

(38)直線的一些特別性質

我們通常用 $y=ax+b$ 來表示一條直線，現在我們看一下 $y=ax+b$

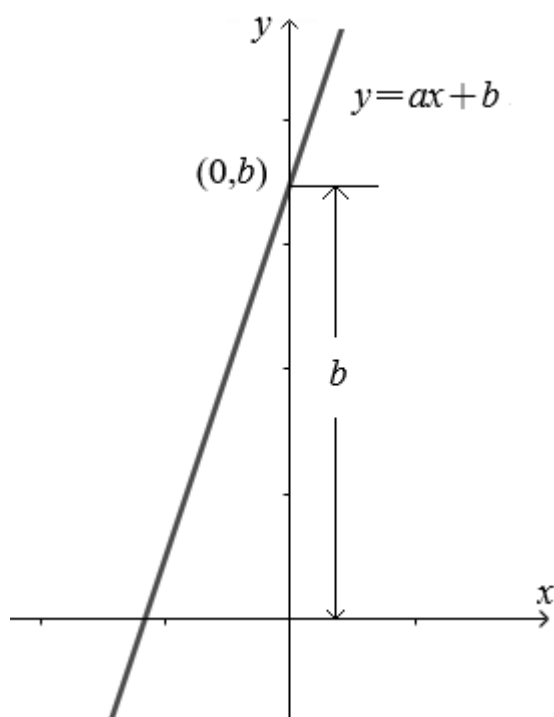
中的 b 有什麼意義。

令 $x=0$ ，我們就得到

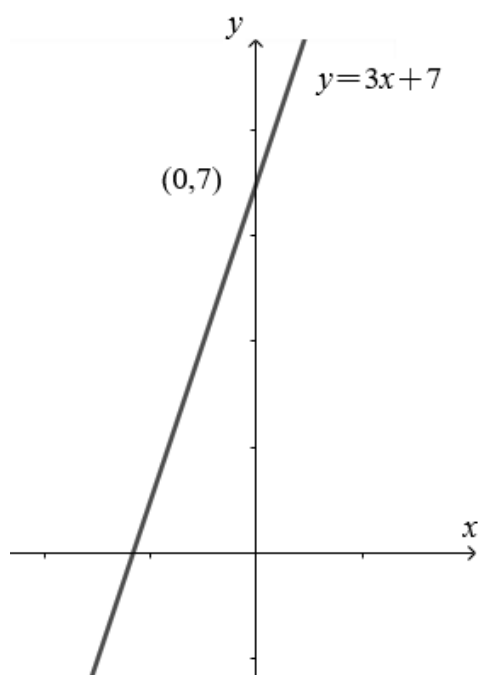
$$y=b$$

所以所謂的 b ，其實表示 $y=ax+b$ 和 y 軸的交點 $(0,b)$ 。換句話說，

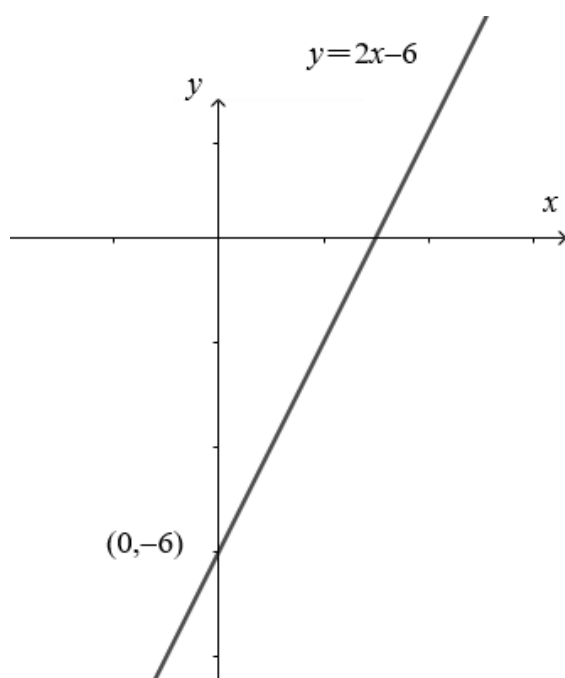
$|b|$ 是 $y=ax+b$ 在 y 軸上的高度。如下圖：



例 1 : $y=3x+7$

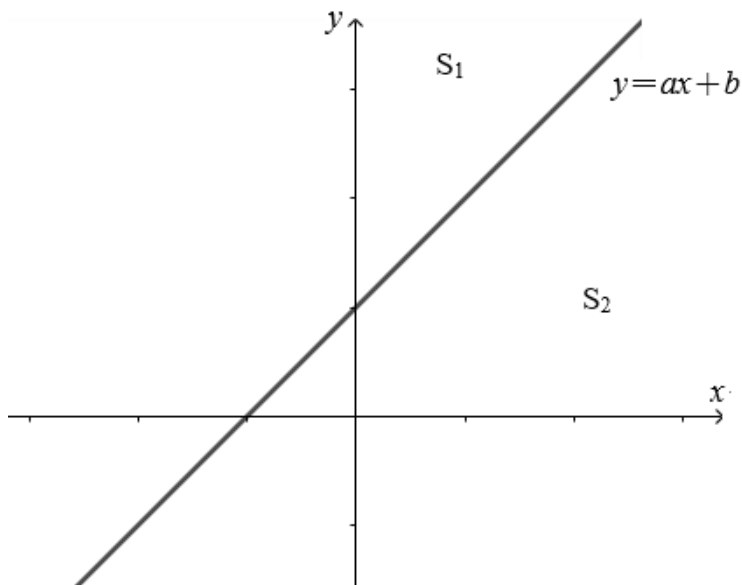


例 2 : $y=2x-6$



假設我們有一條直線 $y=ax+b$ ，這條直線將平面分成兩個半平面 S_1

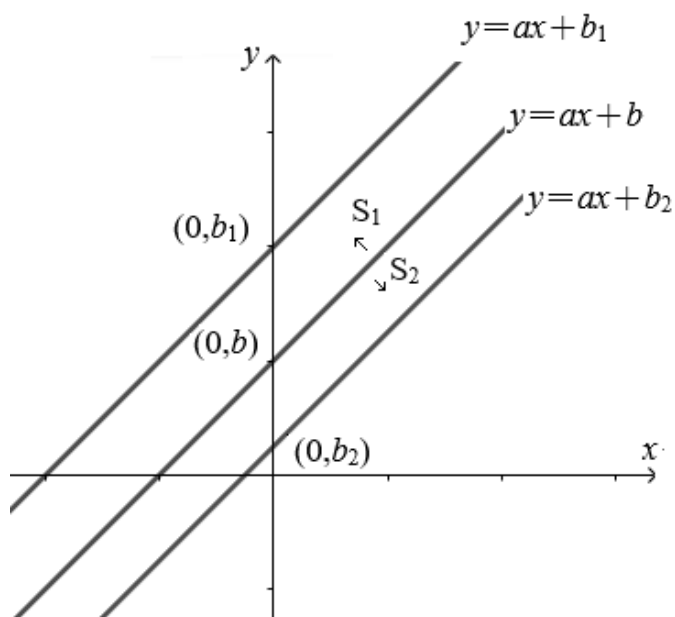
和 S_2 ，如下圖：



在 S_1 ，如果有一條直線 $y=ax+b_1$ ，則 $b_1 > b$ 。

在 S_2 ，如果有一條直線 $y=ax+b_2$ ，則 $b_2 < b$ 。

下圖可以解釋以上的敘述：



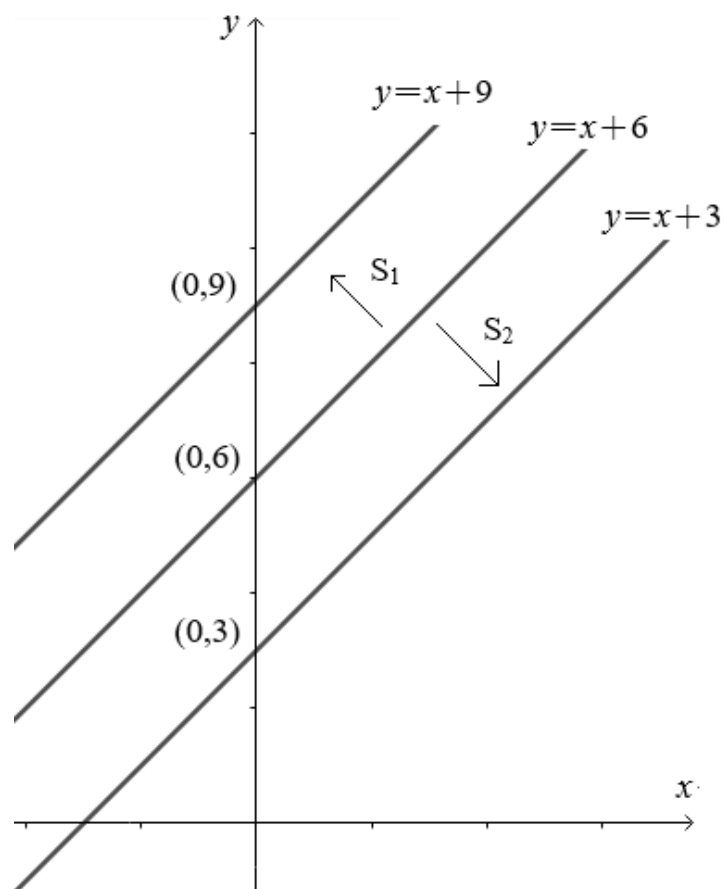
例 3： 有一直線 $y=x+6$ ，其上方為 S_1 ，下方為 S_2 。

