

### (54)期望值

如果我們玩一場遊戲，贏了可以賺一點錢，但是輸了要賠一些錢，我們當然希望知道，玩這場遊戲究竟會贏多少錢或是輸多少錢。

假設你和一位朋友下棋，你知道自己的棋藝高於那位朋友，贏的機率是 $\frac{2}{3}$ ，輸的機率是 $\frac{1}{3}$ 。贏一局，可以拿到 60 元，輸一局，要賠 60 元。我們可以算一下，你大概可以贏多少錢。

贏的機率是 $\frac{2}{3}$ ，因此你有 $\frac{2}{3}$ 的機率可以贏 60 元。但也有 $\frac{1}{3}$ 的機率要賠 60 元，因此你期望可以得到的錢是 $\frac{2}{3} \times 60 - \frac{1}{3} \times 60 = 20$ 元。

假設一個事件的所有可能值是 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，而每一可能值的對應機率分別是 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 。 $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ ，則此事件的期望值是 $x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n$ 。

(1)擲骰子取得 1, 2, 3, 4 可以得到 10 元，取得 5, 6 可以得到 20 元。求此遊戲的期望值。

取得 1, 2, 3, 4 的機率是 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ，取得 5, 6 的機率是 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

因此，此題的期望值是 $\frac{2}{3} \times 10 + \frac{1}{3} \times 20 = \frac{40}{3}$

(2)承上題，假如取得 1, 2, 3, 4 須賠 5 元，求此遊戲的期望值。

此題的期望值是 $\frac{4}{6} \times (-5) + \frac{2}{6} \times 20 = \frac{-20+40}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$

(3)承上題，假設取得偶數可以得到 10 元，求期望值。

1~6 中的偶數是 2, 4, 6，得偶數的機率是 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

故此遊戲的期望值是 $\frac{1}{2} \times 10 = 5$ 元

(4)擲骰子，兩次的點數和如等於 4，可得 120 元，求此遊戲的期望值。

點數和等於 4，只有 3 種可能(1, 3)，(2, 2)，(3, 1)

擲骰子兩次的可能情形有  $6 \times 6 = 36$  種

故點數和等於 4 的機率是  $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ ，期望值是  $\frac{1}{12} \times 120 = 10$  元

(5)擲骰子兩次，點數如相等，可得 60 元，求期望值。

點數相等的可能有 6 個(1, 1)，(2, 2)，(3, 3)，(4, 4)，(5, 5)，(6, 6)，機率是  $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ ，

期望值是  $\frac{1}{6} \times 60 = 10$  元

(6)丟銅板一次，如得到正面，可得 20 元，如得到反面，可得 10 元，求期望值。

正反的機率都是  $\frac{1}{2}$ ，期望值是  $\frac{1}{2} \times 20 + \frac{1}{2} \times 10 = \frac{30}{2} = 15$  元

(7)承上題，如得到反面，要賠 5 元，求期望值。

期望值是  $\frac{1}{2} \times 20 + \frac{1}{2} \times (-5) = \frac{15}{2} = 7.5$  元

(8)丟銅板，規則如下：

兩正 20 元

一正一反 10 元

兩反 5 元

兩正的機率是  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

一正一反有兩種，故其機率是  $2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

兩反的機率是  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$$\text{期望值是} \frac{1}{4} \times 20 + \frac{1}{2} \times 10 + \frac{1}{4} \times 5 = \frac{20+20+5}{4} = \frac{45}{4} \text{元}$$

(9)承上題，如果結果是兩反，要賠 10 元，則期望值是  $\frac{1}{4} \times 20 + \frac{1}{2} \times 10 + \frac{1}{4} \times$

$$(-10) = \frac{20+20-10}{4} = \frac{30}{4} = 7.5 \text{元}$$

(10)甲和乙下棋，勝者得 10 元，由敗者付。甲勝的機率是  $\frac{2}{3}$ ，共下 2 盤，求甲得款的期望值。

下 2 盤棋，勝敗共有 4 種情形：

第一盤	第二盤	甲勝的機率	得款
甲勝	甲勝	$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$	20
甲勝	乙勝	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$	10-10=0
乙勝	甲勝	$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$	10-10=0
乙勝	乙勝	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$	-20

$$\text{甲得款的期望值是} \frac{4}{9} \times 20 + \frac{1}{9} \times (-20) = \frac{60}{9} = \frac{20}{3} \text{元}$$

