

(52) 機率-3 條件機率

條件機率是很容易懂的，但是同學們一定要知道其中的道理，不可死背公式。死背公式是沒有用的。

我們先舉一個例子，一個家庭有兩個孩子，孩子可以是男或女，因此一共有下列 4 種可能：

- (1) 一男一女
- (2) 一女一男
- (3) 兩男
- (4) 兩女

每種可能的機率都是 $\frac{1}{4}$ 。

假如我們已知家庭中有一男，這個家庭有一男一女的機率是多少呢？我們知道這個機率一定比 $\frac{1}{4}$ 要大，因為這個家庭不可能有兩女的，可能的情形減少到了以下

3 種：

- (1) 兩男
- (2) 一男一女
- (3) 一女一男

所以一旦我們知道了已有一個男生，兩男的機率就增加到了 $\frac{1}{3}$ 。

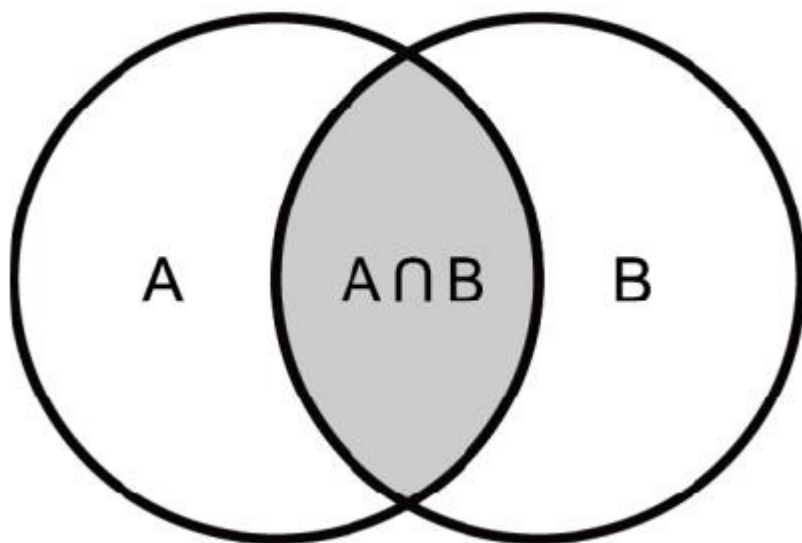
一男一女原來的機率是 $\frac{1}{4}$ ，現在變成了 $\frac{1}{3}$ ，這是因為現在有了一個新的條件：已知家中已有一男孩。

要學條件機率，同學們必須先學一些新的名詞，我們可以用以下的例子來解釋。

假設 $A=(1, 2, 3, 4)$

$B=(3, 4, 5, 6, 7, 8)$

以上的數字可以表示物件或事件，我們首先可以觀察到 A 和 B 共有 3 和 4，我們因此說 (3, 4) 是 A 和 B 的交集。在數學上，我們用 $A \cap B$ 表示。以這個例子而言， $A \cap B=(3, 4)$ 。我們也可以用圖來表示：



大家一定會問 A 和 B 一共有哪些物件，我們知道 A 和 B 中所有的物件是 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)。我們將這些物件稱之為 A 和 B 的聯集，在數學上，A 和 B 的聯集用 $A \cup B$ 來表示，以這個例子而言， $A \cup B = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ 。

根據以上的討論，我們可以利用以下的公式：

$$A \cup B = A + B - A \cap B$$

以這個例子來說，

$$A + B - A \cap B = (1, 2, 3, 4) + (3, 4, 5, 6, 7, 8) - (3, 4) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$$

我們可以看看機率，我們知道 $A \cup B$ 中有 8 個物件，因為 $A = (1, 2, 3, 4)$ ，所以

$$P(A) = \frac{4}{8}。$$

$$B = (3, 4, 5, 6, 7, 8)，所以 P(B) = \frac{6}{8}。$$

$$A \cap B = (3, 4)$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$A \cup B = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$$

$$P(A \cup B) = \frac{8}{8} = 1$$

我們也可以利用 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{8} + \frac{6}{8} - \frac{2}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

