(42)數學歸納法

 我們常常要證明一個數學公式的成立，如果用數學歸納法，做法如下:

 第一步:證明此公式在n為起始值成立。

 第二步:證明如果此公式在n=m時可以成立，則可導出此公式在n=m+1時可以成立。

 以下是一些例子:

1. $a\_{i}=1$

$$a\_{i+1}=2a\_{i}+1$$

$$a\_{n}=2^{n}-1$$

用數學歸納法:

第一步 n=1時，$左式=a\_{1}，右式=2^{n}-1=2^{1}=1$

$$∴ 左式=右式$$

$$因此，a\_{n}=2^{n}-1在n=1時成立$$

第二步 假設$a\_{n}=2^{n}-1$在n=m時成立，我們考慮n=m+1

$$左式=a\_{m+1}=2a\_{m}+1=2(2^{m}-1)+1=2^{m+1}-2+1=2^{m+1}-1$$

$$右式=2^{m+1}-1$$

$$∴ a\_{n}=2^{n}-1在n=m+1也成立$$

$$∴ a\_{n}=2^{n}-1成立$$

1. $S\_{n}=1+2+\cdots +n=\frac{n(n+1)}{2}$

這個公式可以用等差級數來證明，現在我們用數學歸納法

第一步 n=1

$$S\_{n}=\frac{1(1+1)}{2}=\frac{1×2}{2}=1$$

$$∴ S\_{n}=\frac{n(n+1)}{2}在n=1時成立$$

$$假設S\_{n}=\frac{n(n+1)}{2}在m時成立$$

$$S\_{m}=\frac{m(m+1)}{2}$$

$$我們要證明S\_{m+1}=\frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

$$左式=S\_{m+1}=S\_{m}+(m+1)=\frac{m(m+1)}{2}+\frac{2(m+1)}{2}=\frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

$$右式=\frac{(m+1)(m+2)}{2}=左式$$

$$∴ S\_{n}=\frac{n(n+1)}{2}成立$$

1. $1+h+h^{2}+\cdots +h^{n}=\frac{1-h^{n+1}}{1-h}$

這個公式在前面討論等比級數時證明過，現在我們用數學歸納法

第一步 n=1

$$左式=1+h+h^{2}+\cdots +h^{n}=1+h$$

$$右式=\frac{1-h^{1+1}}{1-h}=\frac{1-h^{2}}{1-h}=\frac{\left(1+h\right)(1-h)}{1-h}=1+h=左式$$

$$∴ 1+h+h^{2}+\cdots +h^{n}=\frac{1-h^{n+1}}{1-h}在n=1時成立$$

現在假設此公式在n=m時成立，我們要證明$1+h+h^{2}+\cdots +h^{m}+h^{m+1}=\frac{1-h^{m+2}}{1-h}$

$$左式=1+h+h^{2}+\cdots +h^{m}+h^{m+1}=\frac{1-h^{m+1}}{1-h}+h^{m+1}$$

$$=\frac{1-h^{m+1}}{1-h}+\frac{\left(1-h\right)h^{m+1}}{1-h}=\frac{1-h^{m+1}+h^{m+1}-h^{m+2}}{1-h}=\frac{1-h^{m+2}}{1-h}=右式$$

