

(55) 虛數

虛數是一個有些神秘的而難理解的玩意兒，但是同學們到了大學，就會發現虛數是十分有用的，電機系同學就一直在利用虛數的。

假設我們有一個一元二次方程式

$$x^2 - 4 = 0$$

我們的答案是 $x = \pm 2$

假設我們有一個方程式是

$$x^2 + 1 = 6$$

問題就來了，因為 $x^2 = -1$ ，但是任何數平方後，都是正的，因此在國中時代，這個方程式是無解的。現在你們是高中生了，就應該知道 $x^2 = -1$ 仍是有解的。

假設 $x^2 = -1$ ，則 $x = i = \sqrt{-1}$ ， i 就是一個虛數。

大家一定會想知道虛數是誰發明的，大多數的人認為虛數是由法國的數學家笛卡兒所命名的，我們現在所用的直角座標系統就是笛卡兒制定的，據說笛卡兒有一次要解以下的方程式

$$x^2 = x - 5$$

這個方程式可以變成 $x^2 - x + 5 = 0$

$$\text{它的解是 } x = \frac{1 \pm \sqrt{1-20}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-19}}{2}$$

$\sqrt{-19}$ 是一個奇怪的數字，因為任何時數的平方都不會是虛數。

笛卡兒認為負數開平方是無意義的，因此他將 $\sqrt{-1}$ 命名為虛數，也未對這個數有興趣，而且他很看不起這個數。真正對虛數有極大興趣的是尤拉，他曾定義常用對數 e ，關於 e 有一個著名的公式：

$$e^{i x} = \cos x + i \sin x$$

這個公式被稱為尤拉公式，如果我們令 $x = \pi$ 帶入，因為 $\cos \pi = -1$

$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$ ，因此

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

以上這個公式被稱為史上最美的公式，各位同學到大學以後就會了解尤拉公式的來龍去脈了。

現在我要來和大家談虛數的運算

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = (i^2)i = (-1)i = -i$$

$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$i^5 = (i^4)i = i$$

$$i^6 = (i^4)i^2 = 1(-1) = -1$$

$$i^7 = (i^4)i^3 = 1(-i) = -i$$

$$i^8 = (i^4)(i^4) = 1(1) = 1$$

因此 i 有一個循環的特性，因為

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

可以說， i 是以 $i, -1, -i, 1$ 做一個循環的。

$$(1)i^{10} = (i^8)i^2 = (i^4)^2i^2 = (1)i^2 = -1$$

$$i^{22} = i^{20}i^2 = (i^4)^5i^2 = i^2 = -1$$

$$i^{30} = i^{28}i^2 = (i^4)^7i^2 = i^2 = -1$$

$$i^{16} = (i^4)^4 = 1^4 = 1$$

$$i^{101} = i^{100}i^1 = (i^4)^{25}i^1 = i^1 = i$$

$$i^{98} = i^{96}i^2 = (i^4)^{24}i^2 = i^2 = -1$$

i^{-1} 也很有趣，

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

因此

$$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = -i^{-1} = i$$

$$i^{-4} = \frac{1}{i^4} = \frac{1}{1} = 1$$

$$i^{-5} = (i^{-4})(i^{-1}) = -i$$

$$i^{-6} = (i^{-4})(i^{-2}) = i^{-2} = -1$$

$$i^{-7} = (i^{-4})(i^{-3}) = i$$

$$i^{-8} = (i^{-4})^2 = 1$$

可以看出 i^{-1} 也有一個 $-i, -1, i, 1$ 的循環

$$(2) i^{-9} = (i^8)i^{-1} = (i^{-4})^2 i^{-1} = i^{-1} = -i$$

$$i^{-13} = (i^{-4})^3 i^{-1} = i^{-1} = -i$$

$$i^{-23} = (i^{-4})^5 i^{-3} = i^{-3} = i$$

$$i^{-54} = (i^{-4})^{13} i^{-2} = i^{-2} = -i$$

$$i^{-102} = (i^{-4})^{25} i^{-2} = i^{-2} = -1$$

$$i^{-311} = (i^{-4})^{77} i^{-3} = i^{-3} = i$$

$$i^{-98} = (i^{-4})^{24} i^{-2} = i^{-2} = -1$$

關於 i 還有一點該注意的地方，請看 $\sqrt{-4}$ 。有了虛數的觀念，我們就知道

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2i$$

如果 a 是正數，則 $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$

要注意的是， $\sqrt{-a} \sqrt{-b} = (\sqrt{a}i)(\sqrt{b}i) = \sqrt{ab}i^2 = -\sqrt{ab}$

以下的計算方法是錯的

$$\sqrt{-a} \sqrt{-b} = \sqrt{(-a)(-b)} = \sqrt{ab}$$

也就是說， $\sqrt{-a} \sqrt{-b} \neq \sqrt{(-a)(-b)}$

$$\sqrt{-4} + \sqrt{-9} = \sqrt{4}i + \sqrt{9}i = 2i + 3i = 5i$$

$$(\sqrt{-4})(\sqrt{-9}) = (2i)(3i) = 6i^2 = -6$$

$$\begin{aligned} &(\sqrt{-4} + \sqrt{-9})(\sqrt{-4} - \sqrt{-9}) \\ &= (2i + 3i)(2i - 3i) \\ &= i^2(2 + 3)(2 - 3) \\ &= i^2(-5) \\ &= (-1)(-5) = 5 \end{aligned}$$