**(18) 三角函數的加減公式**

**和角公式**

我們要證明sin(α＋β)＝sinαcosβ＋cosαsinβ



上圖中，⊥，⊥，⊥，⊥

證明：sin(α＋β)＝sinαcosβ＋cosαsinβ

過程：

∵∠ACD＝∠OCB (對頂角)

∴∠EAD＝

∴∠EAD＝α

…(1)

先考慮

在△OAD中，＝sinβ

在△AED中，∠EAD＝α

＝cosα

＝cosα＝sinβcosα…(2)

再考慮

在△ODF中，＝sinα

在△OAD中，

＝

…(3)

將(2)和(3)代入(1)中，可以得到

sin(α＋β)＝sinαcosβ＋cosαsinβ

同樣方法也可以證明cos(α＋β)＝cosαcosβsinαsinβ

這個就留給同學做練習

我們可以將sin(αβ)看成sin(α＋(β))

然後代入前面的公式，得到sin(αβ)＝sinαcosβcosαsinβ

同理我們利用cos(α＋β)的公式，可以得到cos(αβ)＝cosαcosβ＋sinαsinβ

三角函數的加減公式如下

1. sin(α＋β)＝sinαcosβ＋cosαsinβ
2. sin(αβ)＝sinαcosβcosαsinβ
3. cos(α＋β)＝cosαcosβsinαsinβ
4. cos(αβ)＝cosαcosβ＋sinαsinβ
5. (於例題9證明)
6.

例1. 求sin15°和cos15°

過程：

例2. 證明sin(90°α)＝cosα

過程：

sin(90°α)

＝sin90°cosαcos90°sinα

＝1×cosα0×sinα

＝cosα Q.E.D.

例3. 證明sin(α＋β) sin(αβ)＝sin2αsin2β

過程：

sin(α＋β) sin(αβ)

＝(sinαcosβ＋cosαsinβ)(sinαcosβcosαsinβ)

＝sin2αcos2βcos2αsin2β

＝sin2α(1sin2β)sin2α)sin2β

＝sin2αsin2β

例4. 證明cos(α＋β) cos(αβ)＝cos2αsin2β

過程：

cos(α＋β) cos(αβ)

＝(cosαcosβsinαsinβ)(cosαcosβ＋sinαsinβ)

＝cos2αcos2βsin2αsin2β

＝cos2α(1sin2β)cos2α)sin2β

＝cos2αsin2β

例5. 利用和角公式證明sin2α＝2sinαcosα

過程：

sin2α

＝sin(α＋α)

＝sinαcosα＋cosαsinα

＝2 sinαcosα

例6. 利用和角公式證明cos2α＝cos2αsin2α

過程：

cos2α

＝cos(α＋α)

＝cosαcosαsinαsinα

＝cos2αsin2α

例7. 已知sinA＋cosA＝，求sin2A

過程：

(sinA＋cosA)2＝…(1)

(sinA＋cosA)2＝1+2sinAcosA…(2)

由(1)(2)可知

2sinAcosA＝

sin2A＝2sinAcosA＝

答：sin2A＝

例8. 已知sinA＝，求sin2A

過程：

sinA＝

cosA＝

sin2A＝2sinAcosA＝

答：sin2A＝

例9. 證明

過程：

Q.E.D.

例10. 證明

過程：

Q.E.D.

做例題11前，我們先了解**投影定理**。



△ABC中，∠A、∠B、∠C的對應邊分別為*a、b、c。*

則*a*cosB＋*b*cosA＝*c*

*a*sinB*b*sinA＝0

證明：



做邊上的高，且高與交點為D。

設＝*c1*、＝*c2*

*c*＝*c1*＋*c2*＝*b* cosA＋*a* cosB

*a* sinB*b* sinA＝＝0

Q.E.D.

例11. △ABC中，∠A、∠B、∠C的對應邊分別為*a、b、c*。證明對任意角θ：

*a* cos(θB)＋*b* cos(θ＋A)＝*c* cosθ

過程：

*a* cos(θB)＋*b* cos(θ＋A)

＝*a*(cosθcosB＋sinθsinB)＋*b*(cosθcosAsinθsinA)

＝*a*cosθcosB＋*b*cosθcosA＋*a*sinθsinB*b*sinθsinA

＝cosθ(*a*cosB＋*b*cosA) ＋sinθ(*a*sinB*b*sinA)

＝cosθ×*c*＋sinθ×0 (利用投影定理)

＝*c* cosθ

我們也可以在三角形中證明，請看下圖：



上圖中，△ABC中，∠A、∠B、∠C的對應邊分別為*a、b、c*。

⊥、⊥、//

設∠BAD＝θ、∠CAB＝α、∠CBA＝β

∠CAD＝α＋θ

△ABF中，*c* cosθ＝…(1)

△ACE中，*b* cos(θ＋α)＝…(2)

由外角定理：

∠BDA＋θ＝β

∠BDA＝βθ

∵//

∴∠CBG＝∠BDA＝βθ

△CGB中，＝*a* cos(∠CBG)＝*a* cos(βθ) ＝*a* cos(θβ)

又＝，因此*a* cos(θβ)＝…(3)

由圖可知， ＝＋，將(1)(2)(3)代入

*c* cosθ＝*b* cos(θ＋α)＋*a* cos(θβ)

只看△ABC時，α＝∠A、β＝∠B

即*a* cos(θB)＋*b* cos(θ＋A)＝*c* cosθ

Q.E.D.