(41)等比級數

等比級數的數列定義如下:

$$a\_{1}、a\_{2}、a\_{3}\cdots a\_{n}$$

$$a、ar、ar^{2}\cdots ar^{n-1}$$

因此，在一個等比級數內，

$$a\_{i}=a\_{i-1}r\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (1)$$

$$\frac{a\_{i+1}}{a\_{i}}=r\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (2)$$

$$a\_{i}=ar^{i-1}\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (3)$$

以下都是等比級數的例子

1. a=2，r=2

2，4，8，16，32，64

1. $a=1，r=\frac{1}{2}$

$$1，\frac{1}{2}，\frac{1}{4}，\frac{1}{8}，\frac{1}{16}，\frac{1}{32}，\frac{1}{64}$$

1. a=1，r=-2

1，-2，4，-8，16，-32，64

1. $a=3，r=\frac{1}{3}$

$$3，1，\frac{1}{3}，\frac{1}{9}，\frac{1}{27}，\frac{1}{81}，\frac{1}{243}$$

1. a=2，r=3，第5項是什麼?

$$a\_{5}=ar^{5-1}=2(3)^{4}=2×81=162$$

1. $a=1，r=-\frac{1}{2}，第5項是什麼?$

$$a\_{5}=ar^{5-1}=1×(-\frac{1}{2})^{4}=1×\frac{1}{16}=\frac{1}{16}$$

1. $a=1，r=-\frac{1}{2}，第6項是什麼?$

$$a\_{6}=ar^{6-1}=1×(-\frac{1}{2})^{5}=-\frac{1}{32}$$

1. $\sqrt{2}-1，1，a，b是一等比級數，求r，a和b$

$$r=\frac{a\_{i+1}}{a\_{i}}=\frac{a\_{2}}{a\_{1}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$$

$$a=1×r=\sqrt{2}+1$$

$$b=ar=(\sqrt{2}+1)^{2}$$

以下是這個等比級數

$$\sqrt{2}-1，1，\sqrt{2}+1，(\sqrt{2}+1)^{2}$$

1. $\frac{1}{\sqrt{5}-1}，\frac{1}{4}，a，b是一等比級數，求r，a和b$

$$r=\frac{a\_{i+1}}{a\_{i}}=\frac{a\_{2}}{a\_{1}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{\sqrt{5}-1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$∴a=\frac{1}{4}×\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{16}$$

$$b=ar=\frac{\sqrt{5}-1}{16}×\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{(\sqrt{5}-1)^{2}}{64}=\frac{6-2\sqrt{5}}{64}$$

等比級數的和

$$令S\_{n}=a+ar+ar^{2}+\cdots +ar^{n-1}$$

$$rS\_{n}=ar+ar^{2}+\cdots +ar^{n}$$

$$∴ S\_{n}-rS\_{n}=a-ar^{n}$$

$$S\_{n}(1-r)=a(1-r^{n})$$

$$S\_{n}=\frac{a(1-r^{n})}{1-r}\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (4)$$

1. a=1，r=2，n=5

$$S\_{n}=1+2+4+8+16=31$$

用公式(4)

$$S\_{n}=\frac{a(1-r^{n})}{1-r}=\frac{1(1-2^{5})}{1-2}=\frac{1(1-32)}{-1}=\frac{-31}{-1}=31$$

1. $a=2，r=\frac{1}{2}，n=6$

$$S\_{n}=\frac{a(1-r^{n})}{1-r}=\frac{2(1-(\frac{1}{2})^{6})}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2(1-\frac{1}{64})}{\frac{1}{2}}=4(1-\frac{1}{64})=4(\frac{63}{64})=\frac{63}{16}$$

同學可以自行驗證答案的正確性