∴ 此公式成立

1. $1+5+9+\cdots +(4n-3)=n(2n-1)$

第一步 n=1， $左式=4×1-3=1$

$$右式=1(2×1-1)=1$$

∴ 此公式在n=1時成立

第二步 假設$1+5+9+\cdots +(4m-3)=m(2m-1)$

我們要證明

$$1+5+9+\cdots +(4m-3)+(4\left(m+1\right)-3)=(m+1)(2(m+1)-1)$$

$$1+5+9+\cdots +(4m-3)+(4m+1)=(m+1)(2m+1)$$

$$1+5+9+\cdots +(4m-3)=m(2m-1)$$

$$左式=m(2m-1)+(4m+1)=2m^{2}+3m+1=(2m+1)(m+1)=右式$$

∴ 此公式成立

1. Fibonacci數列

$$F\_{0}=0$$

$$F\_{1}=1$$

$$F\_{i}=F\_{i-2}+F\_{i-1}$$

$$F\_{2}=F\_{0}+F\_{1}=0+1=1$$

$$F\_{3}=F\_{1}+F\_{2}=1+1=2$$

$$F\_{4}=F\_{2}+F\_{3}=1+2=3$$

$$F\_{5}=F\_{3}+F\_{4}=2+3=5$$

 $\vdots $

公式是$F\_{0}+F\_{1}+F\_{2}+\cdots +F\_{n}=F\_{n+2}-1$

第一步 n=1

$$F\_{n+2}=F\_{3}=2$$

$$F\_{3}=F\_{1}+F\_{2}=1+1=2$$

$$∴ F\_{1}=F\_{3}-1$$

$$∴ n=1時，F\_{0}+F\_{1}+F\_{2}+\cdots +F\_{n}=F\_{n+2}-1成立$$

假設n=m時，$F\_{0}+F\_{1}+F\_{2}+\cdots +F\_{m}=F\_{m+2}-1$

我們要證明$F\_{0}+F\_{1}+F\_{2}+\cdots +F\_{m}+F\_{m+1}=F\_{m+3}-1$

$$左式=\left(F\_{0}+F\_{1}+F\_{2}+\cdots +F\_{m}\right)+F\_{m+1}=F\_{m+2}-1+F\_{m+1}$$

$$=F\_{m+1}+F\_{m+2}-1=F\_{m+3}-1=右式$$

∴ 此公式成立

1. $\sum\_{h=1}^{n}(-1)^{h}h^{2}=(-1)^{n}\frac{n(n+1)}{2}$

我們先看這個公式

n=5

$$左式=-1+4-9+16-25=-15$$

$$右式=(-1)^{5}\frac{5(5+1)}{2}=-15$$

n=6

$$左式=-1+4-9+16-25+36=21$$

$$右式=(-1)^{6}\frac{6(6+1)}{2}=21$$

第一步 n=1

$$左式=(-1)^{1}1^{1}=-1$$

$$右式=(-1)^{1}\frac{1(1+1)}{2}=-1$$

∴ 此公式在n=1時成立

假設$\sum\_{h=1}^{m}(-1)^{h}h^{2}=(-1)^{m}\frac{m(m+1)}{2}$

我們要推導$\sum\_{h=1}^{m+1}(-1)^{h}h^{2}=(-1)^{m+1}\frac{(m+1)(m+2)}{2}$

m為奇數時，$(-1)^{m}=-1，(-1)^{m+1}=1$

m為偶數時，$(-1)^{m}=1，(-1)^{m+1}=-1$

先考慮m為奇數時

$$\sum\_{h=1}^{m+1}(-1)^{h}h^{2}=\sum\_{h=1}^{m}(-1)^{h}h^{2}+(-1)^{m+1}(m+1)^{2}=-\frac{m\left(m+1\right)}{2}+\left(m+1\right)^{2}=\frac{-m\left(m+1\right)+2\left(m+1\right)^{2}}{2}=\frac{\left(m+1\right)\left(2\left(m+1\right)-m\right)}{2}=\frac{\left(m+1\right)\left(m+2\right)}{2}=\left(-1\right)^{m+1}\frac{\left(m+1\right)\left(m+2\right)}{2}(因為此時\left(-1\right)^{m+1}=1)=右式$$

同理可證 當m為偶數時$\sum\_{h=1}^{m+1}(-1)^{h}h^{2}=(-1)^{m+1}\frac{(m+1)(m+2)}{2}$

∴ 此公式成立

1. $1×4+2×7+3×10+\cdots +n(3n+1)=n(n+1)^{2}$

第一步 n=1

$$左式=1×4=4$$

$$右式=1(2)^{2}=1×4=4=左式$$

∴ 此公式在n=1時成立

第二步 假設$1×4+2×7+3×10+\cdots +m(3m+1)=m(m+1)^{2}$

我們要推導$1×4+2×7+3×10+\cdots +m\left(3m+1\right)+\left(m+1\right)\left(3\left(m+1\right)+1\right)=(m+1)(m+2)^{2}$

$$左式=m\left(m+1\right)^{2}+\left(m+1\right)\left(3m+4\right)=\left(m+1\right)\left(m\left(m+1\right)+3m+4\right)$$

$$=(m+1)(m^{2}+4m+4)=(m+1)\left(m+2\right)^{2}=右式$$

∴ 此公式成立

1. $\sum\_{h=1}^{n}h^{2}=1^{2}+2^{2}+3^{2}+\cdots +n^{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