$y=x+9$ ，在 S_1 內，它與 y 軸交點為 $(0,9)$ 。

$y=x+6$ ，它與 y 軸交點為 $(0,6)$ 。

$y=x+3$ ，在 S_2 內，它與 y 軸交點為 $(0,3)$ 。

如下圖：



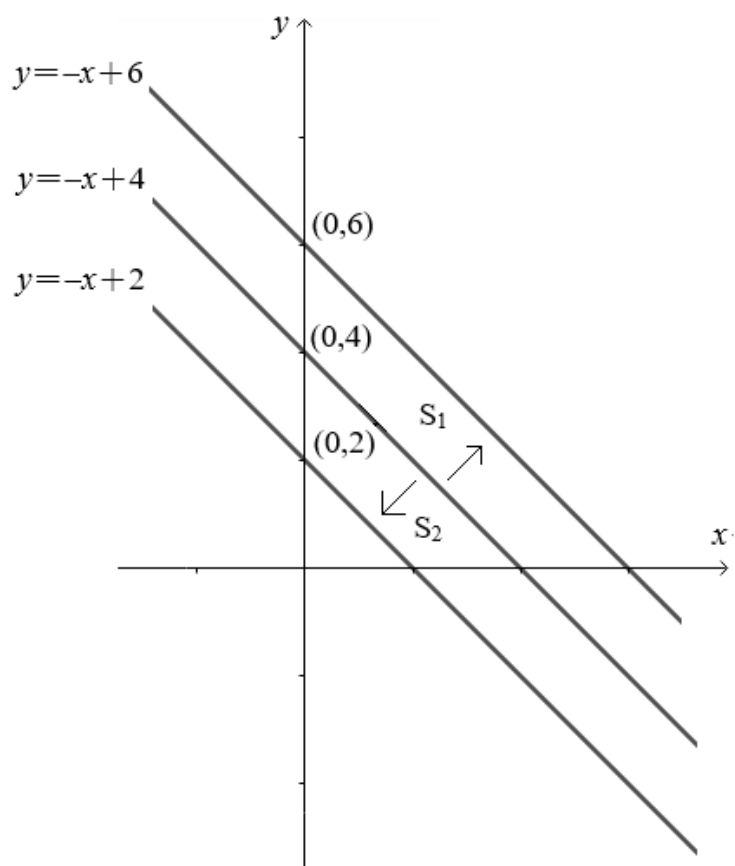
例 4： 有一直線 $y=-x+4$ ，其上方為 S_1 ，下方為 S_2 。

$y=-x+6$ ，在 S_1 內，它與 y 軸交點為 $(0,6)$ 。

$y=-x+4$ ，它與 y 軸交點為 $(0,4)$ 。

$y=-x+2$ ，在 S_2 內，它與 y 軸交點為 $(0,2)$ 。

如下圖：



根據以上的討論，我們可以得到以下的結論：

(1) 假設點 (x_0, y_0) 在直線 $y=ax+b$ 上，則

$$y_0 = ax_0 + b$$

$$\therefore y_0 - ax_0 = b$$

(2) $y = ax + b$ 將平面分成 S_1 和 S_2 。

(3) 假設點 (x_0, y_0) 在 S_1 ，且在直線 $y = ax + b_1$ 上，則

$$y_0 = ax_0 + b_1, \text{ 且 } b_1 > b。$$

$$\therefore y_0 - ax_0 = b_1 > b$$

(4) 假設點 (x_0, y_0) 在 S_2 ，且在直線 $y = ax + b_2$ 上，則

$$y_0 = ax_0 + b_2, \text{ 且 } b_2 < b。$$

