**(40)等差級數**

請看以下的數列:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$a\_{1}$$ | $$a\_{2}$$ | $$a\_{3}$$ | $$a\_{4}$$ | $$a\_{5}$$ | $$a\_{6}$$ | $$a\_{7}$$ | $$a\_{8}$$ | $$a\_{9}$$ | $$a\_{10}$$ |
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |

我們可以看出，$a\_{i}-a\_{i-1}$都等於2，比方說$a\_{7}-a\_{6}=13-11=2$，$a\_{4}-a\_{3}=7-5=2$，這個數列是一個等差數列。

等差級數有一個首項$a\_{1}$和公差d，而且$a\_{i}-a\_{i-1}=d$

或者說

$$a\_{i+1}=a\_{i}+d\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (1)$$

1. $a\_{1}=2，d=3$

$$a\_{2}=2+3=5$$

$$a\_{3}=5+3=8$$

$$a\_{4}=8+3=11$$

$$a\_{5}=11+3=14$$

3，5，8，11，14是一個等差級數

1. $a\_{1}=1，d=-2$

$$a\_{2}=1-2=-1$$

$$a\_{3}=-1-2=-3$$

$$a\_{4}=-3-2=-5$$

$$a\_{5}=-5-2=-7$$

∴ 1，-1，-3，-5，-7是一等差級數

1. $a\_{1}=0，d=\frac{1}{2}$

$$a\_{2}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$a\_{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$a\_{4}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$a\_{5}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$$

$0，\frac{1}{2}，1，\frac{3}{2}，2$是一等差級數

1. $a\_{1}=1，d=-\frac{1}{2}$

$$a\_{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$a\_{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

$$a\_{4}=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$a\_{5}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-1$$

$$a\_{6}=-1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$$

$$a\_{7}=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-2$$

$∴1，\frac{1}{2}，0，-\frac{1}{2}，-\frac{3}{2}，-2$是一等差級數

我們有另一種方法來給等差級數下一定義，請看以下的式子

$$a\_{1}=a\_{1}$$

$$a\_{2}=a\_{1}+d$$

$$a\_{3}=a\_{2}+d=a\_{1}+2d$$

$$a\_{4}=a\_{3}+d=a\_{1}+3d$$

由此我們可以得到

$$a\_{i}=a\_{1}+\left(i-1\right)d\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (2)$$

1. $a\_{1}=2，d=3$

$$a\_{4}=2+(4-1)×3=2+9=11$$

我們也可以計算一下來驗證

$$a\_{1}=2$$

$$a\_{2}=2+3=5$$

$$a\_{3}=a\_{2}+3=5+3=8$$

$$a\_{4}=a\_{3}+3=8+3=11$$

1. $a\_{1}=-1，d=-2$

$$a\_{5}=-1+\left(5-1\right)×\left(-2\right)=-1+4×\left(-2\right)=-1-8=-9$$

驗證

$$a\_{1}=-1$$

$$a\_{2}=-1-2=-3$$

$$a\_{3}=-3-2=-5$$

$$a\_{4}=-5-2=-7$$

$$a\_{5}=-7-2=-9$$

1. $a\_{1}=1，d=\frac{1}{2}$

$$a\_{4}=1+(4-1)×(\frac{1}{2})=1+3×(\frac{1}{2})=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

驗證

$$a\_{1}=1$$

$$a\_{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$a\_{3}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$$

$$a\_{4}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

1. $a\_{1}=-2，d=-\frac{1}{2}$

$$a\_{3}=-2+\left(3-1\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=-2+2\left(-\frac{1}{2}\right)=-2-1=-3$$

驗證

$$a\_{1}=-2$$

$$a\_{2}=-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$$

$$a\_{3}=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{6}{2}=-3$$

等差級數的首項也可以用公式註明的

1. $a\_{i}=2i+1$

這個數列如下:

$$a\_{1}=2(1)+1=3$$

$$a\_{2}=2(2)+1=5$$

$$a\_{3}=2(3)+1=7$$

$$a\_{4}=2(4)+1=9$$

$$a\_{5}=2(5)+1=11$$

以下是這個數列:

3，5，7，9，11，13，15，17，19，21

同學們一看就知道這是個等差級數，同學們一定會問，等差級數的首項和差d是什麼?

