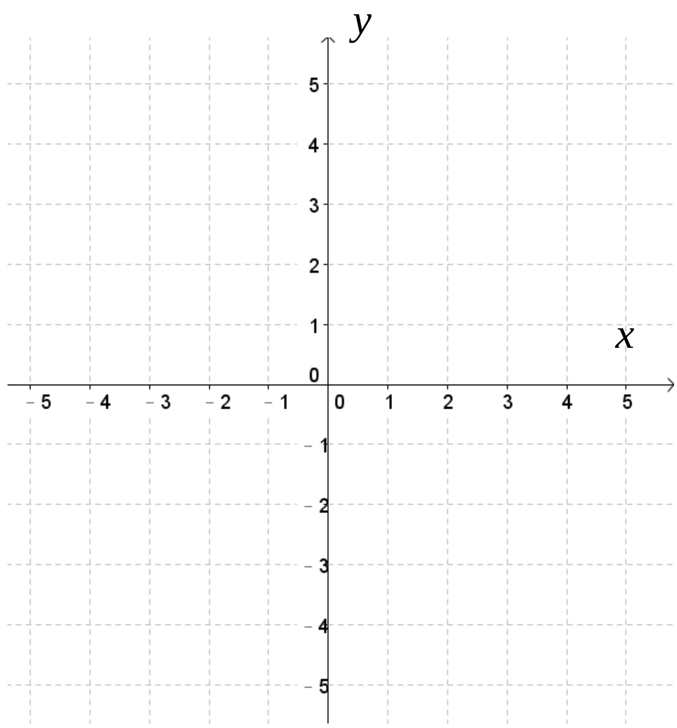


圖 4.2-16

【練習】4.2.2-4

求通過 $(0,1)$ 和 $(-1,2)$ 的直線方程式。



在 4.2.1 節中，我們學過平行或垂直座標軸的直線：

若方程式的形式為 $x=k$，則其圖形為垂直 x 軸或平行 y 軸的直線。

若方程式的形式為 $y=h$，則其圖形為平行 x 軸或垂直 y 軸的直線。

反過來說，若直線垂直 x 軸或平行 y 軸，則其方程式的形式為 $x=k$

若直線平行 x 軸或垂直 y 軸，則其方程式的形式為 $y=h$

這個觀念可以協助我們求出平行或垂直座標軸的直線方程式。

例如想求通過 $(1,2)$ 且平行 x 軸的直線方程式。

我們知道平行 x 軸的直線方程式形式是 $y=h$，而點 $(1,2)$ 的 y 座標為 2。

因此可以直接寫出直線方程式為 $y=2$。

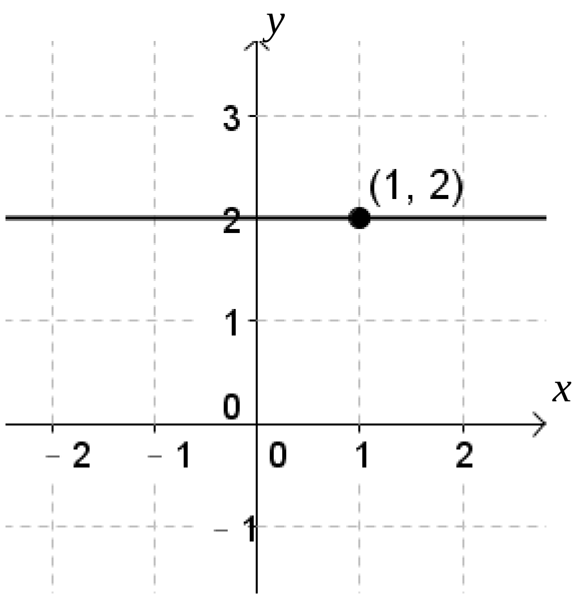


圖 4.2-17， $y=2$的圖形

例題 4.2.2-5

求通過$(-1,-2)$且垂直y軸的直線方程式。

詳解：

垂直y軸的直線方程式，形式為$y=h$

$(-1,-2)$的y座標為-2

可將直線方程式寫為：$y=-2$

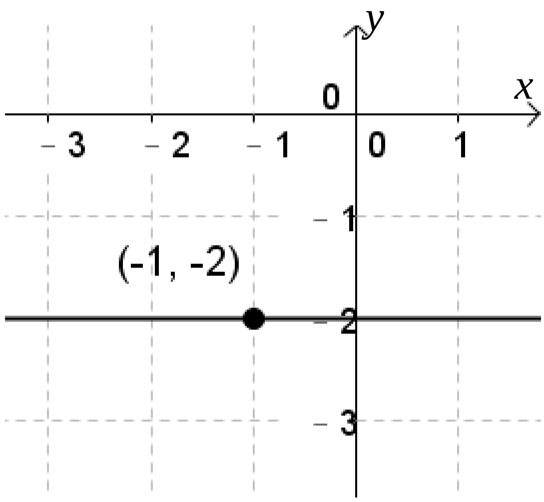
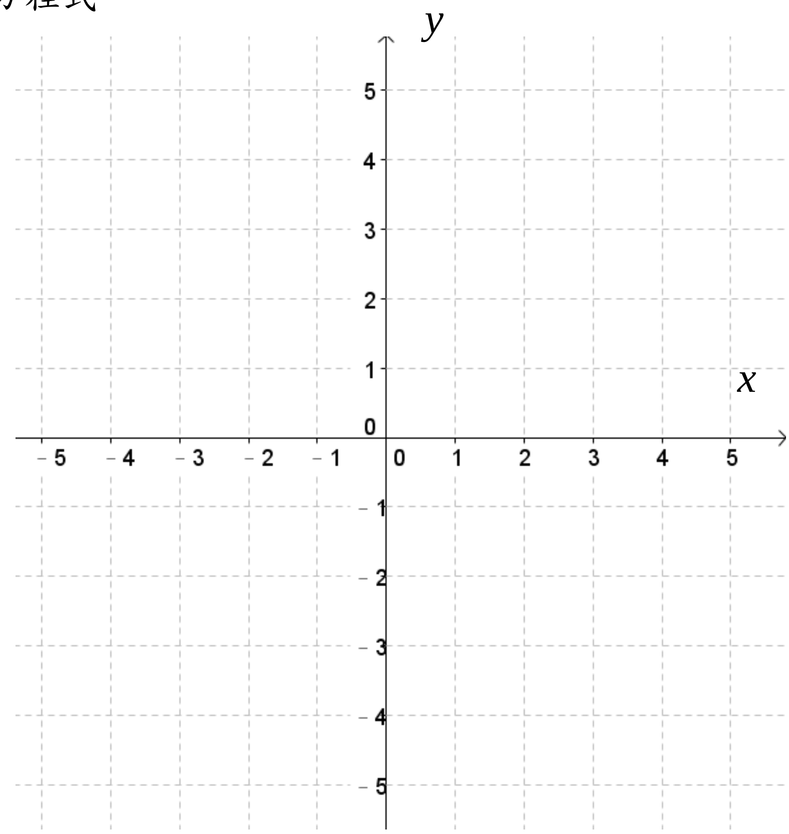


圖 4.2-18

【練習】4.2.2-5

求通過$(3,-2)$且平行y軸的直線方程式。



我們知道座標平面上任兩點，一定可以找到通過此兩點的直線，但是三點就不一定了。若是三點在同一條直線上，我們稱為三點共線。

如圖 4.2-19(a)，三點共線，但在圖 4.2-19(*b*)中，三點就沒有共線了。

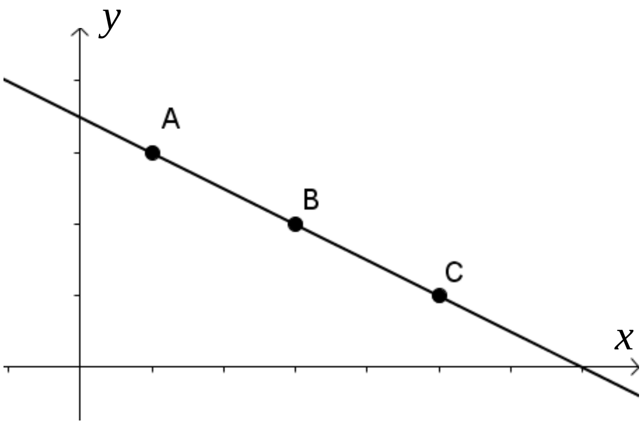


圖 4.2-19(a)

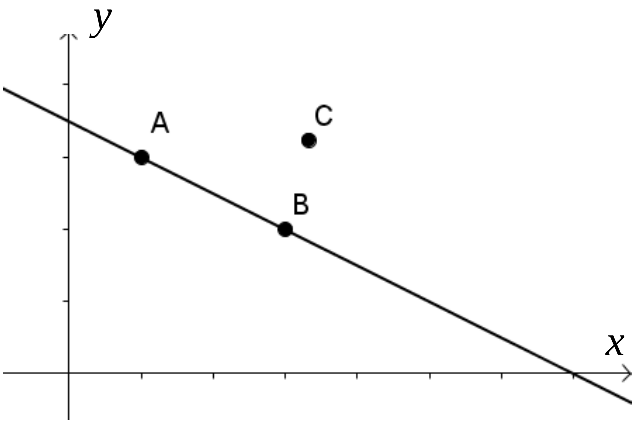


圖 4.2-19(b)

如何決定三點是否共線呢？我們只要隨意拿兩點，求得通過此兩點的直線方程式，然後將第三點代入這個方程式，如能滿足此方程式，則三點共線，如不滿足，就不共線。

例題 4.2.2-6

座標平面上有三點 $A(1,5)$、$B(0,3)$、$C(-2,-1)$，請判斷此三點是否共線。

詳解：

判斷三點是否共線：先找兩點求出直線方程式，再看第三點是否在直線上。

我們先求出通過 $A(1,5)$、$B(0,3)$ 兩點的直線

設直線方程式為 $y=ax+b$，然後分別將 $A(1,5)$、$B(0,3)$ 兩點代入：

代入 $(1,5)$：$5=a+b$　　化簡得 $a+b=5$

代入 $(0,3)$：$3=b$　　化簡得 $b=3$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} a+b=5 & \text{......(1)} \\ b=3 & \text{......(2)} \end{cases}$$

將(2)代入(1)得 $a=2$

通過 A$(1,5)$、B$(0,3)$ 兩點的直線方程式為 $y=2x+3$

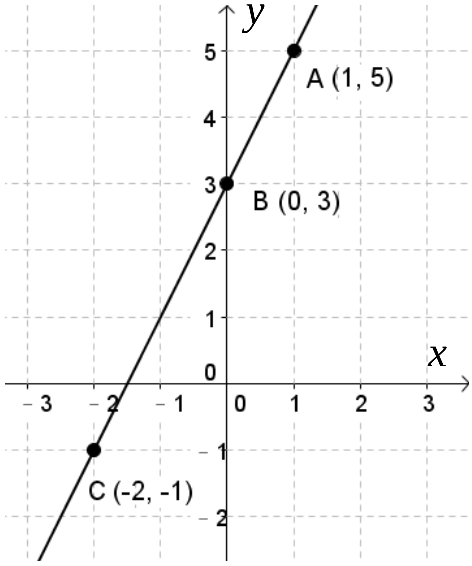


圖 4.2-20

接著我們再看看 C$(-2,-1)$ 是否在 $y=2x+3$ 上

將 $(-2,-1)$ 代入 $y=2x+3$

左式：$y=-1$

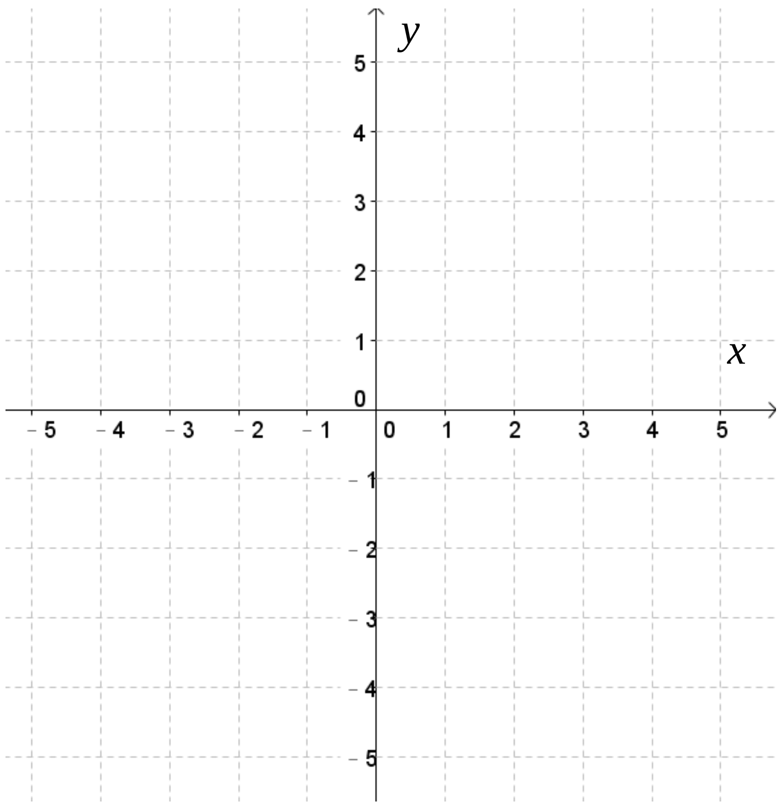
右式：$2x+3=2\times(-2)+3=-1$

左式＝右式，可知 C$(-2,-1)$ 在 $y=2x+3$ 上

因此 A、B、C 三點共線

【練習】4.2.2-6

座標平面上有三點 A$(3,-5)$、B$(0,-3)$、C$(-3,-1)$，請判斷此三點是否共線。



例題 4.2.2-7

座標平面上有三點 A$(2,-2)$、B$(0,-1)$、C$(-2,1)$，請判斷此三點是否共線。

詳解：

判斷三點是否共線：先找兩點求出直線方程式，再看第三點是否在直線上。

我們先求出通過 A$(2,-2)$、B$(0,-1)$ 兩點的直線

設直線方程式為 $y=ax+b$，然後分別將 A$(2,-2)$、B$(0,-1)$ 兩點代入：

代入 $(2,-2)$：$-2=2a+b$　　化簡得 $2a+b=-2$

代入 $(0,-1)$：$-1=b$　　化簡得 $b=-1$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} 2a+b=-2 & ......(1) \\ b=-1 & ......(2) \end{cases}$$

將(2)代入(1)得 $a=-\dfrac{1}{2}$

通過 A$(1,5)$、B$(0,3)$ 兩點的直線方程式為 $y=-\dfrac{1}{2}x-1$

接著我們再看看 C$(-2,1)$ 是否在 $y=-\dfrac{1}{2}x-1$ 上

將 $(-2,1)$ 代入 $y=-\dfrac{1}{2}x-1$

左式：$y=1$

右式：$-\dfrac{1}{2}x-1=-\dfrac{1}{2}\times(-2)-1=0$

左式≠右式，可知 C$(-2,1)$ **不在** $y=-\dfrac{1}{2}x-1$ 上

因此 A、B、C 三點**不共線**

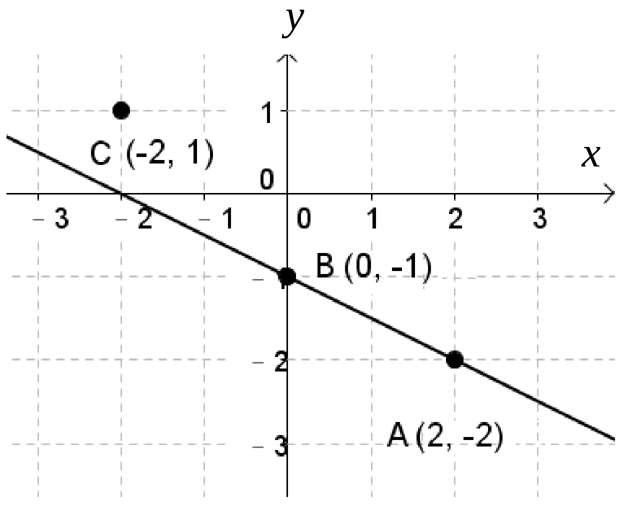
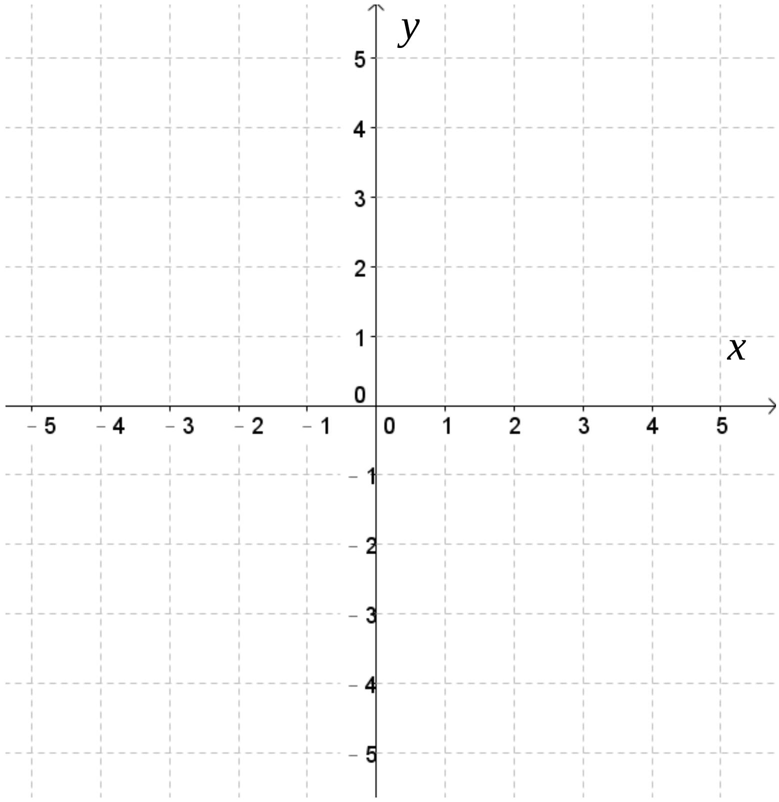


圖 4.2-21

【練習】**4.2.2-7**

座標平面上有三點 $A(3,1)$、$B(1,0)$、$C(-2,-3)$，請判斷此三點是否共線。



例題 4.2.2-8

已知座標平面上三點 $A(-1,-9)$、$B(5,15)$、$C(c,2c+1)$，在同一直線上，試求：

(1)此直線方程式

(2)c 之值

詳解：

題目已說明 A、B、C 三點共線，我們可以先用 A、B 兩點求出直線方程式，再將 C 點座標代入直線方程式，找出 c 之值。

設直線方程式為 $y=ax+b$，然後分別將 $A(-1,-9)$、$B(5,15)$ 兩點代入：

代入 $(-1,-9)$：$-9=-a+b$　　　化簡得 $a-b=9$

代入 $(5,15)$：$15=5a+b$　　　化簡得 $5a+b=15$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} a-b=9 & \text{......(1)} \\ 5a+b=15 & \text{......(2)} \end{cases}$$

利用加減消去法，(1)＋(2)得到：

$a+5a=9+15 \Rightarrow 6a=24 \Rightarrow a=4$

將 $a=4$ 代入(1)得到：

$4-b=9 \Rightarrow b=-5$

通過 A$(-1,-9)$、B$(5,15)$ 兩點的直線方程式為 $y=4x-5$

將 C$(c,2c+1)$ 代入 $y=4x-5$

$(2c+1)=4\times(c)-5$

$2c+1=4c-5$

$2c=6$

$c=3$

因此本題三點共線的直線方程式為 $y=4x-5$，c 之值為 3。

【練習】4.2.2-8

已知座標平面上三點 A$(3,4)$、B$(-1,-4)$、C$(-k,-k+1)$，在同一直線上，試求：

(1)此直線方程式

(2)k 之值

4.2.3 節 二元一次聯立方程式的圖解

我們已經知道了二元一次方程式的解，在座標平面上的圖形是一條直線。那麼若將兩個二元一次方程式一起畫在座標平面上，其交點有什麼意義呢？本小節我們將搭配第三章的二元一次聯立方程式來做介紹。

例題 4.2.3-1

在同一座標平面上畫出下列聯立方程式的圖形，並求聯立方程式的解：

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=0 \end{cases}$$

詳解：

將各方程式分別找出兩解，再連線畫出直線圖形

$x+y=4$：

將 $x=0$ 代入，得 $y=4$，圖形通過 $(0,4)$

將 $y=0$ 代入，得 $x=4$，圖形通過 $(4,0)$

$x-y=0$：

將 $x=0$ 代入，得 $y=0$，圖形通過 $(0,0)$

將 $y=3$ 代入，得 $x=3$，圖形通過 $(3,3)$

畫出圖形，如圖 4.2-22

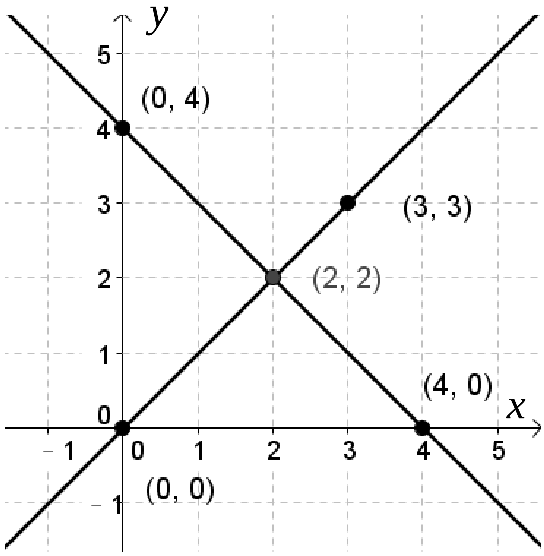


圖 4.2-22

由圖形可以看出，兩直線**交於一點**，且交點為 $(2,2)$

接著我們來解聯立方程式 $\begin{cases} x+y=4 \text{ ......(1)} \\ x-y=0 \text{ ......(2)} \end{cases}$

