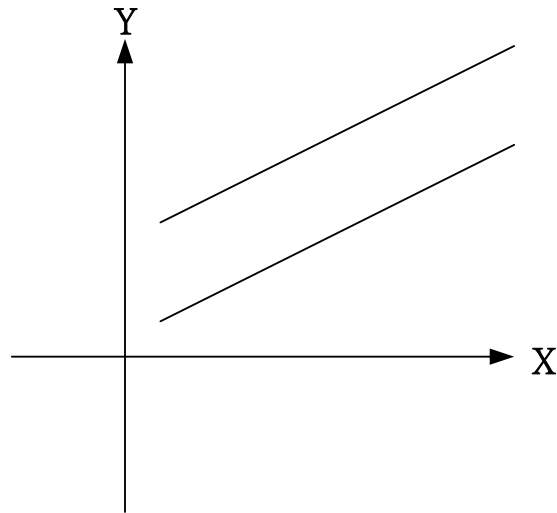


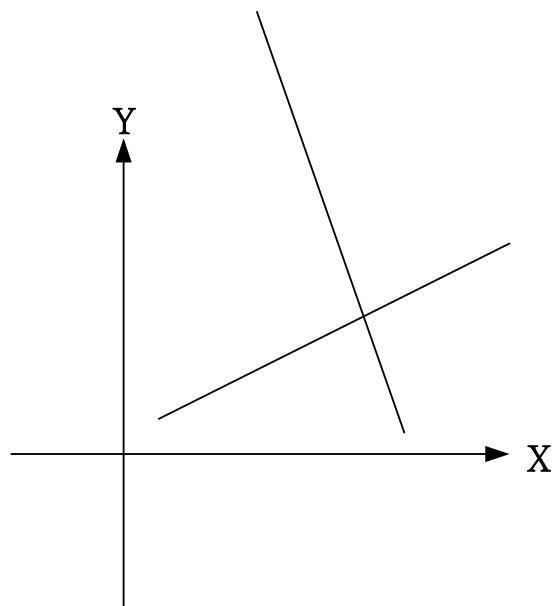
(37)直線與向量

同學們一定已經對直線有觀念了，我們在過去常說"兩點決定一條線"，這是正確的，但是現在我們又學會了向量，我們可以將直線和向量連接起來了。

請看下圖，這張圖中有兩條直線，大家一定會認為這兩條線是平行的。為什麼平行?理由很簡單，它們的方向都是相同的。



再看下圖，這張圖中也有兩條線，一看就知道這兩條直線相交，因為它們的方向是不同的。



假設有一條直線， $(x_1, y_1) = (3, 1)$ 是線上的一點， $(x_2, y_2) = (5, 6)$ 是線上的另一點。

$$x_2 - x_1 = 5 - 3 = 2$$

$$y_2 - y_1 = 6 - 1 = 5$$

因此我們可以知道這一條直線的方向可以用向量 $v = (v_x, v_y) = (2, 5)$ 來代表，直線的方程式可以用以下的方程式來代表。

$$x = x_0 + tv_x = 3 + 2t$$

$$y = y_0 + tv_y = 1 + 5t$$

以上式子中的 t 可以為任何實數，我們可以將這種直線的表示方法稱之為參數表示法。

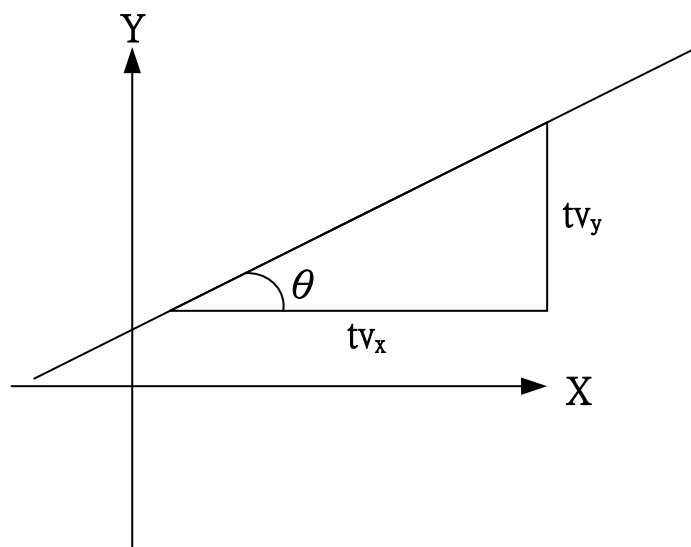
