**(03) 直角坐標**

**一、直角坐標應用**

1. 直角坐標上，P點坐標為(1,3)，Q點坐標為(2,5)，則兩點距離為？

 解：

 $\sqrt{(1-2)^{2}+(3-5)^{2}}=\sqrt{(-1)^{2}+(-2)^{2}}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

2. 如下圖，△*ABC*是等腰三角形，$\overline{AC}=\overline{BC}=5$，求*C*點坐標。



 解：

D為$\overline{AB}$中點，△ADC是直角三角形，故

 $\overline{AC}^{2}=\overline{CD}^{2}+\overline{AD}^{2}$

 $5^{2}=\overline{CD}^{2}+(\frac{6}{2})^{2}$

 $25=\overline{CD}^{2}+3^{2}$

 $\overline{CD}^{2}$＝259

 $\overline{CD}^{2}$＝16

$\overline{CD}$＝4 (負不合)

故C點坐標是(3,4)

3. 如下圖，$\overline{PQ}$是圓C的直徑，P點坐標為(1,1)，Q點坐標為(2,2)，求圓C的半徑。



 解：

$$\overline{PQ}=\sqrt{(-1-2)^{2}+(-1-2)^{2}}=\sqrt{3^{2}+3^{2}}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

 圓C的半徑＝$3\sqrt{2}×\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$

4. 如下圖，$\overline{PQ}$是圓O的直徑，P點坐標為(1,1)，Q點坐標為(1,1)，

求圓心O的坐標。



 解：

 O點的*x*坐標：$O\_{x}=\frac{-1+1}{2}=\frac{0}{2}=0$，O點的*y*坐標：$O\_{y}=\frac{-1+1}{2}=\frac{0}{2}=0$

 圓心O的坐標是(0,0)

5. 如下圖，ABCD是邊長為5的正方形，A點坐標是(1,2)，求B、C、D點的坐標。



 解：

 B點坐標：(1＋5,2)＝(6,2)

 C點坐標：(1＋5,2＋5)＝(6,7)

 D點坐標：(1,2＋5)＝(1,7)

6. 接續5.，求

 (1) 通過A、B的直線方程式。 (2) 通過A、D的直線方程式。

 (3) 通過B、C的直線方程式。 (4) 通過B、D的直線方程式。

 解：

 (1) 通過A、B的直線方程式是*y*=2。

 (2) 通過A、D的直線方程式是*x*=1。

 (3) $\overline{CD}//\overline{AB}$，通過C、D的直線方程式是*y*=7。

 (4) 設通過B、D的直線方程式為*y*=*ax*＋*b*。

 將B、D坐標代入得聯立方程式

 $\left\{\begin{matrix}7=a+b\\2=6a+b\end{matrix}\right.$，解得*a*＝1，*b*＝8

通過B、D的直線方程式是*y*＝*x*＋8

7. 接續5.，求通過A、C的直線方程式。

 解：

設通過A、C的直線方程式為*y*=*ax*＋*b*。

 將A、C坐標代入得聯立方程式

 $\left\{\begin{matrix}2=a+b\\7=6a+b\end{matrix}\right.$，解得*a*＝，*b*＝1

通過A、C的直線方程式是*y*＝*x*＋1

8. 接續5.，正方形ABCD的對角線交點坐標。

 解：

 通過B、D的對角線直線方程式：*y*＝*x*＋8

通過A、C的對角線直線方程式：*y*＝*x*＋1

解聯立方程式$\left\{\begin{matrix}y=-x+8\\y=x+1\end{matrix}\right.$，解得*x*＝$\frac{7}{2}$，*y*＝$\frac{9}{2}$

對角線交點坐標是($\frac{7}{2}$,$\frac{9}{2}$)

9. 如下圖， ABCD是平行四邊形，$\overline{AD}$＝5，$\overline{AD}$平行*x*軸，求C、D點之坐標。



解：

依題意$\overline{BC}$＝$\overline{AD}$＝5，$\overline{AD}$//$\overline{BC}$

C點坐標＝(1＋5,2)＝(6,2)

D點坐標＝(0＋5,0)＝(5,0)