利用加減消去法，(1)＋(2)得 $2x=4$，化簡得 $x=2$

將 $x=2$ 代入(1)，得 $y=2$。此聯立方程式之解為 $(2,2)$，與圖形交點相同。

由本題我們可以知道，**若兩直線方程式交於一點，則交點為其聯立方程式的解**。

例題 4.2.3-2

在同一座標平面上畫出下列聯立方程式的圖形，並求聯立方程式的解：

$$\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$$

詳解：

將各方程式分別找出兩解，再連線畫出直線圖形

$x+y=4$：

將 $x=0$ 代入，得 $y=4$，圖形通過 $(0,4)$

將 $y=0$ 代入，得 $x=4$，圖形通過 $(4,0)$

$2x+2y=2$：

將 $x=0$ 代入，得 $y=1$，圖形通過 $(0,1)$

將 $y=0$ 代入，得 $x=1$，圖形通過 $(1,0)$

畫出圖形，如圖 4.2-23

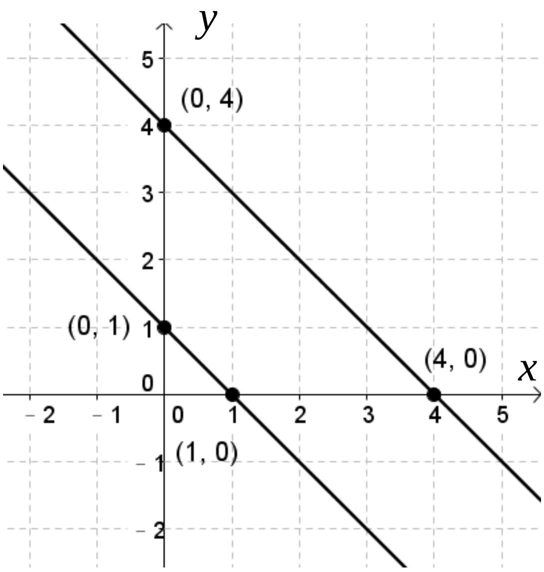


圖 4.2-23

由圖形可以看出，兩直線**互相平行**，沒有交點

接著我們來解聯立方程式 $\begin{cases} x+y=4 & ......(1) \\ 2x+2y=2 & ......(2) \end{cases}$

$(2)\div 2$ 得：$x+y=1......(3)$

利用加減消去法，$(1)-(3)$ 得 $0=3$，不合理，表示此方程組無解。

由本題我們可以知道，**若兩直線方程式平行，則其聯立方程式無解**。

例題 4.2.3-3

在同一座標平面上畫出下列聯立方程式的圖形，並求聯立方程式的解：

$$\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+2y=8 \end{cases}$$

詳解：

將各方程式分別找出兩解，再連線畫出直線圖形

$x+y=4$：

將 $x=0$ 代入，得 $y=4$，圖形通過 $(0,4)$

將 $y=0$ 代入，得 $x=4$，圖形通過 $(4,0)$

$2x+2y=8$：

將 $x=0$ 代入，得 $y=4$，圖形通過 $(0,4)$

將 $y=0$ 代入，得 $x=4$，圖形通過 $(4,0)$

畫出圖形，如圖 4.2-24

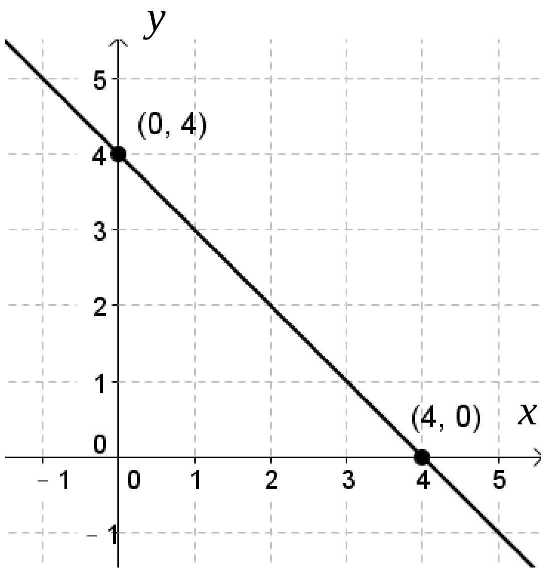


圖 4.2-24

由圖形可以看出，兩直線**重合**

接著我們來解聯立方程式 $\begin{cases} x+y=4 & ......(1) \\ 2x+2y=8 & ......(2) \end{cases}$

(2)÷2 得：$x+y=4......(3)$

利用加減消去法，(1)－(3)得 $0=0$，表示此方程組有**無限多組解**。

由本題我們可以知道，**若兩直線方程式重合，則其聯立方程式有無限多組解**。

由上面三個例題可以知道，兩條直線方程式在直角座標上的圖形有交於一點、平行、重合三種狀況，而我們在第三章所解的聯立方程式，都是交於一點的情形，所以可以找出一組解。

要如何判斷方程組究竟是交於一點、平行、重合哪種情況呢？

假設有聯立方程式$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，我們可以從係數關係來判斷解的種類：

1. 若 $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ ，則此方程組**恰有一組解**
2. 若 $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ ，則此方程組為**無解**
3. 若 $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ ，則此方程組為**無限多組解**

我們來用前面三個例題驗證看看：

例題 4.2.3-1　聯立方程式是$\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=0 \end{cases}$

$a_1=1$、$b_1=1$、$c_1=4$、$a_2=1$、$b_2=-1$、$c_2=0$

$\dfrac{1}{1} \neq \dfrac{1}{-1}$，可確認此方程組**恰有一組解**

例題 4.2.3-2　聯立方程式是$\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$

$a_1=1$、$b_1=1$、$c_1=4$、$a_2=2$、$b_2=2$、$c_2=2$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \neq \dfrac{4}{2}$ ，可確認此方程組**無解**

例題 4.2.3-3　聯立方程式是$\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+2y=8 \end{cases}$

$a_1=1$、$b_1=1$、$c_1=4$、$a_2=2$、$b_2=2$、$c_2=8$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{8}$ ，可確認此方程組**有無限多組解**

二元一次聯立方程式的圖形結論：

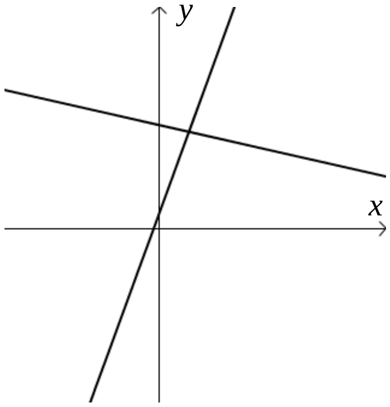
在座標平面上，兩個二元一次方程式的圖形為兩條直線。

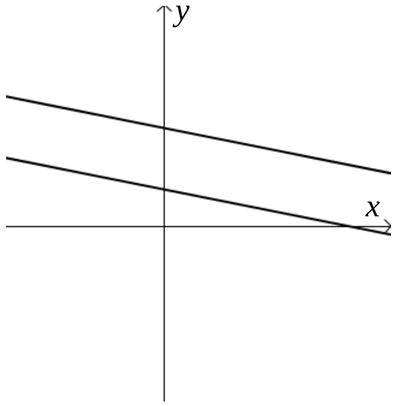
(1) 若兩條直線交於一點，則直線的交點就是聯立方程式的解。

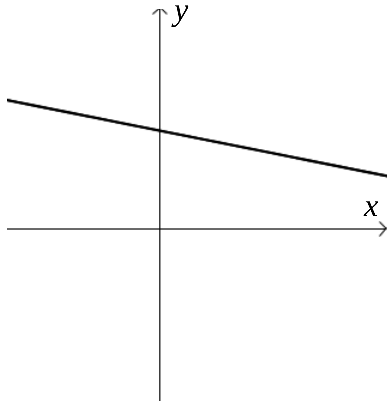
(2) 若兩條直線平行，因為沒有交點，所以聯立方程式無解。

(3) 若兩條直線重合，則有無數個交點，所以聯立方程式有無限多解。

兩條直線相交的情形：







(a)兩線交於一點 (b)兩線平行 (c)兩線重疊

圖 4.2-25

聯立方程式 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 解的種類與條件：

條件	圖形	解的個數
$\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$	兩直線相交於一點	恰有一組解
$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$	兩直線平行	無解
$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$	兩直線重合	無限多組解

例題 4.2.3-4

判斷二元一次聯立方程式$\begin{cases}3x-y=4\\3x+y=2\end{cases}$解的種類，並在座標平面上畫出圖形。

詳解：

$\frac{3}{3}\neq\frac{-1}{1}$，因此解的種類為"恰有一組解"

將各方程式分別找出兩解，再連線畫出直線圖形

$3x-y=4$：

將$x=0$代入，得$y=-4$，圖形通過$(0,-4)$

將$x=1$代入，得$y=-1$，圖形通過$(1,-1)$

$3x+y=2$：

將$x=0$代入，得$y=2$，圖形通過$(0,2)$

將$x=2$代入，得$y=-4$，圖形通過$(2,-4)$

畫出圖形，如圖 4.2-26。

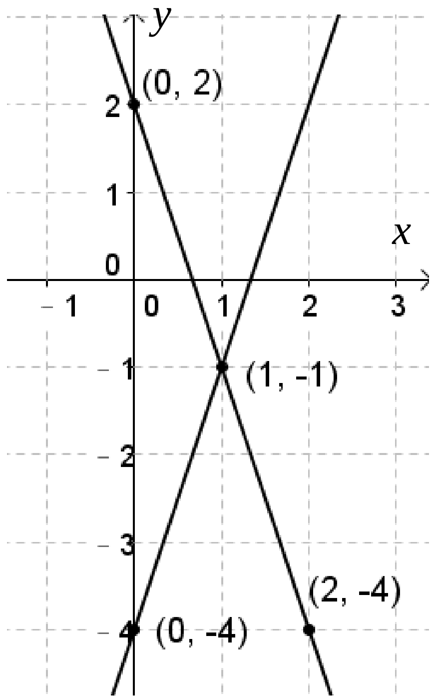
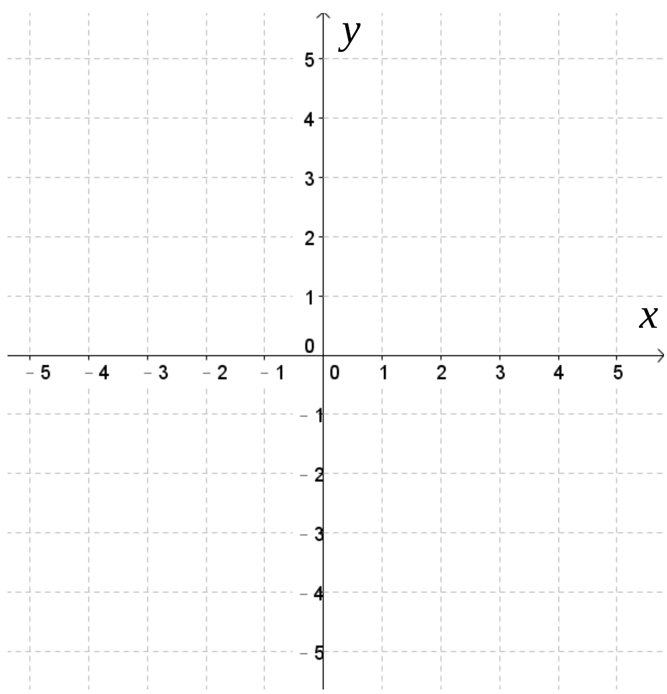


圖 4.2-26

【練習】4.2.3-4

判斷二元一次聯立方程式$\begin{cases}-x-2y=5\\x-2y=3\end{cases}$解的種類，並在座標平面上畫出圖形。



例題 4.2.3-5

判斷二元一次聯立方程式$\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x-4y=4 \end{cases}$解的種類，並在座標平面上畫出圖形。

詳解：

$\dfrac{1}{2}=\dfrac{-2}{-4}$，$\dfrac{-2}{-4}\neq\dfrac{1}{4}$，因此解的種類為"無解"

將各方程式分別找出兩解，再連線畫出直線圖形

$x-2y=1$：

將$x=3$代入，得$y=1$，圖形通過$(3,1)$

將$y=0$代入，得$x=1$，圖形通過$(1,0)$

$2x-4y=4$：

將$x=0$代入，得$y=-1$，圖形通過$(0,-1)$

將$y=0$代入，得$x=2$，圖形通過$(2,0)$

畫出圖形，如圖 4.2-27。

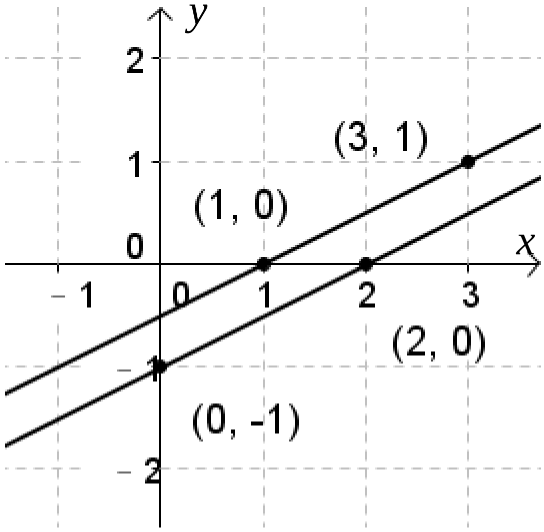
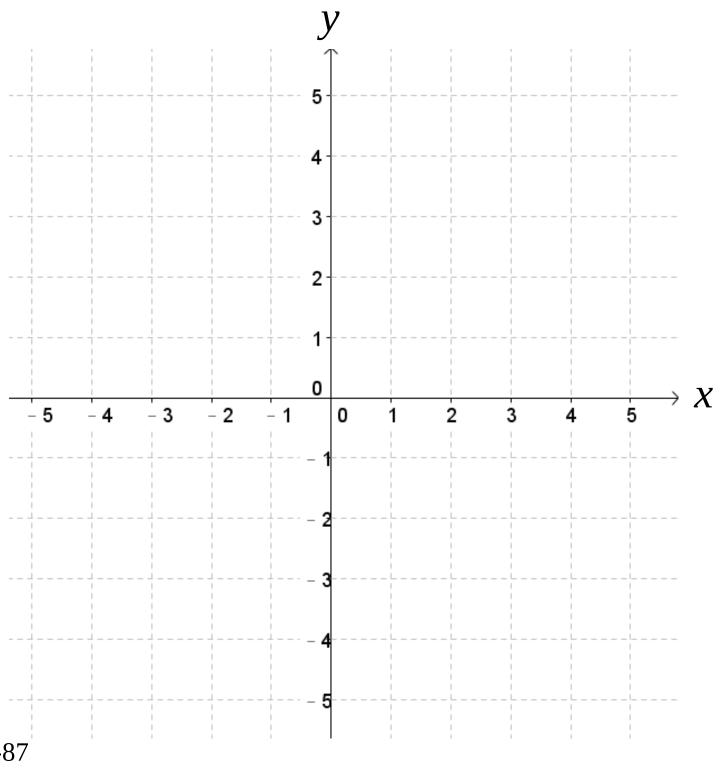


圖 4.2-27

【練習】4.2.3-5

判斷二元一次聯立方程式$\begin{cases} -5x+2y=10 \\ 5x-2y=0 \end{cases}$解的種類，並在座標平面上畫出圖形。



例題 4.2.3-6

判斷二元一次聯立方程式$\begin{cases} x-2y=1 \\ -x+2y=-1 \end{cases}$解的種類，並在座標平面上畫出圖形。

詳解：

$\dfrac{1}{-1}=\dfrac{-2}{2}$，$\dfrac{-2}{2}=\dfrac{1}{-1}$，因此解的種類為"無限多組解"

將各方程式分別找出兩解，再連線畫出直線圖形

$x-2y=1$：

將 $x=3$ 代入，得 $y=1$，圖形通過 $(3,1)$

將 $y=0$ 代入，得 $x=1$，圖形通過 $(0,1)$

$-x+2y=-1$：

將 $x=3$ 代入，得 $y=1$，圖形通過 $(3,1)$

將 $y=0$ 代入，得 $x=1$，圖形通過 $(0,1)$

畫出圖形，如圖 4.2-28。

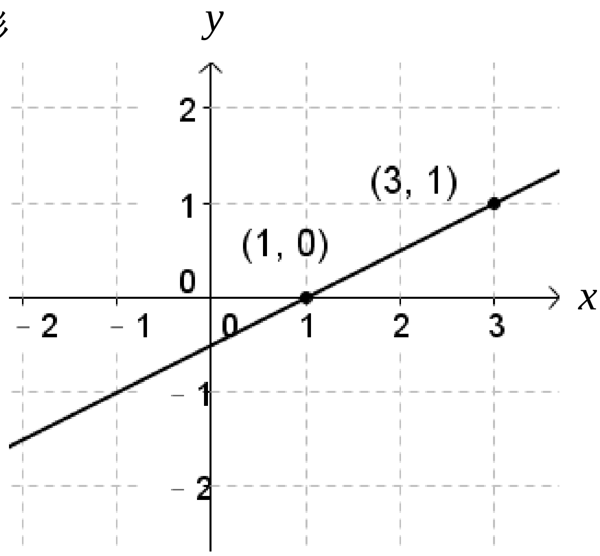
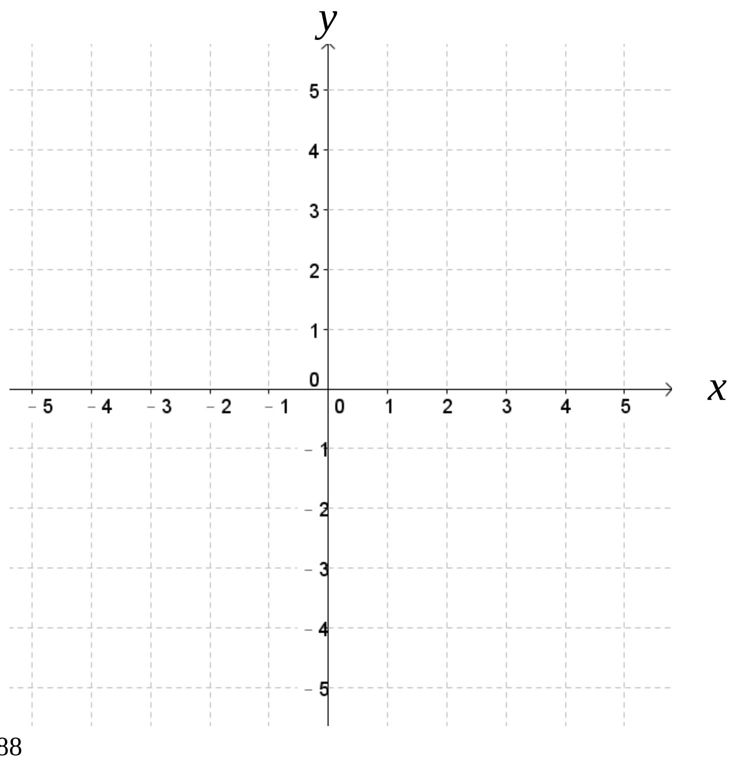


圖 4.2-28

【練習】4.2.3-6

判斷二元一次聯立方程式$\begin{cases} -5x+2y=10 \\ 5x-2y=-10 \end{cases}$解的種類，並在座標平面上畫出圖形。



4.2.4 節　直線方程式的移動

若座標平面上的一條直線，往上移動 3 個單位，那麼方程式會有什麼變化呢？本小節將討論這類直線在座標平面上移動的問題。

在學習直線方程式的移動之前，我們要先瞭解兩條平行的直線間會有什麼關係。

前一小節我們已經學到，若兩條直線 $a_1x+b_1y=c_1$ 與 $a_2x+b_2y=c_2$ 互相平行，

那麼係數關係為：$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$

因為 x 與 y 的係數比值相同，因此我們也可以將 x 與 y 的係數化成相同的數，

兩條平行直線可寫成：$ax+by=c_1$ 與 $ax+by=c_2$（$c_1\neq c_2$）

例如例題 4.2.3-5 中兩條平行直線的方程式是 $\begin{cases} x-2y=1 & ....(1) \\ 2x-4y=4 & ....(2) \end{cases}$