假設我們從 A 中取一物件，這個物件也屬於 B 的機率是多少？

因為 $A = (1, 2, 3, 4)$ ， $A \cap B = (3, 4)$

所以 A 內物件也屬於 B 的機率是 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ 。

同理，因為 $B = (3, 4, 5, 6, 7, 8)$ ， $A \cap B = (3, 4)$ ，所以 B 內物件也屬於 A 的機率是 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 。

我們將「在 A 事件發生的條件下，B 事件也發生」的機率，稱為條件機率。在數學上，我們以 $P(B/A)$ 來表示。

以以上的例子而言，已知物件來自 A，但又屬於 B 的機率是 $P(B/A)$ ， $P(B/A) = \frac{1}{2}$ 。

已知物件來自 B，但又屬於 A 的機率是 $P(A/B)$ ， $P(A/B) = \frac{1}{3}$ 。

從以上的討論，我們可知

$$P(B/A) = \frac{A \cap B \text{ 發生的機率}}{A \text{ 發生的機率}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

以我們的例子而言，

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(B/A) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{同理，} P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{6}{8}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}。$$

$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ 是一個著名的數學定理，由英國牧師貝斯 (R.T. Bayes, 1702-1761)

發明的，也因此被稱為貝氏定理。同學不可死背貝氏定理的公式，而應該了解它的意義。

在看以後的例子之前，請先看下面這一段：

(1) A 和 B 事件互斥，則 $P(A \cap B) = 0$

如 A: 擲骰子，結果是 1

B: 擲骰子，結果是 2

可以看出，A 和 B 是互斥事件，因此 $P(A \cap B) = 0$ 。

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - 0 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

假如 A: 擲骰子，結果是 1

B: 擲骰子，結果不是 1

此時 $B = (2, 3, 4, 5, 6)$

因此 $P(A) = \frac{1}{6}$ ， $P(B) = \frac{5}{6}$ ， $P(A \cap B) = 0$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} - 0 = 1$$

同學們不妨記得，如 A 和 B 互斥，則 $P(A \cap B) = 0$ ， $P(A \cup B) = 1$ 。

(2) A 和 B 獨立，則 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

如 A: 第一次擲骰子，結果是 1

B: 第二次擲骰子，結果是 1

第一次擲骰子的結果不會影響第二次擲骰子的結果，因此 A 和 B 是互相獨立的。

$$\text{此時 } P(A) = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

∴ 意思是連續兩次都是 1 的結果是 $\frac{1}{36}$ 。

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{6+6-1}{36} = \frac{11}{36}$$

意思是兩次中，至少有一次結果是 1 的機率是 $\frac{11}{36}$ 。

(3) A 和 B 互相有關，則 $P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$

袋中有 5 顆黑球和 2 顆白球，兩次從袋中取球，問兩次都是取出黑球的機率。

A: 第一次取出黑球

B: 第二次又取出黑球

$$P(A) = \frac{5}{5+2} = \frac{5}{7}$$

因為第一次取出了 1 顆黑球，因此袋中只剩 4 顆黑球和 2 顆白球，所以

$$P(B/A) = \frac{4}{4+2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{5}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{21}$$

所以，同學們在做題目時，必須先搞清楚事件是互斥、獨立或是互相有關的。

1. 一個家庭中有 2 個小孩，已知有 1 個男孩，這個家庭有 2 男的機率是多少？

因為這個家庭中有 2 個小孩，共有(男，男)、(男，女)、(女，男)、(女，女)四種情況。

令 A 表示有 1 男孩的事件， $A = (\text{男，男})、(\text{男，女})、(\text{女，男})$

令 B 表示有 2 男孩的事件， $B = (\text{男，男})$

$$P(A \cap B) = (\text{男，男})$$

$$P(A) = \frac{3}{4}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}$$

以上的答案是根據貝氏定理得到的，我們也可以用以下的方式來想：
因為已有 1 男孩，所以這個家庭有 3 種可能：(男，男)、(男，女)、(女，男)
因此有(男，男)的機率是 $\frac{1}{3}$ 。

