**(23) 向量的內積**

請看下圖:



圖中有有兩個向量:A和B，他們的起點在同一點，我們希望知道他們的夾角。要知道θ，我們可以連接A和B，形成一個三角形如下圖：



根據三角函數的餘弦定律

----------------------------------------------------------------(1)

-------------------------------------------------------------------(2)

----------------------------------------------------------------------(3)

我們仍要知道，須知我們並不知道A和B的座標，只知道以及

假設OAB的座標如下；

我們又知,

從上式可得

==

=----------------------------------------------------(4)

在方程式(1)中有

----------------------------------------------------------------------(5)

將(2)和(3)代入(5)

2 -------------------(6)

將(6)代入(1)，可得---------------------------------------------------(7)

是和的內積，我們可以用來表示和的內積。所以向量的內積之定義如下:

假設有和，則和的內積是

------------------------------------------------------------------------(8)

將(8)代入(7)，可得

------------------------------------------------------------------------------(9)

我們可以說兩個向量的內積和他們的夾角有關，內積有多種用途，我們的興趣其實只要知道這兩個向量是否互相垂直，如果互相垂直，則COS=0，也就是說，如果，則和就是互相垂直的。

1. =(2,0)，=(0,1)

=(2\*0+0\*1)=(0\*0)=0

和互相垂直

下圖可以顯示這兩個向量互相垂直



請注意，向量只要方向和長度，在平面上的座標是不重要的。

1. =(1,1)，=(-2,2)

=(1\*(-2)+1\*(2))=(-2+2)=0

和互相垂直，和的圖如下:



各向量如下圖所示:



°

可知兩向量互相平行

=2

各向量如下圖



各向量如下圖



**內積的另一解釋**

內積的推導與兩個向量的夾角有關，請看下圖



在過去，我們要想知道COS的大小，是將A和B連接起來得到一個三角形OAB然後我們利用餘弦函數定理，而得到以下公式:

我們從O點畫出一條與X軸平行的直線



假設

假設

則



同理所得

按照三角函數的和差公式

故得

**規格化的向量**

向量可以有任意的長度，但有時我們需要一個長度為1的向量，方向仍需是原來的，我們用一個函數來解釋。

假設

我們可以看出

(7)

可以看出

任意一個向量A都可以轉換成 A的長度一定是1，方向和C是一樣的，這種向量是規格化的向量。我們現在考慮另一個問題，假設我們只有一個向量，我們要有一個和垂直的向量，這種有兩個

和及都是垂直的

(8)

和及都是垂直的，這些向量可用下圖表示



我們可以看出對向量而言，是反時鐘旋轉的，而是順時鐘旋轉的。

我們也可以看出和 ，下圖顯示了



以上的資料也是可以用來決定要選

(9)

和與都是互相垂直的，它們的關係如下圖



此時，逆時針旋轉 順時針。以上的做法，的長度和的長度是一樣的，如果我們規定的長度為d，可以用規格的向量求得，也就是我們可以利用以下的公式

如此 圖為=1

(10) ，我們要有一個長度為2而又與垂直的向量

我們可以看出的長度

符合我們的長度

(11)

符合我們的要求

**向量的正射影**

請看以下的圖



和之間有夾角，在上的垂線和交於C點，我們先求OC的長度。

(12)

(13)

我們再看一下原來的圖



所謂的在的正射影除了OC的長度以外，還要包含它的方向，OC的方向和的方向是一樣的，因此在上的正射影是一向量:

(14)

在題(12)中得=2

在的正射影向量是

我們可以看出，的方向和的方向相同

(15)

從題(13)中可知

我們可以看出

，的方向和的方向也是相同的

根據以上的辯論，我們可以有以下的有關正射影的向量公式。

向量在向量上的正射影與向量

(16)

(17)

**向量的分向量**

請看下圖



我們可以得知在上的兩個分向量在的性質如下:

1. 是在上的正射影
2. 與互相垂直

(18)

+=(4,2)

=(4,2)-(4,0)=(0,2)

各向量的圖如下



(19)

+=(4,3)

=(4,3)-(0,3)=(4,0)

各向量的圖如下