我們將(2)式除以 2，可以得到 $x-2y=2....(3)$

如此(1)與(3)中 x、y 的係數便是相同的。

因為兩條平行直線只有常數項是不同的，因此若我們想找出某條與 $x-2y=1$ 平行的直線，可以將所求直線設成 $x-2y=k$，接著再利用題目條件找出 k 值。

例題 4.2.4-1

找出在座標平面上與直線方程式$3x-4y=12$平行，且通過點$(2,1)$的直線方程式。

詳解：

與$3x-4y=12$平行的直線，可以設成$3x-4y=k$

因為通過點$(2,1)$，因此將$(2,1)$代入可使等式成立。

將$(2,1)$代入$3x-4y=k$：

$3\times(2)-4\times(1)=k$

$6-4=k$

$2=k$

$k=2$

得直線方程式為$3x-4y=2$

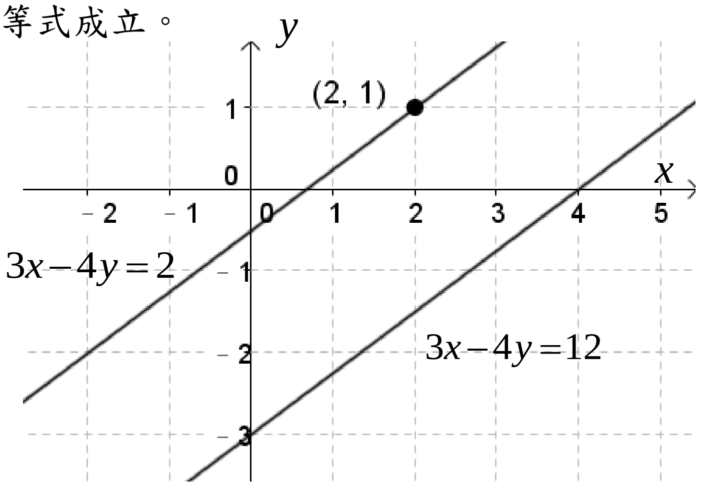
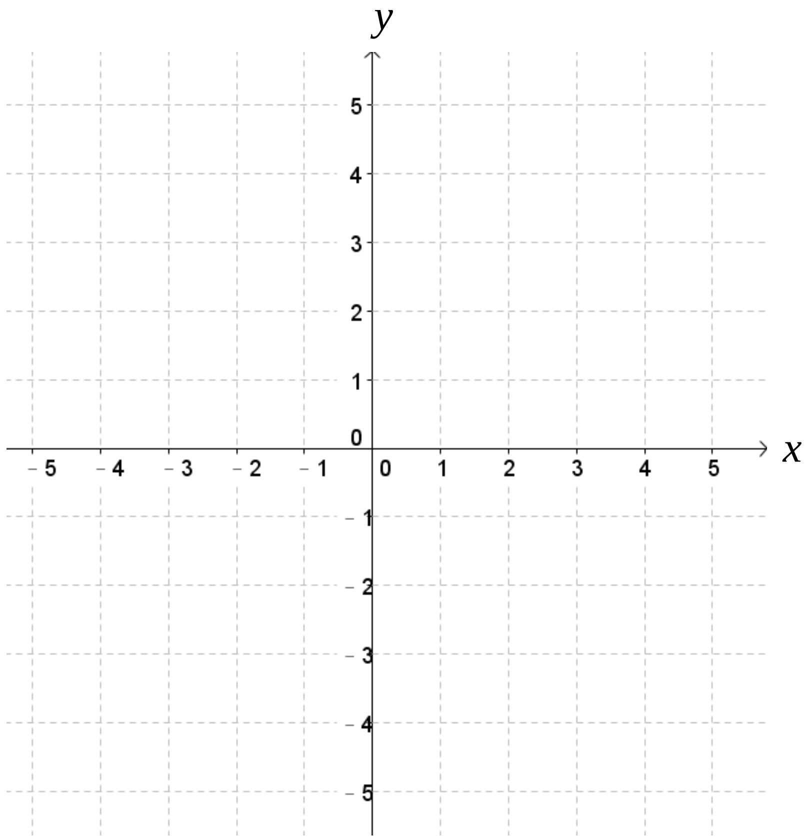


圖 4.2-29

【練習】4.2.4-1

找出在座標平面上與直線方程式$2x-3y=6$平行，且通過點$(1,2)$的直線方程式。



例題 4.2.4-2

找出在座標平面上與直線方程式 $x+4y=-8$ 平行，且通過點 $(1,1)$ 的直線方程式。

詳解：

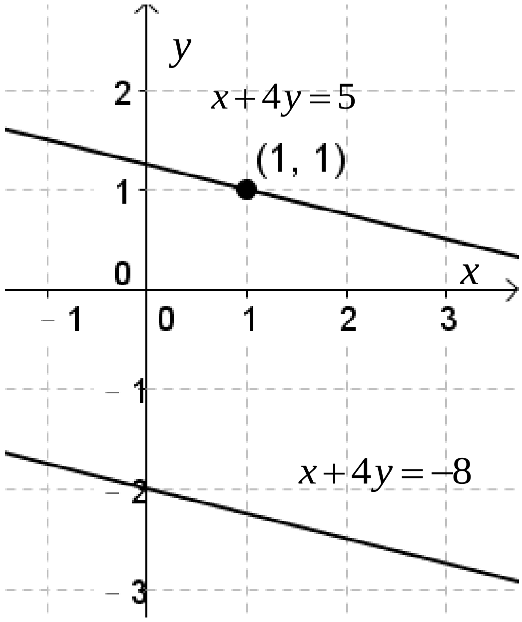


圖 4.2-30

與 $x+4y=-8$ 平行的直線，可以設成 $x+4y=k$

因為通過點 $(1,1)$，因此將 $(1,1)$ 代入可使等式成立。

將 $(1,1)$ 代入 $x+4y=k$ ：

$(1)+4\times(1)=k$

$1+4=k$

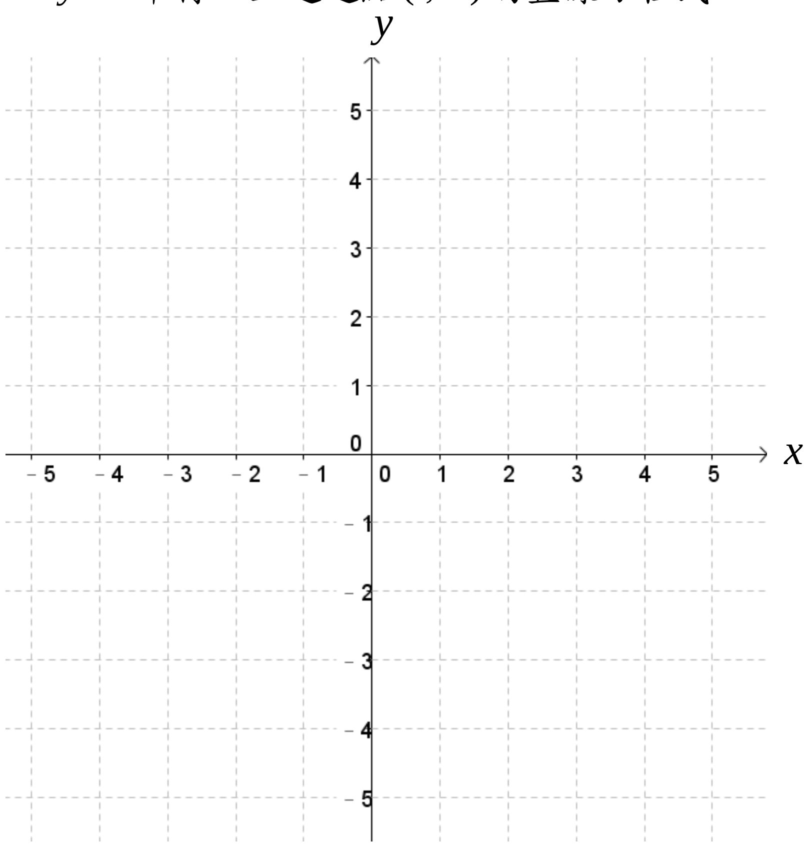
$5=k$

$k=5$

得直線方程式為 $x+4y=5$

【練習】4.2.4-2

找出在座標平面上與直線方程式 $4x+y=8$ 平行，且通過點 $(1,-1)$ 的直線方程式。



例題 4.2.4-3

找出在座標平面上與直線方程式$y=4$平行，且通過點$(1,3)$的直線方程式。

詳解：

與$y=4$平行的直線，可以設成$y=k$

因為通過點$(1,3)$，因此將$(1,3)$代入可使等式成立。

將$(1,3)$代入$y=k$：

$(3)=k$

$k=3$

得直線方程式為$y=3$

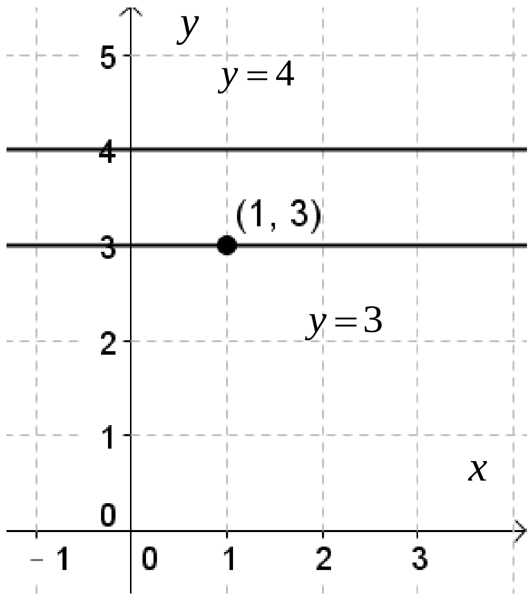
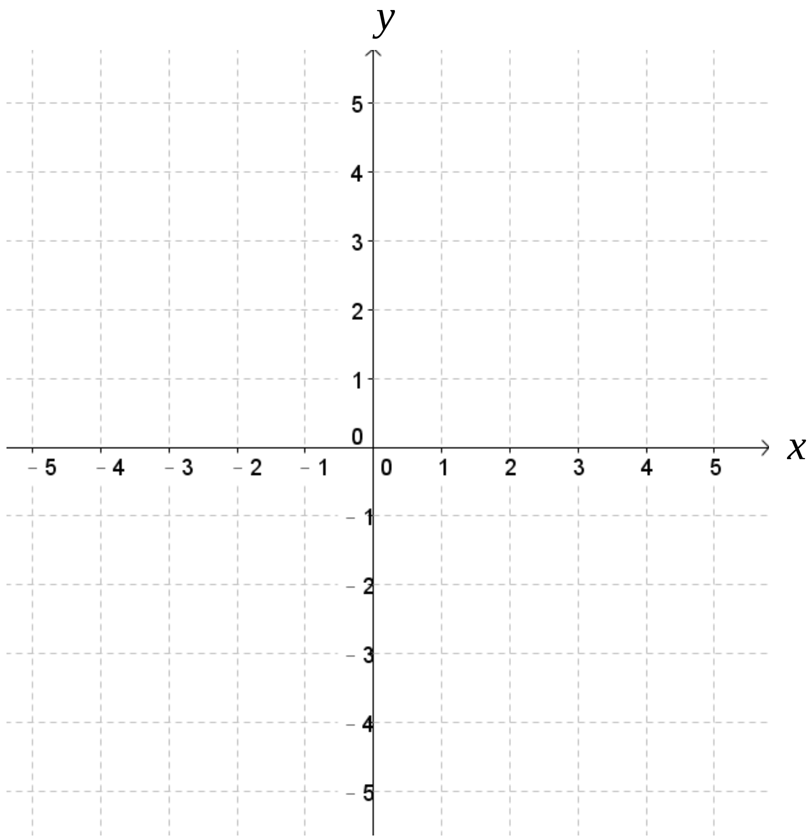


圖 4.2-31

【練習】4.2.4-3

找出在座標平面上與直線方程式$x=4$平行，且通過點$(2,3)$的直線方程式。



例題 4.2.4-4

找出在座標平面上與直線方程式$y=2x+1$平行，且通過點$(1,5)$的直線方程式。

詳解：

本題直線方程式為$y=2x+1$

我們可以將平行的直線方程式設成$y=2x+k$

不需要移項設成$ax+by=c$的形式

（因為平行的直線只要求常數項即可）

通過點$(1,5)$，將$(1,5)$代入$y=2x+k$來求出k。

$(5)=2\times(1)+k$：

$5=2+k$

$3=k$

$k=3$

得直線方程式為$y=2x+3$

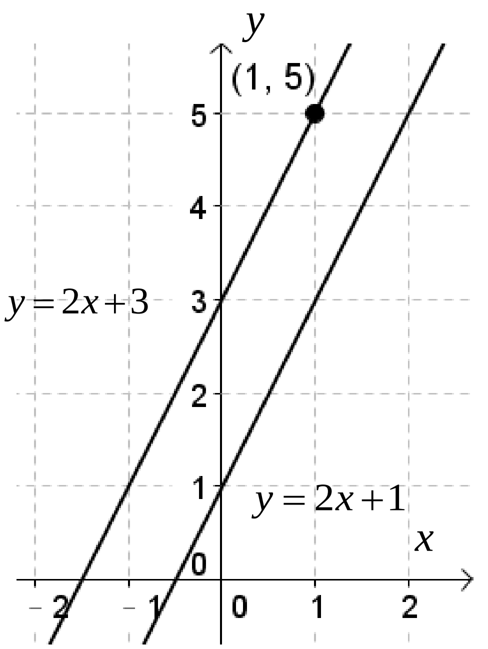
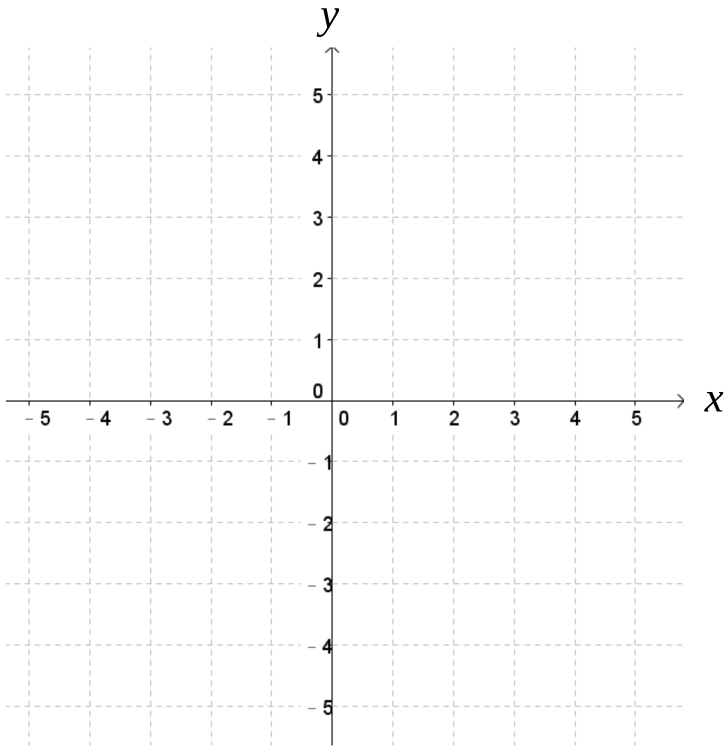


圖 4.2-32

【練習】4.2.4-4

找出在座標平面上與直線方程式$y=3x-1$平行，且通過點$(0,2)$的直線方程式。



從前面的題目中，我們已經瞭解了如何找出平行的直線方程式，接下來便可以正式做直線**移動**的題目。

※本書中我們僅討論水平與垂直的**移動**。

我們先用圖形來看看直線的**移動**，例如有直線方程式 $y = x$ ，我們將此直線往上**移動** 2 個單位，如圖 4.2-33。因為圖形不會旋轉，所以**移動**後的直線仍與原直線**平行**。

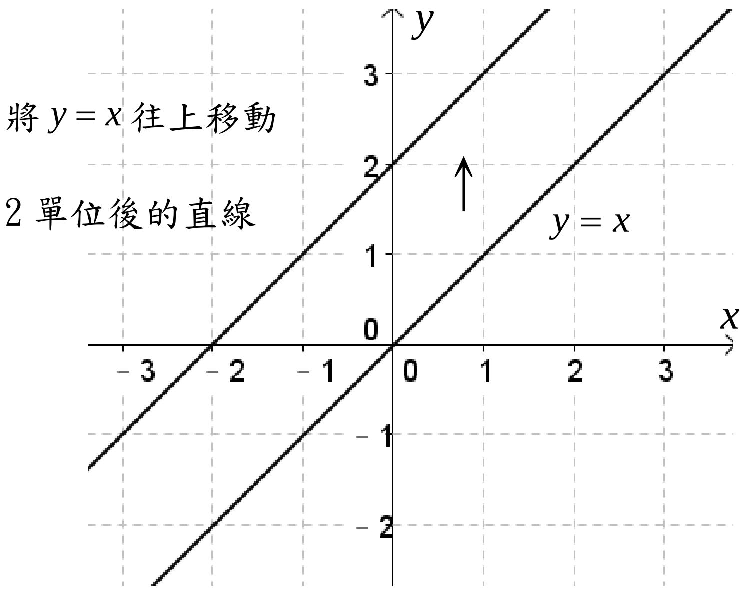


圖 4.2-33

往上**移動** 2 個單位的直線方程式要如何求出來呢？我們可以先設法找到直線上任一點，接著就能用前面學過的平行直線方程式觀念來求出。

我們隨意找一個 $y=x$ 上的點，例如 $(1,1)$ 。

因為直線是往上移動 2 單位，所以點 $(1,1)$ 往上移動 2 單位，也會在移動後的直線上。

$(1,1)$ 往上移動 2 單位即 y 座標加 2，也就是 $(1,3)$ 。

於是我們所要求的直線就可以寫成是：與 $y=x$ 平行且通過 $(1,3)$ 的直線。

設平行的直線方程式為 $y=x+k$ ，將 $(1,3)$ 代入：

$$(3)=(1)+k$$
$$3=1+k$$
$$2=k$$
$$k=2$$

得到此直線方程式為 $y=x+2$

也就是直線方程式 $y=x$ 往上移動 2 單位後，得到的直線方程式為 $y=x+2$

例題 4.2.4-5 (向上移動的直線方程式)

在直角座標平面上，若將直線方程式 $y=-3x+10$ 的圖形，向上移動 3 個單位長，則移動後的直線方程式為何？

詳解：

1. 在直線方程式 $y=-3x+10$ 上任取一點：
   代入 $x=3$，得 $y=1$，即點 $(3,1)$ 在直線上。
2. 將點 $(3,1)$ 往上移動 3 單位：
   即 y 座標加 3，移動後的座標為 $(3,4)$
3. 求平行直線方程式 $y=-3x+10$ 且通過點 $(3,4)$ 的直線：
   設平行的直線方程式為 $y=-3x+k$
   將 $(3,4)$ 代入 $y=-3x+k$：
   $(4)=-3\times(3)+k$
   $4=-9+k$
   $k=13$
4. 得移動後的直線方程式為 $y=-3x+13$

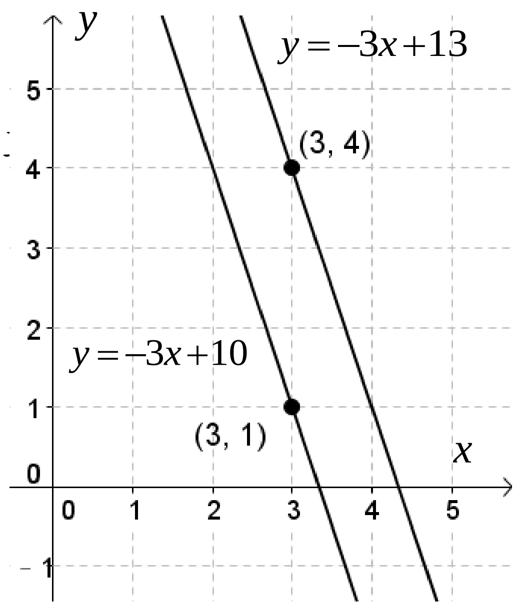
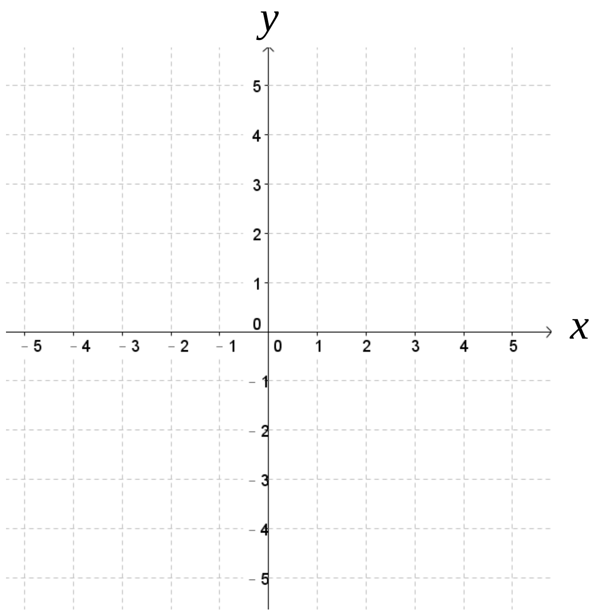


圖 4.2-34

【練習】4.2.4-5

在直角座標平面上，若將直線方程式 $y=2x+3$ 的圖形，向上移動 1 個單位長，則移動後的直線方程式為何？



例題 4.2.4-6 (向下移動的直線方程式)

在直角座標平面上，若將直線方程式$y=5x+2$的圖形，向下移動 2 個單位長，則移動後的直線方程式為何？

詳解：

1. 在直線方程式$y=5x+2$上任取一點：
   代入$x=0$，得$y=2$，即點$(0,2)$在直線上。
2. 將點$(0,2)$往下移動 2 單位：
   即y座標減 2，移動後的座標為$(0,0)$
3. 求平行直線方程式$y=5x+2$且通過點$(0,0)$的直線：
   設平行的直線方程式為$y=5x+k$
   將$(0,0)$代入$y=5x+k$：
   $(0)=5\times(0)+k$
   $0=0+k$
   $k=0$
4. 得移動後的直線方程式為$y=5x$

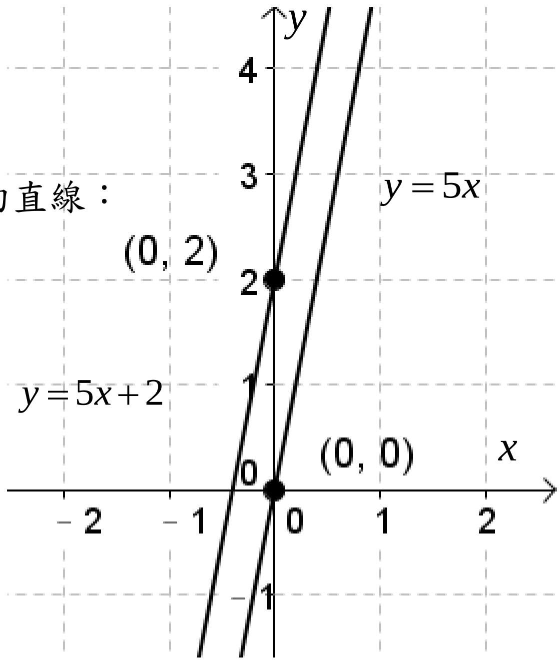
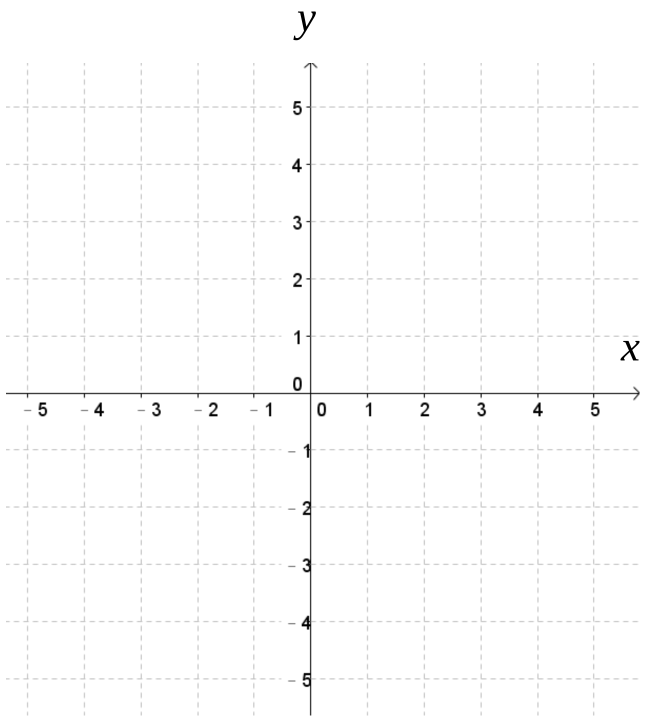