$$\therefore y_0 - ax_0 = b_2 < b$$

因此我們有以下的結論：

(1) 在 S_1 內的任意點 (x_0, y_0) ，滿足 $y_0 - ax_0 > b$

(2) 在 S_2 內的任意點 (x_0, y_0) ，滿足 $y_0 - ax_0 < b$

我們也可以做以下的結論：

(1) 如果點 (x_0, y_0) 滿足 $y_0 - ax_0 > b$ ，則點 (x_0, y_0) 在 S_1 內。

(2) 如果點 (x_0, y_0) 滿足 $y_0 - ax_0 < b$ ，則點 (x_0, y_0) 在 S_2 內。

例 5： 有一直線 $y = 3x + 4$

$$a = 3, b = 4$$

(1) $(x_0, y_0) = (1, 7)$ 是直線 $y = 3x + 4$ 上的一點

$$\text{因為 } y_0 - ax_0 = 7 - 3 \times 1 = 4 = b = 4$$

(2) $(x_0, y_0) = (1, 9)$ 在 S_1 內，

因為 $y_0 - ax_0 = 9 - 3 \times 1 = 6 > b = 4$

(3) $(x_0, y_0) = (1, 2)$ 在 S_2 內，

因為 $y_0 - ax_0 = 2 - 3 \times 1 = -1 < b = 4$

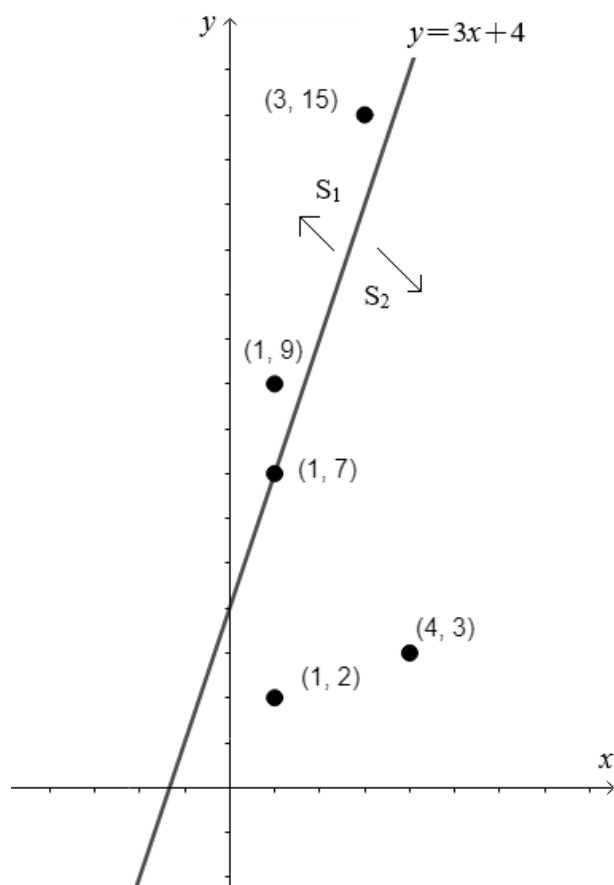