(11)承上題，如甲勝的機率是  $\frac{1}{3}$ ，求甲得款的期望值。

$$\text{利用以上的討論，甲得款的期望值是} \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 20 + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} (-20) = 20 \left( \frac{1}{9} - \frac{4}{9} \right) =$$

$$-\frac{60}{9} = -\frac{20}{3}$$

(12)甲乙二人擲骰子比大小，得點比對方大，可得 10 元，由對方付。如點數相等，則雙方都不出錢。今甲先擲，得 4 點，求甲得款的期望值。

乙如得 1, 2, 3 點，甲可得 10 元

乙如得 5, 6 點，甲賠 10 元

故甲得款的期望值是  $\frac{3}{6} \times 10 - \frac{2}{6} \times 10 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$  元

(13) 承上題，如甲已得 6，求甲得款的期望值。

此題的期望值是  $\frac{5}{6} \times 10 = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}$  元

(14) 承上題，如甲已得 2，求甲得款的期望值。

甲勝的唯一可能是乙得 1，機率是  $\frac{1}{6}$ ，故甲得款的期望值是  $\frac{1}{6} \times 10 - \frac{4}{6} \times 10 = \frac{-30}{6} = -5$  元

(15) 袋中有 3 黑球，4 白球，5 紅球，抽中黑球，可得 30 元，白球 20 元，紅球 10 元。求抽一球得款的期望值。

共有  $3+4+5=12$  球

期望值是  $\frac{3}{12} \times 30 + \frac{4}{12} \times 20 + \frac{5}{12} \times 10 = \frac{220}{12} = \frac{55}{3}$  元

(16) 某種彩券，其中獎及張數如下：

共發行 100 萬張

頭獎	40 萬元	1
一獎	30 萬元	2
二獎	20 萬元	5
三獎	10 萬元	10

求買一張彩券的期望值。

期望值是  $4 \times 10^5 \times \frac{1}{10^6} + 3 \times 10^5 \times \frac{2}{10^6} + 2 \times 10^5 \times \frac{5}{10^6} + 1 \times 10^5 \times \frac{10}{10^6} =$

$\frac{10^5(4+6+10+10)}{10^6} = \frac{10^5 \times 30}{10^6} = \frac{30}{10} = 3$  元

(17)袋中有 1 元硬幣 6 枚,5 元硬幣 4 枚,10 元硬幣 2 枚,求任取一枚的期望值。

一共有  $6+4+2=12$  枚硬幣

$$\text{期望值是 } \frac{6}{12} \times 1 + \frac{4}{12} \times 5 + \frac{2}{12} \times 10 = \frac{46}{12} = \frac{23}{6}$$

(18)承上題,求任取兩枚的期望值。

任取兩枚共有以下 6 種情形:

$$2 \text{ 枚 } 1 \text{ 元, 價值 } 2 \text{ 元, 機率} = \frac{C_2^6}{C_2^{12}} = \frac{15}{66}$$

$$2 \text{ 枚 } 5 \text{ 元, 價值 } 10 \text{ 元, 機率} = \frac{C_2^4}{C_2^{12}} = \frac{6}{66}$$

$$2 \text{ 枚 } 10 \text{ 元, 價值 } 20 \text{ 元, 機率} = \frac{C_2^2}{C_2^{12}} = \frac{1}{66}$$

$$1 \text{ 枚 } 1 \text{ 元, } 1 \text{ 枚 } 5 \text{ 元, 價值 } 6 \text{ 元, 機率} = \frac{C_1^6 C_1^4}{C_2^{12}} = \frac{6 \times 4}{66} = \frac{24}{66}$$

$$1 \text{ 枚 } 1 \text{ 元, } 1 \text{ 枚 } 10 \text{ 元, 價值 } 11 \text{ 元, 機率} = \frac{C_1^6 C_1^2}{C_2^{12}} = \frac{6 \times 2}{66} = \frac{12}{66}$$