圖 4.2-35

【練習】4.2.4-6

在直角座標平面上，若將直線方程式$y=-x$的圖形，向下移動 4 個單位長，則移動後

的直線方程式為何？



例題 4.2.4-7 (向右移動的直線方程式)

在直角座標平面上，若將直線方程式 $y=2x-1$ 的圖形，向右移動 3 個單位長，則移動後的直線方程式為何？

詳解：

1. 在直線方程式 $y=2x-1$ 上任取一點：
   代入 $x=0$，得 $y=-1$，即點 $(0,-1)$ 在直線上。
2. 將點 $(0,-1)$ 往右移動 3 單位：
   即 x 座標加 3，移動後的座標為 $(3,-1)$
3. 求平行直線方程式 $y=2x-1$ 且通過點 $(3,-1)$ 的直線：
   設平行的直線方程式為 $y=2x+k$
   將 $(3,-1)$ 代入 $y=2x+k$：
   $(-1)=2\times(3)+k$
   $-1=6+k$
   $k=-7$
4. 得移動後的直線方程式為 $y=2x-7$

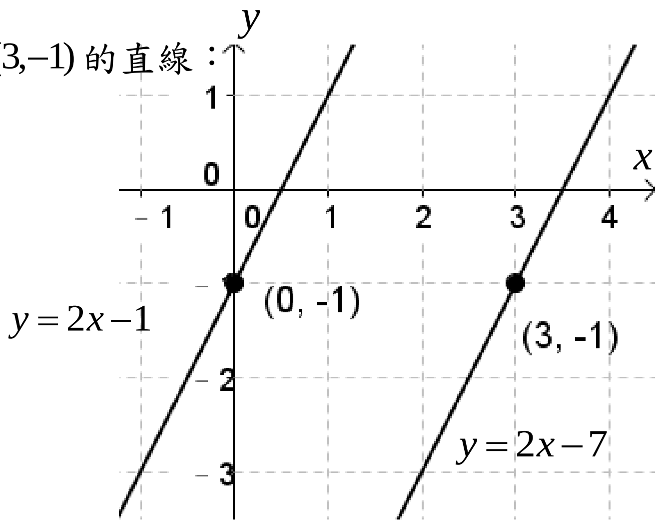
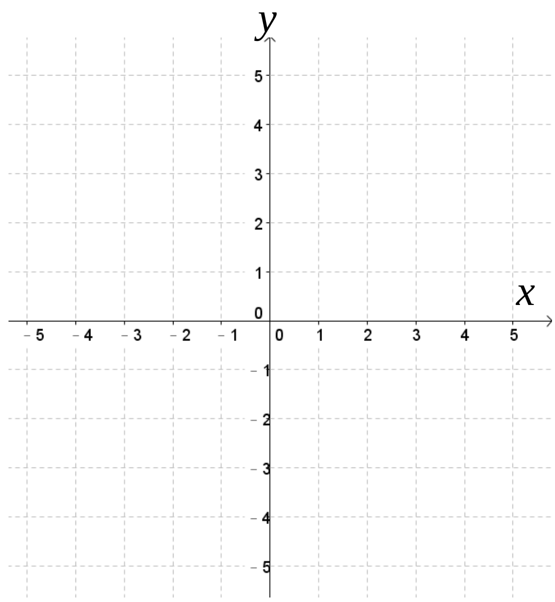


圖 4.2-36

【練習】4.2.4-7

在直角座標平面上，若將直線方程式 $y=3x-4$ 的圖形，向右移動 3 個單位長，則移動後的直線方程式為何？



例題 4.2.4-8 (向左移動的直線方程式)

在直角座標平面上，若將直線方程式 $y=4x-3$ 的圖形，向左移動 2 個單位長，則移動後的直線方程式為何？

詳解：

1. 在直線方程式 $y=4x-3$ 上任取一點：
   代入 $x=0$，得 $y=-3$，即點 $(0,-3)$ 在直線上。
2. 將點 $(0,-3)$ 往左移動 2 單位：
   即 x 座標減 2，移動後的座標為 $(-2,-3)$
3. 求平行直線方程式 $y=4x-3$ 且通過點 $(-2,-3)$ 的直線：
   設平行的直線方程式為 $y=4x+k$
   將 $(-2,-3)$ 代入 $y=4x+k$：
   $(-3)=4\times(-2)+k$
   $-3=-8+k$
   $k=5$
4. 得移動後的直線方程式為 $y=4x+5$

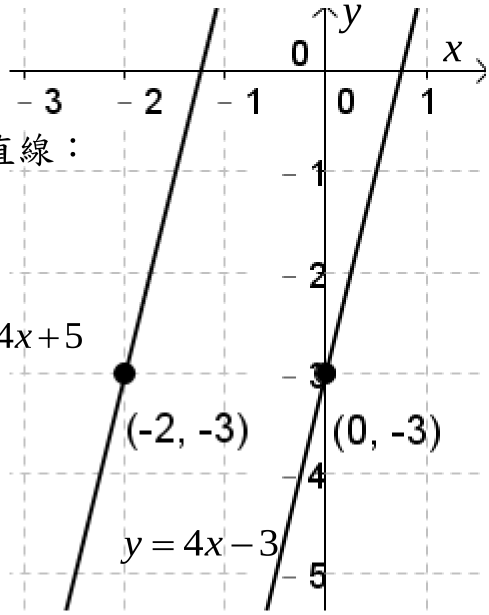
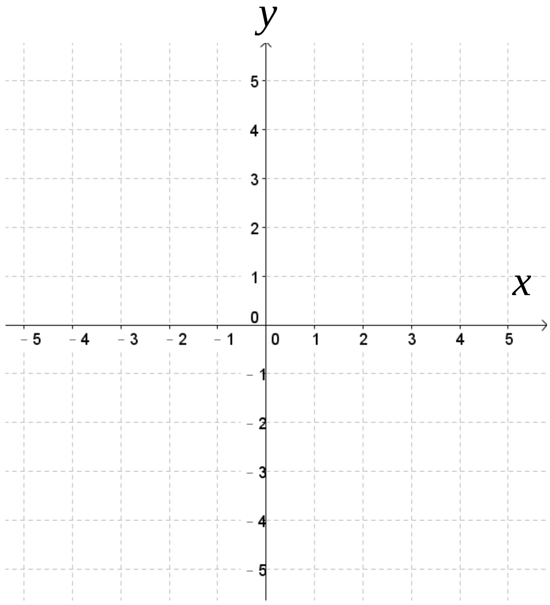


圖 4.2-37

【練習】4.2.4-8

在直角座標平面上，若將直線方程式 $y=-2x+4$ 的圖形，向左移動 2 個單位長，則移動後的直線方程式為何？



讓我們整理一下剛才所做的直線移動題目：

例題 4.2-5： $y=-3x+10$，向上移動 3 單位，得到 $y=-3x+13$

例題 4.2-6： $y=5x+2$，向下移動 2 單位，得到 $y=5x$

例題 4.2-7： $y=2x-1$，向右移動 3 單位，得到 $y=2x-7$

例題 4.2-8： $y=4x-3$，向左移動 2 單位，得到 $y=4x+5$

這些移動後的直線方程式是否有什麼規則呢？

事實上，座標平面上若有直線方程式 $y=ax+b$：

(1)往上移動 c 單位後，得到的直線方程式為 $y=ax+b+c$

(2)往下移動 c 單位後，得到的直線方程式為 $y=ax+b-c$

(3)往右移動 c 單位後，得到的直線方程式為 $y=a(x-c)+b$

(4)往左移動 c 單位後，得到的直線方程式為 $y=a(x+c)+b$

我們來驗證看看：

例題 4.2-5： $y=-3x+10$，向上移動 3 單位：

$y=-3x+10+3$，化簡得 $y=-3x+13$，與原答案相同。

例題 4.2-6： $y=5x+2$，向下移動 2 單位：

$y=5x+2$，化簡得 $y=5x$，與原答案相同。

例題 4.2-7： $y=2x-1$，向右移動 3 單位：

得到 $y=2(x-3)-1$，化簡得 $y=2x-7$，與原答案相同。

例題 4.2-8： $y=4x-3$，向左移動 2 單位後：

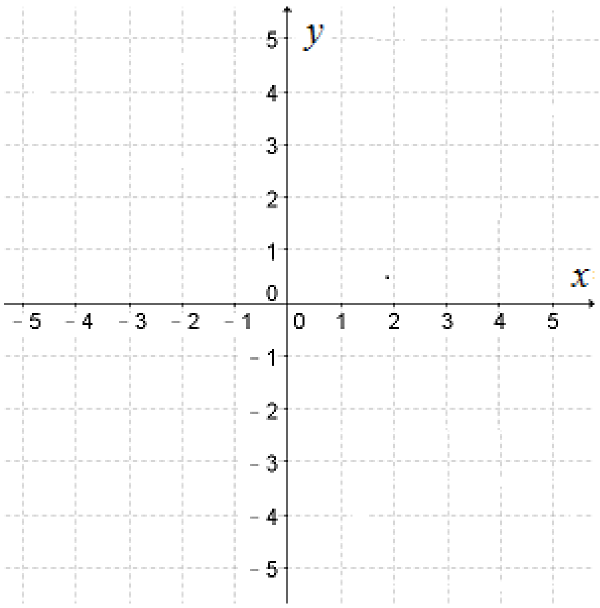
得到 $y=4(x+2)-3$，化簡得 $y=4x+5$，與原答案相同。

4.2 節　習題

習題 4.2-1

下表中的 x、y 值都是二元一次方程式 $2x+y=4$ 的解，請完成下表，並在座標平面上標出各數對的位置。

x	0	1	2		
y				-2	-4



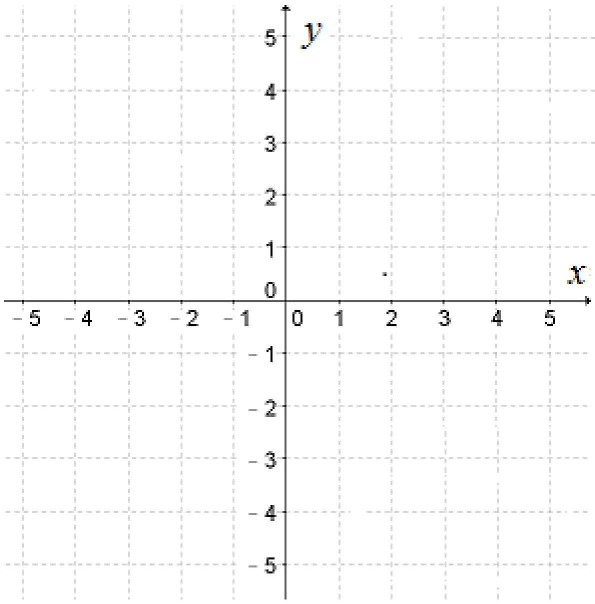
習題 4.2-2

A$(1,3)$、B$(2,0)$、C$(3,2)$、D$(0,-6)$、E$(-2,12)$、F$(\frac{7}{3},1)$

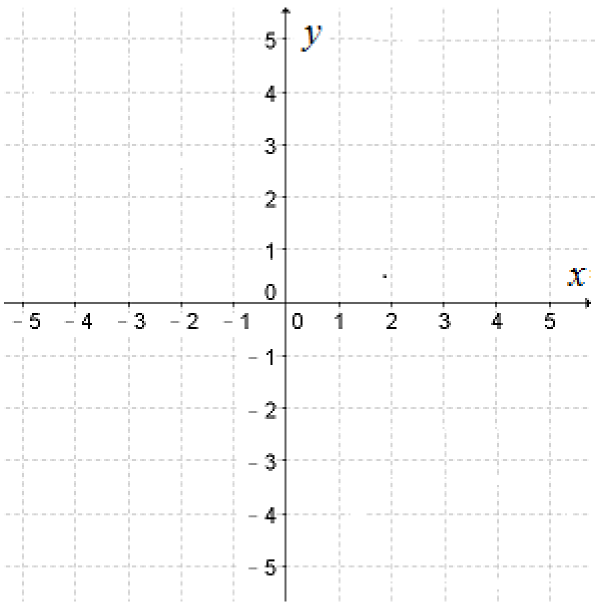
在座標平面上各點中，會落在直線 $3x-y=6$ 上的有（　　　　　　　　　　）。

習題 4.2-3

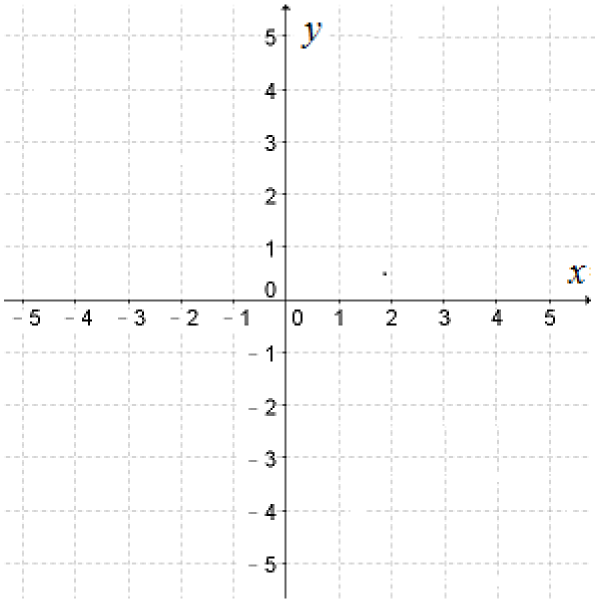
(1)畫出$x+y=2$的圖形。



(2)畫出$3x-2y=1$的圖形。



(3)畫出$3x+2y=-6$的圖形。



習題 4.2-4

(1)求通過$(0,0)$、$(-2,-2)$兩點的直線方程式。

(2)求通過$(0,2)$、$(6,-2)$兩點的直線方程式。

(3)求通過$(1,3)$、$(-1,-1)$兩點的直線方程式。

(4)求通過$(-4,-3)$、$(2,-1)$兩點的直線方程式。

習題 4.2-5

(1)若直線方程式 $mx+y=4$ 通過點 $(2,-4)$，試求 m 的值。

(2)若直線方程式 $2x-5y=-13$ 通過點 $(a,3)$ 、 $(-4,b)$ ，試求 a、b 的值。

習題 4.2-6

已知 P$(3,4)$、Q$(0,-2)$、R$(-3,3)$ 為座標平面上的三點，請分別求出直線 PQ、直線 QR、直線 PR 的方程式。

習題 4.2-7

(1)求通過 $(0,0)$ 且平行 x 軸的直線方程式。

(2)求通過 $(1,2)$ 且垂直 x 軸的直線方程式。

(3)求通過 $(2,3)$ 且平行 y 軸的直線方程式。

(4)求通過 $(-4,-3)$ 且垂直 y 軸的直線方程式。

習題 4.2-8

直線L的方程式為$3x-5y=-15$，試求：

(1)L 與 x 軸的交點座標。

(2)L 與 y 軸的交點座標。

(3)L 與兩軸圍成的三角形面積。

(4)L 不通過哪個象限？

習題 4.2-9

直線M的方程式為$2x-3y=12$，試求：

(1)M 與 x 軸的交點座標。

(2)M 與 y 軸的交點座標。

(3)M 與兩軸圍成的三角形面積。

(4)M 不通過哪個象限？

習題 4.2-10

(1) $2x+3y=6$ 不通過第幾象限？　　(2) $2x-3y=6$ 不通過第幾象限？

(3) $-2x+3y=6$ 不通過第幾象限？　　(4) $-2x-3y=6$ 不通過第幾象限？

(5)若 $a>0$、$b>0$，則 $ax+by=6$ 不通過第幾象限？

(6)若 $a>0$、$b<0$，則 $ax+by=6$ 不通過第幾象限？

(7)若 $a<0$、$b>0$，則 $ax+by=6$ 不通過第幾象限？

(8)若 $a<0$、$b<0$，則 $ax+by=6$ 不通過第幾象限？

習題 4.2-11

(1)座標平面上，若直線方程式 $3x+7y=k$ 通過原點，試求 k 之值。

(2)座標平面上，若直線方程式 $-2x+3y=k-1$ 通過原點，試求 k 之值。

(3)座標平面上，若直線方程式 $3x+(m+1)y=n+1$ 通過原點與 $(2,3)$，試求 m、n 之值。

習題 4.2-12

(1)座標平面上有三點$(3,3)$、$(0,0)$、$(-2,-2)$請判斷此三點是否共線。

(2)座標平面上有三點$(1,4)$、$(-1,1)$、$(-2,-1)$請判斷此三點是否共線。

(3)座標平面上有三點$(-2,4)$、$(-1,1)$、$(k,-5)$，若此三點共線，試求k之值。

(4)座標平面上有三點$(4,3)$、$(2,0)$、$(0,k)$，若此三點共線，試求k之值。

習題 4.2-13

(1) 在座標平面上，判斷$(0,4)$、$(2,3)$、$(4,2)$三點是否共線。若共線，試求出共線的直線方程式。

(2) 在座標平面上，判斷$(1,2)$、$(-1,1)$、$(-4,0)$三點是否共線。若共線，試求出共線的直線方程式。

(3) 在座標平面上，判斷$(2,-2)$、$(1,1)$、$(0,4)$三點是否共線。若共線，試求出共線的直線方程式。

習題 4.2-14

(1)在座標平面上，求直線方程式 $x-3=0$ 與 $y-5=0$ 的交點座標。

(2)在座標平面上，求直線方程式 $x+2y=8$ 與 $3x-y=3$ 的交點座標。

(3)在座標平面上，求直線方程式 $x+y=-1$ 與 $x-2y=-4$ 的交點座標。

習題 4.2-15

判斷座標平面上的兩線關係，在各小題括號中填入相交於一點、平行或重合。

(1) $\begin{cases} x+y=4 \\ x+y=6 \end{cases}$，兩線關係為（　　　　　　　　　　）

(2) $\begin{cases} x+2y=4 \\ x+4y=4 \end{cases}$，兩線關係為（　　　　　　　　　　）

(3) $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+2y=8 \end{cases}$，兩線關係為（　　　　　　　　　　）

(4) $\begin{cases} 3x-y=4 \\ -3x+y=-4 \end{cases}$，兩線關係為（　　　　　　　　　　　　　　）

(5) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 4x+2y=7 \end{cases}$，兩線關係為（　　　　　　　　　　　　　　）

(6) $\begin{cases} y=-6x+3 \\ y=-2x+1 \end{cases}$，兩線關係為（　　　　　　　　　　　　　　）

習題 4.2-16

(1)在座標平面上，求通過點 $(3,5)$ 且平行直線方程式 $x-y=-1$ 的直線方程式。

(2)在座標平面上，求通過點 $(4,3)$ 且平行直線方程式 $x-2y=1$ 的直線方程式。

(3)在座標平面上，求通過點 $(3,1)$ 且平行直線方程式 $y=2x+3$ 的直線方程式。

習題 4.2-17

在直角座標平面上，有一條直線 L：$y=x+1$，回答下列問題：

(1)將 L 向上移動 2 單位，則移動後的直線方程式為何？

(2)接著再將 L 向右移動 2 單位，則移動後的直線方程式為何？

(3)接著再將 L 向下移動 4 單位，則移動後的直線方程式為何？

(4)接著再將 L 向左移動 3 單位，則移動後的直線方程式為何？

習題 4.2-18

在直角座標平面上，有一條直線 L：$y=2x-3$，回答下列問題：

(1)將 L 向上移動 2 單位，則移動後的直線方程式為何？

(2)接著再將 L 向右移動 2 單位，則移動後的直線方程式為何？

(3)接著再將 L 向下移動 4 單位，則移動後的直線方程式為何？

(4)接著再將 L 向左移動 3 單位，則移動後的直線方程式為何？

習題 4.2-19

在直角座標平面上，有一條直線 L：$2x+3y=6$，回答下列問題：

(1)將 L 向上移動 2 單位，則移動後的直線方程式為何？

(2)接著再將 L 向右移動 2 單位，則移動後的直線方程式為何？

(3)接著再將 L 向下移動 4 單位，則移動後的直線方程式為何？

(4)接著再將 L 向左移動 3 單位，則移動後的直線方程式為何？

4.3 節 直角座標的應用題與綜合題

例題 4.3-1

如圖 4.3-1，從學校出發，往東走 3 公里，再往北走 2 公里後可到達郵局；從學校往西走 3 公里，再往北走 3 公里可到達火車站；從學校往西走 5 公里，再往南走 4 公里可到達書店。若定義學校座標為原點 $(0,0)$ ，郵局座標為 $(3,2)$，向東為 x 軸正向，向北為 y 軸正向，則火車站與書店座標如何表示？