因為$a\_{i}=2i+1$

$$∴ a\_{1}=2(1)+1=3$$

$$d=a\_{i}-a\_{i-1}=\left(2i+1\right)-\left[2\left(i-1\right)+1\right]=2i+1-2i+2-1=2$$

1. $a\_{i}=-2i+1$

$$a\_{1}=-2(1)+1=-1$$

$$a\_{2}=-2\left(2\right)+1=-3$$

$$a\_{3}=-2\left(3\right)+1=-5$$

$$a\_{4}=-2\left(4\right)+1=-7$$

以下是這個數列:

-1，-3，-5，-7，-9，-11，-13

這也是一個等差級數

$$a\_{1}=-2\left(1\right)+1=-2+1=-1$$

$$d=a\_{i}-a\_{i-1}=\left(-2i+1\right)-\left[-2\left(i-1\right)+1\right]=-2i+1+2i-2-1=-2$$

等差級數的和

假設$a\_{1}，a\_{2}，\cdots ，a\_{n}$是一個等差級數，我們可以用

$$\sum\_{i=1}^{n}a\_{i}=a\_{1}+a\_{2}+\cdots +a\_{n}$$

來代表這個等差級數的和

現在我們考慮n是偶數的等差級數

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$a\_{1}$$ | $$a\_{2}$$ | $$a\_{3}$$ | $$a\_{4}$$ | $$a\_{5}$$ | $$a\_{6}$$ | $$a\_{7}$$ | $$a\_{8}$$ |
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 |

$$\sum\_{i=1}^{n}a\_{i}=1+3+5+7+9+11+13+15=64$$

要求等差級數的和，我們可以如此做

先求$a\_{1}+a\_{n}=a\_{1}+a\_{8}=1+15=16$

再求$a\_{2}+a\_{n-1}=a\_{2}+a\_{7}=3+13=16$

再看$a\_{3}+a\_{n-2}=a\_{3}+a\_{6}=5+11=16$

換句話說，我們可以說

$$a\_{1}+a\_{n}=a\_{2}+a\_{n-1}=a\_{3}+a\_{n-2}=a\_{4}+a\_{n-3}$$

如果一個等差級數的首項是$a\_{1}$，公差是d，則

$$a\_{i}=a\_{1}+\left(i-1\right)d\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (3)$$

末項$a\_{n}=a\_{1}+\left(n-1\right)d\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \left(4\right)$

假設$a\_{1}=-2，d=3，n=7$

$$a\_{7}=a\_{1}+\left(7-1\right)d=\left(-2\right)+6\left(3\right)=-2+18=16$$

假設$a\_{1}=1，d=\frac{1}{2}，n=5$

$$a\_{5}=a\_{1}+\left(5-1\right)d=1+4×\frac{1}{2}=1+2=3$$

假設$a\_{1}=-1，d=-2，n=4$

$$a\_{4}=a\_{1}+\left(4-1\right)d=-1+3\left(-2\right)=-1-6=-7$$

以下的式子是很容易了解的:

$$a\_{1}+a\_{n}=a\_{1}+(a\_{1}+\left(n-1\right)d)=2a\_{1}+\left(n-1\right)d$$

$$a\_{2}+a\_{n-1}=(a\_{1}+d)+(a\_{1}+\left(n-2\right)d)=2a\_{1}+\left(n-1\right)d$$

$$a\_{3}+a\_{n-2}=(a\_{1}+2d)+(a\_{1}+\left(n-3\right)d)=2a\_{1}+\left(n-1\right)d$$

$$a\_{4}+a\_{n-3}=(a\_{1}+3d)+(a\_{1}+\left(n-4\right)d)=2a\_{1}+\left(n-1\right)d$$