參數表示法的要義如下：

如果一條直線通過 (x_0, y_0) ，方向是 $v = (v_x, v_y)$ ，則此直線可由以下的方程式表示：

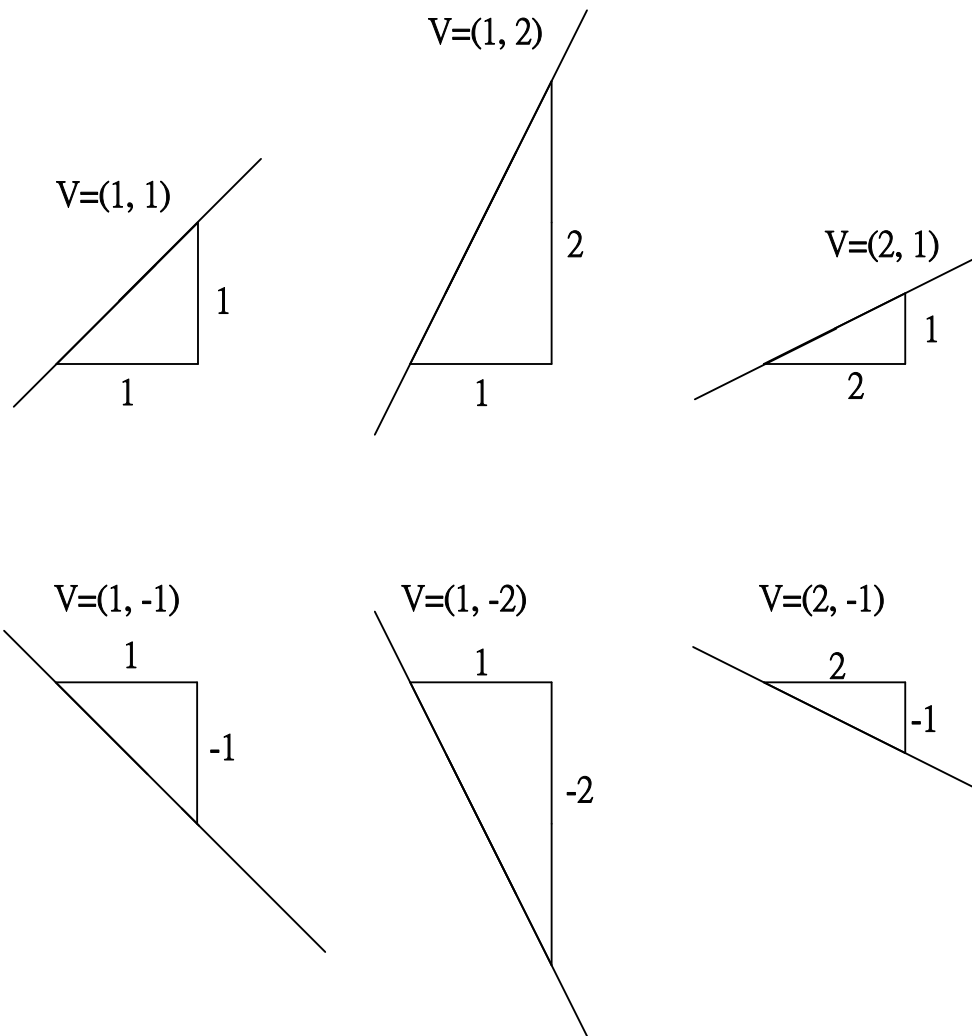
$$x = x_0 + tv_x \cdots \cdots (1)$$

$$y = y_0 + tv_y \cdots \cdots (2)$$

$v = (v_x, v_y)$ 確定了直線的斜率，如下圖：



下圖顯示了各種方向向量的圖形：



同學們一定會有一個疑問，在過去，直線的方程式是 $ax + by + c = 0$ 或 $y = ax + b$ ，

現在參數直線方程式是

$$x = x_0 + tv_x$$

$$y = y_0 + tv_y$$

這兩種表示可以互換嗎？

先考慮參數直線表示法

$$x = x_0 + tv_x$$

$$y = y_0 + tv_y$$

$$\therefore x = x_0 + tv_x$$

$$\therefore t = \frac{x - x_0}{v_x}$$

將 $t = \frac{x - x_0}{v_x}$ 代入 $y = y_0 + tv_y$ ，得 $y = y_0 + v_y \left(\frac{x - x_0}{v_x} \right)$