2. 一班有 40 位學生，30 人喜歡打籃球，20 人喜歡打排球，10 人兩者都喜歡。
已知 1 位學生喜歡打籃球，他也喜歡打排球的機率是多少？

令 A=喜歡打籃球事件

令 B=喜歡打排球事件

$$P(A) = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$$

$$P(B) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

有 10 人兩者都喜歡，故 $P(A \cap B) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$ 。

$$\therefore P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

\therefore 這個學生也喜歡打排球的機率是 $\frac{1}{3}$ 。

同學們必須知道貝氏定理背後的意義，我們已知這個學生喜歡打籃球，因此他一定是 30 位學生中的一位，但是這 30 位學生中，又有 10 位學生兩種球類都喜歡，所以這位學生兩者都喜歡的機率是 $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ 。

3. 承上題，已知 1 位同學喜歡打排球，他也喜歡打籃球的機率是多少？

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

4. 12 人中，10 人喜歡吃蘋果，5 人喜歡吃梨子，3 人兩者都喜歡。已知某人喜歡吃梨子，求他也喜歡吃蘋果的機率。

A: 喜歡吃蘋果的事件

B: 喜歡吃梨子的事件

$$P(A) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$P(B) = \frac{5}{12}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{4} \times \frac{12}{5} = \frac{3}{5}$$

此人也喜歡吃蘋果的機率是 $\frac{3}{5}$ 。

也可以如此想，5位愛吃梨子，3人兩者都愛，因此答案是 $\frac{3}{5}$ 。

5. 擲骰子，已知結果是偶數，求結果小於5的機率。

A: 結果是偶數的事件， $A = (2, 4, 6)$

B: 結果小於5的事件， $B = (1, 2, 3, 4)$

$A \cap B = (2, 4)$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

也可以如此想， $(2, 4, 6)$ 中，只有2和4是小於5的，因此此題的機率是 $\frac{2}{3}$ 。

6. 承上題，已知結果小於5，求是偶數的機率。

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

同學們如果懂得機率，可以不用公式，也可求得正確的答案。已知結果小於

5，因此有4種可能： $(1, 2, 3, 4)$ ，其中 $(2, 4)$ 是偶數，因此答案是 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ 。

7. 袋中有 10 個白色彈珠，5 個黃色彈珠，10 個黑色彈珠。已知拿出的不是黑色，求此彈珠是黃色的機率。

A: 彈珠是黃色的

B: 彈珠不是黑色的

$$P(A) = \frac{5}{10+5+10} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

$$P(B) = \frac{10+5}{10+5+10} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

$$P(A \cap B) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}$$

這題也可以用一般機率的想法求得，已知彈珠不是黑色的，因此一定是 10 個白色和 5 個黃色中的一個，所以黃彈珠的機率是 $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ 。

8. 選英文和法文的機率相等，選英文有 $\frac{2}{3}$ 的機率可得 90 分，選法文有 $\frac{1}{2}$ 的機率可得 90 分。求選法文得 90 分的機率。

A: 選法文的事件

B: 得 90 分的事件

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B/A) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(B \cap A) = P(A)P(B/A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

選法文得 90 分的機率是 $\frac{1}{4}$ 。

而選英文得 90 分的機率計算如下：

C: 選英文的事件

$$P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(B \cap C) = P(C)P(B/C) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P(B \cap C) = \frac{1}{3} > P(B \cap A) = \frac{1}{4}$$

