**(40)等差級數**

請看以下的數列:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |

我們可以看出，都等於2，比方說，，這個數列是一個等差數列。

等差級數有一個首項和公差d，而且

或者說

3，5，8，11，14是一個等差級數

∴ 1，-1，-3，-5，-7是一等差級數

是一等差級數

是一等差級數

我們有另一種方法來給等差級數下一定義，請看以下的式子

由此我們可以得到

我們也可以計算一下來驗證

驗證

驗證

驗證

等差級數的首項也可以用公式註明的

這個數列如下:

以下是這個數列:

3，5，7，9，11，13，15，17，19，21

同學們一看就知道這是個等差級數，同學們一定會問，等差級數的首項和差d是什麼?

因為

以下是這個數列:

-1，-3，-5，-7，-9，-11，-13

這也是一個等差級數

等差級數的和

假設是一個等差級數，我們可以用

來代表這個等差級數的和

現在我們考慮n是偶數的等差級數

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 |

要求等差級數的和，我們可以如此做

先求

再求

再看

換句話說，我們可以說

如果一個等差級數的首項是，公差是d，則

末項

假設

假設

假設

以下的式子是很容易了解的:

因此，我們可以將分成份

因為每一組的和都是一樣的，我們可以得到下列的式子:

以上的討論，假設n是偶數，如果n是奇數，仍然是成立的。

我們先看一個例子n=5，

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |

以上的數列是一個等差級數

此時

但還有一個，我們知道

如果n是奇數，

因為

因為n是奇數，我們也可以用以下的式子

也許大家會問一定是偶數嗎?

要知道，

但(n-1)是偶數

是偶數

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |

n=6(偶數)

同學們可以驗證這個結果

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 |

n=7(奇數)

同學們可以驗證這個結果

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| -3 | -5 | -7 | -9 | -11 | -13 |

n=6(偶數)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
| -2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |

n=7(奇數)

同學們可以看出公式(5)和公式(6)是一樣的，因此我們可以用以下的公式:

我們還有一些有趣的求和公式

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| -3 | -5 | -7 | -9 | -11 | -13 |

我們也可以用公式(5)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
| -2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |

我們也可以用公式(5)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

我們也可以用公式(5)

第17題給了我們一個有用的公式

也可以直接用公式(5)

各位同學應該記住這個公式

我們現在繼續討論等差級數的和

我們可以利用公式(7)來計算等差級數的和

假設等差級數是1，3，5，7，9，11，n=6

這個等差級數是1，-1，-3，-5，-7，-9，-11

公式(7)也給了我們一個新的想法，對任何而言，我們都可以說

也就是說，任何一個都對應一個等差級數

a=1，b=0

等差級數是1，3，5，7，9，11，13

同學們可以自行驗證

a=-1，b=2

等差級數是1，-1，-3，-5，-7，-9，-11

同學們可以自行驗證