$$1 \text{ 枚 } 5 \text{ 元, } 1 \text{ 枚 } 10 \text{ 元, 價值 } 15 \text{ 元, 機率} = \frac{C_1^4 C_1^2}{C_2^{12}} = \frac{4 \times 2}{66} = \frac{8}{66}$$

$$\text{期望值是 } \frac{15}{66} \times 2 + \frac{6}{66} \times 10 + \frac{1}{66} \times 20 + \frac{24}{66} \times 6 + \frac{12}{66} \times 11 + \frac{8}{66} \times 15 =$$

$$\frac{30+60+20+144+132+120}{66} = \frac{506}{66} = \frac{23}{3}$$

各位同學會發現,任取 1 枚的期望值是  $\frac{23}{6}$ ,任取 2 枚的期望值是  $\frac{23}{3}$ ,也就是說,任取 2 枚的期望值是任取 1 枚期望值的 2 倍。關於這一點,以後會有詳細的解釋。

(19)袋中有 2 張 100 元鈔票,3 張  $x$  元鈔票,任取 1 張的期望值是 70 元,求  $x$

共有 5 張鈔票

$$\frac{2}{5} \times 100 + \frac{3}{5} x = 70$$

$$\frac{3}{5}x = 70 - 40$$

$$\frac{3}{5}x = 30$$

$$x = 50$$

(20)袋中有 5 元硬幣 2 枚，x 元硬幣 1 枚，任取 1 枚的期望值是 6 元，求 x

$$\frac{2}{3} \times 5 + \frac{1}{3}x = 6$$

$$\frac{1}{3}x = 6 - \frac{10}{3}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{8}{3}$$

$$x = 8$$

(21)保險公司的壽險保費是 2000 元，保額 20 萬元，年輕人一年內的存活率是 0.995，求保險公司的期望值。

$$\begin{aligned} \text{保險公司的期望值} &= 2000 \times 0.995 - (20 \times 10^4 - 2000) \times (1 - 0.995) = \\ &= 1990 - 19800 \times 0.005 \\ &= 1990 - 1.98 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-3} \\ &= 1990 - 9.9 \times 10^2 \\ &= 1990 - 990 \\ &= 1000 \text{元} \end{aligned}$$

(22)袋中有 9 顆紅球和 3 顆白球，任取一球，求取出白球的期望值。

$$\text{取出白球的期望值是 } \frac{3}{12} \times 1 = \frac{1}{4}$$

意思是如果取出 1 球，可能取出  $\frac{1}{4}$  顆白球。

(23)承上題，任取 3 球，求取出白球的期望值。

取出 3 球中有白球的可能性有 3 種:1 白球，2 白球，3 白球

1 白球的機率是  $\frac{C_2^9 C_1^3}{C_3^{12}}$

2 白球的機率是  $\frac{C_1^9 C_2^3}{C_3^{12}}$

3 白球的機率是  $\frac{C_3^3}{C_3^{12}}$

$$C_3^{12} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = \frac{1320}{6} = 220$$

∴ 取出白球的期望值是  $\frac{C_2^9 C_1^3}{C_3^{12}} \times 1 + \frac{C_1^9 C_2^3}{C_3^{12}} \times 2 + \frac{C_3^3}{C_3^{12}} \times 3$

$$= \frac{\frac{9 \times 8}{2} \times 3}{220} \times 1 + \frac{9 \times \frac{3 \times 2}{2}}{220} \times 2 + \frac{1}{220} \times 3$$

$$= \frac{108+54+3}{220} = \frac{165}{220} = \frac{3}{4}$$

請同學們注意，取 1 球是白球的期望值是  $\frac{1}{4}$ ，取 3 球中有白球的期望值是  $\frac{3}{4}$ ，正好是 3 倍。我們以後會解釋的。