因此，我們可以將$a\_{1}，a\_{2}，\cdots ，a\_{n}$分成$\frac{n}{2}$份

$$(a\_{1}，a\_{n})$$

$$(a\_{2}，a\_{n-1})$$

 $\vdots $

$$(a\_{\frac{n}{2}}，a\_{\frac{n}{2}+1})$$

因為每一組的和都是一樣的，我們可以得到下列的式子:

$$\sum\_{i=1}^{n}a\_{i}=\frac{n}{2}(a\_{1}+a\_{n})\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (5)$$

以上的討論，假設n是偶數，如果n是奇數，$\sum\_{i=1}^{n}a\_{i}=\frac{n}{2}(a\_{1}+a\_{n})$仍然是成立的。

我們先看一個例子n=5，

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $$a\_{1}$$ | $$a\_{2}$$ | $$a\_{3}$$ | $$a\_{4}$$ | $$a\_{5}$$ |
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |

以上的數列是一個等差級數

$$\sum\_{i=1}^{5}a\_{i}=1+3+5+7+9=25$$

此時$a\_{1}+a\_{n}=a\_{1}+a\_{5}=1+9=10$

$$a\_{2}+a\_{n-1}=a\_{2}+a\_{4}=3+7=10$$

但還有一個$a\_{3}=5$，我們知道

$$a\_{3}=\frac{a\_{1}+a\_{n}}{2}=\frac{a\_{1}+a\_{5}}{2}=\frac{1+9}{2}=5$$

如果n是奇數，$a\_{\frac{n+1}{2}}=\frac{a\_{1}+a\_{n}}{2}$

因為 $a\_{1}+a\_{n}=a\_{2}+a\_{n-1}=a\_{3}+a\_{n-2}=a\_{4}+a\_{n-3}\cdots =a\_{\frac{n-1}{2}}+a\_{\frac{n+3}{2}}$

$$∴ \sum\_{i=1}^{n}a\_{i}=(a\_{1}+a\_{n})\frac{n-1}{2}+\frac{a\_{1}+a\_{n}}{2}=(a\_{1}+a\_{n})(\frac{n-1}{2}+\frac{1}{2})=(a\_{1}+a\_{n})\frac{n}{2}$$

因為n是奇數，我們也可以用以下的式子

$$\sum\_{i=1}^{n}a\_{i}=(\frac{a\_{1}+a\_{n}}{2})n\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (6)$$

也許大家會問$\frac{a\_{1}+a\_{n}}{2}$一定是偶數嗎?

要知道，$a\_{n}=a\_{1}+\left(n-1\right)d$

$$∴ a\_{1}+a\_{n}=a\_{1}+(a\_{1}+\left(n-1\right)d)=2a\_{1}+\left(n-1\right)d$$

但(n-1)是偶數

$$∴ a\_{1}+a\_{n}=2a\_{1}+2hd$$

$∴ a\_{1}+a\_{n}$是偶數

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$a\_{1}$$ | $$a\_{2}$$ | $$a\_{3}$$ | $$a\_{4}$$ | $$a\_{5}$$ | $$a\_{6}$$ |
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |

n=6(偶數)

$$\sum\_{i=1}^{6}a\_{i}=(a\_{1}+a\_{n})\frac{n}{2}=(1+11)\frac{6}{2}=(12)(3)=36$$