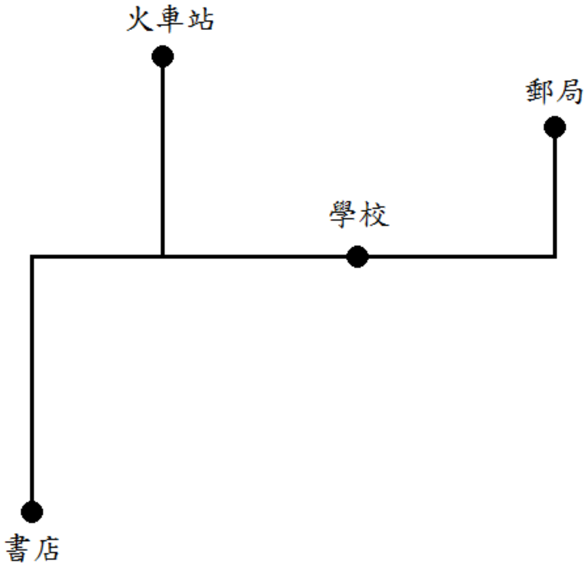


圖 4.3-1

詳解：

火車站座標為原點 $(0,0)$ ，郵局座標為 $(3,2)$，

且從學校到郵局需往東走 3 公里，往北走 2 公里

也就是座標軸 1 單位代表 1 公里。

往東為正，則往西為負。

往北為正，則往南為負。

學校到火車站需往西走 3 公里，往北走 3 公里，因此座標為 $(-3,3)$ 。

學校到書店需往西走 5 公里，往南走 4 公里，因此座標為 $(-5,-4)$ 。

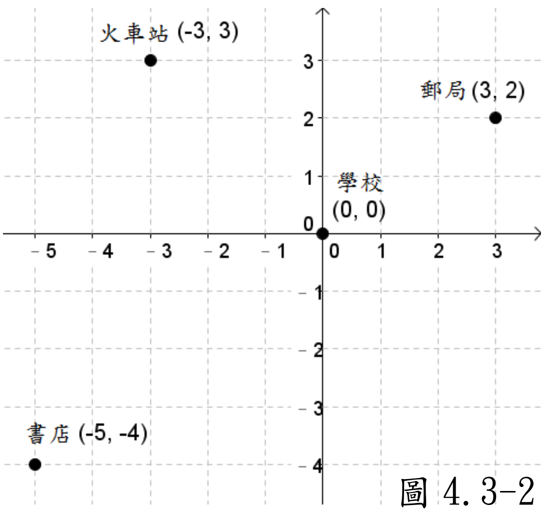


圖 4.3-2

答：火車站座標為 $(-3,3)$ ；書店座標為 $(-5,-4)$ 。

例題 4.3-2

如圖 4.3-3，座標平面上，ABCD 為一邊長為 5 的正方形。已知 A 點座標為 $(-2,3)$，且 $\overline{AB}$ 平行 y 軸，試求：

(1)B 點座標

(2)D 點座標

(3)過 B、D 兩點的直線方程式。

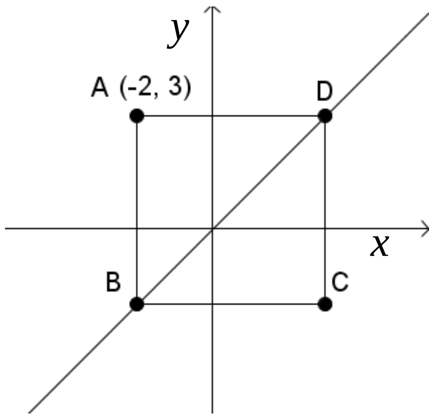


圖 4.3-3

詳解：

(1) 因為 $\overline{AB}$ 平行 y 軸，且邊長為 5，因此 A 點往下 5 單位可到達 B 點

即 A 點的 y 座標減 5 可得到 B 點。

B 點座標為：$(-2,3-5)=(-2,-2)$

(2) 因為 ABCD 為正方形，因此 $\overline{AD}$ 與 $\overline{AB}$ 垂直。

$\overline{AB}$ 平行 y 軸，即 $\overline{AD}$ 平行 x 軸。

因此 A 點往右 5 單位可到達 D 點，即 A 點的 x 座標加 5 可得到 D 點。

D 點座標為：$(-2+5,3)=(3,3)$

(3) 求過 B$(-2,-2)$ 與 D$(3,3)$ 兩點的直線方程式

設直線方程式為 $y=ax+b$

代入 $(-2,-2)$ 得：$-2=-2a+b$，化簡為 $2a-b=2......(1)$

代入 $(3,3)$ 得：$3=3a+b$，化簡為 $3a+b=3......(2)$

列出聯立方程式 $\begin{cases} 2a-b=2 & ......(1) \\ 3a+b=3 & ......(2) \end{cases}$

利用加減消去法(1)＋(2)：

$2a+3a=2+3$

$5a=5$

$a=1$

將 $a=1$ 代入(1)，解得 $b=0$，得直線方程式為 $y=x$

答：(1)B 點座標為 $(-2,-2)$；(2)D 點座標為 $(3,3)$；(3)直線方程式為 $y=x$。

例題 4.3-3

座標平面上有三條直線 $L_1 : y = x+1$、$L_2 : y = -3x+13$、$L_3 : y = 1$ 圍成一個三角形，試求此三角形之面積。

詳解：

要求三角形面積，我們可將三角形畫出來，再從圖中找出底跟高。

先找出各個交點

令 L1 與 L2 交點為 A；L1 與 L3 交點為 B；L2 與 L3 交點為 C。

求 A 點座標：

$$\begin{cases} y = x+1 \quad ......(1) \\ y = -3x+13 \,......(2) \end{cases}$$

(1)－(2)可解得 $x = 3$，再代入(1)解得 $y = 4$，得 A 點座標為 $(3,4)$

求 B 點座標：

$$\begin{cases} y = x+1 \,......(3) \\ y = 1 \quad ......(4) \end{cases}$$

(4)代入(1)解得 $x = 0$，得 B 點座標為 $(0,1)$

求 C 點座標：

$$\begin{cases} y = 1 \qquad ......(5) \\ y = -3x+13 \,......(6) \end{cases}$$

(5)代入(6)解得 $x = 4$，得 C 點座標為 $(4,1)$

如圖 4.3-4，我們令底為 $\overline{BC}$

則高為 A 到 $\overline{BC}$ 的距離，

從 A 作一鉛直線到 $\overline{BC}$，令交點為 D

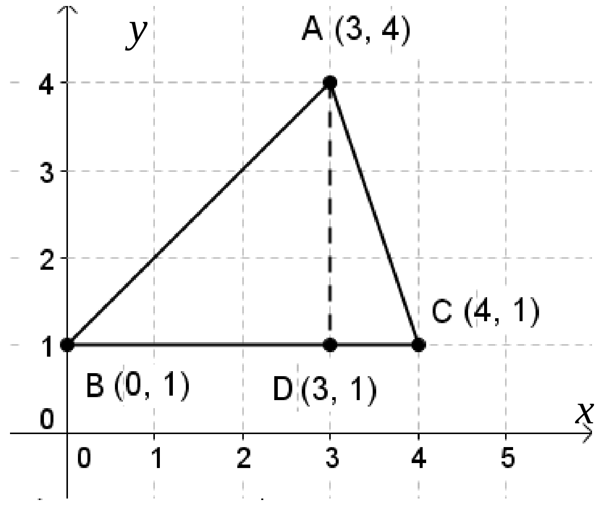
由圖可知 D 點座標為 $(3,1)$，高即為 $\overline{AD}$。

$\overline{AD}$ 長度：$|4-1| = 3$

$\overline{BC}$ 長度：$|4-0| = 4$

三角形 ABC 面積

$= \overline{BC} \times \overline{AD} \div 2 = 4 \times 3 \div 2 = 6$



答：三角形面積為 6 平方單位。

圖 4.3-4

例題 4.3-4

如圖 4.3-5，地圖上有學校與一直線公路。從學校出發，往東走 3 公里可到達公路。一樣從學校出發，往西 1 公里，再往北 2 公里可到達公路。請問若從學校出發，往北走多少公里後可到達公路？

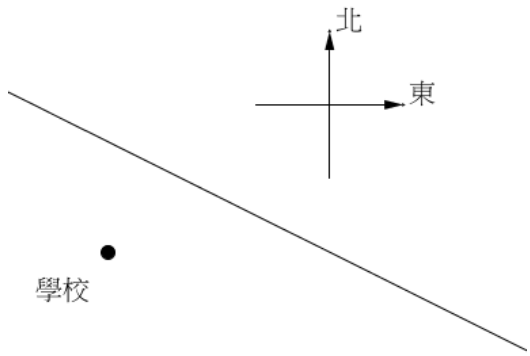


圖 4.3-5

詳解：

我們將地圖想成是直角座標，令學校為原點，往東為 x 軸正向，

往北為 y 軸正向，座標軸 1 單位為 1 公里。可得學校座標為 $(0,0)$。

往東走 3 公里可到達公路：

往東 3 公里即為 x 座標加 3，因此往東 3 公里後的座標為 $(3,0)$

往東 3 公里後到達公路，因此點 $(3,0)$ 在此公路上。

往西 1 公里，再往北 2 公里可到達公路：

往西 1 公里即為 x 座標減 1，因此往西 1 公里後的座標為 $(-1,0)$

往北 2 公里即為 y 座標加 2，因此往北 2 公里後的座標為 $(-1,2)$

往西 1 公里，再往北 2 公里可到達公路，因此點 $(-1,2)$ 在此公路上。

點 $(3,0)$ 與點 $(-1,2)$ 都在此直線公路上，我們利用此兩點求出直線方程式：

設直線方程式為 $y=ax+b$

代入 $(3,0)$ 得：$0=3a+b$，化簡為 $b=-3a......(1)$

代入 $(-1,2)$ 得：$2=-a+b$，化簡為 $-a+b=2......(2)$

將(1)代入(2)，解得 $a=-\dfrac{1}{2}$，

將 $a=-\dfrac{1}{2}$ 代入(1)，解得 $b=\dfrac{3}{2}$

得直線方程式為 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

題目問從學校出發，往北走多少公里後可到達公路。

也就是 x 座標不變，只移動 y 座標來到達直線上。

原點的 x 座標為 0，我們將 $x=0$ 代入 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

$y=-\frac{1}{2}\times(0)+\frac{3}{2}$，解得 $y=\frac{3}{2}=1.5$

因此 $(0,3)$ 在直線上，從原點出發，往上走 1.5 單位會到達直線。回到地圖上，也就是從學校出發，往北走 1.5 公里可到達公路。

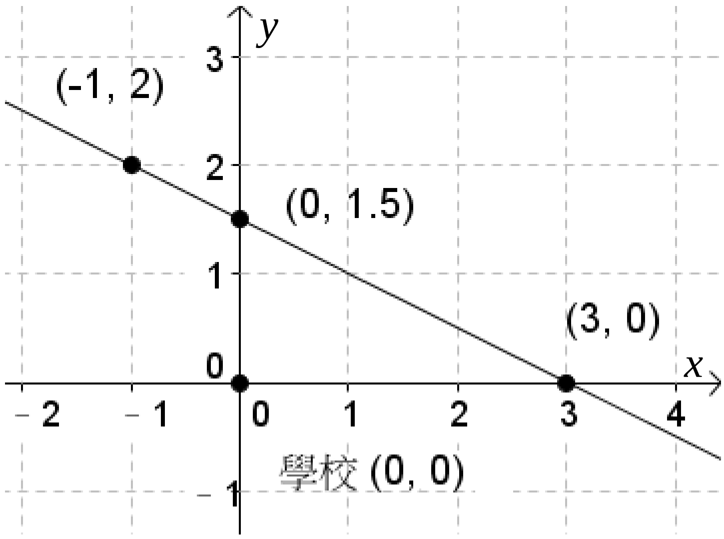


圖 4.3-6

答：從學校出發，往北走 1.5 公里後可到達公路。

例題 4.3-5

座標平面上，已知三條直線$2x+y=-1$、$2x-y=-7$、$x+my=-8$相交於一點，試求：

(1)三條直線的交點座標。

(2)m之值。

詳解：

三條直線相交於一點，我們可先利用其中兩條直線求出交點座標。再將交點座標代入第三條直線，求出m之值。

(1) 求$2x+y=-1$與$2x-y=-7$的交點

$$\begin{cases} 2x+y=-1 \text{ ......(1)} \\ 2x-y=-7 \text{ ......(2)} \end{cases}$$

利用加減消去法(1)+(2)：

$$2x+2x=(-1)+(-7)$$

$$4x=-8$$

$$x=-2$$

將$x=-2$代入(1)，解得$y=3$，得交點座標為$(-2,3)$

(2) 將$(-2,3)$代入$x+my=-8$

$$(-2)+m\times(3)=-8$$

$$-2+3m=-8$$

$$3m=-6$$

$$m=-2$$

答：(1)交點座標為$(-2,3)$；(2)$m=-2$。

例題 4.3-6

在座標平面上，若兩直線$3x+ay=8$與$6x+(a+2)y=-5$互相平行。試求 a 之值。

詳解：

兩直線平行，係數關係為$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$

$$\frac{3}{6}=\frac{a}{a+2}$$

交叉相乘得 $3(a+2)=6a$

$$3a+6=6a$$

$$a=2$$

答：$a=2$ 。

例題 4.3-7

在座標平面上，若兩直線$x+ay=8$與$bx+4y=16$重合。試求 a 、b 之值。

詳解：

兩直線重合，係數關係為$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

即$\frac{1}{b}=\frac{a}{4}=\frac{8}{16}$

取$\frac{1}{b}=\frac{8}{16}$與$\frac{a}{4}=\frac{8}{16}$

解$\frac{1}{b}=\frac{8}{16}$ ，交叉相乘得$8b=16$，解得$b=2$

解$\frac{a}{4}=\frac{8}{16}$ ，交叉相乘得$16a=32$，解得$a=2$

答：$a=2$ 、$b=2$ 。

例題 4.3-8

在座標平面上，若兩直線 $ax+by=8$ 與 $-bx+ay=-1$ 相交於點 $(2,1)$。試求 a、b 之值。

詳解：

兩直線 $ax+by=8$ 與 $-bx+ay=-1$ 相交於點 $(2,1)$，也就是 $(2,1)$ 在兩線上。

我們將 $(2,1)$ 代入兩線求出 a、b 之值。

$(2,1)$ 代入 $ax+by=8$：

$$2a+b=8..........(1)$$

$(2,1)$ 代入 $-bx+ay=-1$：

$$-2b+a=-1.....(2)$$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} 2a+b=8 & ......(1) \\ -2b+a=-1 & ......(2) \end{cases}$$

利用加減消去法，(1)×2：$4a+2b=16..........(3)$

(3)＋(2)：$4a+a=16+(-1)$

$$5a=15$$

$$a=3$$

將 $a=3$ 代入(1)，得 $b=2$。

答：$a=3$；$b=2$。

例題 4.3-9

在座標平面上，若兩直線 $ax+2y=3$ 與 $-2x+3y=-2$ 的交點在 x 軸上，試求 a 之值。

詳解：

在 x 軸上的點，即 y 座標為 0。我們將 $y=0$ 代入 $-2x+3y=-2$ 來求出交點座標：

$-2x+3\times(0)=-2$，得 $x=1$。即交點為 $(1,0)$

將 $(1,0)$ 代入 $ax+2y=3$ 來求出 a：

$a\times(1)+2\times(0)=3$，得 $a=3$。

答：$a=3$。

4.3 節 習題

習題 4.3-1

如圖 4.3-7，從學校出發，往東走 3 公里，再往南走 2 公里後可到達學校；從學校往西走 5 公里，可到達百貨公司；從百貨公司往西走 1 公里，再往北走 4 公里可到達游泳池。若定義火車站座標為原點 $(0,0)$，學校座標為 $(3,-2)$，向東為 x 軸正向，向北為 y 軸正向，則百貨公司與游泳池座標如何表示？

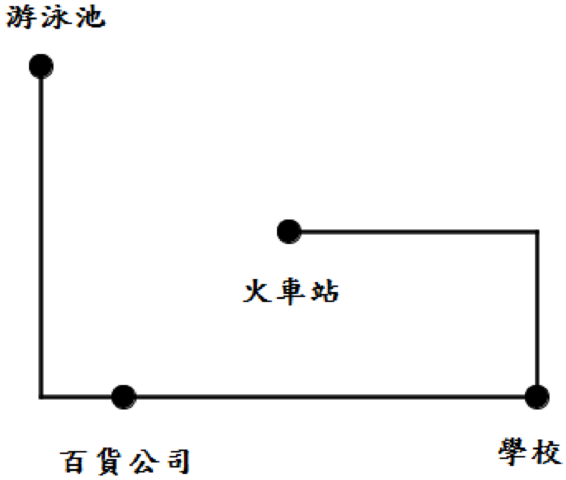
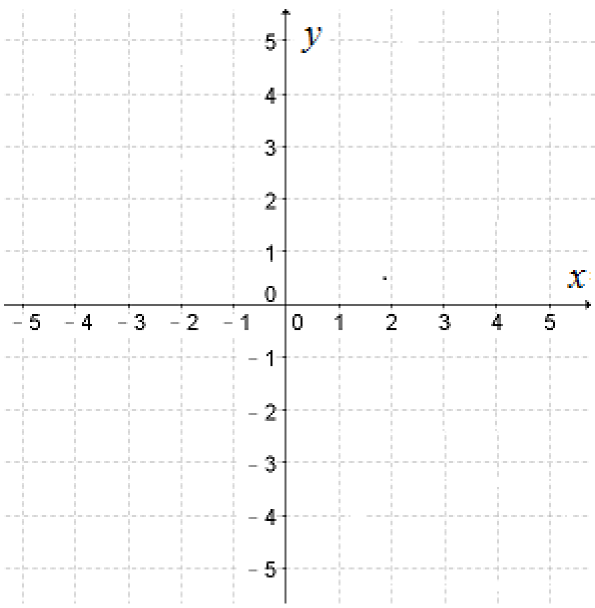


圖 4.3-7

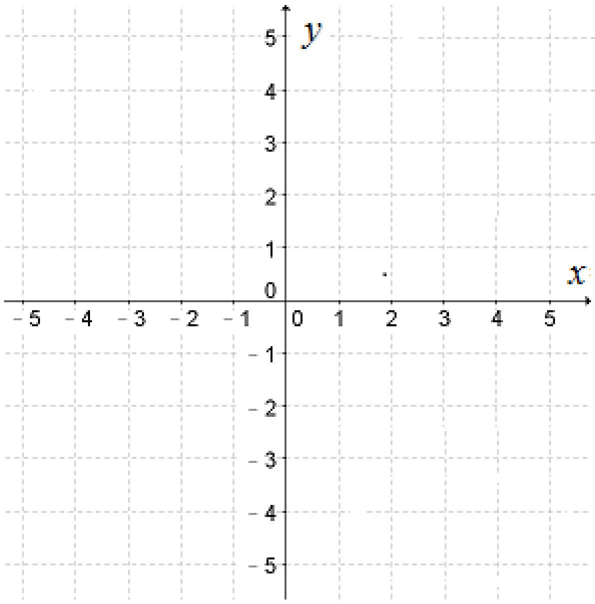


習題 4.3-2

在座標平面上，ABCD 為一長方形，A 點座標為$(-4,4)$，C 點在第四象限，線段 AB 長度為 6 且平行 y 軸，線段 BC 長度為 9。試求：

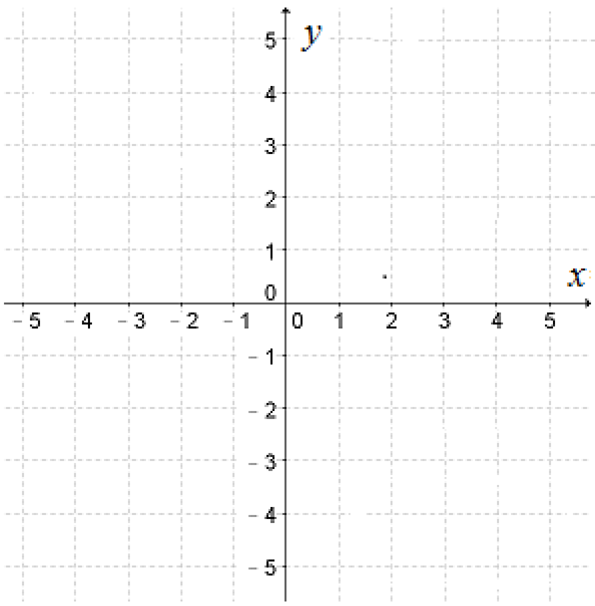
(1)B、C、D 點座標。

(2)直線 BD 的方程式。



習題 4.3-3

座標平面上有三點 A$(1,3)$、B$(-3,-1)$、C$(4,-1)$，試求三角形 ABC 之面積。



習題 4.3-4

在座標平面上，若三點$(-4,-2)$、$(3,1)$、$(2t+2,t)$在同一直線上，則共線的直線方程式為何？t之值為何？

習題 4.3-5

在座標平面上，若兩直線$2x-y=2$、$ax+y=1$相交於 x 軸上，試求此交點座標與 a 的值。

習題 4.3-6

在座標平面上，若三直線$3x-y=1$、$x+2y=5$、$ax+5y=8$相交於同一點，試求此交點座標與 a 的值。

習題 4.3-7

座標平面上，已知兩直線$ax+7y=b$與$-5x+by=24$的交點為$(-4,-2)$，則 $a=$？

習題 4.3-8

已知兩直線 $mx+2y=7$ 與 $6x-ny=14$ 互相重合，則 m＝？

習題 4.3-9

在座標平面上，若兩直線 $ax-3y=b$ 與 $8x-6y=14$ 無交點，則 a、b 的條件為何?

習題 4.3-10

已知兩直線 $2x-3y=5$ 與 $4x+my=12$ 相交於一點，則 m 的條件為何?