(24) 袋中有 3 白球，2 黑球，任取 1 球，求取出白球的期望值。

共有  $3+2=5$  球

取出白球的期望值是  $\frac{3}{5} \times 1 = \frac{3}{5}$

(25) 承上題，任取 2 球，求取出白球的期望值。

取出 2 球中有白球的可能性有 2 種：1 白球，2 白球

1 白球的機率是  $\frac{C_1^3 C_1^2}{C_2^5} = \frac{3 \times 2}{\frac{5 \times 4}{2 \times 1}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

2 白球的機率是  $\frac{C_2^3}{C_2^5} = \frac{\frac{3 \times 2}{2 \times 1}}{\frac{5 \times 4}{2 \times 1}} = \frac{3}{10}$

$$\therefore \text{取 2 球中有白球的期望值是 } \frac{3}{5} \times 1 + \frac{3}{10} \times 2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

同學請注意，取 2 球中有白球的期望值是取 1 球中有白球期望值的 2 倍。

(26)承上題，任取 3 球，求取出白球的期望值。

取出 3 球中有白球的可能性有 3 種：1 白球，2 白球，3 白球

$$1 \text{ 白球的機率是 } \frac{C_1^3 C_2^2}{C_3^5} = \frac{3 \times 1}{\frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{3}{10}$$

$$2 \text{ 白球的機率是 } \frac{C_2^3 C_1^2}{C_3^5} = \frac{\frac{3 \times 2}{2 \times 1} \times 2}{\frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{6}{10}$$

$$3 \text{ 白球的機率是 } \frac{C_3^3}{C_3^5} = \frac{1}{\frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{1}{10}$$

$$\text{此題的期望值是 } \frac{3}{10} \times 1 + \frac{6}{10} \times 2 + \frac{1}{10} \times 3 = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$$

由以上 3 題可以看出，任取一球含白球的期望值是  $\frac{3}{5}$ ，任取 2 球含白球的期望值是  $\frac{6}{5}$ ，任取 3 球含白球的期望值是  $\frac{9}{5}$ 。取 2 球含白球的期望值是取 1 球含白球期望值的 2 倍，取 3 球含白球的期望值是取 1 球含白球期望值的 3 倍。

這種現象在(17)和(18)題中也出現過。1 元硬幣 6 枚，5 元硬幣 4 枚，10 元硬幣 2 枚，任取 1 枚的期望值是  $\frac{23}{6}$ ，任取 2 枚的期望值是  $\frac{23}{3}$ ，可見得任取 2 枚的期望值是任取 1 枚期望值的 2 倍。

有些人的解釋如下：期望值相當於平均值。比方說，我們有 3 枚 5 元硬幣和 2 枚 10 元硬幣，任取 1 枚的期望值是  $\frac{3}{5} \times 5 + \frac{2}{5} \times 10 = \frac{35}{5} = 7$  元

我們也可以用平均的觀念，全部硬幣的總價是  $3 \times 5 + 2 \times 10 = 35$ ，一共有 5 枚硬幣，因此一枚硬幣的平均價值是  $\frac{35}{5} = 7$  元。所以期望值等於平均值。

根據這種想法，很多人認為取 2 枚硬幣的期望值當然會是任取 1 枚硬幣期望值的 2 倍。但是這種想法是不對的，因為當我們任取 2 枚硬幣，第一次取出的硬幣並未放回，因此第二次取幣時的平均值不同於第一次取幣時的平均值。

要證明我們可以用簡單的想法來解進階的問題，需要比較高深的數學，高中生到大學以後才搞懂吧。

現在我們想一個問題，假設袋子中有 3 白球和 2 黑球，甲乙兩人依序取球，甲先取，取出白球的機率是  $\frac{3}{5}$ ，乙後取，乙取出白球的機率是多少？

乙取球時有兩種可能的情形：

(1) 甲取走了 1 顆白球，因此乙取得白球的機率是  $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