同學們可以驗證這個結果

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$a\_{1}$$ | $$a\_{2}$$ | $$a\_{3}$$ | $$a\_{4}$$ | $$a\_{5}$$ | $$a\_{6}$$ | $$a\_{7}$$ |
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 |

n=7(奇數)

$$\sum\_{i=1}^{7}a\_{i}=(\frac{a\_{1}+a\_{n}}{2})n=\frac{1+13}{2}×7=7×7=49$$

同學們可以驗證這個結果

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$a\_{1}$$ | $$a\_{2}$$ | $$a\_{3}$$ | $$a\_{4}$$ | $$a\_{5}$$ | $$a\_{6}$$ |
| -3 | -5 | -7 | -9 | -11 | -13 |

n=6(偶數)

$$\sum\_{i=1}^{6}a\_{i}=\left(a\_{1}+a\_{6}\right)\frac{6}{2}=\left(-3-13\right)\frac{6}{2}=\left(-16\right)\frac{6}{2}=-48$$

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$a\_{1}$$ | $$a\_{2}$$ | $$a\_{3}$$ | $$a\_{4}$$ | $$a\_{5}$$ | $$a\_{6}$$ | $$a\_{7}$$ |
| -2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |

n=7(奇數)

$$\sum\_{i=1}^{7}a\_{i}=(\frac{a\_{1}+a\_{n}}{2})n=(\frac{-2+10}{2})×7=\frac{8}{2}×7=28$$

同學們可以看出公式(5)和公式(6)是一樣的，因此我們可以用以下的公式:

$$\sum\_{i=1}^{n}a\_{i}=\frac{(a\_{1}+a\_{n})n}{2}\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (7)$$

我們還有一些有趣的求和公式

$$∵ a\_{1}=a\_{1}，a\_{n}=a\_{1}+\left(n-1\right)d$$

$$∴ \sum\_{i=1}^{n}a\_{i}=\frac{n}{2}\left(a\_{1}+a\_{n}\right)=\frac{n}{2}\left(a\_{1}+a\_{1}+\left(n-1\right)d\right)=\frac{n}{2}\left(2a\_{1}+\left(n-1\right)d\right)$$

$$=na\_{1}+\frac{n\left(n-1\right)}{2}d\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (8)$$

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$a\_{1}$$ | $$a\_{2}$$ | $$a\_{3}$$ | $$a\_{4}$$ | $$a\_{5}$$ | $$a\_{6}$$ |
| -3 | -5 | -7 | -9 | -11 | -13 |

$$a\_{1}=-3，d=-2，n=6$$

$$∴ \sum\_{i=1}^{n}a\_{i}=na\_{1}+\frac{n\left(n-1\right)}{2}d=6\left(-3\right)+\frac{6×5}{2}\left(-2\right)=-18-30=-48$$

我們也可以用公式(5)

$$\sum\_{i=1}^{6}a\_{i}=\left(a\_{1}+a\_{6}\right)\frac{n}{2}=\left(-3-13\right)\frac{6}{2}=\left(-16\right)3=-48$$

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$a\_{1}$$ | $$a\_{2}$$ | $$a\_{3}$$ | $$a\_{4}$$ | $$a\_{5}$$ | $$a\_{6}$$ | $$a\_{7}$$ |
| -2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |

$$a\_{1}=-2，d=2，n=7$$

$$\sum\_{i=1}^{7}a\_{i}=na\_{1}+\frac{n\left(n-1\right)}{2}d=7\left(-2\right)+\frac{7×6}{2}\left(2\right)=-14+\frac{42}{2}\left(2\right)=28$$

我們也可以用公式(5)

$$\sum\_{i=1}^{7}a\_{i}=(\frac{a\_{1}+a\_{n}}{2})n=(\frac{-2+10}{2})×7=4×7=28$$

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $$a\_{1}$$ | $$a\_{2}$$ | $$a\_{3}$$ | $$a\_{4}$$ | $$a\_{5}$$ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

$$a\_{1}=1，d=1，n=5$$

$$\sum\_{i=1}^{5}a\_{i}=na\_{1}+\frac{n\left(n-1\right)}{2}d=5×1+\frac{5×4}{2}×1=5+10=15$$