10. 接續9.，求通過C、D的直線方程式。

 解：

設通過C、D的直線方程式為*y*=*ax*＋*b*。

 將C、D坐標代入得聯立方程式

 $\left\{\begin{matrix}2=6a+b\\0=5a+b\end{matrix}\right.$，解得*a*＝，*b*＝10

通過C、D的直線方程式是*y*＝2*x*10

11. 接續9.，E為A、B之中點，F為A、D之中點，求通過E、F的直線方程式。

 

 解：

E點坐標＝$(\frac{0+1}{2},\frac{0+2}{2})=(\frac{1}{2},1)$

F點坐標＝$(\frac{0+5}{2},\frac{0+0}{2})=(\frac{5}{2},0)$

設通過E、F的直線方程式為*y*=*ax*＋*b*。

 將E、F坐標代入得聯立方程式

 $\left\{\begin{matrix}1=\frac{1}{2}a+b\\0=\frac{5}{2}a+b\end{matrix}\right.$，解得*a*＝$-\frac{1}{2}$，*b*＝$\frac{5}{4}$

通過E、F的直線方程式是$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$

已知三角形端點的座標，求三角形面積請看下圖；



$∆ABC$各端點的座標已知了，我們要求這三角形的面積



$∆ABC$=ABDE+ACFE-BDFC---------------------------------------(1)

ABDE=$\frac{1}{2}$(BD+AE)DE=$\frac{1}{2}$ (y2+y1)(x1-x2)-----------------------------(2)

ACFE=$\frac{1}{2}$ (AE+CF)EF=$\frac{1}{2}$ (y1+y3)(x3-x1)-------------------------------(3)

BDFC=$\frac{1}{2}$ (BD+CF)DE=$\frac{1}{2}$ (y2+y3)(x3-x2)------------------------------(4)

將(2),(3),(4)代入(1)得

$∆ABC$=$\frac{1}{2}$ (x1(y2-y3)+x2(y3-y1)+x3(y1-y2))-------------------------(5)

答案可能為負，需取絕對值。

1. A=(2,2) , B=(0,0) , C=(4,0)

X1=2 y1=2

X2=0 y2=0

X3=4 y3=0



$∆ABC$=$\frac{1}{2}$ (x1(y2-y3)+x2(y3-y1)+x3(y1-y2))=$ \frac{1}{2}$ (0(0-0)+0(0-2)+4(2-0))=$ \frac{1}{2}$ (4\*2)=4

我們也可以用幾何方法證明這個答案是對的，因為$∆ABC$=$\frac{1}{2}\overbar{AD}\*\overbar{BC}$=$\frac{1}{2}$ (2)(4)=4

(2)



X1=0 y1=1

X2=0 y2=0

X3=1 y3=0

$∆ABC$=$\frac{1}{2}$ (x1(y2-y3)+x2(y3-y1)+x3(y1-y2))=$ \frac{1}{2}$ (0(0-0)+0(0-1)+1(1-0))=$ \frac{1}{2}$\*1=$\frac{1}{2}$

這個答案也可以用幾何得到 $∆ABC$=$\frac{1}{2}\overbar{AB}\*\overbar{BC}$=$\frac{1}{2}$ (1)(1)=$ \frac{1}{2}$

(3)



X1=1 y1=1

X2=3 y2=1

X3=3 y3=7

$∆ABC$=$\frac{1}{2}$ (x1(y2-y3)+x2(y3-y1)+x3(y1-y2))=$ \frac{1}{2}$ (1(1-7)+3(7-1)+3(1-1))=$ \frac{1}{2}$ (-6+18)=$\frac{1}{2}$(12)=6

如用幾何得

$∆ABC$=$\frac{1}{2}\overbar{BC}\*\overbar{AC}$=$\frac{1}{2}$ (7-1)(3-1)=$ \frac{1}{2}$(6\*2)=6

(4)



X1=1 y1=0

X2=2 y2=1

X3=2 y3=-1

$∆ABC$=$\frac{1}{2}$ (x1(y2-y3)+x2(y3-y1)+x3(y1-y2))=$ \frac{1}{2}$ (1(1-(-1))+2(-1-0)+(2)(0-1))=$ \frac{1}{2}$ (2-2-2)=$\frac{1}{2}$(-2)=-1

取絕對值，得+1.

如用幾何得

$∆ABC$=$\frac{1}{2}\overbar{AD}\*\overbar{BC}$=$\frac{1}{2}$ (1)(2)=$1$