(2) 甲取出 1 黑球，乙取得白球的機率是  $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$

因此乙取得白球的機率是  $\frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

各位同學可以看出，雖然乙後取球，他取得白球的機率和甲先取球的機率是一樣的。

我們不妨用數學來證明這一點。假設有  $x$  個 A 物件和  $y$  個 B 物件，甲乙依序取件，

甲拿到 A 物件的機率是  $\frac{x}{x+y}$ ，取得 B 物件的機率是  $\frac{y}{x+y}$ 。

乙取件有兩種可能：

(1) 甲取走 A 物件，乙取走 A 物件的機率是  $(\frac{x}{x+y})(\frac{x-1}{x+y-1})$

(2) 甲取走 B 物件，乙取走 A 物件的機率是  $(\frac{y}{x+y})(\frac{x}{x+y-1})$

因此乙取走 A 物件的機率是  $\frac{x(x-1)}{(x+y)(x+y-1)} + \frac{xy}{(x+y)(x+y-1)} = \frac{x^2-x+xy}{(x+y)(x+y-1)} =$

$$\frac{x(x+y-1)}{(x+y)(x+y-1)} = \frac{x}{x+y}$$

各位同學可以發現，雖然甲先取件，他拿到 A 物件和乙拿到 A 物件的機率是一樣的。

袋中有白球和黑球，第一次拿球時，可能拿到白球，也可能拿到黑球。甲拿白球有一個機率，乙在甲後面拿，他拿到白球的機率和甲拿到白球的機率是一樣的。其原因是甲可能沒有拿走白球。

各位同學不妨去看我寫的有關機率的講義(第 50~53 章)。假設有 5 張紙，其中只有 2 張是獎券，甲乙依序抽獎，甲先抽，得獎的機率和乙後抽得獎的機率是一樣的。

我們通常會以為甲先抽應該比較划得來，其實並非如此。因此有人為了簡化討論起見，可以假想甲抽了獎以後又放回去了。雖然結果是對的，但甲並未將獎放回去。

因此，我建議同學不要便宜行事，用平均值的想法來做期望值的問題。為了強化同學的印象起見，我再舉一個例子來說明。

(27)有 3 枚 5 元銅幣，2 枚 10 元銅幣，求任取 1 枚的期望值和任取 2 枚的期望值。

方法(1)用平均值的想法

$$\text{平均值} = \frac{3 \times 5 + 2 \times 10}{3 + 2} = \frac{15 + 20}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

所以任取 1 枚的期望值是 7 元，任取 2 枚的期望值是  $7 \times 2 = 14$  元。

答案是正確的，但是並沒有很嚴謹的證明說這種做法是正確的。

方法(2)用期望值的定義

$$\text{任取 1 枚的期望值} = \frac{3}{5} \times 5 + \frac{2}{5} \times 10 = 3 + 4 = 7$$

任取 2 枚有 3 種可能：

$$2 \text{ 枚 } 5 \text{ 元，機率是 } \frac{C_2^3}{C_2^5} = \frac{3}{10}，\text{得款 } 10 \text{ 元}$$

$$2 \text{ 枚 } 10 \text{ 元，機率是 } \frac{C_2^2}{C_2^5} = \frac{1}{10}，\text{得款 } 20 \text{ 元}$$

1 枚 5 元和 1 枚 10 元，機率是  $\frac{C_1^3 C_1^2}{C_2^5} = \frac{6}{10}$ ，得款 15 元

任取 2 枚的期望值是  $\frac{3}{10} \times 10 + \frac{1}{10} \times 20 + \frac{6}{10} \times 15 = \frac{30+20+90}{10} = \frac{140}{10} = 14$

同學們也許覺得這樣計算太難，但是同學們一定要學會這種方法，因為這種方法可以幫助你們邏輯思考的能力。

(28) 有 2 顆球和 2 個桶子，將球任意丟入桶中，求空桶的期望值。

每一球有 2 種投法，共有  $2^2 = 4$  種可能。不可能有 2 個空桶，最多只可能有 1 個空桶。兩個桶子中任何一個都有可能是空桶，所以有 1 個空桶的期望值是

$$\frac{C_1^2}{2^2} \times 1 = \frac{2}{4} \times 1 = \frac{1}{2}$$

(29) 有 2 顆球和 3 個桶子，將球任意丟入桶中，求空桶的期望值。

每一球投球入桶有 3 種投法，共有  $3^2 = 9$  種可能。

1 個空桶的機率是  $\frac{C_1^3}{3^2} \times 2 = \frac{6}{9}$ ，因為 3 個桶子每一個都有可能是空桶， $C_1^3$  是要這一個桶子是空桶。

