(36)對數函數

對數函數的公式如下:

$f(x) = \log_a x$

通常，我們採用常用對數，所以

$f(x) = \log_{10} x$

對數函數是一個漸增函數，但是增加得特別慢。

$f(x) = \log x$
$f(10) = 1$
$f(100) = 2$
$f(1000) = 3$
.
.
.
$f(10^n) = n$

我們現在將過去所學到的幾個函數列成一個表，在數學運算中，對數的底數常是 2，請看下圖:

x	10	10^2	10^3	10^4
$\log_2 x$	3.3	6.6	10	13.3
x	10	10^2	10^3	10^4
x^2	10^2	10^4	10^6	10^8
2^x	1024	1.3×10^{30}	$> 10^{100}$	$> 10^{100}$

同學們一定要知道函數的意義，假設我們有一組已經排列好的數字，現在我們有一個數字p，我們的任務是要看p是否存在於這組排列好的數字中。最簡單的辦法是逐一地檢查，這樣做，最壞的情況可能要檢查到最後一個數字才知道結果。假如有10^4個數字，最壞的情況，我們要檢查10^4次之多。

但是我們可以用一種二分法來解決這個問題。假設我們有 16 個數字，$a_1, a_2 \cdots, a_{16}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
a_i	3	7	10	11	14	16	19	21	24	25	28	31	34	37	39	41

我們要找的數字是 39，步驟如下:

(1) 查$a_8 = 21$，因為 39＞21，我們可以忽略a_1到a_7，只檢查a_9到a_{16}。
(2) 檢查$a_{13} = 34$，因為 39＞34，我們只檢查a_{14}到a_{16}。
(3) 檢查$a_{15} = 39$，我們的工作結束了。

同學們可以看出，我們只要 3 個步驟就解決了這個問題。現在我們看另一個例子，假設我們要找 5 是否存在，步驟如下:

(1) 先檢查a_8，因為$a_8 = 21 > 5$，我們只檢查a_1到a_7。
(2) 檢查$a_4 = 11$，因為$a_4 = 11 > 5$，我們只檢查a_1到a_3。
(3) 檢查$a_2 = 7$，因為$a_2 = 7 > 5$，我們只檢查a_1。
(4) 檢查a_1 =3，因為$a_1 = 3 < 5$，我們發現 5 不存在。

這次也只檢查了 4 次，同學們應該會發現，檢查的次數最多是$\log_2 16 = 4$，假如有 10000 個數字，$\log_2 10000 = 13.3$，也就是我們在 14 個步驟中，一定可以完成任務。如果每一個數字逐一檢查，我們可能要檢查 10000 次。

同學們應該知道函數的意義了。