我們也可以用公式(5)

$$\sum\_{i=1}^{5}a\_{i}=(\frac{a\_{1}+a\_{n}}{2})n=(\frac{1+5}{2})×5=3×5=15$$

第17題給了我們一個有用的公式

$$a\_{1}=1，d=1$$

$$\sum\_{i=1}^{n}a\_{i}=a\_{1}+a\_{2}+\cdots +a\_{n}$$

$$\sum\_{i=1}^{n}a\_{i}=na\_{1}+\frac{n\left(n-1\right)}{2}d=n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{2n+n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

也可以直接用公式(5)

$$\sum\_{i=1}^{n}a\_{i}=(\frac{a\_{1}+a\_{n}}{2})n=\frac{1+n}{2}n=\frac{n(n+1)}{2}$$

各位同學應該記住這個公式

$$a\_{i}=a\_{i-1}+1，a\_{1}=1$$

$$\sum\_{i=1}^{100}a\_{i}=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{100×101}{2}=50×101=5050$$

$$\sum\_{i=1}^{3}a\_{i}=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{3×4}{2}=6$$

$$\sum\_{i=1}^{5}a\_{i}=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{5×6}{2}=15$$

我們現在繼續討論等差級數的和

$$\sum\_{i=1}^{n}a\_{i}=\frac{n}{2}\left(a\_{1}+a\_{n}\right)=\frac{n}{2}\left(a\_{1}+a\_{1}+\left(n-1\right)d\right)=\frac{n}{2}\left(2a\_{1}+\left(n-1\right)d\right)$$

$$=\frac{d}{2}n^{2}+(a\_{1}-\frac{d}{2})n\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (9)$$

我們可以利用公式(7)來計算等差級數的和

1. $a\_{1}=1，d=2$

$$\sum\_{i=1}^{n}a\_{i}=\frac{d}{2}n^{2}+(a\_{1}-\frac{d}{2})n=\frac{2}{2}n^{2}+(1-\frac{2}{2})n=n^{2}$$

假設等差級數是1，3，5，7，9，11，n=6

$$\sum\_{i=1}^{n}a\_{i}=(\frac{a\_{1}+a\_{n}}{2})n=\frac{1+11}{2}×6=6×6=36=n^{2}$$

1. $a\_{1}=1，d=-2$

$$\sum\_{i=1}^{n}a\_{i}=\frac{d}{2}n^{2}+\left(a\_{1}-\frac{d}{2}\right)n=\frac{-2}{2}n^{2}+\left(1+\frac{2}{2}\right)n=-n^{2}+2n$$

這個等差級數是1，-1，-3，-5，-7，-9，-11

$$\sum\_{i=1}^{n}a\_{i}=\left(\frac{a\_{1}+a\_{n}}{2}\right)n=\frac{1-11}{2}×7=\frac{-10}{2}×7=-35$$

$$-n^{2}+2n=-\left(7\right)^{2}+2×7=-49+14=-35$$

公式(7)也給了我們一個新的想法，對任何$an^{2}+bn$而言，我們都可以說

$$an^{2}+bn=\frac{d}{2}n^{2}+\left(a\_{1}-\frac{d}{2}\right)n$$

$$\frac{d}{2}=a ∴d=2a$$

$$\left(a\_{1}-\frac{d}{2}\right)=b ∴ a\_{1}=\frac{d}{2}+b=a+b$$

也就是說，任何一個$an^{2}+bn$都對應一個等差級數

$$d=2a，a\_{1}=a+b\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (10)$$

1. $an^{2}+bn=n^{2}$

a=1，b=0

$$∴ d=2a=2$$

$$a\_{1}=a+b=1$$

等差級數是1，3，5，7，9，11，13

同學們可以自行驗證$\sum\_{i=1}^{n}a\_{i}=n^{2}$

1. $an^{2}+bn=-n^{2}+2n$

a=-1，b=2

$$d=2a=-2$$

$$a\_{1}=a+b=-1+2=1$$

等差級數是1，-1，-3，-5，-7，-9，-11

同學們可以自行驗證$\sum\_{i=1}^{n}a\_{i}=-n^{2}+2n$