（31）對數

假設我們有一個一傳二的傳染病，這個傳染病傳出去的情況如下；
第一次 一人染病
第二次 二人染病
第三次 四人染病

我們如果需要問幾次幾人染病，我們就可以用以下的式子來表示
$2^x = 1$ 求x

對數就是根據這種想法決定出來，對數的定義如下:
若$a > 0, a \neq 1, b > 0, a^x = b$, 則 $x = \log_a b$
以a為底時b的對數，a是底數，b為真數

1. $2^2 = 4, \log_2 4 = 2$
2. $2^4 = 16, \log_2 16 = 4$
3. $3^3 = 17, \log_3 27 = 3$
4. $3^4 = 81, \log_3 81 = 4$
5. $5^2 = 25, \log_5 25 = 2$
6. $5^3 = 125, \log_5 125 = 3$
7. $10^2 = 100, \log_{10} 100 = 2$
8. $10^3 = 1000, \log_{10} 1000 = 3$
9. $12^2 = 144, \log_{12} 144 = 2$
10. $13^2 = 169, \log_{13} 169 = 2$
11. $2^{-1} = \frac{1}{2}, \log_2 \frac{1}{2} = -1$
12. $4^{\frac{1}{2}} = 2, \log_4 2 = \frac{1}{2}$
13. $3^{-2} = \frac{1}{9}, \log_3 \frac{1}{9} = -2$
14. $a^0 = 1, \log_a 1 = 0$
15. $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}, \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$
16. $(\frac{1}{2})^{-2} = 4, \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$
17. $3^{-2} = \frac{1}{9}, \log_3 \frac{1}{9} = -2$

18. $5^{-1} = \frac{1}{5}$, $\log_5 \frac{1}{5} = -1$

19. $3^0 = 1$, $\log_3 1 = 0$

20. $1012^0 = 1$, $\log_{1012} 1 = 0$

21. $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$

22. $4^{\frac{1}{2}} = 2$, $\log_4 2 = \frac{1}{2}$

我們看到了這些關於對數的例子，現在我們要談一下如何求對數。

對數定律一；$\log_a a = 1$

這個定律很容易理解的，因為$a^1 = a$, 所以$\log_a a = 1$

對數定律二；$\log_a 1 = 0$

這個定律很容易理解的，因為$a^0 = 1$, 所以$\log_a 1 = 0$

對數定律三；$\log_a rs = \log_a r + \log_a s$

我們現在來證明這個定理

$a^{x1} = r, \log_a r = x1$

$a^{x2} = s, \log_a s = x2$

$rs = (a^{x1})(a^{x2}) = a^{x1+x2}$

$\log_a rs = x1 + x2 = \log_a r + \log_a s$

我們現在舉幾個例子

1. $\log_2 8 = \log_2(4 * 2) = \log_2 4 + \log_2 2 = 2 + 1 = 3$ $(2^3 = 8)$
2. $\log_2 32 = \log_2(8 * 4) = \log_2 8 + \log_2 4 = 3 + 2 = 5$ $(2^5 = 32)$
3. $\log_{10} 1000 = \log_{10}(100 * 10) = \log_{10} 100 + \log_{10} 10 = 2 + 1 = 3$ $(10^3 = 1000)$
4. $\log_3 27 = \log_3(9 * 3) = \log_3 9 + \log_3 3 = 2 + 1 = 3$ $(3^3 = 27)$
5. $\log_3 81 = \log_3(9 * 9) = \log_3 9 + \log_3 9 = 2 + 2 = 4$ $(3^4 = 81)$
6. $\log_4 64 = \log_4(16 * 4) = \log_4 16 + \log_4 4 = 2 + 1 = 3$ $(4^3 = 64)$

對數定律四；$\log_a r^t = t\log_a r$

這個定律是根據定律三的，根據對數定律三

$\log_a r^t = \log_a r.r..r.r..r. = \log_a r + \cdots ....\log_a r = t\log_a r$

1. $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3\log_2 2 = 3 \quad (2^3 = 8)$
2. $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5\log_2 2 = 5 \quad (2^5 = 32)$
3. $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3\log_4 4 = 3 \quad (4^3 = 64)$
4. $\log_3 81 = \log_3 3^2 = 2\log_3 3 = 4 \quad (3^4 = 81)$
5. $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2\log_3 3 = 2 \quad (3^2 = 9)$
6. $\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3\log_3 3 = 3 \quad (3^3 = 27)$
7. $\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2\log_5 5 = 2 \quad (5^2 = 25)$
8. $\log_{10} 10000 = \log_{10} 10^4 = 4\log_{10} 10 = 4 \quad (10^4 = 10000)$
9. $\log_6 36 = \log_6 6^2 = 2\log_6 6 = 2 \quad (6^2 = 36)$
10. $\log_7 49 = \log_7 7^2 = 2\log_7 7 = 2 \quad (7^2 = 49)$
11. $\log_{11} 121 = \log_{11} 11^2 = 2\log_{11} 11 = 2 \quad (11^2 = 121)$
12. $\log_{12} 144 = \log_{12} 12^2 = 2\log_{12} 12 = 2 \quad (12^2 = 144)$
13. $\log_{16} 256 = \log_{16} 16^2 = 2\log_{16} 16 = 2 \quad (16^2 = 256)$
14. $\log_{13} 169 = \log_{13} 13^2 = 2\log_{13} 13 = 2 \quad (13^2 = 169)$