所以選英文比較容易得 90 分。

9. 有 3 個橘子和 4 個梨子，求兩次都拿到橘子的機率。

在過去，此題的解法如下：

第一次拿到橘子的機率是 $\frac{3}{7}$ ，因為拿掉了 1 個橘子，只剩下 2 個橘子和 4 個

梨子，所以第二次又拿到橘子的機率是 $\frac{2}{6}$ 。此題的答案是 $\frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$ 。

如果用條件機率的思維，解法如下：

A: 第一次拿到橘子的機率

B: 第二次拿到橘子的機率

$$P(A) = \frac{3}{7}$$

$$P(B/A) = \frac{2}{6}$$

$P(A \cap B)$: 第一次拿到橘子，第二次又拿到橘子的機率。

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$$

10. 承上題，求第二次拿到梨子的機率。

$$\text{答案: } \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$$

和上題的答案比較，可以知道第二次比較有可能拿到梨子。這是因為第二次拿水果時，梨子有 4 個，橘子只剩 2 個。

11. 有 7 個物件，其中 3 個有獎，4 個沒有。甲先抽，乙後抽，求兩人得獎的機率。

甲得獎的機率是 $\frac{3}{7}$ ，未得獎的機率是 $\frac{4}{7}$ 。

乙得獎有兩種可能：

(1) 甲中獎，乙也中獎，機率是 $\frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$ 。

(2) 甲未中獎，乙中獎，機率是 $\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$ 。

∴ 乙中獎的機率是 $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$ 。

結論：兩人得獎機會相等，並無先後之別。

12. z 個物件中， x 個有獎，甲乙依序抽獎，試證甲乙得獎的機率相等。

甲中獎機率 $\frac{x}{z}$ ，甲不中獎機率 $\frac{z-x}{z}$ 。

甲中獎，乙中獎機率 $\frac{x}{z} \times \frac{x-1}{z-1} = \frac{x^2-x}{z(z-1)}$ 。

甲不中獎，乙中獎機率 $\frac{z-x}{z} \times \frac{x}{z-1} = \frac{zx-x^2}{z(z-1)}$ 。

乙中獎機率 $\frac{x^2-x}{z(z-1)} + \frac{zx-x^2}{z(z-1)} = \frac{zx-x}{z(z-1)} = \frac{x(z-1)}{z(z-1)} = \frac{x}{z}$ 。

由此可證，甲乙中獎的機率相等。

以下的題目是求 $P(A \cup B)$ ，希望同學知道 $A \cup B$ 的意義。除此之外，同學們不妨注意題目中， A 與 B 都是獨立事件，因此 $P(B/A) = P(B)$ ， $P(A/B) = P(A)$ ，
∴ $P(A \cap B) = P(B/A)P(A) = P(A)P(B)$

13. 甲考 90 分的機率是 0.9，乙考 90 分的機率是 0.8，求至少一人考 90 分的機率。

A: 甲考 90 分

B: 乙考 90 分

$P(A) = 0.9$ ， $P(B) = 0.8$

A 和 B 是互相獨立的，因此兩人都考 90 分的機率是 $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.9 \times 0.8 = 0.72$ 。

至少一人考 90 分的事件是 $A \cup B$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.9 + 0.8 - 0.72 = 0.98$

以上的答案可以從另外兩種方法求得：

(a)兩人都未考 90 分的機率是 $(1 - 0.9)(1 - 0.8) = 0.1 \times 0.2 = 0.02$
∴ 至少一人考 90 分的機率是 $1 - 0.02 = 0.98$ 。