第一步 n=1

$$左式=1^{2}=1$$

$$右式=\frac{1(2)(3)}{6}=1$$

∴ 此公式在n=1時成立

第二步 假設$\sum\_{h=1}^{m}h^{2}=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$

我們要推導$\sum\_{h=1}^{m+1}h^{2}=\frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$

$$左式=\sum\_{h=1}^{m}h^{2}+\left(m+1\right)^{2}=\frac{m\left(m+1\right)\left(2m+1\right)}{6}+\frac{6\left(m+1\right)^{2}}{6}$$

$$=\frac{\left(m+1\right)\left(2m^{2}+m+6m+6\right)}{6}=\frac{\left(m+1\right)\left(2m^{2}+7m+6\right)}{6}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}=右式$$

∴ 此公式成立

1. $\sum\_{h=1}^{n}h^{3}=1^{3}+2^{3}+3^{3}+\cdots +n^{3}=\frac{n^{2}(n+1)^{2}}{4}$

第一步 n=1

$$左式=1^{3}=1$$

$$右式=\frac{1^{2}(2)^{2}}{4}=1$$

∴ 此公式在n=1時成立

第二步 假設$\sum\_{h=1}^{m}h^{3}=\frac{m^{2}(m+1)^{2}}{4}$

我們要證明$\sum\_{h=1}^{m+1}h^{3}=\frac{(m+1)^{2}(m+2)^{2}}{4}$

$$左式=\sum\_{h=1}^{m}h^{3}+\left(m+1\right)^{3}=\frac{m^{2}\left(m+1\right)^{2}}{4}+\frac{4\left(m+1\right)^{3}}{4}$$

$$=\frac{\left(m+1\right)^{2}(m^{2}+4m+4)}{4}=\frac{(m+1)^{2}(m+2)^{2}}{4}=右式$$

∴ 此公式成立

1. $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\cdots +\frac{1}{1+2+\cdots +n}=\frac{2n}{n+1}$

第一步 n=1

左式=1

$$右式=\frac{2×1}{1+1}=\frac{2}{2}=1$$

∴ 此公式在n=1時成立

第二步 假設$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\cdots +\frac{1}{1+2+\cdots +m}=\frac{2m}{m+1}$

我們要證明$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\cdots +\frac{1}{1+2+\cdots +(m+1)}=\frac{2(m+1)}{m+2}$

$$左式=\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\cdots +\frac{1}{1+2+\cdots +m}+\frac{1}{1+2+\cdots +\left(m+1\right)}$$

$$=\frac{2m}{m+1}+\frac{1}{1+2+\cdots +\left(m+1\right)}$$

$$=\frac{2m}{m+1}+\frac{1}{\frac{\left(1+m+1\right)\left(m+1\right)}{2}}\left(按照等差級數公式\right)$$

$$=\frac{2m}{m+1}+\frac{2}{\left(m+1\right)\left(m+2\right)}=\frac{2m\left(m+2\right)+2}{\left(m+1\right)\left(m+2\right)}=\frac{2\left(m^{2}+2m+1\right)}{\left(m+1\right)\left(m+2\right)}$$

$$=\frac{2\left(m+1\right)^{2}}{\left(m+1\right)\left(m+2\right)}=\frac{2\left(m+1\right)}{m+2}=右式$$

∴ 此公式成立

1. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots +\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}$

第一步 n=2

$$左式=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=1.5$$

$$右式=\frac{2×2}{2+1}=\frac{4}{3}=1.3$$

∴ 公式成立

第二步 假設$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots +\frac{1}{m}>\frac{2m}{m+1}$

我們要證明

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots +\frac{1}{m+1}>\frac{2m+2}{m+2}$$

$$左式=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots +\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}>\frac{2m}{m+1}+\frac{1}{m+1}=\frac{2m+1}{m+1}$$

$$右式=\frac{2m+2}{m+2}$$

我們要證明左式>右式

也就是

$$\frac{2m+1}{m+1}>\frac{2m+2}{m+2}$$

$$\frac{a}{b}和\frac{c}{d}中，如ad>bc，則\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$$