對數定律五；$\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$

證明方法如下

$a^{x1} = r, \log_a r = x1$

$a^{x2} = s, \log_a s = x2$

$\frac{r}{s} = \frac{a^{x1}}{a^{x2}} = a^{x1-x2}$，$\log_a \frac{r}{s} = x1 - x2 = \log_a r - \log_a s$

1. $\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 1 - \log_2 4 = 0 - 2 = -2 \quad (2^{-2} = \frac{1}{4})$
2. $\log_3 \frac{1}{3} = \log_3 1 - \log_3 3 = 0 - 1 = -1 \quad (3^{-1} = \frac{1}{3})$
3. $\log_3 \frac{1}{9} = \log_3 1 - \log_3 9 = 0 - 2 = -2 \quad (3^{-2} = \frac{1}{9})$
4. $\log_5 \frac{1}{25} = \log_5 1 - \log_5 25 = 0 - 2 = -2 \quad (5^{-2} = \frac{1}{25})$
5. $\log_6 \frac{1}{36} = \log_6 1 - \log_6 36 = 0 - 2 = -2 \quad (6^{-2} = \frac{1}{36})$

對數定律六；$\boldsymbol{a^{\log_a b} = b}$

這個定律是根據對數的定義來的，如果 $a^x = b$, 則 $\mathrm{x} = \log_{\mathrm{a}} \mathrm{b}$ ，$\boldsymbol{a^{\log_a b}} = b$

1. $3^{\log_3 9} = 9\ (\log_3 9 = 2, 3^2 = 9)$
2. $2^{\log_2 16} = 16\ (\log_2 16 = 4\ , 2^4 = 16)$
3. $5^{\log_5 25} = 25\ (\log_2 25 = 2, 5^2 = 25)$
4. $4^{\log_4 16} = 16\ (\log_4 16 = 2, 4^2 = 16)$
5. $2^{\log_2 32} = 32\ (\log_2 32 = 5, 2^5 = 32)$

各位同學應該很容易如何求對數了，比方說以下這個例子

1. $\log_2 4\ \ (\log_2 4 = 2)$
2. $\log_3 9\ \ (\log_3 9 = 2)$
3. $\log_2 8\ \ (\log_2 8 = 3)$
4. $\log_3 27\ \ (\log_3 27 = 3)$
5. $\log_5 25\ \ (\log_5 25 = 2)$
6. $\log_4 16\ \ (\log_4 16 = 2)$
7. $\log_{10} 100\ \ (\log_{10} 100 = 2)$
8. $\log_{10} 1000\ \ (\log_{10} 1000 = 3)$

但是同學們一定不知道如何求$\log_2 6$ ，如果 $x = \log_2 6$ ，則 $2^x = 6$。我們發現 $2^2 = 4 < 6$，但是$2^3 = 8 > 6$ ，所以 $\mathrm{x} = 2 + a$，$2^x = 2^{2+a} = 2^2 * 2^a = 4 * 2^a = 6$ ，$2^a = \frac{6}{4} = 1.5$ ，$2^a = 1.5$

所以我們知道 0<a<1 ，以下我們可以猜一個 a，假設 a=0.5，2+a=2.5，我們要求$2^{2.5}$ 這不容易，同學們如果自己要求$2^{2.5}$可以回頭去看有關指數的講義，我們可以利用電腦的小算盤，因此知道$2^{2.5} = 5.65$，5.65 已經很靠近 6 了，所以我們可以說$\log_2 6 = 2.5$ ，這知道是一個近似值不夠精確的，但是作為一個中學生這已經很不錯了。

假設我們要求$\log_3 11$，我們發現 $3^2 = 9 < 11$，但 $3^3 = 27 > 11$

我們令$\log_3 11 = 2 + b$，$3^{2+b} = 3^2 * 3^b = 9 * 3^b = 11$，$3^b = \frac{11}{9} = 1.2$，

$0 < b < 1$

先令 $b = 0.5$ ，$3^{2+b} = 3^{2+0.5} = 3^{2.5} = 15$，太大了

令 $b = 0.2$，$3^{2+b} = 3^{2.2} = 12$，仍然太大了

令 $b = 0.1$，$3^{2+b} = 3^{2.1} = 10.64$，太小了

令 $b = 0.15$，$3^{2+b} = 3^{2+0.15} = 3^{2.15} = 10.6,$，很接近了

我們結論是 $\log_3 11 = 2.15$(近似值)

我們要求$\log_{10} 150$，$10^2 = 100 < 150$，$10^3 = 1000 > 150$

我們令$\log_{10} 150 = 2 + b$，$10^{2+b} = 10^2 * 10^b = 100 * 10^b = 150$，$10^b = \frac{150}{100} = 1.5$

$0 < b < 1$

先令$b = 0.1$，$10^{2+b} = 10^{2.1} = 125$，可以再大一點

令$b = 0.15$，$10^{2+b} = 10^{2.15} = 141$，已經很靠近 15 了

所以$\log_{10} 150 = 2.15,$ 這是我們求得近似值，如果仍用小算盤 $\log_{10} 150 = 2.17$
可見得用我們的方法，也可以求得不錯的近似值。

我們求$\log_{10} 300$

令 $\log_{10} 300 = 2 + b$

先令 $b = 0.3$，$10^{2+b} = 10^{2+0.3} = 10^{2.3} = 199$，太小了

令 $b = 0.4$，$10^{2+b} = 10^{2+0.4} = 10^{2.4} = 2.51$，已靠近

令 $b = 0.43$， $10^{2+b} = 10^{2+0.43} = 10^{2.43} = 281$，已十分靠近

結論
$\log_{10} 300$=2.45
如果仍用小算盤可以得到
$\log_{10} 300$=2.47
我們實在不錯了