第四章綜合習題

習題 1：

寫出下列各點分別在哪一象限或哪一座標軸上？

座標	(2,0)	(3,2)	(–3,7)	(6,–5)
位置				
座標	(–22,–4)	(0,–5)	(7,6)	(–2,0)
位置				

習題 2：

座標平面上，有一人從(2,4)出發，向南走 5 單位，然後向西走 3 單位，再向北走 6 單位，最後到達 L 點。請問 L 點座標為何？(東為 x 軸正向，北為 y 軸正向)

習題 3：

若 $P(3,a)$ 在第一象限，且 P 與 x 軸的距離為 5，試求 a 之值。

習題 4：

若 $Q(a,b)$ 在 y 軸的負向上，且 Q 與原點的距離為 5，試求 a、b 之值。

習題 5：

座標平面上有四點：P$(3,2)$、Q$(-3,2)$、R$(-3,-2)$、S$(3,-2)$

(A)P 與 Q　(B)P 與 R　(C)P 與 S　(D)Q 與 R　(E)Q 與 S　(F)R 與 S

請用代號 A～F 回答下列問題：(複選)

(1)有哪幾組對稱於 x 軸？(　　　　　　　　　　　　)

(2)有哪幾組對稱於 y 軸？(　　　　　　　　　　　　)

(3)有哪幾組對稱於原點？(　　　　　　　　　　　　)

習題 6：

若座標平面上 A$(a+1,2b-1)$、B$(2a-2,b+2)$ 兩點表示同一點，試求 A 點座標。

習題 7：

若座標平面上 P$(2a-2,2b-1)$、Q$(3b-5,a-8)$ 兩點對稱於 x 軸，試求 P 點座標。

習題 8：

下表中的 x、y 是二元一次方程式 $5x+y=16$ 的解，請完成下表。

x		0	1	2	3	4
y	0		11			

習題 9：

黑兔颱風在座標平面上，以等速直線前進。今日清晨 3 時，颱風眼在 $(3,6)$ 的位置，今日上午 7 時，颱風眼在 $(1,2)$ 的位置。試回答下列問題：

(1)颱風移動路徑在哪條直線方程式上？

(2)有一個小島在 $(-1,-2)$ 的位置，若此颱風繼續直線前進，請問颱風眼是否會通過小島？

習題 10：

座標平面上有兩直線：$y=ax-4$、$y=-x+1$，兩線交點為 $(4,b)$。試回答下列問題：

(1)求兩線交點座標。

(2)求 a 之值。

習題 11：

座標平面上三條直線：$2x+y=-1$、$2x-5y=-7$、$4x+by=-7$ 相交於同一點，試求 b 之值。

習題 12：

若直線 $mx+y-4=0$ 通過點 $(1,2)$，試求 m 之值。

習題 13：

若直線 M 上的任一點都可表示為 $(a,3a+1)$，則 M 的方程式為何？

習題 14：

已知直線 L 的方程式為 $8x+3y=24$，試求：

(1)直線 L 與 x 軸的交點座標。

(2)直線 L 與 y 軸的交點座標。

(3)直線 L 與兩軸所圍成的三角形面積。

(4)直線 L 不通過哪一象限？

習題 15：

如圖 4-1，正方形 $ABCD$ 邊長為 7，

且 $\overline{AB}$ 平行 y 軸，A 座標為 $(-4,3)$，

試求：

(1) B 點座標。

(2)直線 BD 的方程式。

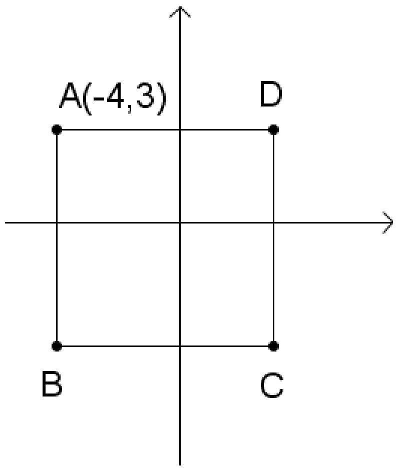


圖 4-1

習題 16：

如圖 4-2，三角形 ABC 的頂點座標分別為 $A(-6,8)$、$B(-6,-4)$、$C(-1,1)$，試求：

(1)過 B、C 兩點的直線方程式。

(2)三角形 ABC 的面積。

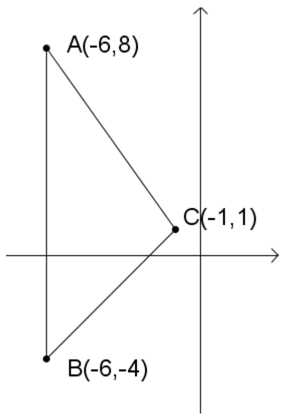


圖 4-2

習題 17：

座標平面上有三條直線：$x+2y=-3$、$x-y=0$、$y-3=0$，試求此三直線圍成的三角形面積。

習題 18：

座標平面上有兩條直線：$4x-y=12$、$ax+y=-3$，若此兩直線相交於 x 軸上，試求 a 之值。

習題 19：

座標平面上有三點：$P(2m,m)$、$Q(4,-1)$、$R(1,2)$，若此三點在同一直線上，試求：
(1)此直線方程式。
(2)m 之值。

習題 20：

座標平面上有一直線 L：$y=2x+1$，若將 L 往右移動 2 單位，再往下移動 3 單位，則移動後的直線方程式為何？

習題 21：

已知 $a>0$、$b<0$，則座標平面上的直線 $ax+by+3=0$ 不通過第幾象限？

習題 22：

如圖 4-3，座標平面上有 $A(4,2)$ 、 $B(-2,0)$ 、 $C(0,-4)$ 三點，小明想求 ABC 三點所連成的三角形面積，作法如下：

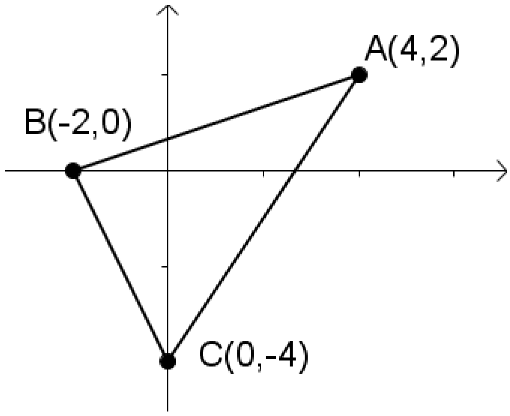


圖 4-3

1. 畫一個長方形圍住三角形 ABC，即過 A 畫水平線與垂直線，過 B 畫垂直線，過 C 畫水平線，交點分別為 D、E、F，如圖 4-4。

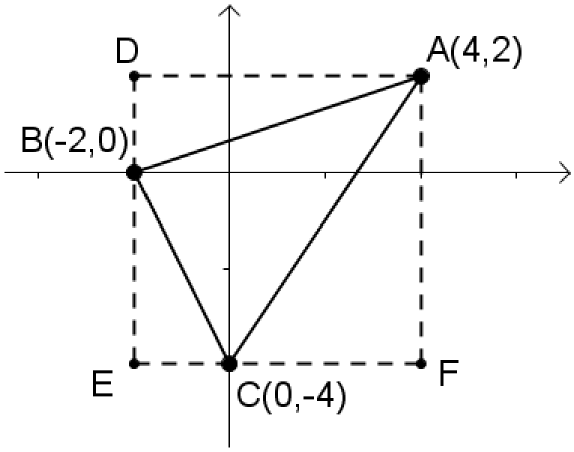


圖 4-4

2. 可得三角形 ABC 面積
＝長方形 $DEFA$ 面積－三角形 DBA 面積－三角形 ECB 面積
－三角形 FAC 面積

試回答下列問題：

(1)點 D、E、F 的座標為何？

(2)長方形 $DEFA$ 的面積為何？

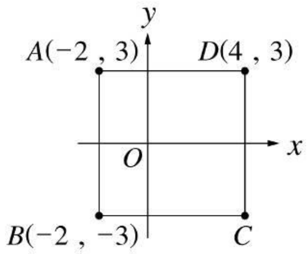
(3)三角形 DAB、EBC、FCA 的面積為何？

(4)三角形 ABC 的面積為何？

基測與會考模擬試題

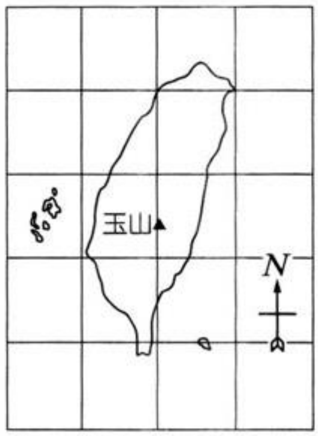
(　)1.　座標平面上，下列哪一個數對所表示的點，與 x 軸距離最近？
【90(一)基測】
(A) $(1,3)$　(B) $(5,-2)$　(C) $(-3,5)$　(D) $(0,-4)$

(　)2.　如圖(一)，四邊形 $ABCD$ 為矩形，已知 A 點座標為 $(-2,3)$，B 點座標為 $(-2,-3)$，D 點座標為 $(4,3)$，則下列四個選項中，何者為直線 BC 的方程式？
【90(一)基測】
(A) $y-3=0$　(B) $y+3=0$　(C) $x-1=0$　(D) $x-4=0$



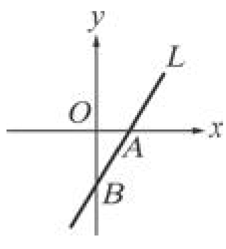
圖(一)

(　)3.　如圖(二)，玉山在座標平面上的位置為 $(121,23.5)$；已知 x 軸的正向指向東方，y 軸的正向指向北方，且每個方格的邊長均為 1 個單位。如果飛機從玉山上空向西飛行 0.5 個單位，再向北飛行 1 個單位，到達 P 點上空，則 P 點最接近下列哪一個位置？
【90(二)基測】
(A) $(121.5,24.5)$　(B) $(120.5,24.5)$
(C) $(122,24)$　(D) $(122,23)$

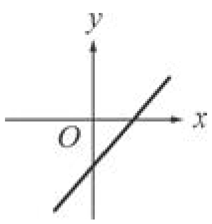


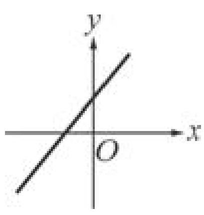
圖(二)

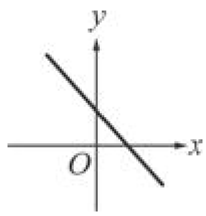
(　)4.　如圖(三)，設直線 L 為方程式 $y=x+b$ 的圖形。已知直線 L 交 x、y 軸於 A、B 兩點。設直線 L_1 為方程式 $y=bx-1$ 的圖形。則 L_1 最有可能是下列哪一個圖形？
【90(二)基測】

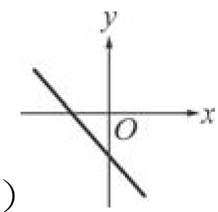


圖(三)

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(　) 5.　續上題，設直線 L_2 為方程式 $y=2x+2b$ 的圖形，且交 x、y 軸於 C、D 兩點；若 L 和 x、y 軸所形成的△OAB 面積為 7 平方單位，則 L_2 和 x、y 軸所形成的△OCD 面積是多少平方單位？【90(二)基測】

(A) 7　(B) 14　(C) 21　(D) 28

(　) 6.　若要座標平面上的相異三條直線 L_1：$y=2x-4$、L_2：$x=3$、L_3：$ax+2y=16$ 有共同的交點，則 $a=$？【91(一)基測】

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

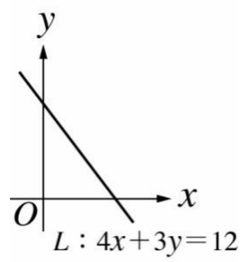
(　) 7.　一條東西向道路與一條南北向道路的交會處有一座雕像，甲車位於雕像東方 5 km 處，乙車位於雕像北方 7 km 處。若甲、乙兩車以相同速率向雕像的方向同時出發，當甲車到了雕像西方 1 km 處時，乙車在哪裡？【91(二)基測】

(A) 雕像北方 1 km 處　(B) 雕像北方 3 km 處

(C) 雕像南方 1 km 處　(D) 雕像南方 3 km 處

(　) 8.　如圖(四)，在座標平面上，直線 L 的方程式為 $4x+3y=12$，O 為原點，x、y 軸的單位長均為 1 公分。若 A 點在第四象限且在 L 上，與 y 軸的距離為 24 公分，則 A 點與 x 軸的距離為多少公分？【92(一)基測】

(A) 15　(B) 18　(C) 28　(D) 32



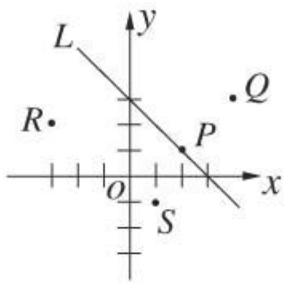
圖(四)

(　) 9.　小英的家在座標平面上的位置為 $P(-2,1)$。x 軸的正向指向東方，y 軸的正向指向北方。如果從小英的家向東走 3 單位，再向南走 4 單位，就到小華的家，那麼下列哪一個點表示小華家的位置？【92(二)基測】

(A) $E(-5,5)$　(B) $F(-5,-3)$　(C) $G(1,5)$　(D) $H(1,-3)$

(　)10.　如圖(五)，直線 L 的方程式為 $x+y-3=0$。請問 P、Q、R、S 四點中，哪一個點的座標是此方程式的解？【92(二)基測】

(A)P　(B) Q　(C) R　(D) S



圖(五)

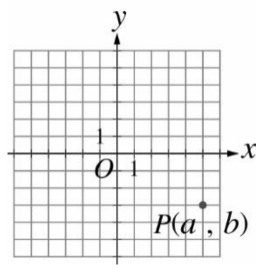
(　)11.　圖(六)為一平面圖。若以學校為原點作一座標平面，其中學校到游泳池的方向為 x 軸的正向，學校到新生大樓的方向為 y 軸的負向，則圖書館在此平面的第幾象限？【93(一)基測】

(A)一　(B) 二　(C) 三　(D) 四

圖(六)

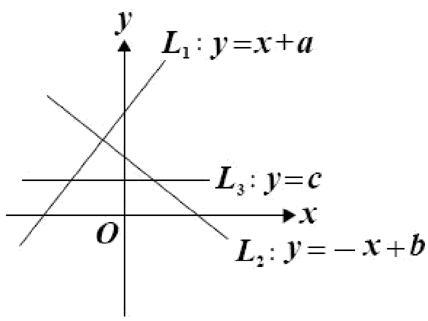
(　)12.　如圖(七)，若座標平面上 P 點的座標為 (a,b)，則 $a-b=$？【93(二)基測】

(A) 8　(B) 2　(C) －2　(D) －8



圖(七)

(　)13.　如圖(八)，直線 L_1、L_2、L_3 分別為方程式 $y=x+a$、$y=-x+b$、$y=c$ 的圖形，下列有關 a、b、c 大小關係的敘述何者正確？【93(二)基測】



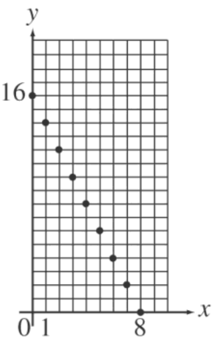
圖(八)

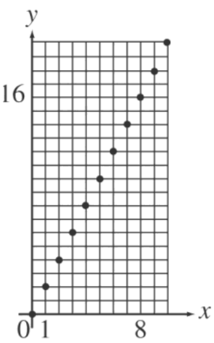
(A) $a>b>c$　(B) $b>a>c$　(C) $b>c>a$　(D) $a>c>b$

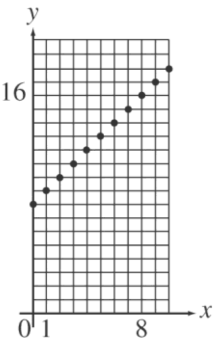
(　) 14.　座標平面上，若點$(-4,2)$在直線$3x+ay=4$上，則$a=$？　【94(一)基測】

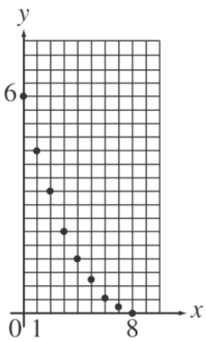
(A) －8　(B) $-\frac{1}{2}$　(C) 4　(D) 8

(　) 15.　將兩兄妹的年齡分別以 y、x 表示。若在 2004 年時，兄妹兩人的年齡分別為 16 歲、8 歲，則下列哪一個圖形為兩人年齡的關係圖？【94(一)基測】

(A) 

(B) 

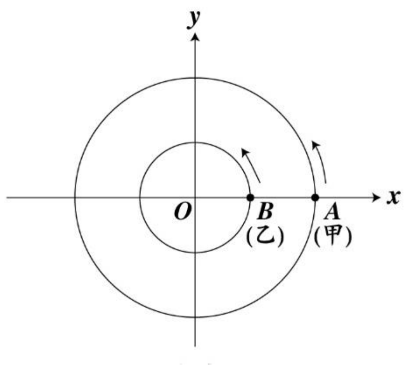
(C) 

(D) 

(　) 16.　在座標平面上，直線 L 的方程式為$y=-3x+a$。若$a>0$，則 L 不通過第幾象限？【95(一)基測】

(A) 一　(B) 二　(C) 三　(D) 四

(　) 17.　如圖(九)，A、B 兩點在 x 軸上。今甲、乙兩車分別從 A、B 兩點同時出發，以逆時針方向分別繞著大、小圓周行駛。若甲車每 35 分鐘繞一圈，乙車每 20 分鐘繞一圈，則當乙車剛好繞完第三圈時，甲車位於第幾象限？【95(一)基測】



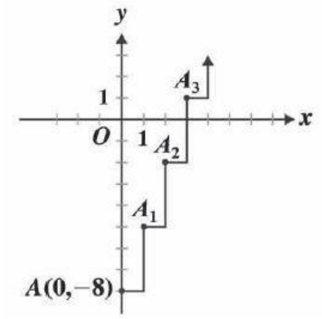
圖(九)

(A) 一　(B) 二　(C) 三　(D) 四

(　) 18.　甲、乙、丙、丁、戊五人各站在不同的位置。已知乙在甲的正西方 2 公尺處，丙在甲的正東方 3 公尺處，丁在甲的正北方 6 公尺處。若戊在丙的正北方 m 公尺處，使得乙、丁、戊的位置恰在一直線上，則 $m=$？【95(一)基測】

(A) 9　(B) 12　(C) 15　(D) 18

(　) 19.　如圖(十)，在座標平面上，小明從 $A(0,-8)$ 出發，每天皆向右走 1 單位，向上走 3 單位。第一天由 A 點走到 A_1 點，第二天由 A_1 點走到 A_2 點，…。求小明第九天會到達下列哪一點？【95(二)基測】



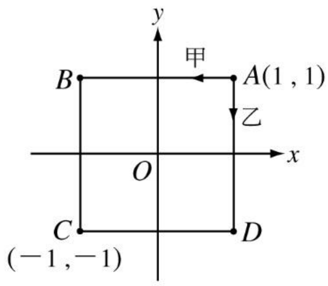
(A) (8,16)　(B) (8,19)　(C) (9,16)　(D) (9,19)

圖(十)

(　) 20.　在座標平面上，下列哪一點在方程式 $3x-2y=7$ 的圖形上？【95(二)基測】
(A) (−3,−8)　(B) (−1,5)　(C) (−2,1)　(D) (−2,−1)

(　) 21.　請閱讀下列的敘述後，回答問題。

如圖(十一)，座標平面有一正方形 ABCD，A、C 的座標分別為(1,1)、(−1,−1)。已知甲、乙兩人在 A 點第 1 次相遇後，甲自 A 點以每秒 a 公尺的速率，沿著正方形的邊以逆時針方向等速行走；乙自 A 點以每秒 b 公尺的速率，沿著正方形的邊以順時針方向等速行走。【95(二)基測】



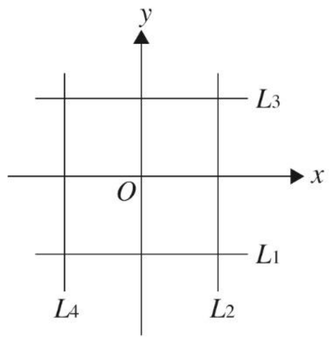
圖(十一)

若 $a=7b$，則甲、乙第二次相遇在何處？
(A) (1,0)　(B) (1,1)　(C) (0,1)　(D) (−1,1)

(　) 22.　承 21，若 $a\neq 7b$，且甲、乙第 2 次相遇在 D 點，則此兩人第 91 次相遇在何處？
(A) A 點　(B) B 點　(C) C 點　(D) D 點

(　) 23. 圖(十二)是四直線 L_1、L_2、L_3、L_4 在座標平面上的位置，其中有一條直線為方程式 $y+4=0$ 的圖形，求此方程式圖形為何？【96(一)基測】

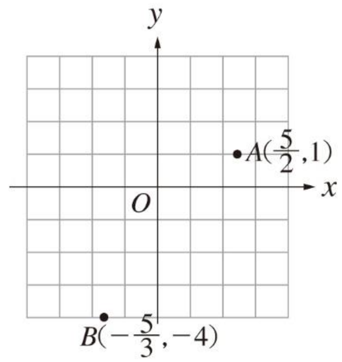
(A) L_1　(B) L_2　(C) L_3　(D) L_4



圖(十二)

(　) 24. 如圖(十三)，座標平面上有 $A(\frac{5}{2},1)$、$B(-\frac{5}{3},-4)$ 兩點。過 A、B 兩點作直線 L 後，判斷下列哪一點與直線 L 的距離最短？【96(二)基測】

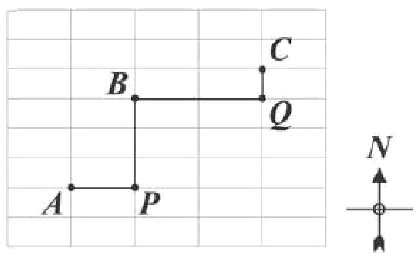
(A) $(3,-1)$　(B) $(1,2)$　(C) $(0,\frac{1}{2})$　(D) $(0,-2)$



圖(十三)

