# (48)組合

我們有 4 個不同的物件，我們要選擇 2 個物件，我們會有幾種選法？我們將這 4 種物件編號為 1, 2, 3, 4，我們有以下的選擇:

12
13
14
23
24
34

一共有 6 種選法，要知道如果是要選擇 2 個物件，先要知道如果是要選擇 2 個物件來排列，則有$P_2^4 = 4 \times 3 = 12$ 種排列的方法，組合不管排列，方法就少很多。

所謂的組合，是從$n$個不同物件中選擇$r$個物件，因此組合不管排列的，但是任何一個組合卻對應很多排列的。

假設我們選擇了 123 這個組合，對應 6 個排列如下:

123
132
213
231
312
321

對於任何$r$個不同物件，都有$r!$種排列，從$n$個不同物件中選擇$r$個物件，叫做組合，這種組合數，習慣上用$C_r^n$ 表示，從以上的討論，我們可以得知

$r!\, C_r^n = P_r^n$

$\therefore C_r^n = \frac{P_r^n}{r!}$ ……………………………………………………………(48.1)

(1) 如果$r = n$，$C_r^n$ 是多少

答案：$C_r^n = C_n^n = \frac{P_n^n}{n!} = \frac{n!}{n!} = 1$

這個道理很容易懂：從$n$個不同物件取出$n$個物件，當然只有一種選擇法。

*(2)* $n = 10$，$r = 7$

$$C_r^n = C_7^{10} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

*(3)* $n = 5$，$r = 3$

$$C_r^n = C_3^5 = \frac{P_3^5}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

*(4)* $n = 5$，$r = 2$

$$C_r^n = C_2^5 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

從（3）和（4），我們得知

$C_3^5 = C_2^5$

我們甚至可以得到以下的公式

$C_r^n = C_{n-r}^n$ ……………………………………………………………….(48.2)

道理很簡單，從$n$個不同物件中選擇$r$個物件，等於從$n$個不同物件中不選取$(n - r)$個物件。

例如假設從 12345 中選取了 145，就等於不選 2 和 3。選取 235，就等於不選取 1 和 4。

$\therefore C_r^n = C_{n-r}^n$