其他兩個桶子，要每個桶子都放入 1 球，有 2 種放法。

$$1 \text{ 個空桶的機率是 } \frac{C_1^3}{3^2} \times 2 = \frac{6}{9}$$

$$2 \text{ 個空桶的機率是 } \frac{C_1^3}{3^2} = \frac{3}{9}$$

$$\text{故空桶的期望值是 } \frac{6}{9} + \frac{3}{9} \times 2 = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

(30) 甲乙二人比賽，3 戰 2 勝者可得 100 元。甲勝的機率是  $\frac{2}{3}$ ，甲已勝 1 局，求甲得款的期望值。

甲已勝 1 局，在未來的 2 局中，如能勝 1 局，就可得 100 元。甲敗的機率是  $\frac{1}{3}$ ，

連敗 2 局的機率是  $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ 。因此甲至少勝 1 局的機率是  $1 - (\frac{1}{3})^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ ，故

甲得款的期望值是  $(1 - (\frac{1}{3})^2) \times 100 = \frac{8}{9} \times 100 = \frac{800}{9} \cong 88.9$  元

(31) 承上題，如甲勝的機率是  $\frac{4}{7}$ ，甲已勝 1 局，求甲得款的期望值。

此題的期望值是  $(1 - (\frac{4}{7})^2) \times 100 = (1 - \frac{9}{49}) \times 100 = \frac{40}{49} \times 100 = \frac{4000}{49} \cong 81.6$  元

(32) 承上題，如甲勝的機率是  $\frac{1}{2}$ ，甲已勝 1 局，求甲得款的期望值。

此題的期望值是  $(1 - (\frac{1}{2})^2) \times 100 = \frac{3}{4} \times 100 = 75$  元

(33) 5 戰 3 勝，甲勝的機率是 0.6，甲已勝 2 局，勝者可得 100 元，求甲得款的期望值。

甲得款的期望值  $(1 - (1 - 0.6)^3) \times 100 = (1 - (0.4)^3) \times 100 = (1 - 0.064) \times 100 = 0.936 \times 100 = 93.6$  元

(34) 丟銅板 3 次，3 次正面 20 元，2 次正面 10 元，1 次正面 5 元，求期望值。

丟銅板，共有  $2^3 = 8$  種可能。

出現 3 次正面的機率是  $\frac{C_3^3}{2^3} = \frac{1}{8}$

出現 2 次正面的機率是  $\frac{C_2^3}{2^3} = \frac{3}{8}$  (一次反面)

出現 1 次正面的機率是  $\frac{C_1^3}{2^3} = \frac{3}{8}$  (二次反面)

故期望值是  $\frac{1}{8} \times 20 + \frac{3}{8} \times 10 + \frac{3}{8} \times 5 = \frac{20+30+15}{8} = \frac{65}{8}$

(35) 學生抽獎得 500 元，主辦單位給 3 個信封，1 個信封內有 800 元，2 個信封內各有 200 元，值不值得換？

換信封的期望值是  $\frac{1}{3} \times 800 + \frac{2}{3} \times 200 = \frac{1200}{3} = 400$  元

400 < 500，不值得換。

(36)承上題，如 2 個信封內各有 400 元，值不值得換？

$$\text{換信封的期望值是 } \frac{1}{3} \times 800 + \frac{2}{3} \times 400 = \frac{1600}{3} = 533.3 \text{ 元}$$

$$533 > 500$$

∴ 值得換。

(37)選擇題 1, 2, 3, 4，答對 4 分，答錯扣 1 分，求得分的期望值。

$$\frac{1}{4} \times 4 - \frac{3}{4} \times 1 = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}$$

(38)承上題，如已知某一答案是錯的，求得分的期望值。

$$\frac{1}{3} \times 4 - \frac{2}{3} \times 1 = \frac{4-2}{3} = \frac{2}{3}$$

(39)丟銅板 2 次，如得 k 次正面，可得  $k^2$  元，求期望值。

$$k=1, \text{ 機率是 } \frac{C_1^2}{2^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$k=2, \text{ 機率是 } \frac{C_2^2}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{期望值是 } \frac{1}{2} \times 1^2 + \frac{1}{4} \times 2^2 = \frac{1}{2} + 1 = 1.5$$