(　) 25. 如圖(十四)，某社區的道路是由東西向及南北向垂直方式設計而成。已知東西向相鄰兩條道路之間的距離均為 a 公尺，南北向相鄰兩條道路之間的距離均為 b 公尺。若小明從 A 向東走到 P，再向北走到 B，共走 230 公尺；小華從 B 向東走到 Q，再向北走到 C，共走 210 公尺，則 $a+b=$？【96(二)基測】

(A) 100　(B) 110　(C) 120　(D) 130



圖(十四)

(　) 26.　以下是甲、乙、丙三人看地圖時對四個地標的描述：

甲：從學校向北直走 500 公尺，再向東直走 100 公尺可到圖書館。

乙：從學校向西直走 300 公尺，再向北直走 200 公尺可到郵局。

丙：郵局在火車站西方 200 公尺處。

根據三人的描述，若從圖書館出發，判斷下列哪一種走法，其終點是火車站？【97(一)基測】

(A) 向南直走 300 公尺，再向西直走 200 公尺

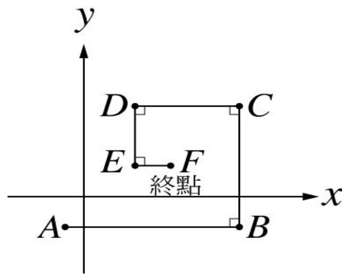
(B) 向南直走 300 公尺，再向西直走 600 公尺

(C) 向南直走 700 公尺，再向西直走 200 公尺

(D) 向南直走 700 公尺，再向西直走 600 公尺

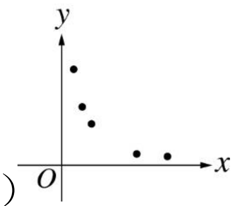
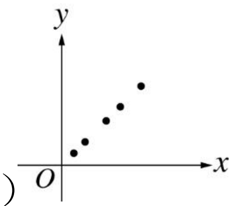
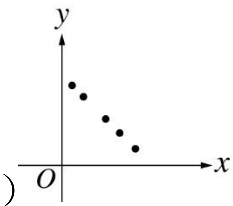
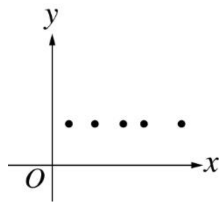
(　) 27.　小華從圖(十五)的 A 點出發，沿 $ABCDEF$ 路線行走。已知 A、B 兩點座標分別為 $(-1,-2)$、$(9,-2)$，且 $\overline{AB}=10$，$\overline{BC}=8$，$\overline{CD}=6$，$\overline{DE}=4$，$\overline{EF}=2$，則終點 F 座標為何？【97(二)基測】

(A) $(6,4)$　(B) $(5,2)$　(C) $(4,1)$　(D) $(2,1)$



圖(十五)

(　) 28.　阿美自一袋中取球，以每次取出數球且取後放回的方式，任取 5 次。若某次取出的球數以 x 表示；該次取球未放回前，袋內所剩的球數以 y 表示，且將每次的取球情況寫成數對 (x,y) 並畫在座標平面上，則此圖可能是下列哪一圖形？【97(二)基測】

(A) 
(B) 
(C) 
(D) 

(　) 29.　座標平面上，點 $P(2,3)$ 在直線 L 上，其中直線 L 的方程式為 $2x+by=7$，求 $b=$？【98(一)基測】

(A) 1　(B) 3　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $\frac{1}{3}$

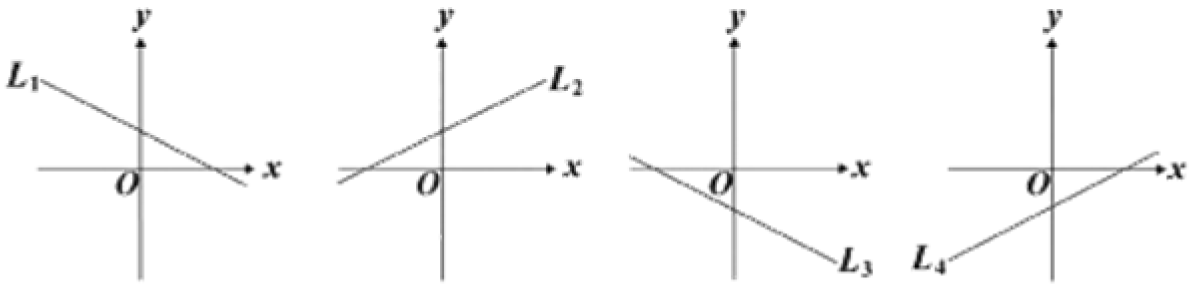
(　) 30.　已知座標平面上有一點 A，座標為 $(1,2)$。若有一點 B 在第二象限，且 B 點到 x 軸的距離與 A 點到 x 軸的距離相等，則直線 AB 的方程式為何？【98(二)基測】

(A) $x=1$　(B) $x=2$　(C) $y=2$　(D) $x+y=3$

(　) 31.　座標平面上，在第二象限內有一點 P，且 P 點到 x 軸的距離是 4，到 y 軸的距離是 5，則 P 點座標為何？【99(一)基測】

(A) $(-5,4)$ (B) $(-4,5)$ (C) $(4,5)$ (D) $(5,-4)$

(　) 32.　圖(十六)有四直線 L_1、L_2、L_3、L_4，其中有一直線為方程式 $13x-25y=62$ 的圖形，則此方程式圖形為何？【99(二)基測】

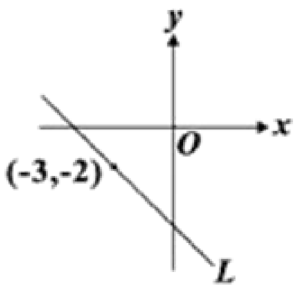


圖(十六)

(A) L_1　(B) L_2　(C) L_3　(D) L_4

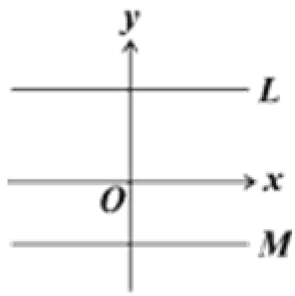
(　) 33.　圖(十七)的座標平面上，有一條通過點 $(-3,-2)$ 的直線 L。若四點 $(-2,a)$、$(0,b)$、$(c,0)$、$(d,-1)$ 在 L 上，則下列數值的判斷，何者正確？【100 年度北北基聯招】

(A) $a=3$ (B) $b>-2$ (C) $c<-3$ (D) $d=2$



圖(十七)

(　) 34.　如圖(十八)，座標平面上有兩直線 L、M，其方程式分別為 $y=9$、$y=-6$。若 L 上有一點 P，M 上有一點 Q，$\overline{PQ}$ 與 y 軸平行，且 $\overline{PQ}$ 上有一點 R，$\overline{PR}:\overline{RQ}=1:2$，則 R 點與 x 軸的距離為何？
【100 年度北北基聯招】
(A) 1　(B) 4　(C) 5　(D) 10

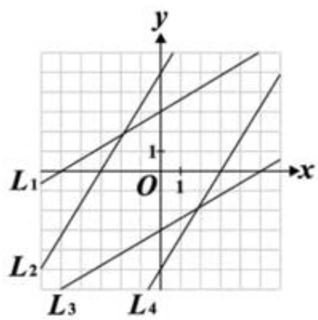


圖(十八)

(　) 35.　座標平面上有一個線對稱圖形，$A(3,-\frac{5}{2})$、$B(3,-\frac{11}{2})$ 兩點在此圖形上且互為對稱點。若此圖形上有一點 $C(-2,-9)$，則 C 的對稱點座標為何？
【100 年度北北基聯招】
(A) $(-2,1)$　(B) $A(-2,-\frac{3}{2})$　(C) $A(-\frac{3}{2},-9)$　(D) $A(8,-9)$

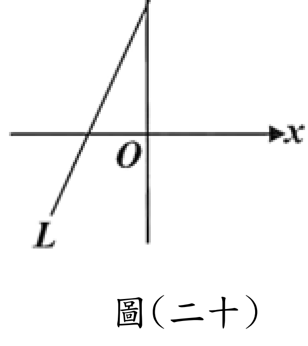
(　) 36.　座標平面上，若點 $(3,b)$ 在方程式 $3y=2x-9$ 的圖形上，則 b 值為何？
【100(一)基測】
(A) －1　(B) 2　(C) 3　(D) 9

(　) 37.　圖(十九)的座標平面上有四直線 L_1、L_2、L_3、L_4。若這四直線中，有一直線為方程式 $3x-5y+15=0$ 的圖形，則此直線為何？【100(二)基測】
(A) L_1　(B) L_2　(C) L_3　(D) L_4



圖(十九)

(　) 38.　如圖（二十），座標平面上直線 L 的方程式為 $3x-y=-3$。若有一直線 L' 的方程式為 $y=a$，則 a 的值在下列哪一個範圍時，L' 與 L 的交點會在第二象限？【101 基測】
(A) $1<a<2$　(B) $3<a<4$　(C) $-1<a<0$　(D) $-3<a<-2$



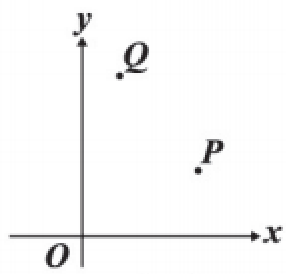
圖(二十)

( ) 39. 座標平面上有一點 A，且 A 點到 x 軸的距離為 3，A 點到 y 軸的距離恰為到 x 軸距離的 3 倍。若 A 點在第二象限，則 A 點的座標為何？【102 基測】

(A) $(-9,3)$ (B) $(-3,1)$ (C) $(-3,9)$ (D) $(-1,3)$

( ) 40. 圖(二十一)的座標平面上有 P、Q 兩點，其座標分別為 $(5,a)$、$(b,7)$。根據圖中 P、Q 兩點的位置，判斷點 $(6-b,a-10)$ 落在第幾象限？【103 特招】

(A) 一 (B) 二 (C) 三 (D) 四



圖(二十一)

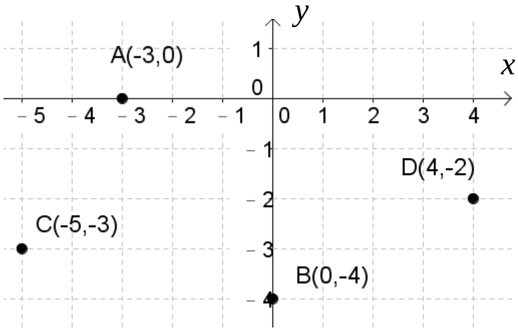
4.1 練習解答

練習 4.1.1-1

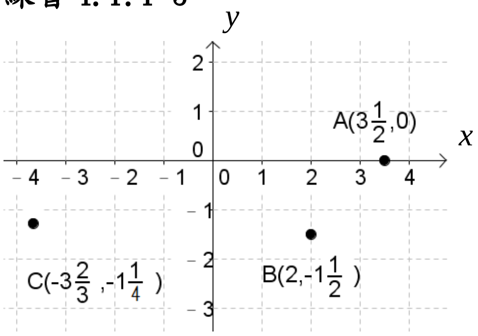
(1)A(3, 3)　(2)B(2, -3)

(3)C(-3, 0)　(4)D(0, 3)

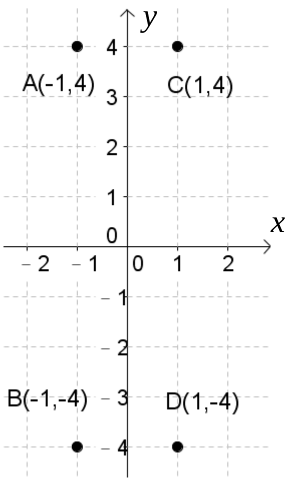
練習 4.1.1-2



練習 4.1.1-3



練習 4.1.1-4



A 點在第二象限。B 點在第三象限。

C 點在第一象限。D 點在第四象限。

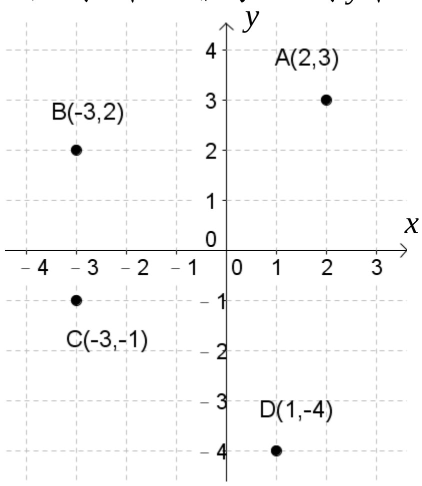
練習 4.1.2-1

A 點到 x 軸距離為 3，到 y 軸距離為 2。

B 點到 x 軸距離為 2，到 y 軸距離為 3。

C 點到 x 軸距離為 1，到 y 軸距離為 3。

D 點到 x 軸距離為 4，到 y 軸距離為 1。



練習 4.1.2-2

A 點到 x 軸距離為 0，到 y 軸距離為 1。

B 點到 x 軸距離為 $\frac{3}{7}$，到 y 軸距離為 2。

C 點到 x 軸距離為 3，到 y 軸距離為 0。

D 點到 x 軸距離為 $3\frac{1}{2}$，到 y 軸距離為 5。

練習 4.1.3-1

(1)A(3, 0)　(2)B(3, -2)

(3)C(-2, -2) (4)D(-2, 4)

練習 4.1.3-2

(1)B(-3, 4)　(2)4　(3)3

練習 4.1.3-3

P(5, -3)

練習 4.1.4-1

$a=4$；$b=2$

練習 4.1.4-2

$a=10$；$b=-3$；B(4, -4)

練習 4.1.4-3

B(2, -3)

練習 4.1.4-4

A(7, 4)

練習 4.1.5-1

周長 12 單位；面積 8 平方單位

練習 4.1.5-2

面積 10 平方單位

練習 4.1.5-3

面積 15 平方單位

練習 4.1.5-4

面積 15 平方單位

練習 4.1.6-1

點	(b,a)	$(-a,0)$	$(-b,a)$
象限或座標軸	第三象限	x 軸	第四象限
點	$(0,a)$	(ab,b)	$(-ab,-a)$
象限或座標軸	y 軸	第四象限	第二象限

練習 4.1.6-2

點	(a,b)	$(-ab,a)$	$(0,-b)$
象限或座標軸	第二象限	第四象限	y 軸

練習 4.1.6-3

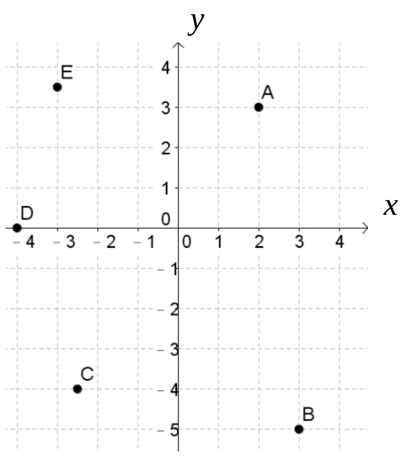
B 點到 y 軸距離為 4。

4.1 習題解答

4.1-1 (1)(1, 1)　(2)(1, 4)　(3)(4, 3)　(4)(5, 4)　(5)小新　(6)小妏

4.1-2 (1)(4, 5)　(2)(-3, 1)　(3)(0, -4)　(4)(3, -3)　(5)(2, 2)　(6)(-5, -4)

4.1-3



4.1-4 (1)4 , 4　(2)6 , 8　(3)3 , 2.5　(4)4 , 5

4.1-5 C 點

4.1-6 (2, 0)

4.1-7 (-4, 3)

4.1-8 P(-5, -5)；a=-5；b=0

4.1-9 (-1, 2)

4.1-10 (1)(5, -2)　(2)2　(3)5

4.1-11 (-3, 4)

4.1-12 1 單位

4.1-13 a=-3 或 a=5

4.1-14 右；6；下；7

4.1-15 (-3, -5)

4.1-16 a=4；b=2；(10, 14)

4.1-17 (2, 5)

4.1-18 (5, 5)

4.1-19 B(5, 1)；C(-5, -1)；D(-5, 1)

4.1-20 a=0；b=2

4.1-21 周長 10 單位；面積 6 平方單位

4.1-22 (1)A(5, 0)；B(5, 6)；C(0, 6)
(2)矩形(長方形)
(3)周長 22 單位；面積 30 平方單位

4.1-23 (1)B(-4, -2) (2)D(2, 3)
(3)面積 30 平方單位

4.1-24 16 平方單位

4.1-25 3

4.1-26 周長 18 單位

4.1-27 面積 15 平方單位

4.1-28 x 軸；第一象限；第三象限；第四象限；y 軸

4.1-29 第四象限；x 軸；第二象限；第三象限；y 軸

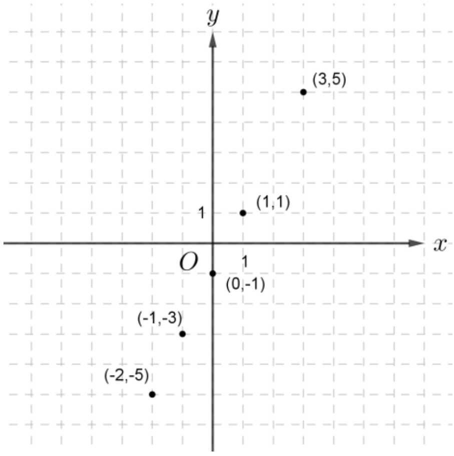
4.1-30 第四象限；第三象限；第四象限；x 軸；第二象限

4.1-31 第二象限

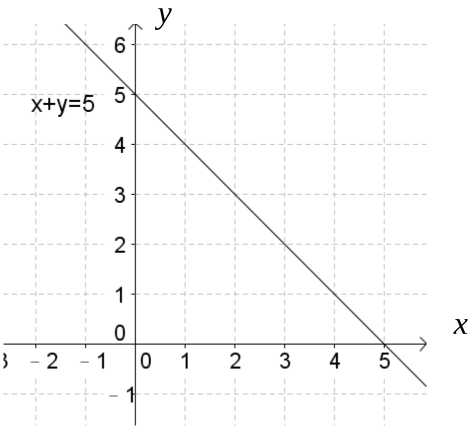
4.2 練習解答

練習 4.2.1-1

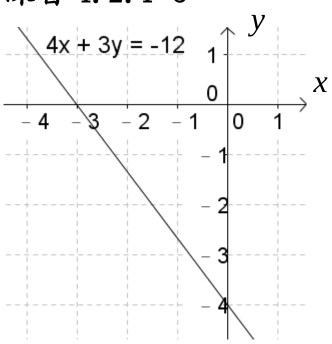
x	3	1	0	−1	−2
y	5	1	−1	−3	−5



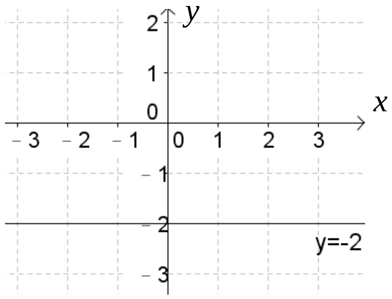
練習 4.2.1-2



練習 4.2.1-3

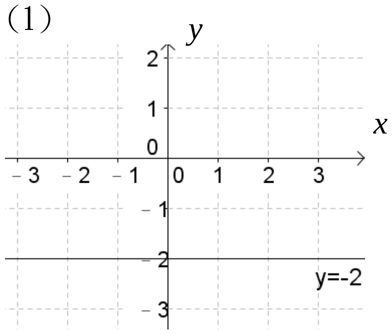


練習 4.2.1-4

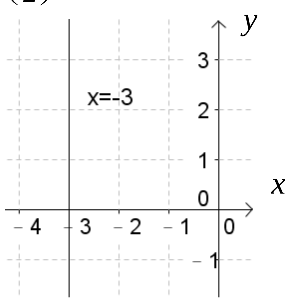


練習 4.2.1-5

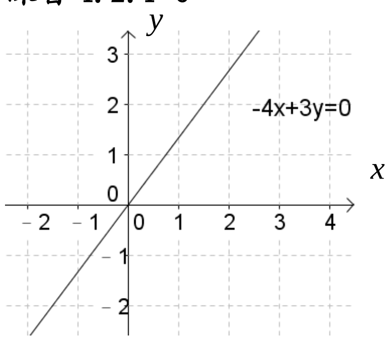
(1)



(2)



練習 4.2.1-6

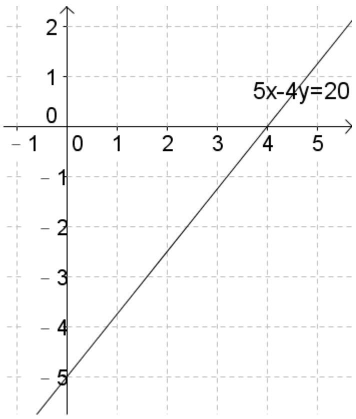


練習 4.2.1-7

(1)(4, 0)，(0, −5)

(2)10 平方單位

(3)不通過第二象限



練習 4.2.2-1

$x-y=-2$

練習 4.2.2-2

$2x+y=6$

練習 4.2.2-3

$x=y$

練習 4.2.2-4

$x+y=1$

練習 4.2.2-5

$x=3$

練習 4.2.2-6

三點共線(在 $2x+3y=-9$ 上)