現在a=2m+1

 b=m+1

 c=2(m+1)

 d=m+2

$$ad=(2m+1)(m+2)=2m^{2}+5m+2$$

$$bc=(m+1)×2×(m+1)=2\left(m+1\right)^{2}=2m^{2}+4m+2$$

可以看出$ad=2m^{2}+5m+2>bc=2m^{2}+4m+2$

左式=$\frac{2m+1}{m+1}>\frac{2m+2}{m+2}=右式$

∴ 此公式成立

1. $1×3+2×4+3×5+\cdots +n(n+2)=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

第一步 n=1

$$左式=1×3=3$$

$$右式=\frac{1(2)(2+7)}{6}=\frac{2×9}{6}=3$$

∴ 此公式在n=1時成立

第二步 假設$1×3+2×4+3×5+\cdots +m(m+2)=\frac{m(m+1)(2m+7)}{6}$

我們要證明

$$1×3+2×4+3×5+\cdots +(m+1)(m+3)=\frac{(m+1)(m+2)(2m+9)}{6}$$

$$左式=\frac{m\left(m+1\right)\left(2m+7\right)}{6}+\left(m+1\right)\left(m+3\right)$$

$$=\frac{m\left(m+1\right)\left(2m+7\right)+6\left(m+1\right)\left(m+3\right)}{6}=\frac{\left(m+1\right)\left(2m^{2}+7m+6m+18\right)}{6}$$

$$=\frac{\left(m+1\right)\left(2m^{2}+13m+18\right)}{6}=\frac{\left(m+1\right)\left(m+2\right)\left(2m+9\right)}{6}=右式$$

∴ 此公式成立

1. $\frac{1}{2×3}+\frac{1}{3×4}+\cdots +\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{2(n+2)}$

第一步 n=1

$$左式=\frac{1}{2×3}=\frac{1}{6}$$

$$右式=\frac{1}{2(3)}=\frac{1}{6}$$

∴ 此公式在n=1時成立

第二步 假設$\frac{1}{2×3}+\frac{1}{3×4}+\cdots +\frac{1}{(m+1)(m+2)}=\frac{m}{2(m+2)}$

我們要證明

$$\frac{1}{2×3}+\frac{1}{3×4}+\cdots +\frac{1}{(m+2)(m+3)}=\frac{(m+1)}{2(m+3)}$$

$$左式=\frac{1}{2×3}+\frac{1}{3×4}+\cdots +\frac{1}{\left(m+1\right)\left(m+2\right)}+\frac{1}{\left(m+2\right)\left(m+3\right)}$$

$$=\frac{m}{2\left(m+2\right)}+\frac{1}{\left(m+2\right)\left(m+3\right)}=\frac{m\left(m+3\right)+2}{2\left(m+2\right)\left(m+3\right)}=\frac{m^{2}+3m+2}{2\left(m+2\right)\left(m+3\right)}$$

$$=\frac{\left(m+1\right)\left(m+2\right)}{2\left(m+2\right)\left(m+3\right)}=\frac{m+1}{2\left(m+3\right)}=右式$$

∴ 此公式成立

1. 求證$5^{n}+3是4的倍數$

第一步 n=1

$$5^{1}+3=8是4的倍數$$

∴ 此命題在n=1時成立

第二步 假設$5^{m}+3=4h$

我們要證明$5^{m+1}+3=4h^{'}$

$$∵ 5^{m}+3=4h$$

$$∴5^{m}=4h-3$$

$$5^{m+1}+3=5∙5^{m}+3=5\left(4h-3\right)+3=20h-15+3=20h-12$$

$$=4(5h-3)$$

∴ 此公式成立

1. 試證$3∙5^{2n+1}+2^{3n+1}是17的倍數$

第一步 n=1

$$3∙5^{2+1}+2^{3+1}=3∙5^{3}+2^{4}=3×125+16=375+16=391=17×23$$

∴ 此命題在n=1時成立

第二步 假設$3∙5^{2m+1}+2^{3m+1}=17K$

我們要證明$3∙5^{2(m+1)+1}+2^{3(m+1)+1}=17K^{'}$

$$左式=3∙5^{\left(2m+3\right)}+2^{3m+4}=3∙5^{2}\left(5^{2m+1}\right)+2^{3}\left(2^{3m+1}\right)$$

