(32) 常用對數

現在的數字都用 10 進位，比方說，

$35 = 3 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

$472 = 4 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 2 \times 10^0$

對於對數，底數可以是任何值。為了方便起見，我們規定了以 10 為底數的對數為「常用對數」。常用對數的定義是$\log_{10} x$，但為了簡化起見，常用對數可以省略對數，所以$\log_{10} x = \log x$

(1)$\log 10 = 1$
(2) $\log 100 = 2$
(3) $\log 1000 = 3$
(4) $\log \frac{1}{10} = -1$

(5) $\log \frac{1}{100} = -2$

(6) $\log \frac{1}{1000} = -3$

10 這個數字有一些簡單且易於記憶如下:

(1)如$0 < a < 1$，$1 < 10^a < 10$
(2)如$1 < a < 2$，$10 < 10^a < 100$
(3)如$2 < a < 3$，$100 < 10^a < 1000$

⋮

因此我們可以知道

(1)如$0 < x < 10$，$0 < \log x < 1$
(2)如$10 < x < 100$，$1 < \log x < 2$
(3)如$100 < x < 1000$，$2 < \log x < 3$

各位同學用電腦裡的小算盤，可以算得以下的結果

(7) $\log 3 = 0.477 < 1$
(8) $\log 7 = 0.845 < 1$
(9) $\log 30 = 1.477 = (1 + 0.477) < 2$
(10) $\log 70 = 1.845 = (1 + 0.845) < 2$
(11) $\log 300 = 2.477 = (2 + 0.477) < 3$
(12) $\log 700 = 2.845 = (2 + 0.845) < 3$

同學們一定可以從以上的例子中看出

(13) $\log 3 = 0.477$
(14) $\log 30 = \log 3 \times 10 = \log 3 + \log 10 = 0.477 + 1 = 1.477$
(15) $\log 300 = \log 30 \times 10 = \log 30 + \log 10 = 1.477 + 1 = 2.477$
(16) $\log 7 = 0.845$
(17) $\log 70 = \log 7 \times 10 = \log 7 + \log 10 = 0.845 + 1 = 1.845$
(18) $\log 700 = \log 70 \times 10 = \log 70 + \log 10 = 1.845 + 1 = 2.845$

同學們可以看出常用對數$\log x$的優點:

$\log_{10} n = n \log 10 = n$

換底公式

以下，我們要介紹一個換底公式，我們先看以下的式子:

$(\log_b c)(\log_c a)$

(19)令$b = 2$，$c = 4$，$a = 16$
$(\log_b c)(\log_c a) = (\log_2 4)(\log_4 16) = 2 \times 2 = 4$

同學們不妨注意$\log_b a = \log_2 16 = 4$

(20)令$b = 3$，$c = 9$，$a = 81$
$(\log_b c)(\log_c a) = (\log_3 9)(\log_9 81) = 2 \times 2 = 4$

也請注意$\log_b a = \log_3 81 = 4$

(21)令$b = 2$，$c = 8$，$a = 64$
$(\log_b c)(\log_c a) = (\log_2 8)(\log_8 64) = 3 \times 2 = 6$
請注意$\log_b a = \log_2 64 = 6$

以下我們要證明一個公式:

$(\log_b c)(\log_c a) = (\log_b a)$

證明如下:

$(b^{\log_b c}) = c$

$\therefore\ (b^{\log_b c})^{\log_c a} = c^{\log_c a} = a = b^{\log_b a}$

$\therefore\ b^{(\log_b c)(\log_c a)} = b^{\log_b a}$

$\therefore\ (\log_b c)(\log_c a) = (\log_b a)$

根據以上的公式，我們可以得到
$$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$$

為何我們將以上的公式叫做換底公式呢?

假設我們只知道以 b 為底的對數，我們根據以 b 為底的對數，求得以 c 為底的倒數。

因為$b = 10$很好用，我們通常用以下的換底公式

$$\log_c a = \frac{\log a}{\log c}$$

(22)$c = 2$，$a = 8$
$$\log_2 8 = \frac{\log 8}{\log 2} = \frac{0.9}{0.3} = 3$$

同學們知道這是正確的答案

(23)$c=3$，$a=27$

$$\log_3 27=\frac{\log 27}{\log 3}=\frac{1.41}{0.47}=3$$

正確的答案

(24)$c=3$，$a=9$

$$\log_3 9=\frac{\log 9}{\log 3}=\frac{0.954}{0.477}=2$$

正確的答案

(25)$c=3$，$a=7$

$$\log_3 7=\frac{\log 7}{\log 3}=\frac{0.84588}{0.477}=1.77$$

我們可以利用小算盤得知

$3^{1.77}=6.9$　很接近 7 了

(26)$c=5$，$a=15$

$$\log_5 15=\frac{\log 15}{\log 5}=\frac{1.17}{0.698}=1.68$$

從小算盤可以查出

$5^{1.68}=14.93$　很靠近 15 了

(27)$c=8$，$a=100$

$$\log_8 100=\frac{\log 100}{\log 8}=\frac{2}{0.903}=2.21$$

從小算盤可以查出

$8^{2.21}=99.04$　很靠近 100 了

$(28) c = 3$，$a = 30$

$$\log_3 30 = \frac{\log 30}{\log 3} = \frac{1.477}{0.477} = 3.096$$

從小算盤可以查出

$3^{3.096} = 30$　答案正確