$$\therefore y = \frac{v_y}{v_x} x + y_0 - \frac{v_y}{v_x} x_0 \dots \dots \dots (3)$$

我們可以令

$$\frac{v_y}{v_x} = a, \quad y_0 - \frac{v_y}{v_x} x_0 = b$$

第(3)式就是 $y = ax + b$

(1) 直線通過 $(x_0, y_0) = (2, 3)$ ， $v = (v_x, v_y) = (1, 4)$

$$x = x_0 + tv_x = 2 + t \dots \dots \dots (1.1)$$

$$y = y_0 + tv_y = 3 + 4t \dots \dots \dots (1.2)$$

由(1.1)得

$$t = x - 2 \dots \dots \dots (1.3)$$

將(1.3)代入(1.2)，得

$$y = 3 + 4(x - 2)$$

$$\therefore y = 4x + 3 - 8 = 4x - 5 \dots \dots \dots (1.4)$$

我們也可以直接用公式(3)

$$y = \frac{v_y}{v_x} x + y_0 - \frac{v_y}{v_x} x_0$$

$$y = \frac{4}{1}x + 3 - \left(\frac{4}{1}\right)(2)$$

$$y = 4x + 3 - 4(2) = 4x + 3 - 8 = 4x - 5, \text{ 和(1.4)相同}$$

我們先要檢查 $(x_0, y_0) = (2, 3)$ 是否在直線上

$$y = 4x - 5$$

$$\text{令 } x = 2, y = 4 \times 2 - 5 = 3$$

$\therefore (2, 3)$ 在 $y = 4x - 5$ 上

$$y = 4x - 5 \text{ 的斜率是 } 4, v = (v_x, v_y) = (1, 4)$$

$$\therefore \text{斜率} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{4}{1} = 4$$

這幾乎是不用查的，因為公式(3)就是 $y = \frac{v_y}{v_x}x + y_0 - \frac{v_y}{v_x}x_0$

x 的係數是直線的斜率，所以這個公式滿足了原來關於直線方向的要求。

$$(2) \text{ 直線通過 } (x_0, y_0) = (3, -1), v = (v_x, v_y) = (-2, 3)$$

$$x = x_0 + tv_x = 3 + (-2)t = 3 - 2t \dots\dots\dots (2.1)$$

$$y = y_0 + tv_y = -1 + 3t \dots\dots\dots (2.2)$$

我們直接用公式(3)

$$y = \frac{v_y}{v_x}x + y_0 - \frac{v_y}{v_x}x_0$$

$$y = \left(\frac{3}{-2}\right)x + (-1) - \left(\frac{3}{-2}\right)(3)$$

$$y = -\frac{3}{2}x - 1 + \frac{9}{2}$$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2} \dots\dots\dots (2.3)$$

我們可以檢查(3, -1)是否在此直線上

$$\text{將 } x = 3 \text{ 代入 } y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$y = -\frac{3}{2}(3) + \frac{7}{2} = -\frac{9}{2} + \frac{7}{2} = -1$$

$$\therefore (3, -1) \text{ 在 } y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2} \text{ 上}$$

