**(47)排列-5(環狀)**

請看下圖



以上的排列中，可以稱之為bdac，在這排列中每一物件的左鄰跟右鄰列成下表:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 物件 | 左鄰 | 右鄰 |
| b | c | d |
| d | b | a |
| a | d | c |
| c | a | b |

再看下圖:



這個排列可以命名為acbd。

我們再看一次這種排列下，每一物件的左鄰和右鄰:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 物件 | 左鄰 | 右鄰 |
| b | c | d |
| d | b | a |
| a | d | c |
| c | a | b |

因此，對環狀排列而言，bdac和acbd是一樣的，事實上，以下四個環狀排列是一樣的，acbd, cbda, bdac, dacb都是一樣的，如下圖所示:



對於任何一個n不同物件的排列，都有n個環狀排列，假設n=3，物件是A、B和C，排列是BAC，以下3個排列是BAC對應的環狀排列：

BAC，ACB，CBA

假設n=4，物件是A、B、C、D，排列是CDAB，以下4個排列是對應於CDAB的環狀排列：

CDAB，DABC，ABCD，BCDA

我們可得到以下的定律：

任何n個不同物件的排列，都有n個環狀排列。………………………(47.1)

對應於同一排列的環狀排列都是相同的因素，我們有以下的定理:

n個不同物件的環狀排列數量。

$\frac{P\_{n}^{n}}{n}=\frac{n!}{n}=\left(n-1\right)!$ ………………………………………………(47.2)

1. n=4的環狀排列：

$$\frac{P\_{n}^{n}}{n}=\left(n-1\right)!=3!=6$$

假設這四個物件是ABCD，則這六個環狀的排列是:

ABCD………………………………………(47.3)

ABDC………………………………………(47.4)

ACBD………………………………………(47.5)

ACDB………………………………………(47.6)

ADBC………………………………………(47.7)

ADCB………………………………………(47.8)

也許同學會問，BACD為何不在以上的排列中，我們可以看出，BACD有一個對應的環狀排列ACDB就是（47.6），所以我們可以說，（47.6）包含了BACD。

同學們一定會問，假如有一個排列，如何列出所有的排列對應的環狀排列呢？

令這個排列為x1x2…xn，則以下的排列是對應此排列的全部環狀排列：

x1x2…xn-1 xn

x2x3…xn x1

x3x4…x1 x2

.

.

.

Xnx1…xn-2 xn-1

1. 請列出31542的環狀排列:

答案：31524，15423，54231，42315，23154

1. 請列出ABCDE的環狀排列:

答案：ABCDE，BVDEA，CDEAB，DEABC，EABCD

最後，我們要討論如何列出所有的環狀排列，我們應該記得，n個不同物件環狀排列數是(n-1)!，這應該給我們一個靈感，解決此問題，方法如下：

1. 令此物件為a1, a2,…,an
2. 選取任一物件ai
3. 列出ai以外的(n-1)物件
4. 列出(n-1) 物件的所有排列
5. 在某一個排列的最前面價上ai
6. 列出1234的全部環狀排列:

答案：假設我們選了2，我們觀察列出所有134的排列如下

134

143

314

341

413

431

然後，我們將2加到做前面去。

2134

2143

2314

2341

2413

2431

1. 列出123的環狀排列:

答案：架設我們選了3，我們排列1和2如下:

12

21

再將3放到前面去，得到

312

321

以上是123的全部環狀排列。