練習 4.2.2-7

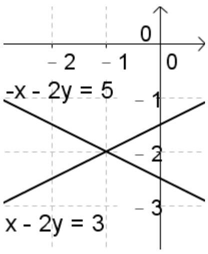
三點不共線

練習 4.2.2-8

(1) $2x-y=2$　　(2) $k=-3$

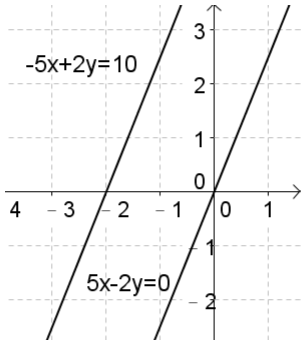
練習 4.2.3-4

恰有一組解



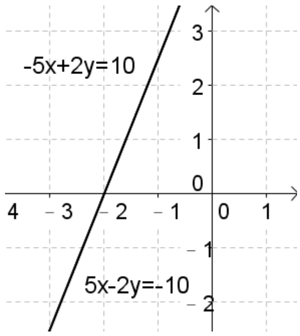
練習 4.2.3-5

無解



練習 4.2.3-6

無限多組解



練習 4.2.4-1

$2x-3y=-4$

練習 4.2.4-2

$4x+y=3$

練習 4.2.4-3

$x=2$

練習 4.2.4-4

$y=3x+2$

練習 4.2.4-5

$y=2x+4$

練習 4.2.4-6

$y=-x-4$

練習 4.2.4-7

$y=3x-13$

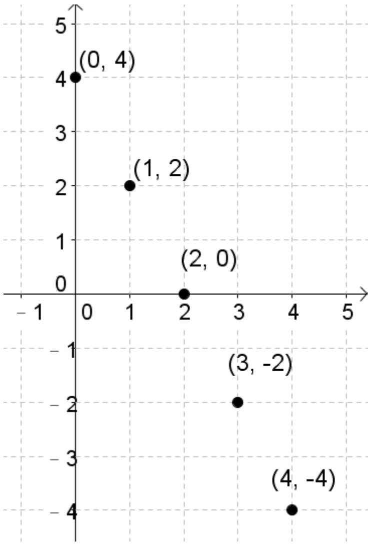
練習 4.2.4-8

$y=-2x$

4.2 習題解答

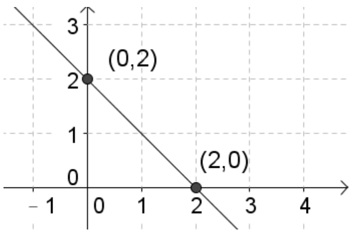
4.2-1

x	0	1	2	3	4
y	4	2	0	−2	−4

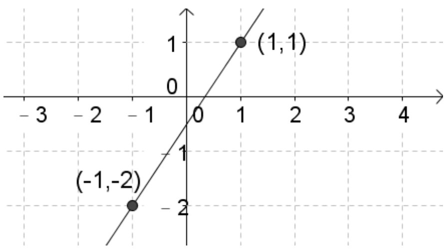


4.2-2 BDF

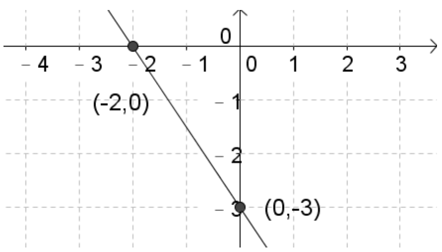
4.2-3 (1)



(2)



(3)



4.2-4 (1) $x = y$ (2) $2x+3y=6$
(3) $2x-y=-1$ (4) $x-3y=5$

4.2-5 (1) $m=4$ (2) $a=1$；$b=1$

4.2-6 直線 PQ：$2x-y=2$
直線 QR：$5x+3y=-6$
直線 PR：$-x+6y=21$

4.2-7 (1) $y=0$ (2) $x=1$
(3) $x=2$ (4) $y=-3$

4.2-8 (1)(−5, 0) (2)(0, 3)
(3)7.5 平方單位 (4)不通過第四象限

4.2-9 (1)(6, 0) (2)(0, −4)
(3)12 平方單位 (4)不通過第二象限

4.2-10 (1)第三象限 (2)第二象限
(3)第四象限 (4)第一象限
(5)第三象限 (6)第二象限
(7)第四象限 (8)第一象限

4.2-11 (1) $k=0$ (2) $k=1$
(3) $m=-3$；$n=-1$

4.2-12 (1)三點共線 (2)三點不共線
(3) $k=1$ (4) $k=-3$

4.2-13 (1)三點共線；$x+2y=8$
(2)三點不共線
(3)三點共線；$3x+y=4$

4.2-14 (1)(3, 5) (2)(2, 3)
(3)(−2, 1)

4.2-15 (1)平行 (2)相交於一點
(3)重合 (4)重合
(5)平行 (6)相交於一點

4.2-16 (1) $x-y=-2$ (2) $x-2y=-2$
(3) $y=2x-5$

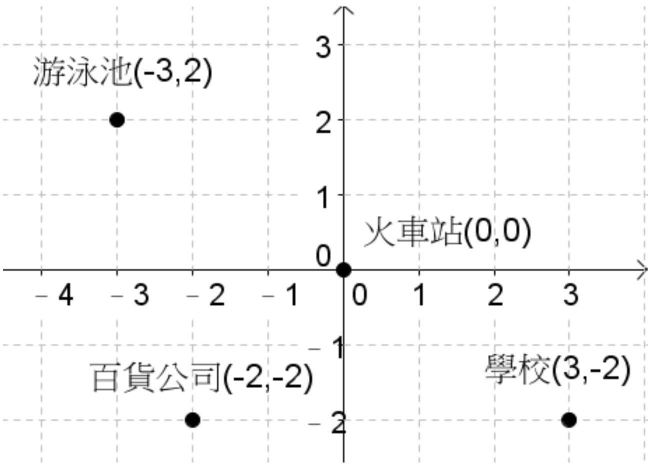
4.2-17 (1) $y=x+3$ (2) $y=x-1$
(3) $y=x-3$ (4) $y=x+4$

4.2-18 (1) $y=2x-1$ (2) $y=2x-7$
(3) $y=2x-7$ (4) $y=2x+3$

4.2-19 (1) $2x+3y=12$ (2) $2x+3y=10$
(3) $2x+3y=-6$ (4) $2x+3y=0$

4.3 習題解答

4.3-1



4.3-2　(1)B(-4,-2)；(C)(5,-2)；D(5,4)
(2) $2x-3y=-2$

4.3-3　14 平方單位

4.3-4　共線的直線方程式為 $3x-7y=2$；t=4

4.3-5　交點座標(1,0)；a=1

4.3-6　交點座標(1,2)；a=-2

4.3-7　a=-3

4.3-8　m=3

4.3-9　a=4；$b\neq 7$

4.3-10　$m\neq -6$

第四章綜合習題

1.　答：x 軸；第一象限；
第二象限；第四象限；
第三象限；y 軸；
第一象限；x 軸。

2.　答：L(-1,5)

3.　答：a=5

4.　答：a=0；b=-5

5.　答：(1)CD　(2)AF　(3)BE

6.　答：A(4,5)

7.　答：P(4,5)

8.　答：

x	$\frac{16}{5}$	0	1	2	3	4
y	0	16	11	6	1	-4

9.　答：(1) $2x-y=0$ (2)會

10.　答：(1)(4,-3)　(2) $a=\frac{1}{4}$

11.　答：$b=-3$

12.　答：m=2

13.　答：$3x-y=-1$

14.　答：(1)(3,0)　(2)(0,8)
(3)12 平方單位
(4)第三象限

15.　答：(1)B(-4,-4) (2) $x=y$

16.　答：(1) $x-y=-2$ (2)30 平方單位

17.　答：24 平方單位

18.　答：a=-1

19.　答：(1) $x+y=3$ (2)m=1

20.　答：$y=2x-6$

21.　答：第四象限

22.　答：(1)D(-2,2)；E(-2,-4)；F(4,-4)
(2)36 平方單位
(3) DAB：6 平方單位
EBC：4 平方單位
FCA：12 平方單位
(4)14 平方單位

基測與會考模擬試題解答

1. 《答案》(B)

   詳解：點與 x 軸的距離，即點的 y 座標絕對值。

   (A)距離為 3；(B)距離為 2；(C)距離為 5；(D)距離為 4。

   故選(B)。

2. 《答案》(B)

   詳解：A、B 兩點的 x 座標都是−2，即線段 AB 平行 y 軸。

   可得線段 CD 平行 y 軸，線段 BC 與線段 AD 平行 x 軸。

   AD 距離為 $|-2-4|=6$，C 座標為 B 座標往右移 6 單位。

   C 座標＝(−2+6, −3)＝(4, −3)。

   過 B(−2, −3)與 C(4, −3)兩點的直線方程式為 $y+3=0$。

3. 《答案》(B)

   詳解：玉山座標：(121, 23.5)

   向西飛行 0.5 單位，x 座標為 $121-0.5=120.5$

   向北飛行 1 單位，y 座標為 $23.5+1=24.5$，得 P 座標為 (120.5, 24.5)。

4. 《答案》(D)

   詳解：直線 L：$y=x+b$，將 x=0 代入，得 y=b，即 L 與 y 軸交點為(0, b)。

   由圖(三)可知，L 與 y 軸交點在 y 軸負向，故 b<0。

   找出 L_1：$y=bx-1$ 與兩軸的交點

   與 y 軸交點：代入 x=0，得 y=－1，與 y 軸交點為(0, －1)

   與 x 軸交點：代入 y=0，得 $x=\frac{1}{b}$，與 x 軸交點為($\frac{1}{b}$, 0)

   因為 b<0，故 L_1 與 x 軸交點在 x 軸負向。

   故選(D)。

5. 《答案》(B)

   詳解：L 與兩軸交點為(－b, 0)、(0, b)

   與兩軸圍成的三角形面積為 $b^2\times\frac{1}{2}=7$，得 $b=\pm\sqrt{14}$。由前題已知 b<0，故 $b=-\sqrt{14}$。

   L_2：$y=2x+2b$，代入 $b=-\sqrt{14}$ 得 $y=2x-2\sqrt{14}$

   L_2 與 y 軸交點：代入 x=0，得 $y=-2\sqrt{14}$，與 y 軸交點為(0, $-2\sqrt{14}$)

   L_2 與 x 軸交點：代入 y=0，得 $x=\sqrt{14}$，與 x 軸交點為($\sqrt{14}$, 0)

   L_2 與兩軸圍成的三角形面積為 $\left|-2\sqrt{14}\right|\times\sqrt{14}\times\frac{1}{2}=14$。

6. 《答案》(C)

   詳解：求 L_1 與 L_2 交點，得交點為(3, 2)。將(3, 2)代入 L_3：

   $a\times3+2\times2=16$ 得 a=4。

7. 《答案》(A)

   詳解：甲車從雕像東方 5 km 移動到雕像西方 1 km，共 6 km。因為兩車速率相同，故乙車也移動 6 km。從雕像北方往南方移動 6 km，到達雕像北方 1 km。

8. 《答案》(C)

   詳解：因單位長為 1 公分，且 A 點在第四象限，與 y 軸距離 24 公分，故 A 點的 x 座標為 24。將 x=24 代入 L：$4\times24+3\times y=12$，得 y=−28。

   A 點座標為(24, −28)，與 x 軸距離 28 公分。

9. 《答案》(D)

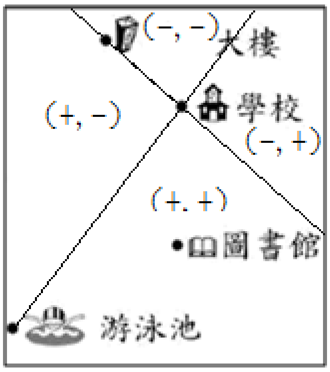
詳解：$P(-2, 1)$，向東走 3 單位即 x 座標加 3，向南走 4 單位即 y 座標減 4。
$(-2+3, 1-4)=(1, -3)$

10.《答案》(A)

詳解：P 點在直線上，直線上的點即為此方程式的解。

11.《答案》(A)

詳解：圖書館在(+,+)的象限中，即第一象限。



12.《答案》(A)

詳解：由圖形知 P 點座標為(5, -3)，$a-b=5-(-3)=8$

13.《答案》(A)

詳解：L_1 與 y 軸交點為$(0, a)$；L_2 與 y 軸交點為$(0, b)$；L_3 與 y 軸交點為$(0, c)$。
由圖形可知$(0, a)$在最上方，其次為$(0, b)$，最下方為$(0, c)$。即 $a>b>c$。

14.《答案》(D)

詳解：將(-4, 2)代入 $3x+ay=4$：$3\times(-4)+a\times2=4$，得 $a=8$

15.《答案》(C)

詳解：兩人年齡每年都增加，且增加的速度相同。
(A)：一人年齡增加時，另一人減少。
(B)：兩人年齡增加速度不同(兄增加兩歲時，妹只增加一歲)
(C)：兩人年齡每年都增加，且增加的速度相同。故選(C)。
(D)：一人年齡增加時，另一人減少。

16.《答案》(C)

詳解：與 x 軸交點：將 $y=0$ 代入，$0=-3x+a$，得 $x=\dfrac{a}{3}$，交點為$(\dfrac{a}{3}, 0)$，因為 $a>0$，故交點在 x 軸正向。
與 y 軸交點：將 $x=0$ 代入，得 $y=a$，交點為$(0, a)$，因為 $a>0$，故交點在 y 軸正向。
故直線不通過第三象限。

17.《答案》(C)

詳解：乙車繞完第三圈，即經過 $20\times3=60$ 分鐘。甲車 35 分鐘繞一圈，先減去甲車繞第一圈的時間，$60-35=25$，我們觀察甲車 25 分鐘會到達第幾象限。
35 分鐘繞一圈，繞 1 個象限需 $35\div4=8.75$ 分鐘。繞 2 個象限需 17.5 分鐘，繞 3 個象限需 26.25 分鐘。$25<26.25$，故甲車在第三象限。

18.《答案》(C)

詳解：設一直角座標，單位長為 1 公尺，東方為 x 軸正向，北方 y 軸正向。
令甲為原點，則依題意可知乙座標為(−2, 0)，丙座標為(3, 0)，丁座標為(0, 6)，戊座標為$(3, m)$。求過乙、丁的直線方程式得 $3x-y=-6$。
將$(3, m)$代入 $3x-y=-6$，得 m=15。

19.《答案》(D)

詳解：小明第 n 天的座標為 $(0+n,-8+3n)$，第 9 天座標為 $(0+9,-8+3\times9)=(9,19)$。

20.《答案》(A)

詳解：將各選項座標代入直線方程式，找出能使等號成立的。
(A) $3\times(-3)-2\times(-8)=7$。　(B) $3\times(-1)-2\times(5)=-13\neq7$，不符合。
(C) $3\times(-2)-2\times(1)=-8\neq7$，不符合。　(D) $3\times(-2)-2\times(-1)=-4\neq7$，不符合。

21.《答案》(A)

詳解：第 2 次相遇，甲、乙走的總距離為正方形周長，周長＝$(2+2)\times2=8$
因為兩人所走的時間相同，所以行走距離比＝速率比
由題目知 a=7b，即甲速率：乙速率＝7：1，因此甲行走距離：乙行走距離＝7：1
設甲行走距離為 $7x$，乙行走距離為 x，
兩人行走距離和＝總距離：$7x+x=8$，解得 x=1。
即相遇時，乙順時針走了 1 單位，到達(1, 0)。

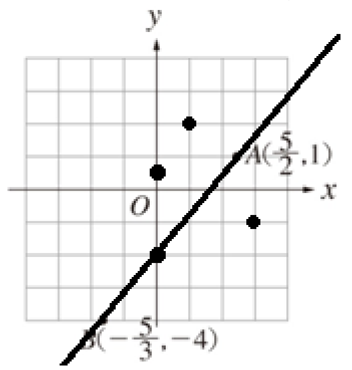
22.《答案》(C)

詳解：第一次相遇在 D 點，即甲走了 $2+2+2=6$ 單位，乙走了 2 單位。
兩人行走距離比與速率比都是 3：1。
同前題作法可求得第 3 次相遇在 C 點；第 4 次相遇在 B 點，第 5 次相遇在 A 點，第 6 次相遇又在 D 點…
每 4 次相遇為一循環，因此第 91 次相遇位置與第 3 次相同（$91-22\times4=3$）
第 91 次相遇在 C 點。

23.《答案》(A)

24.《答案》(D)

詳解：連接 A、B，並將各選項座標標在圖上，可確認(0, −2)距離直線最近，故選(D)



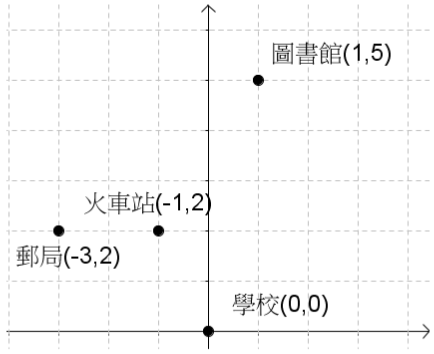
25.《答案》(C)

詳解：小明從 A 到 B 所走的距離為 $(3a+b)$ 公尺；小華從 B 到 C 所走的距離為 $(a+2b)$ 公尺。
依題意列出聯立方程式 $\begin{cases}3a+b=230\ ...(1)\\ a+2b=210\ ...(2)\end{cases}$

$(1)+(2)\times2$：$(a+3b)+2(2a+b)=230+210\times2$
$5a+5b=650$
$a+b=130$，故選(C)。

26.《答案》(A)

詳解：設一直角座標，以學校為原點，東為 x 軸正向，北為 y 軸正向，單位長為 100 公尺。



可得從圖書館往下走 3 單位，往左走 2 單位可到達火車站。

即往南走 300 公尺，往西走 200 公尺可到達火車站。

27.《答案》(B)

詳解：由 A、B 兩點座標可知線段 AB 平行 x 軸，又從圖中可知各轉彎處皆為直角，因此線段 BC 平行於 y 軸，線段 CD 平行於 x 軸，線段 DE 平行於 y 軸，線段 EF 平行於 x 軸。即從 B 往上 8 單位，左 6 單位，往下 4 單位，往右 2 單位可到達 F 點。

F 座標 $=(9-6+2,(-2)+8-4)=(5,2)$

28.《答案》(C)

詳解：取 1 顆球，袋內剩 4 顆，數對為(1, 4)；取 2 顆球，袋內剩 3 顆，數對為(2, 3)

取 3 顆球，袋內剩 2 顆，數對為(3, 2)；取 4 顆球，袋內剩 1 顆，數對為(4, 1)

取 5 顆球，袋內剩 0 顆，數對為(5, 0)。有可能的圖形為(C)選項。

29.《答案》(A)

詳解：將(2, 3)代入 $2x+by=7$，$2\times2+b\times3=7$，得 b=1

30.《答案》(C)

詳解：A(1, 2)到 x 軸的距離為 2，依題意，B 點到 x 軸的距離也為 2。因為 B 點在第二象限，因此 B 點的 y 座標為 2。A、B 兩點 y 座標都為 2，因此直線 AB 方程式為 y=2。

31.《答案》(A)

詳解：P 在第二象限，P 到 x 軸的距離為 4，因此 P 的 y 座標為 4；P 到 y 軸的距離為 5，因此 P 的 x 座標為−5，得 P 座標為(−5, 4)。

32.《答案》(D)

詳解：直線 $13x-25y=62$

求與 x 軸交點，代入 y=0，$13x-25\times0=62$，得 $x=\dfrac{62}{13}$（交點在 x 軸正向）

求與 y 軸交點，代入 x=0，$13\times0-25y=62$，得 $y=-\dfrac{62}{25}$（交點在 y 軸負向）

由兩軸交點可知圖形為 L_4。

33.《答案》(C)

詳解：(A)：無法確定 a 值，此選項錯誤。

(B)：即 L 與 y 軸交點，因交點在(−3, −2)下方，故 b 值應小於−2，此選項錯誤。

(C)：即 L 與 x 軸交點，因交點在(−3, −2)左方，故 c 值應小於−3，此選項正確。

(D)：y 座標為−1，點在(−3, −2)左上方，故 d 值應小於−3，此選項錯誤。

34.《答案》(B)

詳解：P 點的 y 座標為 9，Q 點的 y 座標為−6，且 $\overline{PQ}$ 與 y 軸平行，因此 $\overline{PQ}=|9-(-6)|=15$。

$\overline{PR}:\overline{RQ}=1:2$，$\overline{PR}=a$、$\overline{RQ}=2a$，$\overline{PR}+\overline{RQ}=a+2a=15$，解得 $a=5$。

因此 R 點為 P 點往下 5 單位，即 y 座標為 $9-5=4$，因此 R 點與 x 軸的距離為 4。

35.《答案》(A)

詳解： 先找出 A、B 的對稱軸，即通過線段 AB 中點，且垂直線段 AB 的直線。

線段 AB 的中點為 $((3+3)\times\frac{1}{2},(-\frac{5}{2}+(-\frac{11}{2}))\times\frac{1}{2})=(3,-4)$

通過A、B兩點的直線方程式為 $x=3$，垂直 $x=3$ 的直線方程式為 $y=k$（k 為任意數）。

A、B 的對稱軸，為通過(3, -4)，且平行 $y=k$ 的直線。即是 $y=-4$。

求以 $y=-4$ 為對稱軸，C(-2, -9)的對稱點座標：

因為 $y=-4$ 平行 x 軸，故對稱點的 x 座標與 C 相同，x 座標=-2。

C 到對稱軸的距離為 $|-9-(-4)|=5$，因此 C 的對稱點到對稱軸的距離也為 5。

對稱點的 y 座標為 $-4+5=1$，得對稱點座標為(-2, 1)。

36.《答案》(A)

詳解： 將(3, b)代入 $3x-5y+15=0$，$3\times b=2\times3-9$，得 b=-1。

37.《答案》(A)

詳解： $3x-5y+15=0$，與 x 軸交點為(-5, 0)，與 y 軸交點為(0, 3)。故為直線 L_1。

38.《答案》(A)

詳解： L 與 y 軸的交點為(0, 3)。由圖形可知，L 上的點若在第二象限，則其 y 座標介於 0 和 3 之間。(A)選項符合 $0<y<3$。

39.《答案》(A)

詳解： A 點在第二象限，即 x 座標為負，y 座標為正。A 點到 x 軸的距離為 3，因此 y 座標為 3。A 點到 y 軸的距離為 $3\times3=9$，即 x 座標為-9。A 座標為(-9, 3)

40.《答案》(D)

詳解： 由圖形可知，$0<a<7$，$0<b<5$。可推得 $6-b$ 為正，$a-10$ 為負。

因此點 $(6-b,a-10)$ 在第四象限。