(b)至少一人考 90 分的情形有 3 種：

(1)甲考 90 分，乙沒有，機率是 $0.9 \times (1 - 0.8) = 0.18$ 。

(2)乙考 90 分，甲沒有，機率是 $(1 - 0.9) \times 0.8 = 0.08$ 。

(3)甲乙都考 90 分的機率是 $0.9 \times 0.8 = 0.72$ 。

因此，至少一人考 90 分的機率是 $0.18 + 0.08 + 0.72 = 0.98$ 。

各種方法都可求得正確答案。

14. 擲骰子兩次，至少有一次出現 1 或 2 的機率。

A: 至少有一次出現 1

B: 至少有一次出現 2

至少有一次出現 1 可能有三種情況：

(1)先出現 1，之後出現不是 1 的數字，機率是 $\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$ 。

(2)先出現不是 1 的數字，之後出現 1，機率是 $\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$ 。

(3)兩次都出現 1 的機率是 $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ 。

$$P(A) = \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

$$\text{同理可得 } P(B) = \frac{11}{36}$$

$P(A \cap B)$ 代表至少有一次是 1，而且至少有一次是 2。會有兩種可能：

(1)先出現 1，再出現 2

(2)先出現 2，再出現 1。

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{36}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{11}{36} + \frac{11}{36} - \frac{2}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

以上所有可能的情形：

(1, 1) (1, 2) … (1, 6)

(2, 1) (2, 2) ... (2, 6)
(3, 1) (3, 2)
(4, 1) (4, 2)
(5, 1) (5, 2)
(6, 1) (6, 2)

共 20 種，故機率為 $\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$ 。

還有一個方法來解這題：

第一次不出現 1 或 2 的機率是 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ，第二次不出現 1 或 2 的機率也是 $\frac{2}{3}$ 。兩次都不出現一次 1 或 2 的機率是 $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ ，因此兩次至少出現一次 1 或 2 的機率是 $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ 。

15. 擲骰子兩次，求至少一次出現 1 的機率。

A: 第一次出現 1

B: 第二次出現 1

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

各種情形如下：

(1, 1) (1, 2) ... (1, 6)
(2, 1) (3, 1) (4, 1) (5, 1) (6, 1)

共 11 種，故機率為 $\frac{11}{36}$ 。

我們也可以用以下的方法：

至少有一次是 1 的情形：

(1) 先出現 1，之後出現不是 1 的數字，機率是 $\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$ 。

(2)先出現不是 1 的數字，之後出現 1，機率是 $\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$ 。

(3)兩次都出現 1 的機率是 $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ 。

∴ 至少有一次是 1 的機率是 $\frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$ 。

16. 飛彈打飛機命中率是 0.7，求兩次發射飛彈，至少有一次命中飛機的機率。

A: 兩次發射都不命中的事件

$$P(A) = (1 - 0.7)(1 - 0.7) = 0.3 \times 0.3 = 0.09$$

至少有 1 次命中的機率是 $1 - P(A) = 1 - 0.09 = 0.91$ 。

另一做法：

A: 第一次命中

B: 第二次命中

$A \cap B$: 兩次都命中

$A \cup B$: 至少有 1 次命中

$$P(A) = 0.7$$

$$P(B) = 0.7$$

$$P(A \cap B) = 0.7 \times 0.7 = 0.49$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.7 - 0.49 = 0.91$$

