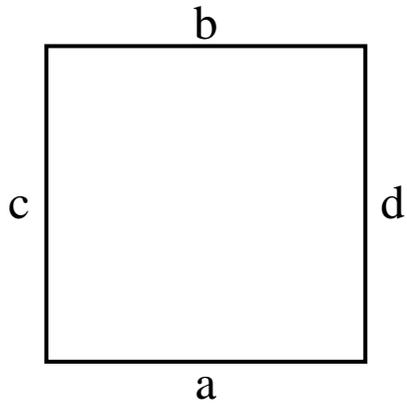


(47)排列-5(環狀)

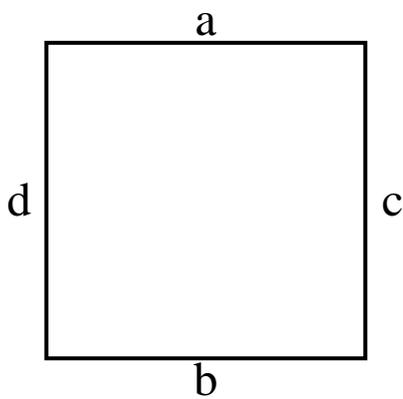
請看下圖



以上的排列中，可以稱之為***bdac***，在這排列中每一物件的左鄰跟右鄰列成下表：

物件	左鄰	右鄰
<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>d</i>	<i>b</i>	<i>a</i>
<i>a</i>	<i>d</i>	<i>c</i>
<i>c</i>	<i>a</i>	<i>b</i>

再看下圖：

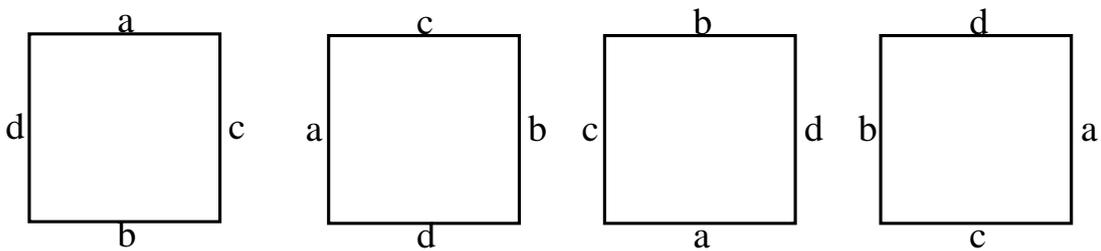


這個排列可以命名為***acbd***。

我們再看一次這種排列下，每一物件的左鄰和右鄰：

物件	左鄰	右鄰
<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>d</i>	<i>b</i>	<i>a</i>
<i>a</i>	<i>d</i>	<i>c</i>
<i>c</i>	<i>a</i>	<i>b</i>

因此，對環狀排列而言，*bdac*和*acbd*是一樣的，事實上，以下四個環狀排列是一樣的，*acbd, cbda, bdac, dacb*都是一樣的，如下圖所示：



對於任何一個*n*不同物件的排列，都有 *n* 個環狀排列，假設 *n* = 3，物件是 *A*、*B* 和 *C*，排列是 *BAC*，以下 3 個排列是 *BAC* 對應的環狀排列：

*BAC*，*ACB*，*CBA*

假設 *n* = 4，物件是 *A*、*B*、*C*、*D*，排列是 *CDAB*，以下 4 個排列是對應於 *CDAB* 的環狀排列：

*CDAB*，*DABC*，*ABCD*，*BCDA*

我們可得到以下的定律：

任何 *n* 個不同物件的排列，都有 *n* 個環狀排列。……………(47.1)

對應於同一排列的環狀排列都是相同的因素，我們有以下的定理：

*n* 個不同物件的環狀排列數量。

$$\frac{P_n^n}{n} = \frac{n!}{n} = (n - 1)! \dots\dots\dots(47.2)$$

(1) *n* = 4 的環狀排列：

$$\frac{P_n^n}{n} = (n - 1)! = 3! = 6$$

假設這四個物件是 ABCD，則這六個環狀的排列是：

$$ABCD \dots \dots \dots (47.3)$$

$$ABDC \dots \dots \dots (47.4)$$

$$ACBD \dots \dots \dots (47.5)$$

$$ACDB \dots \dots \dots (47.6)$$

$$ADBC \dots \dots \dots (47.7)$$

$$ADCB \dots \dots \dots (47.8)$$

也許同學會問，BACD為何不在以上的排列中，我們可以看出，BACD有一個對應的環狀排列ACDB就是(47.6)，所以我們可以說，(47.6)包含了BACD。

同學們一定會問，假如有一個排列，如何列出所有的排列對應的環狀排列呢？

令這個排列為  $x_1x_2\dots x_n$ ，則以下的排列是對應此排列的全部環狀排列：

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot x_n$$

$$x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n \cdot x_1$$

$$x_3 \cdot x_4 \cdot \dots \cdot x_1 \cdot x_2$$

.

.

.

$$x_n \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-2} \cdot x_{n-1}$$

(2) 請列出 31542 的環狀排列：

答案：31524，15423，54231，42315，23154

(3) 請列出ABCDE的環狀排列：

答案：ABCDE，BVDEA，CDEAB，DEABC，EABCD

最後，我們要討論如何列出所有的環狀排列，我們應該記得， $n$ 個不同物件環狀排列數是 $(n-1)!$ ，這應該給我們一個靈感，解決此問題，方法如下：

1. 令此物件為  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$
2. 選取任一物件  $a_i$
3. 列出  $a_i$  以外的  $(n-1)$  物件
4. 列出  $(n-1)$  物件的所有排列
5. 在某一個排列的最前面加上  $a_i$

(4) 列出 1234 的全部環狀排列：

答案：假設我們選了 2，我們觀察列出所有 134 的排列如下

134

143

314

341

413

431

然後，我們將 2 加到做前面去。

2134

2143

2314

2341

2413

2431

(5) 列出 123 的環狀排列：

答案：架設我們選了 3，我們排列 1 和 2 如下：

12

21

再將 3 放到前面去，得到

312

321

以上是 123 的全部環狀排列。