

(35)指數函數

指數函數的公式是

$$f(x) = a^x$$

假設 $a = 2$ ， $f(x) = 2^x$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

我們可以看出 $f(x) = 2^x$ 是一個漸增的函數，而且增加的速度非常之快。我們可以將 $f(x) = 2^x$ 和 $f(x) = x$ 以及 $f(x) = x^2$ 來比較一下

x	10	20	30
$f(x) = x$	10	20	30
$f(x) = x^2$	100	400	900
$f(x) = 2^x$	1024	1048576	1073741824

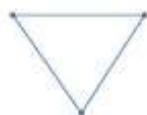
我們可以知道 2^x 是一個增加得極快的函數，我現在在下面舉一個例子，以說明 $f(x) = 2^x$ 是很普通的事。

指數函數在數學上是非常重要的，我們可以從以下的例子中看出。

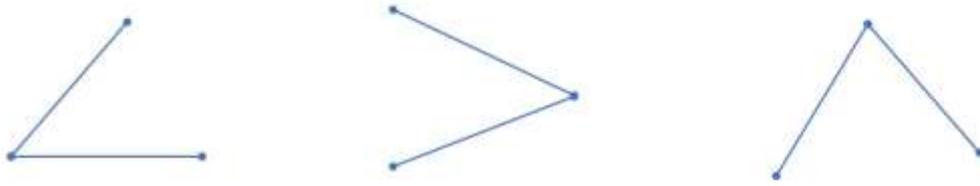
假設我們只有兩個城市，要連起來，當然只有一種連法，如下圖：



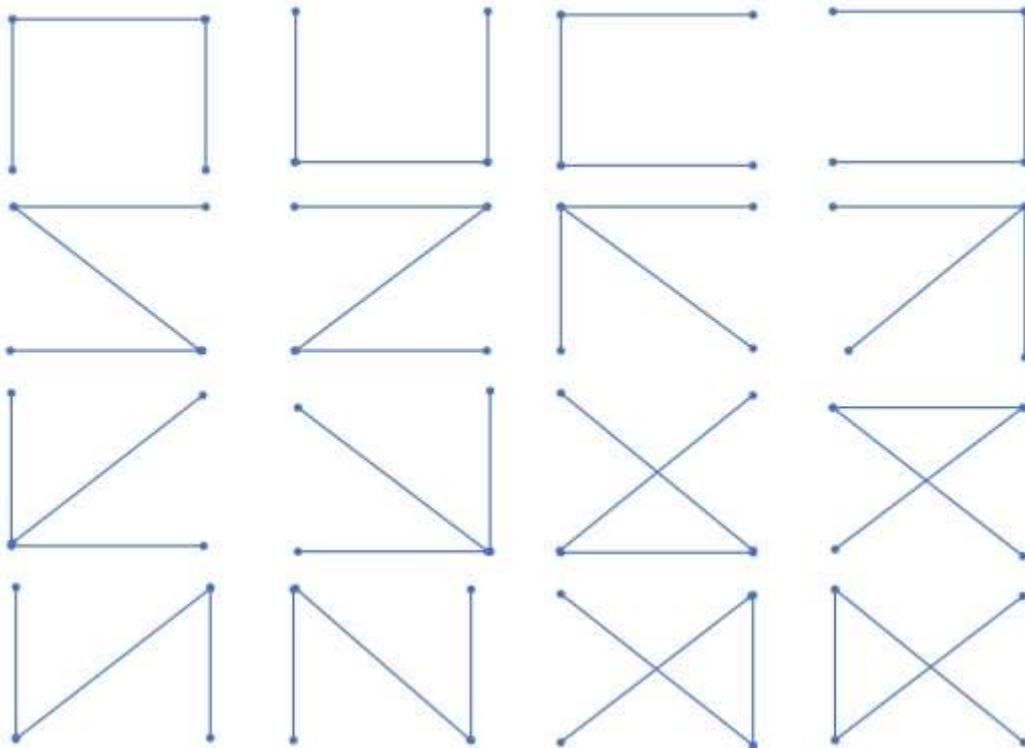
假設我們有3個城市，我們要將它們連起來，但是有一個條件，那就是連起來以後不可有迴路，比方說，下面的連法就是不對的，因為這種連法有一個迴路。



我們還有一個條件，那就是任何兩個城市中間必會有一條通路。對 3 個城市而言，我們只有三種連法：



假設我們有 4 個城市，連法多達 16 個，如下圖所示：



數學會告訴各位同學，假如我有 x 個城市，一共有 x^{x-2} 種連法。假如 $x = 100$ ，我們有 $100^{98} = 10^{196}$ 種連法，這真是天文數字。假如我們要想知道哪一種連法是最好的，那我們就要檢查 10^{196} 個連法，這是不可能的任務。數學家如果要解決這種指數函數的數學問題，就必須想出好的方法。