我們也可以用以下的解法：

至少有一次命中的情形有 3 種：

(1) 第一次命中，第二次沒有，機率是 $0.7 \times (1 - 0.7) = 0.21$ 。

(2) 第一次沒有，第二次命中，機率是 $(1 - 0.7) \times 0.7 = 0.21$ 。

(3) 兩次都命中的機率是 $0.7 \times 0.7 = 0.49$ 。

因此，有一次命中的機率是 $0.21 + 0.21 + 0.49 = 0.91$ 。

17. 承上題，求發射三次飛彈，至少一次命中的機率。

$$1 - (1 - 0.7)^3 = 1 - (0.3)^3 = 1 - 0.027 = 0.973$$

18. 五戰三勝，甲勝的機率是 0.7，但甲已經敗了兩次，求甲勝的機率。

甲必須連贏三次，因此甲勝的機率是 $(0.7)^3 = 0.343$ 。

19. 甲乙想進某大學，甲的機率是 0.8，乙的機率是 0.7，求至少一人能進此大學的機率。

$$\text{此機率是 } 0.8 + 0.7 - 0.8 \times 0.7 = 1.5 - 0.56 = 0.94$$

另一做法：

$$1 - (1 - 0.8) \times (1 - 0.7) = 1 - 0.06 = 0.94$$

20. 承上題，求只有一人進此大學的機率。

只有一人進此大學有 2 種情形：

(1) 甲進乙未進

(2) 甲未進乙進

$$\text{故只有一人進此大學的機率是 } 0.8 \times (1 - 0.7) + (1 - 0.8) \times 0.7 = 0.24 + 0.14 = 0.38。$$

我們不妨看看這個答案對不對。

甲乙想進某大學，一共只有 3 種情形：

(1) 甲乙都進的機率是 $0.8 \times 0.7 = 0.56$ 。

(2) 甲乙都未進的機率是 $(1 - 0.8) \times (1 - 0.7) = 0.06$ 。

(3) 只有一人進的機率是 0.38。

$$0.56 + 0.06 + 0.38 = 1$$

所以我們的答案是正確的。

21. 在五戰三勝制比賽中，三場下來，甲勝了一場。如果甲比賽獲勝的機率想要大於 0.5，他單場獲勝的機率至少要多少？

甲必須連勝兩場，令甲單場獲勝的機率是 x ，則

$$x^2 > 0.5$$

$$x > \sqrt{0.5} = 0.707$$

22. 承上題，兩場下來，甲都未勝，如果甲比賽獲勝的機率想要大於 0.5，他單場獲勝的機率至少要多少？

此時，甲必須連勝三場，故

$$x^3 > 0.5$$

$$x > 0.793$$

23. 男生 40 人，會游泳者佔 50%，女生 60 人，會游泳者佔 60%。求一位會游泳的機率。

$$A_1: \text{男生}, P(A) = \frac{40}{100} = 0.4$$

$$A_2: \text{女生}, P(B) = \frac{60}{100} = 0.6$$

B: 會游泳

$A_1 \cap B$: 是男生，也會游泳

$A_2 \cap B$: 是女生，也會游泳

$$P(A_1 \cap B) = 0.4 \times 0.5 = 0.2$$

$$P(A_2 \cap B) = 0.6 \times 0.6 = 0.36$$

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) = 0.2 + 0.36 = 0.56$$

24. 承上題，已知一位會游泳，求此人是男生的機率。

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.56} = 0.36$$

25. 承上題，求此人是女生的機率。

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{0.36}{0.56} = 0.64$$

從以上兩題的答案中，可以看出 $P(A_1/B) + P(A_2/B) = 0.36 + 0.64 = 1$ 。所以答案是可信的。

26. 6 個蘋果有 2 個不好，4 個梨子有 3 個不好，求一個水果不好的機率。

$$A_1: \text{蘋果}, P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$A_2: \text{梨子}, P(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

B: 不好的水果

$$P(B/A_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(B/A_2) = \frac{3}{4}$$

$$\therefore P(A_1 \cap B) = P(A_1)P(B/A_1) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

$$P(A_2 \cap B) = P(A_2)P(B/A_2) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

$$\therefore P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

我們也不必如此大費周章地求解，從題意，我們可以看出 10 個水果中，有 5 個是不好的，因此 $B = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ 。

27. 承上題，已知一個水果是不好的，求此水果是蘋果的機率。

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

我們也可以如此想，5 個不好的水果中，有 2 個是蘋果，因此 $P(A_1/B) = \frac{2}{5}$ 。

28. 承上題，求此水果是梨子的機率。

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$$

29. 一個社區中 40% 家庭養狗，30% 家庭養貓，養狗家庭中有 20% 又養貓。求養狗又養貓的家庭機率。

A: 養狗家庭， $P(A) = 0.4$

B: 養貓家庭， $P(B) = 0.3$

$P(B/A) = 0.2$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = 0.4 \times 0.2 = 0.08$$