(40)丟銅板 2 次，如得 k 次正面，可得  $3^k$  元，求得款期望值。

$$\text{期望值是 } \frac{1}{2} \times 3^1 + \frac{1}{4} \times 3^2 = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} = \frac{15}{4} \text{ 元}$$

(41)甲乙二人比賽，每勝 1 局，由敗方給勝方 150 元。比賽 2 局，甲得款的期望值是 100 元，求甲得勝的機率。

令甲得勝的機率為 x，如甲乙各勝 1 局，則甲得款是 0，如甲連勝 2 局，得款 300 元，如甲連敗 2 局，則賠 300 元。

甲連勝 2 局的機率是  $x^2$ ，連輸 2 局的機率是  $(1-x)^2$

甲得款的期望值是  $x^2 \times 300 - (1-x)^2 \times 300 = 100$

$$(-1 + 2x) \times 300 = 100$$

$$-300 + 600x = 100$$

$$600x = 400$$

$$x = \frac{400}{600} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

(42) 袋中有白球和黑球，共 5 球。任意取 1 球，取得白球可得 100 元，取得黑球可得 200 元。已知取 1 球得款的期望值是 160 元，求白球和黑球的數目。

令白球的數目為  $x$ ，黑球的數目為  $y$

$$x+y=5 \cdots \cdots (1)$$

$$\frac{x}{5} \times 100 + \frac{y}{5} \times 200 = 160 \cdots \cdots (2)$$

$$\text{由(2)得 } 20x+40y=160, x+2y=8 \cdots \cdots (3)$$

解(1)和(3)， $y=3$ ， $x=2$

答：袋中有 2 白球和 3 黑球。

(43) 丟銅板，2 正得款 100 元，1 正 1 反 50 元。此遊戲的得款期望值是 55 元，求 2 反的得款多少元？

令 2 反得款  $x$  元

$$2 \text{ 正的機率} = 2 \text{ 反的機率} = \frac{1}{4}$$

$$1 \text{ 正 } 1 \text{ 反的機率} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{4} \times 100 + \frac{1}{2} \times 50 + \frac{1}{4}x = 55$$

$$25 + 25 + \frac{1}{4}x = 55$$

$$\frac{1}{4}x = 5$$

$$x = 20$$

(44)袋中有 6 張 10 元鈔票，4 張  $x$  元鈔票，任取 1 張鈔票的期望值是 8 元，求  $x$

共有  $6+4=10$  張鈔票

$$\frac{6}{10} \times 10 + \frac{4}{10}x = 8$$

$$\frac{60 + 4x}{10} = 8$$

$$60 + 4x = 80$$

$$4x = 20$$

$$x = 5$$

(45)擲骰子 2 次，2 次點數相等可以得獎金，獎金的期望值是 100 元，求獎金是多少元？

擲骰子 2 次，共有 36 種可能情形，2 次點數相等有 6 種可能。

令獎金數為  $x$

$$\frac{6x}{36} = 100$$

$$x = 600 \text{ 元}$$

(46)袋中有 2 黑球，5 白球以及其他  $n$  個球。取出黑球可得 2000 元，取出白球可得 1000 元。期望值是 300 元，問其他球的數目  $n$  是多少？

$$\frac{2}{2+5+n} \times 2000 + \frac{5}{2+5+n} \times 1000 = 300$$

$$\frac{9000}{7+n} = 300$$

$$300(7+n) = 9000$$

$$7+n = 30$$

$$n = 23$$

(47)丟一個有瑕疵的銅板，得正面，可得 100 元，得反面，可得 40 元。期望值是 80 元，求得正面的機率。

令得正面的機率為  $x$ ，則得反面的機率是  $1-x$

$$100x + 40(1 - x) = 80$$

$$60x + 40 = 80$$

$$60x = 40$$

$$x = \frac{40}{60} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$