$$=3∙25\left(5^{2m+1}\right)+8\left(2^{3m+1}\right)$$

$$=25\left(3∙5^{2m+1}+2^{3m+1}\right)-25∙2^{3m+1}+8∙2^{3m+1}$$

$$=25\left(3∙5^{2m+1}+2^{3m+1}\right)-\left(25-8\right)2^{3m+1}$$

$$=25(17K)-17(2^{3m+1})=17(25K-2^{3m+1})=17(K^{'})=右式$$

∴ 此命題成立

1. $3^{4n+2}+5^{2n+1}是14的倍數$

第一步 n=1

$$3^{4n+2}+5^{2n+1}=3^{6}+5^{3}=729+125=854=14(61)$$

∴ 此命題在n=1時成立

第二步 假設$3^{4m+2}+5^{2m+1}=14K$

我們要證明$3^{4(m+1)+2}+5^{2(m+1)+1}=3^{4m+6}+5^{2m+3}=14K^{'}$

$$左式=3^{4m+6}+5^{2m+3}=3^{4}\left(3^{4m+2}\right)+5^{2}\left(5^{2m+1}\right)=81\left(3^{4m+2}\right)+25\left(5^{2m+1}\right)$$

$$=81\left(3^{4m+2}+5^{2m+1}\right)-81\left(5^{2m+1}\right)+25\left(5^{2m+1}\right)$$

$$=81\left(14K\right)-\left(81-25\right)\left(5^{2m+1}\right)=81\left(14K\right)-56\left(5^{2m+1}\right)$$

$$=14(81K-4(5^{2m+1}))=14K^{'}=右式$$

∴ 此公式成立

1. $9^{n+1}-8n-9為4的倍數$

第一步 n=1

$$9^{2}-8-9=81-8-9=64=4×16$$

∴ 此命題在n=1時成立

第二步 假設$9^{n+1}-8n-9=4h$

我們要證明$9^{n+2}-8(n+1)-9=9^{n+2}-8n-17=4h^{'}$

$$左式=9^{n+2}-8n-8-9=9\left(9^{n+1}-8n-9\right)-8+64n+72$$

$$=9\left(4h\right)+64n+64=9\left(4h\right)+64(n+1)=4(9h+16\left(n+1\right))=4h^{'}$$

∴ 此命題成立

1. 試證$n^{3}+(n+1)^{3}+(n+2)^{3}是9的倍數$

第一步 n=1

$$1^{3}+2^{3}+3^{3}=1+8+9=18=9×2$$

∴ 此命題在n=1時成立

第二步 假設$m^{3}+(m+1)^{3}+(m+2)^{3}=9K$

我們要證明$(m+1)^{3}+(m+2)^{3}+(m+3)^{3}=9K^{'}$

∵ $m^{3}+(m+1)^{3}+(m+2)^{3}=9K$

$∴$ $(m+1)^{3}+(m+2)^{3}=9K-m^{3}$

$$∴ 左式=9K-m^{3}+\left(m+3\right)^{3}=9K-m^{3}+\left(m^{3}+9m^{2}+27m+27\right)$$

$$=9K+9m^{2}+27m+27=9(K+m^{2}+3m+3)=9K^{'}$$

∴ 此命題成立

1. 試證n>2，$5^{n}>3^{n}+4^{n}$

第一步 n=3

$$5^{n}=5^{3}=125$$

$$3^{n}+4^{n}=3^{3}+4^{3}=27+64=91$$

125>91

∴ 此命題在n=3時成立

第二步 假設$5^{m}>3^{m}+4^{m}$

我們要證明$5^{m+1}>3^{m+1}+4^{m+1}$

$$左式=5^{m+1}=5(5^{m})>5( 3^{m}+4^{m})$$

$$右式=3^{m+1}+4^{m+1}=3(3^{m})+4∙4^{m}=3(3^{m}+4^{m})+4^{m}$$

我們現在要比較$5\left( 3^{m}+4^{m}\right)和3(3^{m}+4^{m})+4^{m}$

$$5\left( 3^{m}+4^{m}\right)-3(3^{m}+4^{m})-4^{m}=2(3^{m}+4^{m})-4^{m}=2∙3^{m}+4^{m}>0$$

$$∴ 5\left( 3^{m}+4^{m}\right)>3(3^{m}+4^{m})+4^{m}$$

$$∴ 5^{m+1}>3^{m+1}+4^{m+1}$$

∴ 此命題成立