(4) $(x_0, y_0) = (3, 15)$ 在 S_1 內，

因為 $y_0 - ax_0 = 15 - 3 \times 3 = 9 > b = 4$

(5) $(x_0, y_0) = (4, 3)$ 在 S_2 內，

因為 $y_0 - ax_0 = 3 - 3 \times 4 = -9 < b = 4$

以上的直線和點如下圖：



例 6： 有一直線 $y = -2x + 5$

$$a = -2, b = 5$$

(1) $(x_0, y_0) = (2, 1)$ 是直線 $y = -2x + 5$ 上的一點

$$\text{因為 } y_0 - ax_0 = 1 - (-2) \times 2 = 5 = b = 5$$

(2) $(x_0, y_0) = (-2, 10)$ 在 S_1 內，

$$\text{因為 } y_0 - ax_0 = 10 - (-2) \times (-2) = 6 > b = 5$$

(3) $(x_0, y_0) = (-2, 2)$ 在 S_2 內，

$$\text{因為 } y_0 - ax_0 = 2 - (-2) \times (-2) = -2 < b = 5$$

(4) $(x_0, y_0) = (0, 5)$ 是直線 $y = -2x + 5$ 上的一點

$$\text{因為 } y_0 - ax_0 = 5 - (-2) \times 0 = 5 = b = 5$$

以上的直線和點如下圖：