(3) 直線通過 $(x_0, y_0) = (2, 3)$, $v = (v_x, v_y) = (2, 4)$

$$x = x_0 + tv_x = 2 + 2t$$

$$y = y_0 + tv_y = 3 + 4t$$

利用公式(3)

$$y = \frac{v_y}{v_x}x + y_0 - \frac{v_y}{v_x}x_0$$

$$y = \left(\frac{4}{2}\right)x + 3 - \left(\frac{4}{2}\right)(2)$$

$$y = 2x + 3 - 4$$

$$y = 2x - 1$$

一條直線的方向可以用 $v = (v_x, v_y)$ 來表示，這條直線的斜率是 $\frac{v_y}{v_x}$ ，因此我們對

任何一個 $v = (v_x, v_y)$ ，都用 $(1, a)$ 來表示，其中 a 就是 $\frac{v_y}{v_x}$ 。

一旦 $v = (1, a)$ ，公式(3)就變得更簡單了，原來的直線方程式是 $y = \frac{v_y}{v_x}x + y_0 -$

$$\frac{v_y}{v_x}x_0$$

因為 $v=(1, a)$ ，而且 $a = \frac{v_y}{v_x}$ ，我們可以得到以下的公式

$$y = ax + y_0 - ax_0 \cdots \cdots (4)$$

(4)重做第(2)題

直線通過(3, -1)，原來的 $v = (-2, 3)$ ，所得到的直線方程式是 $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$

假如我們用 $v = (1, a) = (1, \frac{3}{-2}) = (1, \frac{-3}{2})$

由公式(4)，我們可得

$$y = -\frac{3}{2}x + (-1) - (-\frac{3}{2})(3)$$

$$y = -\frac{3}{2}x - 1 + \frac{9}{2}$$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$$

我們用 $v = (1, a)$ ，得到的直線方程式是一樣的

(5)重做第(3)題

直線通過(2, 3)， $v = (2, 4)$ ，所得到的直線方程式是 $y = 2x - 1$

假如我們用 $v = (1, a) = (1, \frac{4}{2}) = (1, 2)$

則 $y = ax + y_0 - ax_0$

$$y = 2x + 3 - 2 \times 2 = 2x + 3 - 4 = 2x - 1$$

得到的答案和用 $v = (2, 4)$ 是一樣的

在此以前，我們都是先知道參數直線表示法，然後可以求得直線方程式。在下面，我們要告訴同學，如果我們知道了直線方程式，也可以求得參數直線方程

式的。

(6)直線方程式 $y = 5x - 7$

先求這個直線上的任一點，令 $x = 0$ ，則 $y = -7$ ，所以 $(x_0, y_0) = (0, -7)$ 是 $y = 5x - 7$ 上的一點。

$y = 5x - 7$ 表示此直線的斜率是5，故 $v = (1, 5)$

參數表示法的公式是

$$x = 0 + t$$

$$y = -7 + 5t$$

(7)直線方程式 $y = -\frac{2}{5}x + \frac{2}{3}$

$$\text{令 } x = 1, y = -\frac{2}{5}(1) + \frac{2}{3} = -\frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{-6+10}{15} = \frac{4}{15}$$

$\therefore (x_0, y_0) = (1, \frac{4}{15})$ 在此直線上

$$v = (1, -\frac{2}{5})$$

\therefore 參數表示法的方程式是

$$x = 1 + t \dots \dots \dots (7.1)$$

$$y = \frac{4}{15} - \frac{2}{5}t \dots \dots \dots (7.2)$$

我們可以驗證做得對不對

由 7.1 得 $t = x - 1$ ，將此代入(7.2)

$$y = \frac{4}{15} - \frac{2}{5}(x - 1)$$

$$y = \frac{4}{15} - \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}$$

$$y = -\frac{2}{5}x + \frac{4}{15} + \frac{2}{5}$$

$$y = -\frac{2}{5}x + \frac{4+6}{15}$$

$$y = -\frac{2}{5}x + \frac{10}{15}$$

$$y = -\frac{2}{5}x + \frac{2}{3}$$

如果我們令 $x = 0$ ，則 $y = \frac{2}{3}$ ， $\therefore (0, \frac{2}{3})$ 在此直線上，參數表示法的方程式是

$$x = 0 + t$$

$$y = \frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{5}\right)t$$

兩個方程式合併，可得

$$y = \frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{5}\right)x$$

$$y = -\frac{2}{5}x + \frac{2}{3}$$

(8)直線方程式 $y = 2x - 9$

令 $x = 0$ ， $y = -9$ ，故 $(x_0, y_0) = (0, -9)$ 在此直線上， $v = (1, 2)$

$$x = 0 + t$$

$$y = -9 + 2t$$

兩方程式合併，

$$y = -9 + 2x$$

$$y = 2x - 9$$