30. 承上題，求養貓家庭又養狗的機率。

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.08}{0.3} = 0.266$$

31. 甲袋中有 4 個蘋果和 2 個梨子，乙袋中有 3 個蘋果和 2 個梨子。將一個水果從甲袋拿出，放入乙袋。再從乙袋拿出一個水果，求此水果是蘋果的機率。

從甲袋中拿出水果有兩種可能：

(a) 蘋果

(b) 梨子

A: 從甲袋中拿出的是蘋果

B: 從乙袋中拿出的是蘋果

現在，我們分別討論兩種可能：

(1) 從甲袋中拿出的是蘋果， $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 。

將此蘋果放入乙袋中，乙袋中有 4 個蘋果和 2 個梨子。

$$\therefore P(B/A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(B \cap A) = P(A)P(B/A) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

(2) 從甲袋中拿出的不是蘋果

令 \bar{A} = 從甲袋中拿出的不是蘋果，而是梨子。

$$P(\bar{A}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

將此梨子放入乙袋中，乙袋中有 3 個蘋果和 3 個梨子。

$$\therefore P(B/\bar{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(B \cap \bar{A}) = P(\bar{A})P(B/\bar{A}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = \frac{4}{9} + \frac{1}{6} = \frac{11}{18}$$

32. 承上題，已知從乙袋拿出的是蘋果，求從甲袋中拿出的是蘋果的機率。

$$P(A \cap B) = \frac{4}{9}$$

$$P(B) = \frac{11}{18}$$

$$\therefore P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{11}{18}} = \frac{8}{11}$$

33. 甲袋中有 4 白球，1 黑球，乙袋中有 5 白球，2 黑球。從甲袋拿一球到乙袋，再從乙袋中取出一球，求此球是白球的機率。

A: 從甲袋中拿出的是白球

B: 從乙袋中拿出的是白球

$$P(A) = \frac{4}{5}$$

$$P(B/A) = \frac{5+1}{5+2+1} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore P(B \cap A) = P(A)P(B/A) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$$

令 \bar{A} = 從甲袋中拿出的是黑球

$$P(\bar{A}) = \frac{1}{5}$$

$$P(B/\bar{A}) = \frac{5}{5+2+1} = \frac{5}{8}$$

$$P(B \cap \bar{A}) = P(\bar{A})P(B/\bar{A}) = \frac{1}{5} \times \frac{5}{8} = \frac{1}{8}$$

$$\therefore P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = \frac{3}{5} + \frac{1}{8} = \frac{29}{40}$$

34. 承上題，求從乙袋中拿出黑球的機率。

A: 從甲袋中拿出的是黑球

B: 從乙袋中拿出的是黑球

$$P(A) = \frac{1}{5}$$

$$P(B/A) = \frac{2+1}{5+2+1} = \frac{3}{8}$$

$$\therefore P(B \cap A) = P(A)P(B/A) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{40}$$

令 \bar{A} = 從甲袋中拿出的是白球

$$P(\bar{A}) = \frac{4}{5}$$

$$P(B/\bar{A}) = \frac{2}{5+2+1} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(B \cap \bar{A}) = P(\bar{A})P(B/\bar{A}) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = \frac{3}{40} + \frac{1}{5} = \frac{11}{40}$$

同學們可以從上一題的答案中知道，從乙袋中拿出白球的機率是 $\frac{29}{40}$ ，拿出黑

球的機率是 $\frac{11}{40}$ 。注意： $\frac{29}{40} + \frac{11}{40} = 1$ ，所以答案是正確的。

除此以外，我們可以看出從乙袋中拿出白球的機率大於拿出黑球的機率，這是因為黑球比較少的緣故。